



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO**



FACULTAD DE INGENIERÍA

**Apuntes de la Unidad de Aprendizaje de
Control I
Clave L41139**

Para la licenciatura de

Ingeniería en Electrónica

Del semestre

Sexto

Elaborado por

Dr. Eduardo Rodríguez Ángeles

Toluca, Edo. de México, Agosto del 2017

Índice

Presentación	2
1 Fundamentos de teoría de control	3
1.1 Conceptos básicos	3
1.2 Función de transferencia de un sistema	6
1.3 Diagramas de bloques	10
1.4 Diagramas de flujo de señales	14
2 Análisis de error y modos básicos de control	19
2.1 Error de un sistema	19
2.2 Constantes de error estáticas	20
2.3 Constantes de error dinámicas	24
2.4 Criterios de error	25
2.5 Sensibilidad de un sistema	27
2.6 Efectos de la retroalimentación en un sistema	30
2.7 Modos básicos de control	32
2.8 Sintonización de PID's mediante los métodos de Ziegler-Nichols	48
3 Método de respuesta transitoria	53
3.1 Análisis de respuesta transitoria de un sistema	53
3.2 Identificación de sistemas y diseño de controladores mediante respuesta transitoria	67
3.3 Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz	70
4 Método del lugar de las raíces	73
4.1 Obtención del lugar de las raíces de un sistema	73
4.2 Análisis del lugar de las raíces de un sistema	78
4.3 Diseño de compensadores mediante lugar de las raíces	80
Referencias	91

Presentación

El presente material responde a la necesidad de que los alumnos dispongan de apuntes de la unidad de aprendizaje de Control I. Esta asignatura es amplia y normalmente se termina con el tiempo justo al final del semestre, dejando muchas veces el deseo de haber realizado más ejemplos y ejercicios.

Esta asignatura se ubica en el sexto periodo del mapa curricular de la carrera de Ingeniería en Electrónica, está seriada previamente con la unidad de aprendizaje de Sistemas Lineales y Señales, y tiene seriación subsecuente con la unidad de aprendizaje de Control II.

Este material comprende todos los temas del curso, proporcionando la teoría correspondiente a ellos y sugiriendo algunos ejemplos. Sin embargo, no se desarrollan dichos ejemplos debido a que se pretende que sean desarrollados paso a paso en clase, para de esa forma poder resolver dudas al respecto. Al final del material se incluye una serie de referencias que pueden ser consultadas para ampliar el conocimiento de los temas.

Se sugiere que estos apuntes se les vayan facilitando a los alumnos según los vayan requiriendo y de manera previa a la clase, es decir que dispongan del apunte del tema antes de verlo en clase, para que así los alumnos tengan la oportunidad de revisar y estudiar esa información. De esta manera, el día de la clase de ese tema se iniciaría con una discusión breve de la información y el resto del tiempo de clase se le dedicaría a la resolución de ejemplos y ejercicios. De esta forma se pretende obtener un mejor aprovechamiento del tiempo clase y mejorar el aprendizaje de los alumnos.

1 Fundamentos de teoría de control

1.1 Conceptos básicos

Sistema: es un conjunto de componentes y/o elementos que interactúan entre sí para lograr un objetivo o fin común (señal de salida) a partir de algunas condiciones de inicio dadas (señal de entrada).

Clasificación y propiedades de sistemas.

La clasificación de un sistema se realiza de acuerdo a si cumple o no cierta característica o propiedad. Un listado de los diferentes tipos de sistemas, así como de la propiedad correspondiente, es el siguiente:

1. De acuerdo a su *Naturaleza física*: como su nombre lo indica, depende del tipo de fenómeno en el que se define el sistema, por ejemplo:
 - *Sistemas eléctricos*: son los de fenómenos eléctricos. Ejemplos: circuito RC, circuito RLC, etc.
 - *Sistemas mecánicos*: son los de fenómenos mecánicos. Ejemplos: sistema masa-resorte-amortiguador, sistema de péndulo invertido, etc.
 - *Sistemas térmicos*: son los de fenómenos térmicos. Ejemplos: intercambiador de calor, horno, etc.
 - *Sistemas electrónicos*: son los de fenómenos electrónicos. Ejemplos: circuito impreso, circuito contador, etc.
2. De acuerdo a su *Número de entradas y salidas*: como su nombre lo indica, depende de cuántas entradas y salidas tiene la señal:
 - *Sistemas SISO (Single Input-Single Output)*: tienen una única entrada y una única salida. Este es el caso más sencillo, por lo que de aquí en adelante las definiciones y el análisis se acotarán a este caso. Ejemplo: circuito RC donde la entrada es el voltaje de la fuente y la salida es el voltaje en el capacitor).
 - *Sistemas MIMO (Multiple Input-Multiple Output)*: tienen dos o más entradas y/o dos o más salidas. Ejemplo: un automóvil.
3. De acuerdo a su *Tipo de respuesta*: depende de cómo se está generando la asignación de valores de la salida del sistema al darle valores a la entrada del mismo.
 - *Sistemas determinísticos*: el valor de la salida en un instante de tiempo dado es asignado de forma única a partir de la entrada. Ejemplo: circuito RC.
 - *Sistemas estocásticos, probabilísticos o aleatorios*: el valor de la salida en un instante de tiempo dado es asignado en forma arbitraria a partir de la entrada. Ejemplo: bolsa de valores.
4. De acuerdo a su *Continuidad en el tiempo*: depende de si el sistema tiene un comportamiento continuo en el tiempo.
 - *Sistemas continuos (en el tiempo)*: el sistema trabaja con señales de entrada y salida continuas en el tiempo. Ejemplo: circuito RC.
 - *Sistemas discretos (en el tiempo)*: el sistema trabaja con señales de entrada y salida discretas en el tiempo. Ejemplos: computadora, circuito digital, etc.
5. De acuerdo a su *Invariancia en el tiempo*: depende de si la respuesta del sistema es independiente o no del instante de tiempo t en que se aplica la entrada. Esta propiedad también se puede conceptualizar como la independencia o invariancia temporal de los parámetros del sistema.
 - *Sistemas invariantes en el tiempo (IVT)*: la salida es independiente del instante de tiempo t en que se aplica la entrada.
 - *Sistemas variantes en el tiempo (VT)*: la salida depende del instante de tiempo t en que se aplica la entrada.
6. De acuerdo a su *Linealidad*: depende de si la salida del sistema es función lineal de la entrada, esto es si el sistema cumple el principio de superposición o linealidad.
 - *Sistemas lineales (L)*: la salida si es función lineal de la entrada (si se cumple el principio de superposición).

- *Sistemas no lineales (NL)*: la salida no es función lineal de la entrada (no se cumple el principio de superposición).
7. De acuerdo a su *Causalidad*: depende de si la respuesta del sistema en un instante de tiempo t_o depende (es resultado o efecto) de la entrada en tiempos $t \leq t_o$, es decir si la entrada y la salida cumplen una relación causa-efecto en el tiempo.
 - *Sistemas causales, no anticipativos o predictivos*: la salida en un instante de tiempo t_o depende únicamente de valores de la entrada en instantes $t \leq t_o$ (la entrada y la salida si cumplen una relación causa-efecto en el tiempo).
 - *Sistemas no causales, anticipativos o no predictivos*: la salida en un instante de tiempo t_o depende de al menos un valor de la entrada en un instante $t > t_o$ (la entrada y la salida no cumplen una relación causa-efecto en el tiempo).
 8. De acuerdo a su *Capacidad de memoria*: depende de si la respuesta del sistema en un instante t_o depende únicamente del valor de la entrada en ese mismo instante t_o , es decir si la salida es capaz de "recordar" lo que pasa con la entrada.
 - *Sistemas dinámicos o con memoria*: la salida en un instante t_o depende de al menos un valor de la entrada en un instante $t \neq t_o$ (la salida si es capaz de "recordar" lo que pasa con la entrada).
 - *Sistemas instantáneos o sin memoria o estático*: la salida en un instante t_o depende únicamente del valor de la entrada en ese mismo instante t_o (la salida no es capaz de "recordar" lo que pasa con la entrada).
 9. De acuerdo a su *Invertibilidad*: depende de si es posible recuperar (determinar o conocer) la entrada a partir de una salida dada. Si esto es posible, el sistema que lo hace se llama sistema inverso del sistema original. Esta propiedad también se puede conceptualizar como la capacidad que tiene el sistema para producir diferentes salidas a diferentes entradas.
 - *Sistemas invertibles*: si es posible recuperar la entrada a partir de una salida dada.
 - *Sistemas no invertibles*: no es posible recuperar la entrada a partir de una salida dada.
 10. De acuerdo a su *Estabilidad*: depende de si la salida del sistema no diverge cuando su entrada es "pequeña" (acotada).
 - *Sistemas estables*: la salida no diverge para toda entrada acotada.
 - *Sistemas no estables o inestables*: la salida si diverge para al menos una entrada acotada.
 11. De acuerdo a su *Concentración de parámetros*: depende de si los parámetros del sistema son concentrados o distribuidos.
 - *Sistemas con parámetros concentrados*: los parámetros del sistema se consideran concentrados en un punto del sistema. Ejemplos: circuito RC, sistema masa-resorte-amortiguador.
 - *Sistemas con parámetros distribuidos*: los parámetros del sistema se consideran que están distribuidos uniformemente a lo largo del sistema. Ejemplos: líneas de distribución de energía eléctrica, intercambiador de calor.

En este curso y en los subsecuentes de control se utilizarán los sistemas SISO determinísticos, con parámetros concentrados, dinámicos, continuos, causales, lineales e invariantes en el tiempo (para abreviar se les llamará sistemas LIVT), debido a que son los más importantes y son la base para entender otros tipos de sistemas, además de que son los más sencillos matemáticamente hablando.

El modelo matemático de un sistema depende de las propiedades que tenga éste, por ejemplo: un sistema IVT tendrá coeficientes constantes; un sistema VT tendrá al menos un coeficiente variante en el tiempo; un sistema lineal no tendrá términos independientes de la entrada y de la salida; un sistema no lineal tendrá al menos un término independiente de la entrada y de la salida; un sistema dinámico continuo será una ecuación diferencial ordinaria; un sistema dinámico discreto será una ecuación en diferencias; un sistema continuo con parámetros constantes será una ecuación diferencial ordinaria; un sistema continuo con parámetros distribuidos será una ecuación diferencial parcial; etc.

Conceptos básicos de sistemas de control.

Control o controlar (definición básica): es la acción que se efectúa sobre un sistema para lograr que éste tenga el resultado (comportamiento) deseado. Generalmente, para lograr este cambio de comportamiento de un sistema se requiere conectarle otro sistema.

Sistema de control o controlador: es el sistema que se conecta a otro sistema para hacer que éste cambie su comportamiento a uno deseado.

Sistema a controlar: es el sistema que se desea que cambie su comportamiento a uno deseado. En otras palabras, es la planta y/o proceso a controlar.

Proceso: es la operación o desarrollo de una serie de cambios continuos y progresivos que conducen a un resultado o propósito determinado. En otras palabras, es la operación a controlar.

Planta: es el conjunto físico que efectúa una operación determinada. En otras palabras, es el objeto físico a controlar.

Es muy común encontrar textos donde se le llama sistema de control no únicamente al controlador, sino a la unión del controlador y del sistema a controlar. De forma similar, se encuentran textos que usan indistintamente planta, proceso o sistema para referirse al sistema a controlar. En este curso se hará uso de este lenguaje.

Además, es importante definir los siguientes términos:

Variable controlada o variable a controlar, $c(t)$: es la señal (valor o condición) de un sistema que se mide y se desea modificar a un valor deseado (controlar). Generalmente es la salida del sistema a controlar.

(Señal de) referencia, $r(t)$: es el valor (deseado) que se quiere tome la variable controlada.

Variable manipulada o de control, $u(t)$: es la señal (valor o condición) de un sistema que el controlador modifica directamente para afectar el valor de la variable controlada.

Error (del sistema), $e(t)$: es la diferencia que existe entre la referencia y el valor verdadero de la variable controlada del sistema.

Perturbación, $d(t)$: es una señal (valor o condición) que afecta negativamente el comportamiento de un sistema. Las perturbaciones pueden ser: internas (cuando se generan dentro del sistema) o externas (cuando se generan fuera del sistema), predecibles (cuando se puede prever con anticipación su existencia y valor, por lo que pueden ser compensadas dentro del sistema) o impredecibles (cuando no se puede prever con anticipación su existencia y valor, por lo que se deben compensar con control retroalimentado).

La siguiente figura muestra los elementos de un sistema de control:

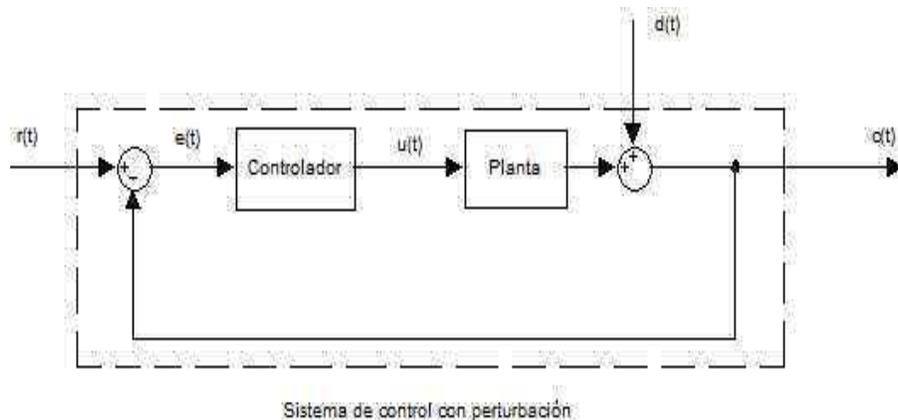


Fig.1: Elementos básicos de un sistema de control.

Control o controlar (definición técnica): es la acción de medir el valor de la variable controlada de un sistema, determinar el error del mismo (comparación de la referencia con la variable controlada medida), decidir cuál será el nuevo valor de la variable manipulada a partir del error existente, y aplicar el nuevo valor de la variable manipulada al sistema para lograr que la variable controlada se acerque lo más posible al valor deseado. En otras palabras, es la acción que se utiliza para disminuir, compensar o minimizar el error de un sistema.

Ley, acción o modo de control: es la forma en que se decide el valor de la variable manipulada a partir del error del sistema.

Control automático: es el control que se efectúa sin que intervenga el hombre, es decir el sistema de control por sí sólo toma las decisiones y acciones necesarias para reducir el error del sistema.

Configuraciones básicas de un sistema de control.

Existen dos configuraciones básicas de un sistema de control dependiendo de cómo se conectan el controlador y la planta:

Sistema de control de lazo abierto o de feedforward: el controlador se conecta en serie a la planta de tal forma que no hay "retorno" de la salida hacia la entrada. Este tipo de control tiene un funcionamiento que depende del conocimiento preciso de la planta, de la calibración del sistema y de la selección cuidadosa de sus componentes (que respondan con exactitud), además es sencillo, barato, consume poca energía y fácil de construir, pero las perturbaciones externas le afectan mucho. La siguiente figura muestra un sistema de control de lazo abierto:

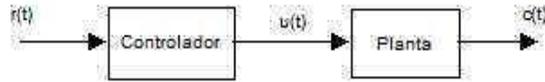


Fig.2: Sistema de control de lazo abierto.

Sistema de control de lazo cerrado, retroalimentado o de feedback: el controlador se conecta en retroalimentación con la planta de tal forma que la salida "retorna" a la entrada. Este tipo de control es más complicado, más costoso, consume más energía y es más difícil de construir que un control de lazo abierto, pero las perturbaciones externas le afectan menos. Además, los componentes usados en el sistema pueden ser menos exactos y el conocimiento de la planta puede ser menos preciso. La siguiente figura muestra un sistema de control de lazo cerrado:

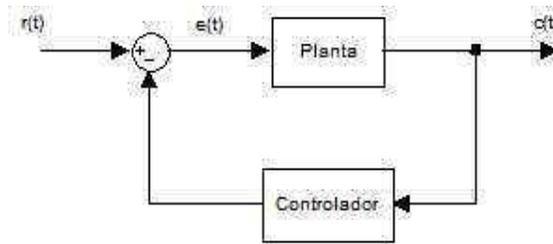


Fig.3: Sistema de control de lazo cerrado.

Por simplicidad, en teoría de control únicamente se consideran la planta y el controlador, es decir no se consideran los elementos auxiliares (amplificadores, sensores, transductores, actuadores, transmisores, receptores, DAC, ADC, etc.) que se utilizan para aplicar, medir y/o adecuar las señales de un sistema, ya que estos elementos al ser bien seleccionados y calibrados no afectan de manera significativa al comportamiento del sistema. Este tipo de elementos se estudian en los cursos de Instrumentación, Proyectos de Instrumentación y Control de Procesos Industriales.

Básicamente, los problemas en control se pueden agrupar en dos grupos: seguimiento de trayectoria o tracking y rechazo de perturbaciones. Implícitamente van incluidos los problemas de estabilización e identificación del sistema.

1.2 Función de transferencia de un sistema

Representación de un sistema LIVT.

Como ya se mencionó en el tema anterior, en los cursos de control se considerarán exclusivamente sistemas SISO LIVT determinísticos, con parámetros concentrados, dinámicos, continuos, causales. Para esta clase de sistemas se tienen las siguientes posibles representaciones posibles :

1. *Representación matemática:* es la función matemática que describe el comportamiento (dinámica) del sistema. En esta categoría se encuentran:

- Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO): $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n$, donde $y(t)$ es la salida del sistema y $x(t)$ es la entrada, junto con sus derivadas correspondientes $y^{(i)}(t)$ y $x^{(i)}(t)$.
- Función de Respuesta al Impulso (FRI): $g(t) = \mathbf{H}[\delta(t)]$.
- Función de Respuesta a la Frecuencia (FRF): $G(j\omega) = \mathcal{F}[g(t)] = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$.

- Función de Transferencia: $G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \frac{Y(s)}{X(s)}$.
- Ecuación de Espacio de Estado: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $m \leq n$, donde $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el vector de salida del sistema, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de estado del sistema y $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ es el vector de entrada del sistema. Este modelo se verá a detalle en el curso de Control Avanzado.
- Matriz de Transferencia: $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$, donde $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Este modelo se verá a detalle en el curso de Control Avanzado.

2. *Representación gráfica*: es el diagrama gráfico que describe el comportamiento (dinámica) del sistema. En esta categoría se encuentran:

- Diagrama de bloques: esta representación se verá a detalle en el tema 1.3 de este curso.
- Diagrama de flujo de señales: esta representación se verá a detalle en el tema 1.4 de este curso.
- Diagramas de respuesta en frecuencia: estas representaciones se verán a detalle en el curso de Control II.
 - (a) Diagramas de Bode
 - (b) Diagrama de Nyquist
 - (c) Diagrama de Black-Nichols
- Respuesta a escalón unitario: esta representación se verá a detalle en la tercera unidad de este curso.
- Lugar de las raíces: esta representación se verá a detalle en la cuarta unidad de este curso.

Clasificación del modelo matemático de un sistema.

El modelo matemático de un sistema se puede clasificar:

1. De acuerdo a su *dominio de definición*:

- *Modelo en el dominio del tiempo o temporal*: como su nombre lo indica va a ser una función en el tiempo. En el caso de sistemas LIVT se tienen por ejemplo: EDO, FRI.
- *Modelo en el dominio de la frecuencia o frecuencial*: como su nombre lo indica va a ser una función en la frecuencia. En el caso de sistemas LIVT se tienen por ejemplo: FRF, función de transferencia.

2. De acuerdo a su *nivel de conocimiento del sistema*:

- *Modelo externo*: como su nombre lo indica sólo proporciona información al exterior del sistema, esto es solo de la entrada y salida del sistema. En el caso de sistemas LIVT se tienen por ejemplo: EDO, FRI, FRF, función de transferencia.
- *Modelo interno*: como su nombre lo indica si proporciona información de lo que sucede dentro del sistema además de la información externa. En el caso de sistemas LIVT se tiene por ejemplo: ecuación de espacio de estado.

Una consideración importante cuando se modela un sistema es la condición de reposo inicial del mismo, que implica que todos los elementos del sistema que almacenan energía tengan una energía almacenada inicial de valor 0 y que, en la EDO de orden n correspondiente, la variable independiente y todas sus derivadas sean 0 antes del instante t_0 en que comienza a trabajar el sistema.

Otro aspecto importante cuando se da solución a una EDO son las llamadas condiciones auxiliares o iniciales del sistema, no se confunda con la condición de reposo, que son los valores de la salida y sus derivadas en el instante t_0 en que comienza a trabajar el sistema.

Además, es importante cuidar la consistencia dimensional (utilizar unidades de un mismo sistema de unidades, preferentemente usar las unidades del Sistema Internacional de Unidades) y la consistencia de magnitudes (utilizar los valores numéricos en el mismo rango de magnitud) de los parámetros de un sistema cuando se realiza el modelado del mismo.

Dado un sistema LIVT, se dice que el sistema es causal LIVT cuando la salida del sistema en reposo (con entrada cero y condiciones iniciales cero) es cero. Se dice que el sistema es incremental lineal cuando las condiciones iniciales

del mismo no son cero, debido a que la salida del sistema será la suma de un componente debido a la entrada y otro componente debido a esas condiciones iniciales. Se dice que es lineal si las condiciones iniciales son cero.

Ecuación diferencial ordinaria de un sistema LIVT.

Como se sabe, el primer modelo que se obtiene de un sistema LIVT es la EDO, misma que se obtiene aplicando el siguiente procedimiento:

1. Determinar el diagrama físico del sistema.
2. Determinar la fórmula o ecuación básica de cada elemento físico del sistema y la de la relación o interconexión de los elementos en el sistema.
3. Obtener una sola ecuación que contenga únicamente las variables de la entrada y de la salida, partiendo de las ecuaciones anteriores.
4. Dar la forma de una EDO causal, lineal e invariante en el tiempo a la ecuación anterior.

Función de transferencia de un sistema LIVT.

Función de transferencia (definición básica), $G(s)$: es un modelo matemático frecuencial, en el dominio de Laplace, de un sistema LIVT que describe el comportamiento (respuesta o salida) del sistema con respecto a la entrada.

Para definir matemáticamente la función de transferencia se considerará un sistema LIVT $y(t) = \mathbf{G}[x(t)]$ con entrada $x(t)$ y con c.i. cero. Entonces, del curso de Sistemas Lineales y Señales se sabe que la salida del sistema está dada por la convolución de la FRI y de la entrada, esto es $y(t) = g(t) * x(t)$. Luego, al aplicar la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene $Y(s) = G(s)X(s)$ (ecuación de la salida en Laplace), donde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Además, de la ecuación de la salida en Laplace se obtiene que $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

Función de transferencia (definición matemática): la función de transferencia de un sistema es la transformada de Laplace de la FRI del sistema, esto es $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-st} dt$.

Además, al comparar la definición anterior de la función de transferencia con la de la función de respuesta a la frecuencia, que es $g(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$, se concluye que ambas funciones están relacionadas por el cambio de variable $s = j\omega$.

Función de transferencia (definición matemática alterna): la función de transferencia es la relación en el dominio de Laplace de la salida entre la entrada con c.i. cero, esto es $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

Obtención directa de la función de transferencia a partir de la EDO del sistema LIVT.

Por otro lado, dado que el sistema es LIVT, se tiene que el sistema se puede representar mediante una EDO LIVT, esto es $\sum_{i=0}^n [a_i y^{(i)}(t)] = \sum_{i=0}^m [b_i x^{(i)}(t)]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n$. Entonces, al aplicar la transformada de Laplace con

c.i. cero a esta ecuación se obtiene $\sum_{i=0}^n [a_i s^i Y(s)] = \sum_{i=0}^m [b_i s^i X(s)]$, que se puede escribir como $\left[\sum_{i=0}^n a_i s^i \right] Y(s) =$

$$\left[\sum_{i=0}^m b_i s^i \right] X(s), \text{ por lo que } G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad m \leq n.$$

Cabe mencionar que si se tiene la función de transferencia en su forma polinomial, entonces se puede aplicar el procedimiento inverso al anterior para obtener la EDO del sistema.

Propiedades de la función de transferencia.

De la forma matemática de la función de transferencia, obtenida previamente, se desprenden las siguientes propiedades de la función de transferencia:

1. Es una función compleja en la variable (de Laplace) "s".

2. Es una función racional de polinomios, es de orden n y es propia ($m \leq n$).
3. Es única para un sistema específico.
4. Es un modelo matemático externo.
5. Es una propiedad del sistema independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada y salida que se tengan, es decir que no cambia si la entrada y salida cambian.
6. No incluye información acerca de la estructura física del sistema, sólo contiene información o descripción completa de las características dinámicas del sistema.
7. Si es conocida, entonces permite estudiar la salida a diferentes entradas para comprender la naturaleza del sistema.
8. Si es desconocida, entonces por métodos experimentales introduciendo una entrada conocida y estudiando la salida producida se puede determinar la función de transferencia del sistema. Esto se conoce como identificación de sistemas.

Además, por ser una función racional compleja, se tienen los siguientes elementos asociados a la función de transferencia:

Ceros de la FT o del sistema: son los valores de s tales que hacen cero a la FT, esto es hacen $G(s) = 0$. Por lo tanto, son las raíces del polinomio del numerador de la FT.

Polos de la FT o del sistema: son los valores de s tales que hacen infinito a la FT, esto es hacen $G(s) = \infty$. Por lo tanto, son las raíces del polinomio del denominador de la FT.

Polinomio característico de la FT o del sistema, $p(s)$: es el polinomio del denominador de la FT y describe las principales características del sistema.

Ecuación característica de la FT o del sistema: es el polinomio característico de la FT igualado a cero, esto es $p(s) = 0$.

Ejemplos: Obtener la EDO y la función de transferencia de los siguientes sistemas:

- a) Circuito RC serie con salida en el capacitor.
- b) Circuito CR serie con salida en el resistor.
- c) Circuito RLC serie con salida en el capacitor.
- d) Sistema masa-resorte-amortiguador.

Formas de escribir una función de transferencia.

En control a veces es conveniente escribir una función de transferencia de diferentes maneras para facilitar el análisis, teniendo las siguientes formas de escribir una función de transferencia $G(s)$:

- *Forma polinomial de $G(s)$:* es la forma de cociente de polinomios: $G(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$,

$$b_m \neq 0, m \leq n.$$

- *Forma de ceros y polos de $G(s)$:* es la forma explícita de los polos, ceros y la ganancia del sistema: $G(s) = \frac{k \prod_{i=0}^m (s + z_i)}{\prod_{i=0}^n (s + p_i)}$, donde $-z_i$ son los ceros del sistema, $-p_i$ son los polos del sistema, y $k = \frac{b_m}{a_n}$ es la ganancia del sistema.

- *Forma de constantes de tiempo de $G(s)$:* es la forma explícita de las constantes de tiempo del sistema: $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{\prod_{i=0}^n (T_i s + 1)}$, donde T_i son las constantes de tiempo del sistema, y $k_o = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$ es la ganancia de la trayectoria directa o de baja frecuencia o de dc del sistema.

Funciones de transferencia en un sistema de control.

Para definir las diferentes funciones de transferencia utilizadas en control se considerará, como ejemplo, el siguiente sistema:

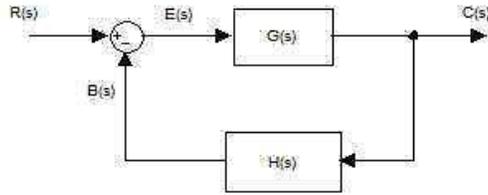


Fig.4: Sistema de control retroalimentado.

Ahora si, en el análisis y diseño de un sistema de control se definen las siguientes funciones de transferencia:

Función de transferencia de lazo abierto, $G_O(s)$: es la función de transferencia que se define cuando en el sistema se abre el lazo de control, esto es entre la entrada $R(s)$ del sistema y la señal de retroalimentación $B(s)$ del sistema.

En el sistema mostrado en la figura anterior se tiene que $G_O(s) = \frac{B(s)}{R(s)} = G(s)H(s)$.

Función de transferencia de la trayectoria directa, $G_D(s)$: es la función de transferencia que se define directamente (en línea recta) entre la entrada $R(s)$ y la salida $C(s)$ del sistema sin pasar por lazos de control. En el sistema mostrado en la figura anterior se tiene que $G_D(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$.

Función de transferencia de lazo cerrado, $G_L(s)$: es la función de transferencia que se define cuando el lazo de control está cerrado, esto es entre la entrada $R(s)$ y la salida $C(s)$ del sistema con el lazo de control cerrado. En el sistema mostrado en la figura anterior se tiene que $G_L(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$.

1.3 Diagramas de bloques

Diagrama de bloques: es una representación gráfica de las funciones que lleva a cabo cada componente de un sistema, así como muestra el flujo de señales del mismo.

Elementos de un diagrama de bloques.

Un diagrama de bloques tiene los siguientes componentes:

- *Bloque*: es un símbolo que representa la operación matemática que realiza un componente sobre su señal de entrada para producir su salida. Gráficamente es un rectángulo y dentro de él se indica la función matemática del componente (si se está trabajando en Laplace es la función de transferencia del componente, si se está trabajando en el tiempo es la EDO o función similar). La siguiente figura muestra un elemento bloque:



Fig.5: Elemento bloque.

- *Flecha*: es un símbolo que representa la dirección de flujo de una señal. Gráficamente es una flecha y sobre ella se indica la señal de que se trate, ya sea en el tiempo o en Laplace. La siguiente figura muestra un elemento flecha:



Fig.6: Elemento flecha.

- *Punto suma*: es un símbolo que representa la suma algebraica de dos o más señales que entran a él, produciendo una salida que es dicha suma de señales. Gráficamente es un círculo con la indicación de los signos de las señales con los que se realizará la suma. La siguiente figura muestra un elemento punto suma:

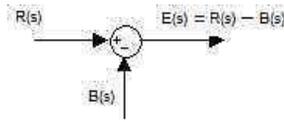


Fig.7: Elemento punto suma.

- *Punto de ramificación o de bifurcación*: es un símbolo que representa la derivación de una señal que entra a él, produciendo dos o más señales de salida exactamente iguales a la señal de entrada. Gráficamente es un punto. La siguiente figura muestra un elemento punto de ramificación:

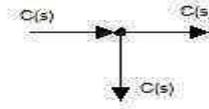


Fig.8: Elemento punto de ramificación.

Propiedades de un diagrama de bloques.

Un diagrama de bloques tiene las siguientes propiedades:

1. Es único para un conjunto de ecuaciones específico que represente a un sistema. Si las ecuaciones se escriben en forma diferente se obtiene un diagrama de bloques diferente, pero que representa al mismo sistema.
2. Permite apreciar fácilmente las operaciones funcionales del sistema. En Laplace, la señal de salida de un bloque es igual al producto de la función de transferencia del bloque y de su señal de entrada, como se muestra en la siguiente figura:

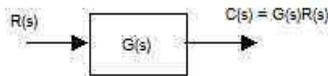


Fig.9: Relación fundamental de un bloque y sus señales.

3. Contiene información del comportamiento dinámico del sistema, pero no contiene información de su construcción física.
4. No se muestra la fuente de energía del sistema.
5. En un bloque, las dimensiones (unidades) de la señal de salida es igual al producto de las dimensiones de la señal de entrada y de la función de transferencia del bloque.
6. En un punto suma todas las señales, tanto entrantes como saliente, tienen las mismas dimensiones.

Obtención del diagrama de bloques por componentes de un sistema.

Para obtener el diagrama de bloques por componentes de un sistema se siguen los pasos siguientes:

1. Determinar el diagrama físico del sistema.
2. Determinar la fórmula o ecuación básica (operación funcional) de cada componente físico del sistema y la de la relación o interconexión de los componentes en el sistema.
3. Dibujar, usando la simbología de diagrama de bloques, todas las ecuaciones anteriores, e interconectarlas entre sí de tal forma que muestren la conversión de funciones y el flujo de señales que transforman la entrada del sistema en la salida.

Para facilitar la lectura de un diagrama de bloques siempre se debe dibujar en un sentido de izquierda a derecha (entrada a salida) y que tenga el menor número posible de entrecruzamientos.

Ejemplos: Obtener el diagrama de bloques por componentes de todos los sistemas de los ejemplos del tema anterior.

Reducción o simplificación de un diagrama de bloques.

La reducción o simplificación de un diagrama de bloques consiste en obtener la función de transferencia de lazo cerrado del sistema. Esta reducción se realiza utilizando unas tablas que contienen las reglas de simplificación de diagramas de bloques. La siguiente figura muestra una tabla de reglas de reducción de diagramas de bloques:

	Diagramas de bloque originales	Diagramas de bloque equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		

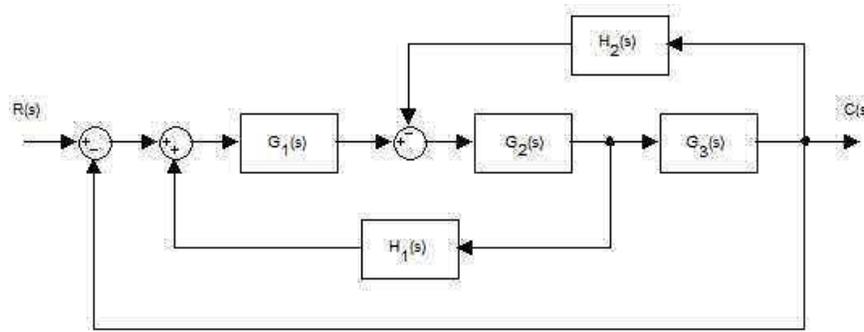
Fig.10: Reglas de diagramas de bloques.

Las reglas de simplificación de diagramas de bloques son relaciones gráficas que se utilizan en forma análoga a unas tablas de integrales, y estas reglas son obtenidas en base a la aplicación de reglas algebraicas de la relación entre las señales y bloques de un sistema. De lo anterior, se deduce que un diagrama de bloques se puede reducir algebraicamente (a través de las ecuaciones o relaciones algebraicas de sus elementos) y gráficamente (a través de las tablas de simplificación), pero al utilizar la simplificación gráfica el tiempo de solución es menor.

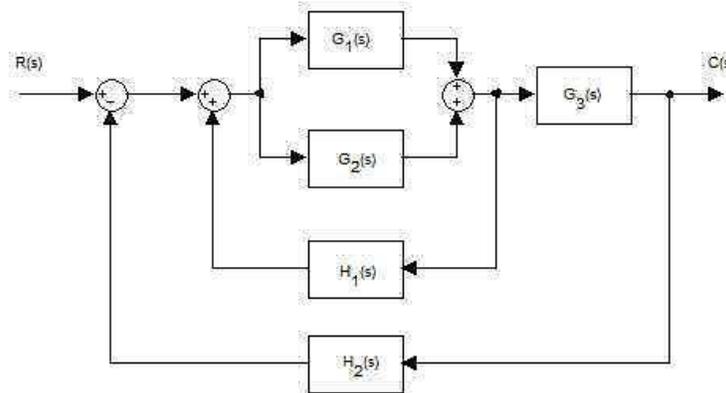
Al ir simplificando un diagrama de bloques es conveniente indicar entre un paso y otro que regla se está utilizando, y además entre un paso y otro se cumple que el valor del producto de las funciones de transferencia en la trayectoria directa se mantiene y también se mantiene el valor del producto de las funciones de transferencia en un lazo.

Ejemplos: Obtener la reducción gráfica de los siguientes sistemas en diagrama de bloques:

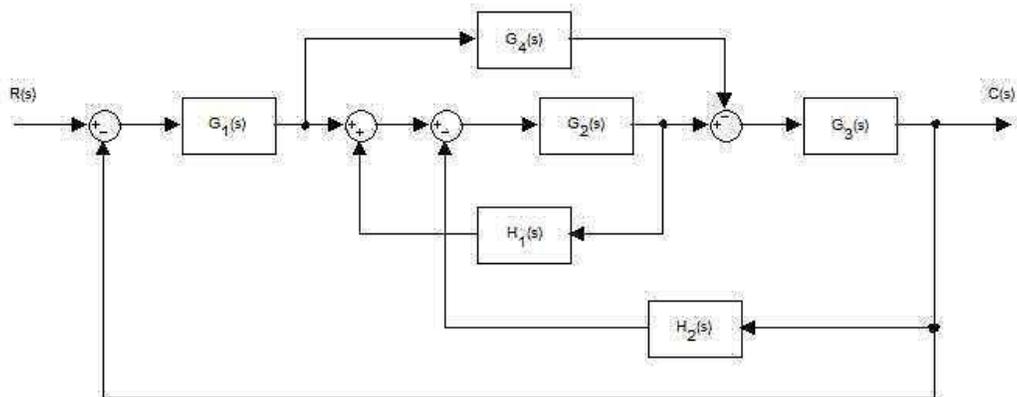
a)



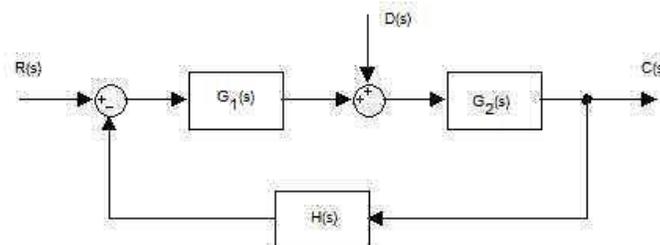
b)



c)



d)



1.4 Diagramas de flujo de señales

Diagrama o grafo de flujo de señales: es una representación gráfica de las señales que se presentan en un sistema, mostrando la relación y flujo entre ellas.

Elementos de un diagrama de flujo de señales.

Un diagrama de flujo de señales tiene los siguientes componentes:

- *Nodo:* es un símbolo que representa una señal existente en un sistema. Gráficamente es un punto y sobre él se indica la señal de que se trate, ya sea en el tiempo o en Laplace. La siguiente figura muestra un elemento nodo:



Fig.15: Elemento nodo.

- *Rama:* es un símbolo que representa la unión o flujo entre dos nodos que va en una sola dirección. Gráficamente es un segmento lineal dirigido (en medio tiene una flecha que indica la dirección del flujo). La siguiente figura muestra un elemento rama:

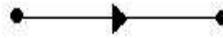


Fig.16: Elemento rama.

- *Transmitancia:* es un valor que representa la ganancia o relación entre dos nodos. Este valor se indica sobre la rama que une dos nodos y consiste en la función matemática que relaciona los dos nodos (si se está trabajando en Laplace es la función de transferencia, si se está trabajando en el tiempo es la EDO o función similar). La siguiente figura muestra un elemento transmitancia:

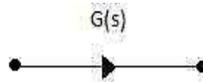


Fig.17: Elemento transmitancia.

- *Nodo de entrada o nodo fuente:* es aquel nodo que sólo tiene ramas salientes de él, y corresponde a la señal de entrada del sistema.
- *Nodo de salida o nodo sumidero:* es aquel nodo que sólo tiene ramas entrantes a él, y corresponde a la señal de salida del sistema.
- *Nodo mixto:* es aquel nodo que tiene tanto ramas entrantes a él como ramas salientes de él, y corresponde a una señal "interna" del sistema.
- *Camino:* es un recorrido que une dos nodos siguiendo las ramas que los conectan en el sentido de las flechas.
- *Camino abierto:* es aquel camino que no pasa por ningún nodo más de una vez.
- *Lazo o camino cerrado:* es aquel camino cuyo nodo de inicio coincide con el nodo final y que no pasa por cualquier otro nodo más de una vez.
- *Camino directo o trayectoria directa:* es aquel camino abierto que une el nodo de entrada con el nodo de salida del sistema.
- *Ganancia o transmitancia de un camino o de un lazo:* es igual al valor del producto de las transmitancias de las ramas que recorre el camino o lazo.

- *Lazos que no se tocan o camino y lazo que no se tocan*: es cuando los lazos, o el camino y lazo, no poseen ningún nodo en común, esto es que no coinciden en ningún nodo.

En el siguiente diagrama de flujo de señales se muestra el resto de los componentes definidos anteriormente:

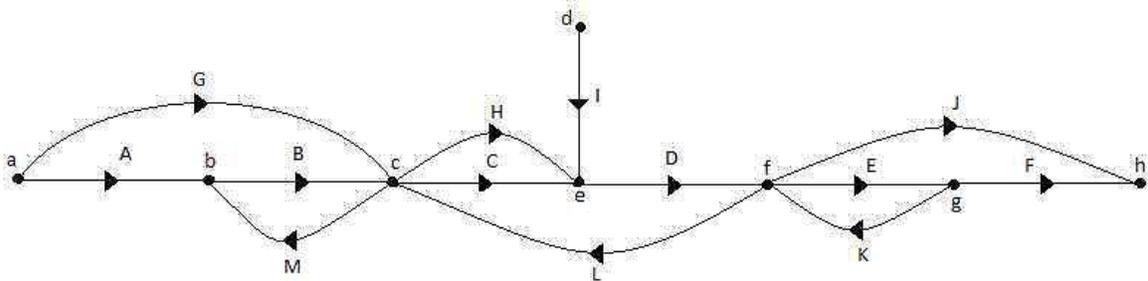


Fig.18: Elementos de un diagrama de flujo de señales.

Propiedades de un diagrama de flujo de señales.

Un diagrama de flujo de señales tiene las siguientes propiedades:

1. Es único para un conjunto de ecuaciones específico que represente a un sistema. Si las ecuaciones se escriben en forma diferente se obtiene un diagrama de flujo de señales diferente, pero que representa al mismo sistema.
2. Una rama indica la dependencia funcional de una señal con respecto a otra, si se está en Laplace la señal del nodo final de la rama es igual al producto de la transmitancia de la rama por la señal del nodo de inicio de la rama. Una señal pasa sólo a través de la dirección especificada por la flecha de la rama. Esto se ilustra en la siguiente figura:



Fig.19: Relación fundamental de una rama y sus nodos.

3. Un nodo mixto realiza la suma algebraica de todas las señales de las ramas entrantes a él, y envía este valor suma a todas las ramas salientes de él.

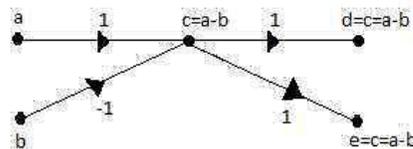


Fig.20: Función de un nodo mixto.

4. Un nodo mixto se puede tratar como nodo de salida al agregarle una rama saliente de transmitancia unitaria sin modificar el comportamiento del sistema, ya que esto es como medir el valor de una señal interna del sistema. Esto no se puede hacer para considerar un nodo mixto como si fuera nodo fuente, ya que esto sí alteraría el comportamiento del sistema debido a que se le agregaría una entrada que antes no existía.
5. Permite apreciar fácilmente el flujo de señales del sistema.
6. Contiene información del comportamiento dinámico del sistema, pero no contiene información de su construcción física.
7. No se muestra la fuente de energía del sistema.
8. Las dimensiones (unidades) de un nodo (señal) es igual al producto de las dimensiones de la transmitancia de la rama entrante a él y del nodo (señal) en que comienza dicha rama.

Obtención del diagrama de flujo de señales por componentes de un sistema.

Para obtener el diagrama de flujo de señales por componentes de un sistema se siguen los pasos siguientes:

1. Determinar el diagrama físico del sistema.
2. Determinar la fórmula o ecuación básica (operación funcional) de cada componente físico del sistema y la de la relación o interconexión de los componentes en el sistema.
3. Dibujar, usando la simbología de diagrama de flujo de señales, todas las ecuaciones anteriores, e interconectarlas entre sí de tal forma que muestren el flujo de señales y la conversión de funciones que transforman la entrada del sistema en la salida.

Para facilitar la lectura de un diagrama de flujo de señales siempre se debe dibujar en un sentido de izquierda a derecha (nodo de entrada a nodo de salida) y que tenga el menor número posible de entrecruzamientos.

Ejemplos: Obtener el diagrama de flujo de señales por componentes de todos los sistemas de los ejemplos del tema 1.2.

Reducción o simplificación de un diagrama de flujo de señales.

La reducción o simplificación de un diagrama de flujo de señales consiste en obtener la función de transferencia o transmitancia de lazo cerrado del sistema. De forma similar a la reducción de diagramas de bloques, se utilizan unas tablas que contienen las reglas de simplificación de diagramas de flujo de señales. Sin embargo, estas reglas, a diferencia de las de diagramas de bloques, sólo son cinco reglas gráficas que están basadas en las ecuaciones o relaciones entre las señales del sistema, y se usan de manera similar a las de las tablas de reducción de diagramas de bloques. En la siguiente figura se muestra la tabla de las reglas de reducción de diagramas de flujo:

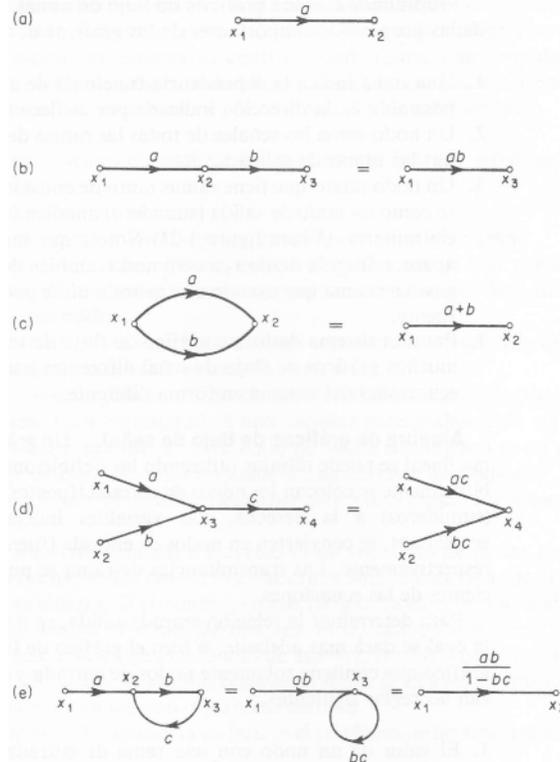


Fig.21: Reglas de diagramas de flujo.

De lo anterior, se deduce que un diagrama de flujo de señales se puede reducir algebraicamente (a través de las ecuaciones o relaciones algebraicas de sus elementos) y gráficamente (a través de las tablas de simplificación), pero la simplificación algebraica toma mucho tiempo y la simplificación gráfica no es fácil de realizar, a diferencia de la simplificación gráfica de diagramas de bloques.

Al ir simplificando un diagrama de flujo de señales es conveniente indicar entre un paso y otro que regla se está utilizando, y además se cumple entre un paso y otro que el valor del producto de las transmitancias en la trayectoria directa se mantiene al igual que el valor del producto de las transmitancias en un lazo.

Ejemplos: Obtener la reducción gráfica de los diagramas de flujo de señales obtenidos en la serie de ejemplos anterior.

Relación entre diagrama de bloques y diagrama de flujo de señales.

Al comparar las reglas de simplificación de un diagrama de flujo de señales con su contraparte en las reglas de simplificación de un diagrama de bloques se observa que son similares, siendo el único cambio la simbología utilizada. Por ello es posible transformar un diagrama de bloques en su equivalente diagrama de flujo de señales, y viceversa, fácil y directamente sin necesidad de ecuaciones. En la siguiente figura se ilustra la relación entre los diagramas de bloques y los diagramas de flujo:

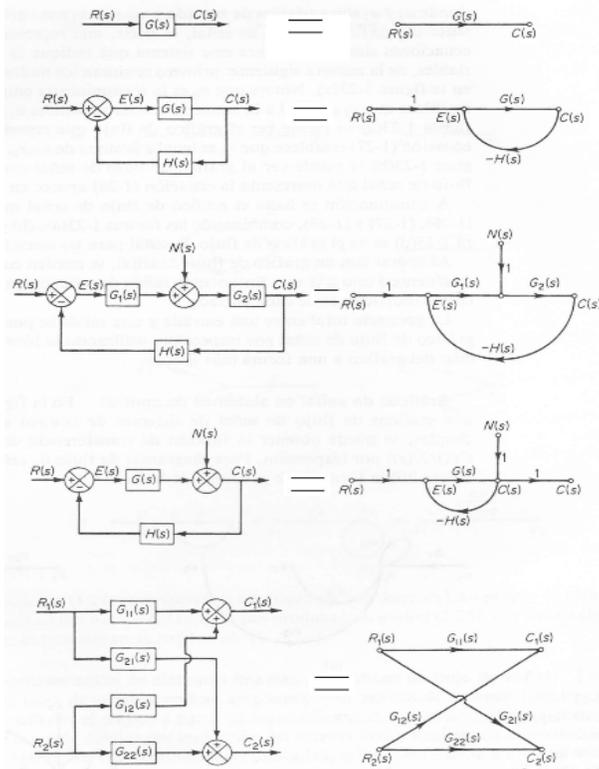


Fig.22: Relación entre diagramas de bloques y diagramas de flujo.

Ejemplos: Obtener el diagrama de bloques por componentes equivalente de todos los diagramas de flujo de señales por componentes obtenidos anteriormente.

Ejemplos: Obtener el diagrama de flujo de señales por componentes equivalente de todos los diagramas de bloques por componentes obtenidos en el tema 1.3.

De lo anterior, se deduce que también es posible simplificar un diagrama de flujo de señales transformándolo a su equivalente diagrama de bloques y simplificándolo como diagrama de bloques. Obviamente, lo contrario también es posible: simplificar un diagrama de bloques transformándolo a diagrama de flujo de señales y simplificándolo como tal.

Simplificación de un diagrama de flujo de señales por fórmula de Mason.

Hasta ahora, los métodos vistos para simplificar un diagrama de flujo de señales son poco prácticos, por lo que hace falta un método realmente funcional. La fórmula de ganancia de Mason es un método semigráfico que permite obtener la transmitancia de lazo cerrado de un diagrama de flujo de señales fácil y rápidamente. El procedimiento a seguir es el siguiente:

1. Determinar la ganancia o transmitancia de todos los caminos directos que haya en el diagrama de flujo de señales. Estos valores se denotan como P_k , donde k indica el k -ésimo camino directo.
2. Determinar la ganancia de todos los lazos que haya en el diagrama de flujo de señales. Estos valores se denotan como L_a , donde a indica el a -ésimo lazo.

3. Determinar la ganancia de todos los pares de lazos que no se toquen en el diagrama de flujo de señales. Estos valores se denotan como $L_b L_c$, donde el b -ésimo lazo no se toca con el c -ésimo lazo.
4. De forma similar al paso anterior, determinar la ganancia de todas las tercias, cuádrupletas,... de lazos que no se toquen en el diagrama de flujo de señales.
5. Obtener el determinante del diagrama de flujo de señales utilizando la fórmula:
$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$
6. Obtener el cofactor de todos los caminos directos que haya en el diagrama de flujo de señales utilizando la fórmula: $\Delta_k = \Delta$ sin todos los lazos, pares, tercias,... de lazos que toquen al k -ésimo camino directo.
7. Obtener la transmitancia de lazo cerrado del sistema aplicando la fórmula de Mason:
$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k.$$

Ejemplos: Obtener la reducción por fórmula de Mason de todos los diagramas de flujo de señales obtenidos en este tema.

2 Análisis de error y modos básicos de control

2.1 Error de un sistema

Para las siguientes definiciones y para todo el análisis que se verá en esta unidad se considerará un sistema de control con retroalimentación unitaria como el que se muestra en la siguiente figura:

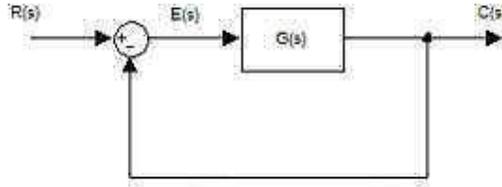


Fig.23: Sistema con retroalimentación unitaria.

También es necesario recordar los siguientes conceptos sobre la dinámica de un sistema.

Estado de equilibrio de un sistema: es la condición o valor (estado) en que se mantiene o permanece la salida de un sistema en ausencia de entradas externas y sin c.i.

Estabilidad absoluta de un sistema: es la propiedad o capacidad que tiene el sistema de regresar a su estado de equilibrio cuando sólo existe c.i. sin entradas externas.

Un sistema es *inestable (no estable) absoluto* cuando no tiene la capacidad de regresar a su estado de equilibrio cuando sólo existe c.i. sin entradas externas.

Como consecuencia de la definición de la estabilidad absoluta se tiene que un sistema estable absoluto tiene la característica de que su respuesta transitoria, cuando sólo existen c.i. sin entradas externas, se hace cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Condición necesaria y suficiente para la estabilidad (absoluta) de un sistema: el sistema es estable si y sólo si todos los polos de su función de transferencia de lazo cerrado tienen parte real estrictamente negativa, esto es si gráficamente sus polos se ubican en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

Error (absoluto) de un sistema, $e(t)$: es la desviación del valor real de la variable controlada (salida) del sistema $c(t)$ con respecto al valor deseado o de referencia $r(t)$, esto es $e(t) = r(t) - c(t)$.

Error en estado estacionario de un sistema, e_{ss} : si el sistema es estable, es el valor que toma el error cuando el tiempo es muy grande, esto es $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$.

Dado el sistema con retroalimentación unitaria de la figura anterior se tiene que la función de transferencia de lazo cerrado es $G_L(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$, y que el error en Laplace (en el dominio de la frecuencia) es $E(s) = R(s) - C(s)$. Por lo tanto, el error en Laplace es $E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$, es decir la función de transferencia del error con respecto a la entrada es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$.

Por otro lado, usando el teorema de valor inicial de la transformada de Laplace se tiene que el error de estado estacionario se puede obtener como $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, y sustituyendo el resultado anterior se tiene $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$.

A continuación se considerará que la función de transferencia del sistema está escrita en la forma de constantes de

tiempo, esto es
$$G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{s^N \prod_{i=0}^{n-N} (T_i s + 1)} .$$

Clase o tipo de un sistema: es la característica o propiedad de un sistema con retroalimentación unitaria que describe la capacidad del mismo para seguir entradas singulares: escalón, rampa, parábola, etc., es decir permite conocer el error de estado estacionario del sistema a diferentes entradas singulares.

Para determinar el tipo de un sistema se utiliza un sistema de control con retroalimentación unitaria y la forma de constantes de tiempo anterior de $G(s)$, teniéndose los siguientes tipos:

- *Tipo 0:* es cuando $G(s)$ no tiene integradores en la trayectoria directa (polos en el origen), esto es cuando $N = 0$.

- *Tipo 1*: es cuando $G(s)$ tiene un integrador en la trayectoria directa (polos en el origen), esto es cuando $N = 1$.
- *Tipo 2*: es cuando $G(s)$ tiene dos integradores en la trayectoria directa (polos en el origen), esto es cuando $N = 2$.
- *Tipo N*: es cuando $G(s)$ tiene N integradores en la trayectoria directa (polos en el origen).

Ejemplos: Determinar el tipo de los siguientes sistemas:

- $G(s) = \frac{5}{s+1}$, $H(s) = 1$.
- $G(s) = \frac{5s+1}{s^2+2s}$, $H(s) = 1$.
- $G(s) = \frac{3}{s^3+4s^2+s}$, $H(s) = 1$.
- $G(s) = \frac{10s+20}{s^3+4s^2}$, $H(s) = 1$.
- $G(s) = \frac{4}{2s^3+s^2+2s}$, $H(s) = 1$.
- $G(s) = \frac{5}{s^2+s}$, $H(s) = \frac{1}{s+2}$.

2.2 Constantes de error estáticas

En este tema se considerará un sistema de control estable con retroalimentación unitaria, como el de la Fig.23, y la función de transferencia de la planta en forma de constantes de tiempo ya presentados en el tema anterior.

Constantes de error estáticas para sistemas con retroalimentación unitaria.

Constantes de error estáticas: son unos valores constantes asociados a un sistema que describen la capacidad de un sistema con retroalimentación unitaria para disminuir el error de estado estacionario del sistema a diferentes entradas singulares: escalón, rampa, parábola, etc. y que se determinan a través de la función de transferencia del sistema.

Para definir las constantes de error estáticas se considerará el siguiente análisis por entrada singular:

1. *Entrada escalón unitario*: $r(t) = 1$, $\forall t \geq 0$.

Como el sistema tiene retroalimentación unitaria el error en estado estacionario es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$, y como

la entrada en Laplace es $R(s) = \frac{1}{s}$ se tiene que $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)}$. Por lo que, aplicando el límite se obtiene

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}.$$

Constante de error estática de posición, k_p : es el valor que permite determinar el error de estado estacionario de un sistema con retroalimentación unitaria a una entrada escalón unitario, es adimensional y se obtiene usando la fórmula $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$.

Con la definición anterior, el error de estado estacionario de un sistema con retroalimentación unitaria a una entrada escalón unitario se obtiene como $e_{ss} = \frac{1}{1+k_p}$.

Ahora bien, al considerar diferentes tipos de sistema se obtiene lo siguiente:

- *Sistema tipo 0*: $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{\prod_{i=0}^n (T_i s + 1)}$. Entonces la constante de error estática de posición es $k_p = k_o$, y

el error de estado estacionario a una entrada escalón unitario es $e_{ss} = \frac{1}{1+k_o}$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 0 con retroalimentación unitaria sigue con un error de estado estacionario finito a una entrada escalón, y que para minimizar este error se debe aumentar lo más posible su k_p .

- *Sistema tipo 1:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{s^{n-1}}$. Entonces la constante de error estática de posición es $k_p = \infty$, y

el error de estado estacionario a una entrada escalón unitario es $e_{ss} = 0$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 1 con retroalimentación unitaria sigue a la perfección a una entrada escalón.

- *Sistema tipo 2:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{s^2}$. Entonces la constante de error estática de posición es $k_p = \infty$, y

el error de estado estacionario a una entrada escalón unitario es $e_{ss} = 0$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 2 con retroalimentación unitaria sigue a la perfección a una entrada escalón.

2. Entrada rampa unitaria: $r(t) = t, \forall t \geq 0$.

Como el sistema tiene retroalimentación unitaria el error en estado estacionario es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$, y como

la entrada en Laplace es $R(s) = \frac{1}{s^2}$ se tiene que $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)}$. Por lo que, aplicando el límite se obtiene

$$e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}.$$

Constante de error estática de velocidad, k_v : es el valor que permite determinar el error de estado estacionario de un sistema con retroalimentación unitaria a una entrada rampa unitaria, sus unidades son seg^{-1} y se obtiene usando la fórmula $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$.

Con la definición anterior, el error de estado estacionario de un sistema con retroalimentación unitaria a una entrada rampa unitaria se obtiene como $e_{ss} = \frac{1}{k_v}$.

Ahora bien, al considerar diferentes tipos de sistema se obtiene lo siguiente:

- *Sistema tipo 0:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{\prod_{i=0}^n (T_i s + 1)}$. Entonces la constante de error estática de velocidad es $k_v = 0$, y

el error de estado estacionario a una entrada rampa unitaria es $e_{ss} = \infty$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 0 con retroalimentación unitaria no es capaz de seguir (diverge) a una entrada rampa.

- *Sistema tipo 1:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{s \prod_{i=0}^{n-1} (T_i s + 1)}$. Entonces la constante de error estática de velocidad es $k_v = k_o$, y

el error de estado estacionario a una entrada rampa unitaria es $e_{ss} = \frac{1}{k_o}$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 1 con retroalimentación unitaria sigue con un error de estado estacionario finito a una entrada rampa, y que para minimizar este error se debe aumentar lo más posible su k_v .

- *Sistema tipo 2:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{s^2 \prod_{i=0}^{n-2} (T_i s + 1)}$. Entonces la constante de error estática de velocidad es $k_v = \infty$,

y el error de estado estacionario a una entrada rampa unitaria es $e_{ss} = 0$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 2 con retroalimentación unitaria sigue a la perfección a una entrada rampa.

3. *Entrada parábola unitaria:* $r(t) = \frac{t^2}{2}, \forall t \geq 0$.

Como el sistema tiene retroalimentación unitaria el error en estado estacionario es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$, y como la entrada en Laplace es $R(s) = \frac{1}{s^3}$ se tiene que $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2G(s)}$. Por lo que, aplicando el límite se obtiene $e_{ss} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)}$.

Constante de error estática de aceleración, k_a : es el valor que permite determinar el error de estado estacionario de un sistema con retroalimentación unitaria a una entrada parábola unitaria, sus unidades son seg^{-2} y se obtiene usando la fórmula $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)$.

Con la anterior definición, el error de estado estacionario de un sistema con retroalimentación unitaria a una entrada parábola unitaria se obtiene como $e_{ss} = \frac{1}{k_a}$.

Ahora bien, al considerar diferentes tipos de sistema se obtiene lo siguiente:

• *Sistema tipo 0:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{\prod_{i=0}^n (T_i s + 1)}$. Entonces la constante de error estática de aceleración es $k_a = 0$,

y el error de estado estacionario a una entrada parábola unitaria es $e_{ss} = \infty$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 0 con retroalimentación unitaria no es capaz de seguir (diverge) a una entrada parábola.

• *Sistema tipo 1:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{s \prod_{i=0}^{n-1} (T_i s + 1)}$. Entonces la constante de error estática de aceleración es $k_a = 0$,

y el error de estado estacionario a una entrada parábola unitaria es $e_{ss} = \infty$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 1 con retroalimentación unitaria no es capaz de seguir (diverge) a una entrada parábola.

• *Sistema tipo 2:* $G(s) = \frac{k_o \prod_{i=0}^m (T_i s + 1)}{s^2 \prod_{i=0}^{n-2} (T_i s + 1)}$. Entonces la constante de error estática de aceleración es $k_a = k_o$,

y el error de estado estacionario a una entrada parábola unitaria es $e_{ss} = \frac{1}{k_o}$. De lo anterior se concluye que un sistema tipo 2 con retroalimentación unitaria sigue con un error de estado estacionario finito a una entrada parábola, y que para minimizar este error se debe aumentar lo más posible su k_a .

Los resultados del análisis anterior se pueden resumir en las siguientes tablas:

Tabla 1: Constantes de error estáticas de acuerdo al tipo de sistema.

	k_p	k_v	k_a
Sistema tipo 0	k_o	0	0
Sistema tipo 1	∞	k_o	0
Sistema tipo 2	∞	∞	k_o

Tabla 2: Error de estado estacionario de acuerdo al tipo de sistema.

	Escalón unitario	Rampa unitaria	Parábola unitaria
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1+k_o}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{k_o}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{1}{k_o}$

De la tabla anterior se concluye que a mayor tipo de sistema: mayor cantidad de entradas puede seguir y mejor es la precisión con que sigue las entradas. Sin embargo, a mayor tipo de sistema aumentan los problemas de estabilidad y se complica el diseño del mismo. Es por ello que en la práctica se recomienda sólo diseñar sistemas máximo de tipo 2. Además, se observa que para disminuir lo más posible el error de estado estacionario se requiere aumentar lo más posible k_o , pero hacer esto aumenta la dificultad para obtener una estabilidad relativa razonable.

Sistema con retroalimentación no unitaria.

En el caso de tener un sistema que no tiene retroalimentación unitaria, lo que se debe hacer es transformar el sistema a su equivalente con retroalimentación unitaria para así poder aplicar los resultados anteriores de análisis de error.

Considere el siguiente sistema con retroalimentación no unitaria:

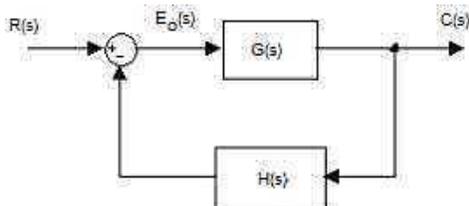


Fig.24: Sistema con retroalimentación no unitaria.

Para transformarlo observe que en el sistema original (con retroalimentación no unitaria) se tiene el error ponderado $E_o = R(s) - H(s)C(s)$, pero lo que se desea es el error $E(s) = R(s) - C(s)$ del sistema. Entonces, para obtener la transformación deseada es necesario escribir $E_o(s)$ en función de $E(s)$ de la siguiente manera $E_o(s) = R(s) - H(s)C(s) \pm C(s) = E(s) - [H(s) - 1]C(s)$. Con lo anterior se obtiene el siguiente sistema equivalente:

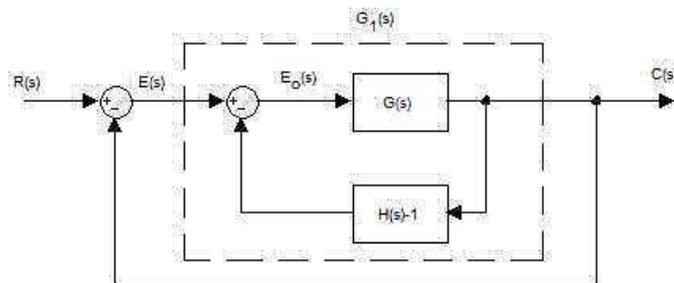


Fig.25: Sistema intermedio equivalente de transformación.

Finalmente, el sistema equivalente con retroalimentación unitaria es el siguiente:

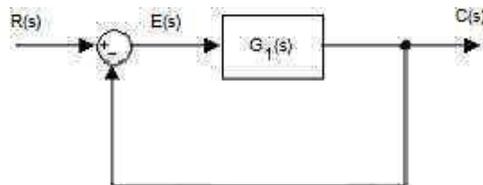


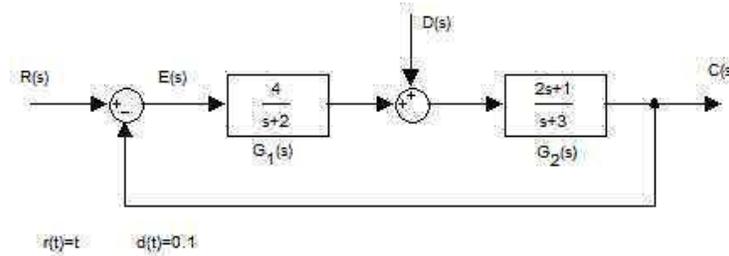
Fig.26: Sistema final equivalente con retroalimentación unitaria.

Donde $G_1(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)[H(s) - 1]}$, y los resultados anteriores de análisis de error se utilizan con este valor $G_1(s)$, en lugar de $G(s)$.

Ejemplos: Obtener el error en estado estacionario de los siguientes sistemas:

- a) $G(s) = \frac{5}{s + 1}$, $H(s) = 1$, $r(t) = 5$.
- b) $G(s) = \frac{5s + 1}{s^2 + 2s}$, $H(s) = 1$, $r(t) = t^2$.

- c) $G(s) = \frac{3}{s^3 + 4s^2 + s}$, $H(s) = 1$, $r(t) = 2 + 3t$.
- d) $G(s) = \frac{10s + 20}{s^3 + 4s^2}$, $H(s) = 1$, $r(t) = 2t^2 - 5$.
- e) $G(s) = \frac{4}{2s^3 + s^2 + 2s}$, $H(s) = 1$, $r(t) = 0.5t - 2$.
- f) $G(s) = \frac{5}{s^2 + s}$, $H(s) = \frac{1}{s + 2}$, $r(t) = 3$.
- g) $G(s) = \frac{5}{s + 1}$, $H(s) = \frac{1}{s + 2}$, $r(t) = 3$.
- h)



2.3 Constantes de error dinámicas

En este tema se considerará un sistema de control estable con retroalimentación unitaria, como el de la Fig.23, y la función de transferencia de la planta en forma de constantes de tiempo tal y como se presentaron en el tema 2.1.

Constantes de error dinámicas para sistemas con retroalimentación unitaria.

Constantes de error dinámicas: son unos valores constantes asociados a un sistema que describen el error de estado estacionario del sistema a diferentes entradas y que se determinan a través de la función de transferencia del error del sistema.

Para definir las constantes de error dinámicas se considerará la función de transferencia del error: $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)}$, y que por medio de la división polinomial se escribe como una serie de potencias:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}s + \frac{1}{k_3}s^2 + \dots$$

Constante de error dinámica de posición: es el valor k_1 de la serie de potencias de la función de transferencia del error del sistema.

Constante de error dinámica de velocidad: es el valor k_2 de la serie de potencias de la función de transferencia del error del sistema.

Constante de error dinámica de aceleración: es el valor k_3 de la serie de potencias de la función de transferencia del error del sistema.

Para calcular el error de estado estacionario del sistema se considera la serie de potencias de la función de transferencia del error y se obtiene la serie de potencias del error en Laplace $E(s) = \frac{1}{k_1}R(s) + \frac{1}{k_2}sR(s) + \frac{1}{k_3}s^2R(s) + \dots$. Ahora considerando que esta serie es convergente alrededor de $s = 0$, al aplicar la transformada inversa de Laplace a esta expresión se obtiene que el error en el tiempo es $e(t) = \frac{1}{k_1}r(t) + \frac{1}{k_2}\dot{r}(t) + \frac{1}{k_3}\ddot{r}(t) + \dots$. Por lo que el error en estado estacionario se calcula como $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{k_1}r(t) + \frac{1}{k_2}\dot{r}(t) + \frac{1}{k_3}\ddot{r}(t) + \dots \right]$.

Relación entre las constantes de error dinámicas y estáticas.

Para poder observar esta relación se realizarán los siguientes análisis:

- Sea el sistema tipo 0 de la forma $G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ con retroalimentación unitaria. Entonces la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + Ts}{1 + k + Ts}$ y la serie de potencias queda como $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + k} + \frac{kT}{(1 + k)^2}s -$

$\frac{kT^2}{(1+k)^3}s^2 + \dots$. Por lo tanto las constantes de error dinámicas para este sistema son: $k_1 = 1+k$, $k_2 = \frac{(1+k)^2}{kT}$, $k_3 = -\frac{(1+k)^3}{kT^2}$. Por otra parte, si se obtienen las constantes de error estáticas de este sistema y se comparan con las dinámicas, la única relación que se encuentra es $k_1 = 1+k_p$.

- Sea el sistema tipo 1 de la forma $G(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$ con retroalimentación unitaria. Entonces la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s+Ts^2}{k+s+Ts^2}$ y la serie de potencias queda como $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{k}s + \frac{kT-1}{k^2}s^2 + \dots$.

Por lo tanto las constantes de error dinámicas para este sistema son: $k_1 = \infty$, $k_2 = k$, $k_3 = \frac{k^2}{kT-1}$. Por otra parte, si se obtienen las constantes de error estáticas de este sistema y se comparan con las dinámicas, las relaciones que se encuentran son: $k_1 = k_p$, $k_2 = k_v$.

- Sea el sistema tipo 2 de la forma $G(s) = \frac{k}{s^2(Ts+1)}$ con retroalimentación unitaria. Entonces la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2+Ts^3}{k+s^2+Ts^3}$ y la serie de potencias queda como $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{k}s^2 + \frac{kT-1}{k^2}s^3 + \dots$.

Por lo tanto las constantes de error dinámicas para este sistema son: $k_1 = \infty$, $k_2 = \infty$, $k_3 = k$. Por otra parte, si se obtienen las constantes de error estáticas de este sistema y se comparan con las dinámicas, las relaciones que se encuentran son: $k_1 = k_p = \infty$, $k_2 = k_v = \infty$, $k_3 = k_a$.

De los resultados anteriores se concluye que las constantes de error dinámicas no se pueden calcular por medio de fórmulas generales. como sucede en el caso de la constantes de error estáticas, sino que se deben calcular por medio de la serie de potencias de la función de transferencia del error. Además, se puede concluir la siguiente relación:

Para sistemas tipo $N \geq 1$ se tiene que $k_{n+1} = \infty$ para $n < N$, $k_{n+1} = \lim_{s \rightarrow 0} s^N G(s)$ para $n = N$, y k_{n+1} de acuerdo a la serie de potencias para $n > N$.

Ejemplos: Obtener el error en estado estacionario de los sistemas usados en los ejemplos del tema anterior:

2.4 Criterios de error

Índice de desempeño, $J(\cdot)$: es un valor que indica que tan bueno es el comportamiento de un sistema, y es usado para elegir el "mejor" sistema de un conjunto de sistemas de acuerdo a este valor.

Los índices de desempeño deben elegirse de acuerdo a su selectividad, su unicidad de valor, su utilidad práctica (fácil cálculo analítico o numérico), y su función maximizable o minimizable de parámetros del sistema (frecuentemente es una integral). Además, debido a su definición, los índices de desempeño son utilizados en control óptimo y generalmente se minimizan para determinar el sistema óptimo de acuerdo a ese índice de desempeño.

Criterios de error: son unos índices de desempeño muy básicos basados en la función de error del sistema.

A continuación se definen algunos criterios de error:

1. *Criterio Integral del Error Cuadrático (CIEC)*: se define como $J(\cdot) = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$. Este criterio se minimiza, es

de fácil cálculo, da mayor importancia a los errores grandes y menor importancia a los errores pequeños, no es muy selectivo, se tiene una respuesta rápida y oscilatoria con una estabilidad relativa pobre a una disminución del error inicial elevado, y físicamente está relacionado con el consumo de potencia (por ejemplo en aeronaves).

2. *Criterio Integral del Error Absoluto (CIEA)*: se define como $J(\cdot) = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$. Este criterio se minimiza,

se tiene una respuesta a escalón unitario ante un error inicial grande de poco peso, los errores posteriores en respuesta transitoria son castigados severamente. tiene mejor selectividad que el CIEC, es uno de los de más fácil aplicación, no se recomienda para sistemas altamente subamortiguados o altamente sobreamortiguados, se tiene una respuesta satisfactoria y amortiguamiento razonable, no es de fácil cálculo analítico, y físicamente está relacionado con el consumo de combustible (por ejemplo en aeronaves).

3. *Criterio Integral del Error Cuadrático por el Tiempo (CIECT)*: se define como $J(\cdot) = \int_0^{\infty} te^2(t) dt$. Este criterio se minimiza, es similar al CIEA, y físicamente está relacionado con el consumo de potencia (por ejemplo en aeronaves).

4. *Criterio Integral del Error Absoluto por el Tiempo (CIEAT)*: se define como $J(\cdot) = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt$. Este criterio se minimiza, mejora al CIEA, se tiene una resúesta con sobreimpulso pequeño con oscilaciones bien amortiguada, tiene buena selectividad, es muy difícil de calcular analíticamente, se puede medir con relativa facilidad experimentalmente, y físicamente está relacionado con el consumo de combustible (por ejemplo en aeronaves).

Selectividad de los criterios de error.

Para tener una mejor claridad de este concepto se considerará el sistema $G(s) = \frac{1}{s(s + 2\xi)}$ con retroalimentación unitaria. Entonces la función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1}$ y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 2\xi s}{s^2 + 2\xi s + 1}$. Al calcular el error en el tiempo a una entrada escalón unitario y calcular los criterios de error anteriormente vistos se obtiene la gráfica siguiente:

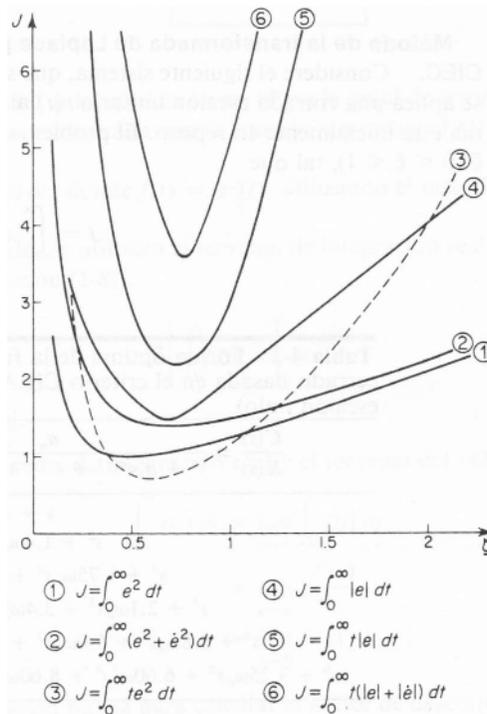


Fig.28: Selectividad de diferentes criterios de error.

En la gráfica anterior se observa que el valor óptimo (que minimiza los criterios) se encuentra alrededor de $\xi = 0.7$, en la siguiente unidad se verá que con este valor se obtiene una respuesta rápida con un sobreimpulso máximo de alrededor de 5%. Además, se observa que en algunos casos es más difícil discriminar ese valor óptimo, esto se debe a que las curvas tienen diferentes "picos": hay unas más planas que otras. Las curvas que tienen un pico más pronunciado son aquellas que corresponden a los criterios más selectivos, pero también corresponden a los criterios más difíciles de calcular analíticamente.

Cálculo del criterio CIEC por Laplace.

Para realizar el cálculo en Laplace, lo que se requiere es reescribir el criterio. El criterio CIEC se puede escribir como $J(\cdot) = \int_0^{\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt$ con $f(t) = e^2(t)$. Entonces, aplicando el teorema del valor final de la

transformada de Laplace se obtiene $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L} \left\{ \int_0^T f(t) dt \right\}$. Por lo que, de acuerdo al teorema de integración en el tiempo de la transformada de Laplace, se obtiene $\lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{L} \left\{ \int_0^T f(t) dt \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{F(s)}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$. Por lo tanto, el cálculo en Laplace del criterio CIEC está dado por $J(\cdot) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$ con $f(t) = e^2(t)$.

Cálculo del criterio CIECT por Laplace.

Para realizar el cálculo en Laplace, lo que se requiere es reescribir el criterio. El criterio CIECT se puede escribir como $J(\cdot) = \int_0^\infty tf(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty tf(t) e^{-st} dt$ con $f(t) = e^2(t)$. Entonces, por definición de la transformada de Laplace tiene que $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty tf(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L} \{ tf(t) \}$. Por lo que, de acuerdo al teorema de derivación en la frecuencia de la transformada de Laplace, se obtiene $\lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L} \{ tf(t) \} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{ds} F(s) \right]$. Por lo tanto, el cálculo en Laplace del criterio CIECT está dado por $J(\cdot) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{ds} F(s) \right]$ con $f(t) = e^2(t)$.

Ejemplos: Determinar el sistema óptimo, y el valor óptimo de ξ , para el sistema $G(s) = \frac{1}{s(s+2\xi)}$ con retroalimentación unitaria utilizando la minimización de los criterios CIEC y CIECT.

2.5 Sensibilidad de un sistema

Sensibilidad de un sistema: es la propiedad que describe la dependencia de las características de un sistema respecto a cualquiera de sus parámetros, es decir describe cuánto cambian las características del sistema cuando se produce un cambio en uno de sus parámetros.

Como se puede deducir, entre más grande sea el valor de la sensibilidad más grande es el cambio en el sistema cuando se da un cambio en el parámetro de interés. Por lo anterior, una baja sensibilidad se obtiene para valores muy pequeños y la insensibilidad sería para un valor de cero.

El concepto de sensibilidad en un sentido amplio, es decir sensibilidad de cualquier parámetro del sistema con respecto a cualquier otro parámetro del mismo, es muy utilizado en control robusto para determinar la robustez del sistema a perturbaciones o variaciones pequeñas (incertidumbre) de sus parámetros.

(*Función de Sensibilidad de $O(s)$ con respecto a $I(s)$*): es una función en Laplace que describe la sensibilidad del parámetro $O(s)$ de un sistema con respecto a su parámetro $I(s)$ y está dada por $S_I^O(s) = \frac{\frac{dO(s)}{O(s)}}{\frac{dI(s)}{I(s)}} = \frac{I(s)}{O(s)} \frac{dO(s)}{dI(s)}$.

Sensibilidad estática, $S_R^C(0)$: describe la sensibilidad en el dominio del tiempo en estado estacionario que tiene el sistema a entradas de cambio de nivel. En Laplace se calcula con la función de sensibilidad de la salida con respecto a la entrada evaluada en $s = 0$.

Sensibilidad dinámica, $S_R^C(j\omega)$: describe la sensibilidad en el dominio de la frecuencia que tiene el sistema a entradas senoidales. En Laplace se calcula con la función de sensibilidad de la salida con respecto a la entrada evaluada en $s = j\omega$. De hecho, lo que interesa en esta función es la magnitud de la misma, ya que ésta contiene la información de la sensibilidad del sistema. Además, observe que esta sensibilidad se puede graficar: es la gráfica de la magnitud de la función de sensibilidad dinámica.

También es posible obtener la sensibilidad estática y la sensibilidad dinámica de cualquier parámetro de un sistema con respecto a cualquier otro de sus parámetros, aunque las definiciones anteriores son las más importantes.

Además, como se puede deducir, puede ser que un sistema tenga una sensibilidad alta para algunas frecuencias y una sensibilidad baja para otras frecuencias.

Funciones de sensibilidad en un sistema de control.

Uno de los principales objetivos de un sistema de control es la capacidad para seguir referencias con precisión y la capacidad de anular perturbaciones en estado estacionario. Los errores en estado estacionario son un parámetro importante de diseño en sistemas de control vinculado a la capacidad de respuesta o sensibilidad del sistema ante

estímulos dominados por las bajas frecuencias. Por lo tanto, un diseño orientado a la consecución de errores aceptables en estado estacionario puede ser establecido en términos del estudio de la sensibilidad del sistema a bajas frecuencias.

Por otro lado, en el diseño de sistemas de control afecta la dinámica de las perturbaciones y el ruido, que a menudo se halla dominado por energías en altas frecuencias. Un elemento especialmente sensible al ruido es el sensor. Un sensor, en general, maneja señales y magnitudes físicas de muy baja potencia, y tiene constantes de tiempo rápidas, siendo especialmente sensible a ruidos (de medida, interferencias, etc.) que pasan a formar parte de la cadena de control, pudiendo afectar a la salida o generar acciones de control inadmisibles. El estudio de estos efectos, por tanto, debe tener en cuenta la sensibilidad del sistema a altas frecuencias.

Como se puede deducir de lo anterior, en un sistema de control es necesario definir varias funciones de sensibilidad que son importantes al momento de realizar un análisis de: rechazo de perturbaciones, seguimiento de referencias, dinámica de la acción de control, estabilidad relativa y/o robustez del mismo. Estos tipos de análisis están fuera del alcance del tema, pero se recomienda que los alumnos los consulten en las referencias. Sin embargo, para mejor comprensión de este tema si se van a definir estas funciones de sensibilidad, y para ello se va a considerar un sistema con retroalimentación unitaria y con perturbación de entrada o de carga $D_i(s)$, perturbación de salida $D_o(s)$ y ruido de medición $N(s)$, como el que se muestra en la figura siguiente:

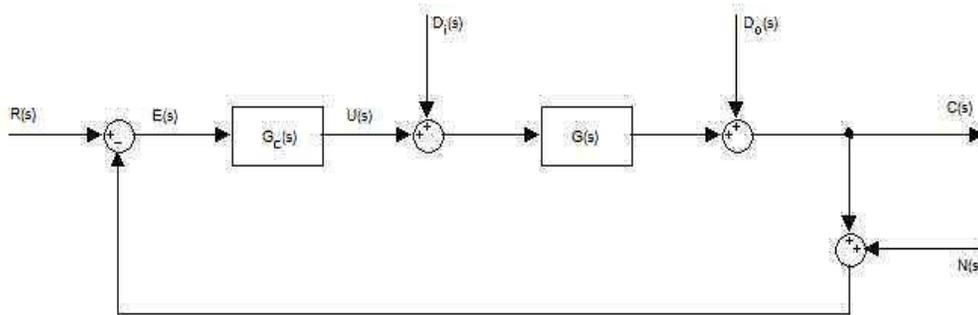


Fig.29: Sistema de control con retroalimentación unitaria, perturbaciones de entrada y salida, y ruido de medición.

Para definir las funciones de sensibilidad asociadas al sistema anterior primero se obtiene la salida y la señal de control del sistema, que son:

$$C(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}D_i(s) + \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}D_o(s) - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s)$$

$$U(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}D_i(s) - \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G(s)}D_o(s) - \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s)$$

Ahora si, las funciones de sensibilidad asociadas al sistema anterior son:

Sensibilidad del lazo, $S_o(s)$: es la sensibilidad de la salida $C(s)$ del sistema con respecto a la perturbación de salida $D_o(s)$.

$$S_o(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Sensibilidad complementaria del lazo, $T_o(s)$: es la sensibilidad de la salida $C(s)$ del sistema con respecto a la entrada de referencia $R(s)$. También es equivalente a la sensibilidad sin signo de la salida $C(s)$ con respecto al ruido de medición $N(s)$, y a la sensibilidad sin signo de la señal de control $U(s)$ con respecto a la perturbación de entrada $D_i(s)$.

$$T_o(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Sensibilidad de entrada del lazo, $F_o(s)$ o $S_i(s)$: es la sensibilidad de la salida $C(s)$ del sistema con respecto a la perturbación de entrada $D_i(s)$.

$$F_o(s) = \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Sensibilidad de control lazo, $Q_o(s)$ o $S_u(s)$: es la sensibilidad de la señal de control $U(s)$ con respecto a la entrada de referencia $R(s)$. También es equivalente a la sensibilidad sin signo de la señal de control $U(s)$ con respecto a la perturbación de salida $D_o(s)$, y a la sensibilidad sin signo de la señal de control $U(s)$ con respecto al ruido de medición $N(s)$.

$$Q_o(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Las cuatro funciones anteriores $S_o(s)$, $T_o(s)$, $F_o(s)$ y $Q_o(s)$ son llamadas colectivamente funciones de sensibilidad del lazo, y tienen un papel fundamental a la hora de analizar y sintetizar lazos de control.

Las funciones de sensibilidad del lazo condensan la información esencial sobre el desempeño del sistema, incluyendo seguimiento de referencias, efecto de las perturbaciones en cualquier punto y dinámica de la acción de control, todo ello tanto desde el punto de vista estático (bajas frecuencias) como desde el punto de vista dinámico (altas frecuencias).

Por otra parte, observe que la señal de error del sistema de la Fig.29 es:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}D_i(s) - \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}D_o(s) - \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}N(s)$$

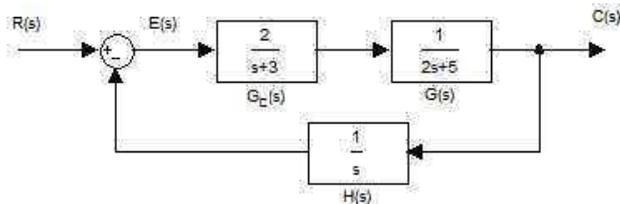
Por lo que las funciones de sensibilidad del lazo y de entrada del lazo también se pueden definir a través de la señal de error.

Además, observe que estas funciones de sensibilidad del lazo están algebraicamente relacionadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_o(s) + T_o(s) &= 1 \\ F_o(s) = G(s)S_o(s) &= \frac{T_o(s)}{G_c(s)} \\ Q_o(s) = G_c(s)S_o(s) &= \frac{T_o(s)}{G(s)} \end{aligned}$$

Por lo anterior, las funciones de sensibilidad del lazo no pueden ser moldeadas de forma arbitraria mediante la elección de un controlador $G_c(s)$, lo que demuestra que el diseño de sistemas de control tiene sus limitaciones, requiriendo a menudo soluciones de compromiso entre distintos objetivos, en los que el diseñador debe ponderar los más importantes en función del contexto.

Ejemplos: Considere el sistema que se muestra en la figura siguiente y obtenga lo que se pide:



- La sensibilidad de la salida con respecto a la entrada.
- La sensibilidad de la salida con respecto al error.
- La sensibilidad del error con respecto a la entrada.
- La sensibilidad del sistema (función de transferencia de lazo cerrado) con respecto a la entrada.
- La sensibilidad de la entrada con respecto a la salida.
- La sensibilidad del sistema (función de transferencia de lazo cerrado) con respecto a la función de transferencia del controlador.
- La sensibilidad del sistema (función de transferencia de lazo cerrado) con respecto a la función de transferencia de la retroalimentación.
- La sensibilidad estática y la gráfica de sensibilidad dinámica.

2.6 Efectos de la retroalimentación en un sistema

En la primera unidad ya se comentaron algunas características de un sistema retroalimentado, dichas características son "obvias" y se deben justamente a la presencia de esa retroalimentación. En este tema se verán otros efectos, a través de un pequeño análisis de ejemplos en lazo abierto y lazo cerrado, de la existencia de una retroalimentación en un sistema. Dichos efectos son los siguientes:

1. *Disminución de la sensibilidad del sistema a variaciones de sus parámetros y a perturbaciones no deseadas.*

Considere el sistema en lazo abierto $\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$ mostrado en la figura siguiente. Ahora bien, al calcular la sensibilidad de la salida del sistema con respecto a la planta se obtiene $S_G^C(s) = 1$, lo que significa una alta sensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta.

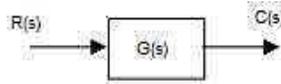


Fig.31: Sistema en lazo abierto.

Una vez que se considera el sistema anterior con una retroalimentación $H(s)$, como se muestra en la figura siguiente, se tiene que la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$. Ahora bien, al calcular la sensibilidad de la salida del sistema con respecto a la planta se obtiene $S_G^C(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$, lo que significa que la sensibilidad depende del valor de $G(s)H(s)$. Por lo tanto, si $|G(s)H(s)| > 1$ entonces la sensibilidad del sistema a variaciones de los parámetros de la planta disminuye.

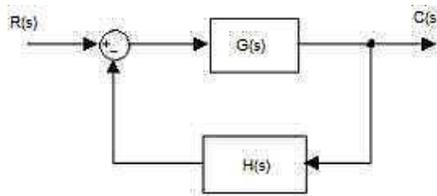


Fig.32: Sistema con retroalimentación $H(s)$.

Se puede realizar un análisis similar para demostrar que la sensibilidad del sistema a las perturbaciones también disminuye con la presencia de una retroalimentación en el sistema.

2. *Disminución de la constante de tiempo del sistema.*

Considere el sistema en lazo abierto $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$, $k > 0$, $T > 0$ mostrado en la figura siguiente. Obviamente el sistema es estable y su constante de tiempo es T y su ganancia es k .

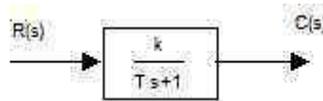


Fig.33: Sistema tipo 1 en lazo abierto.

Una vez que se considera el sistema anterior con una retroalimentación $H(s) = a > 0$, como se muestra en la figura siguiente, se tiene que la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{Ts + 1 + ak}$. Ahora

bien, al darle la forma de constantes de tiempo se tiene $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{\frac{T}{1 + ak}s + 1}$, por lo cual la nueva constante de

tiempo es $\frac{T}{1+ak}$ y la nueva ganancia del sistema es $\frac{k}{1+ak} < k$. El sistema sigue siendo estable ($\frac{T}{1+ak} > 0$) con una constante de tiempo menor ($\frac{T}{1+ak} < T$), pero su ganancia disminuyó ($\frac{k}{1+ak} < k$). La importancia de disminuir la constante de tiempo de un sistema radica en que menor valor de ésta el sistema tiene una respuesta más rápida.

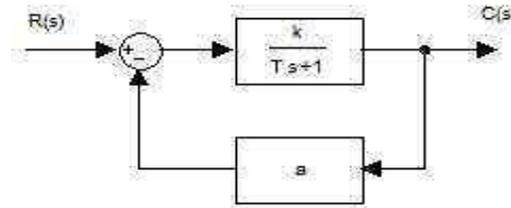


Fig.34: Sistema tipo 1 con retroalimentación $H(s) = a$.

Otra forma de disminuir la constante de tiempo del sistema es considerar una retroalimentación positiva $H(s) = bs$, $b > 0$, como se muestra en la figura siguiente. Con esta retroalimentación se tiene que la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{(T-bk)s+1}$, por lo cual la nueva constante de tiempo es $T-bk$ y la ganancia sigue siendo del mismo valor k . La constante de tiempo disminuyó ($T-bk < T$) y se mantuvo el valor de la ganancia del sistema. Con este método se pueden lograr constantes de tiempo muy pequeñas (casi cero), pero se puede tener inestabilidad: si $T-bk > 0$ el sistema es estable, pero si $T-bk < 0$ el sistema es inestable.

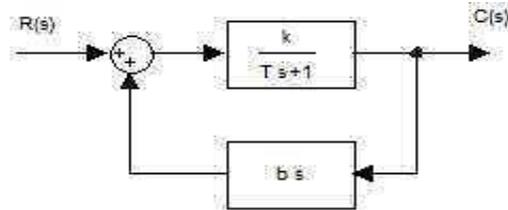


Fig.35: Sistema tipo 1 con retroalimentación positiva.

3. Incremento de la ganancia de lazo del sistema.

Considere el sistema en lazo abierto $\frac{C(s)}{R(s)} = G(s)$, como se muestra en la figura siguiente. Obviamente la ganancia de lazo de este sistema depende del valor de $G(s)$.

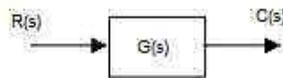


Fig.36: Sistema en lazo abierto.

Una vez que se considera el sistema anterior con una retroalimentación como la que se muestra en la figura siguiente, se tiene que la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G_f(s) + G(s)H(s)}$.

Ahora bien, si se toma un valor de $G_f(s) \approx 1$, entonces $\frac{C(s)}{R(s)} \approx \frac{1}{H(s)}$, esto significa que se está "eliminando" el efecto de la planta de tal forma que la salida sólo depende la retroalimentación. Por ejemplo, si $H(s) = 1$ entonces la salida es casi igual a la entrada. Este efecto es lo que conoce como tener una ganancia de lazo elevada: la función de transferencia de lazo cerrado se equipara a la inversa de la función de transferencia de la retroalimentación "eliminando" la planta.

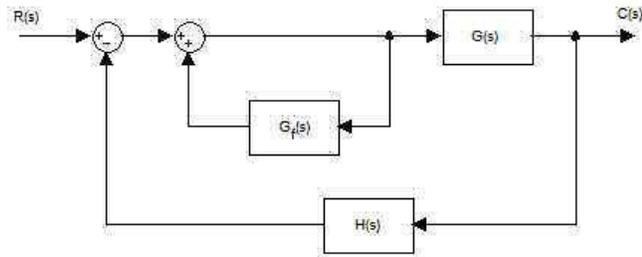


Fig.37: Sistema con retroalimentación interna.

4. *Eliminación de integradores del sistema.*

Considere el sistema en lazo abierto $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s}$, como se muestra en la siguiente figura. Obviamente este sistema es un integrador, es decir tiene un polo en el origen, por lo que no es estable.

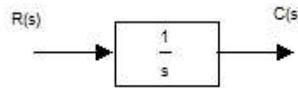


Fig.38: Sistema con un integrador.

Una vez que se considera el sistema anterior con una retroalimentación $H(s) = k > 0$, como se muestra en la figura siguiente, se tiene que la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+k}$. Esta nueva función de transferencia de lazo cerrado tiene un polo en $s = -k$, por lo que el sistema ya no tiene integrador y además es estable.

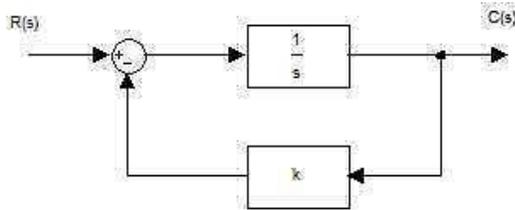


Fig.39: Sistema "integrador" con retroalimentación $H(s) = k$.

5. *Otros efectos:* la existencia de la retroalimentación en un sistema hace que aumente la cantidad de componentes del mismo, por lo cual aumenta su complejidad (tanto de análisis y diseño así como de construcción) y aumenta la posibilidad de inestabilidad del mismo. Normalmente, pero no necesariamente, en la retroalimentación se encuentran los elementos de control. Cuando los elementos de control están en la retroalimentación se tiene que aumenta la linealidad del amplificador y el rango de sensibilidad proporcional. Al tener la retroalimentación ya se vió que disminuye la sensibilidad del sistema a variaciones de sus parámetros, es decir que disminuyen los efectos de las variaciones en las ganancias de la trayectoria directa que son debidas a variaciones en la presión, voltaje, temperatura, etc. del sistema.

2.7 Modos básicos de control

Como ya se mencionó en la primera unidad, un *modo, acción o ley de control* es la forma matemática en que se determina el valor que debe tener la variable o señal de control, a partir del valor de la señal de error, para lograr el comportamiento deseado de un sistema.

Un controlador, en general, se puede conectar de diversas maneras al sistema: en serie o en cascada, en paralelo o en retroalimentación, con retroalimentación de estado, con compensación en serie-retroalimentada (que es de dos grados de libertad), en compensación directa con compensación en serie (también es de dos grados de libertad), y con compensación en prealimentación (también es de dos grados de libertad), para realizar el control del sistema, pero la

mayoría de ellos están fuera del alcance de este tema, por lo que se recomienda a los alumnos que los consulten en las referencias.

Para conectar un controlador de los modos básicos de control se utiliza la conexión en serie, como la que se muestra en la siguiente figura, y que es la que se va a emplear en este tema para analizar y describir cada modo de control básico.

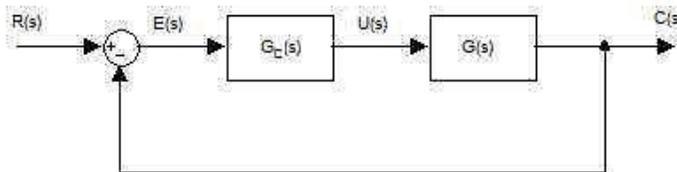


Fig.40: Sistema con un controlador en serie.

Clasificación de los controladores.

Los controladores industriales analógicos se pueden clasificar de la siguiente manera:

1. De acuerdo al *modo de control* básico que emplean:

- *Control de dos posiciones*: también llamado intermitente, de encendido-apagado, todo-nada, on-off, es aquel que sólo puede asignar dos valores a la señal de control.
- *Control proporcional (P)*: es aquel que asigna valores a la señal de control en forma proporcional al error del sistema.
- *Control integral (I), de reposición, de restablecimiento o de atraso*: es aquel que asigna valores a la señal de control en forma integral al error del sistema.
- *Control derivativo (D), de velocidad, anticipativo, anticipatorio o de adelanto*: es aquel que asigna valores a la señal de control en forma derivativa al error del sistema.
- *Control proporcional-integral (PI)*: es aquel que asigna valores a la señal de control en forma proporcional e integral al error del sistema.
- *Control proporcional-derivativo (PD)*: es aquel que asigna valores a la señal de control en forma proporcional y derivativa al error del sistema.
- *Control proporcional-integral-derivativo (PID)*: es aquel que asigna valores a la señal de control en forma proporcional, integral y derivativa al error del sistema.

2. En cuanto al tipo de *fuerza de potencia de alimentación* que emplean:

- *Controlador electrónico*: utiliza energía eléctrica como fuente de poder y puede operar cargas relativamente bajas.
- *Controlador hidráulico*: utiliza fluidos incompresibles como fuente de poder, normalmente usa algún tipo de aceite, y puede operar cargas medianas.
- *Controlador neumático*: utiliza aire comprimido como fuente de poder y puede operar cargas elevadas.

A continuación se describirán cada uno de los modos de control básicos.

1) Control de dos posiciones.

Como ya se mencionó, este controlador sólo puede asignar dos valores a la señal de control. Matemáticamente está dado por:

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & , e(t) \geq 0 \\ u_2 & , e(t) < 0 \end{cases} \quad , \text{ donde } u_1, u_2 \text{ son valores constantes (generalmente } u_2 = 0 \text{ o bien } u_2 = -u_1).$$

La siguiente figura muestra el símbolo en bloques que tiene este controlador y la salida ideal del mismo ejemplificando el caso mostrado en la ecuación anterior de $u(t)$ para este controlador.

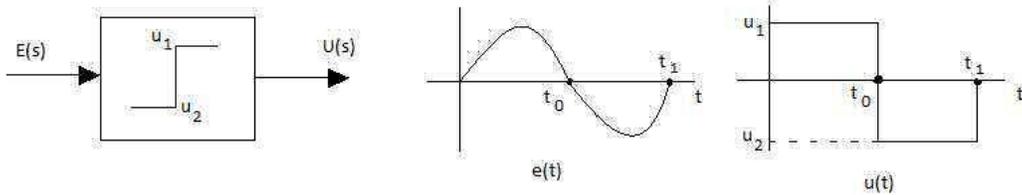


Fig.41: Símbolo y ejemplo de la respuesta ideal de un controlador de dos posiciones.

En cuanto a su funcionamiento real se tiene el comportamiento que se muestra en la siguiente gráfica, en donde se observa que hay una zona muerta o de transición entre un valor y otro de la salida, así como también se puede considerar un tiempo muerto en la conmutación del controlador.

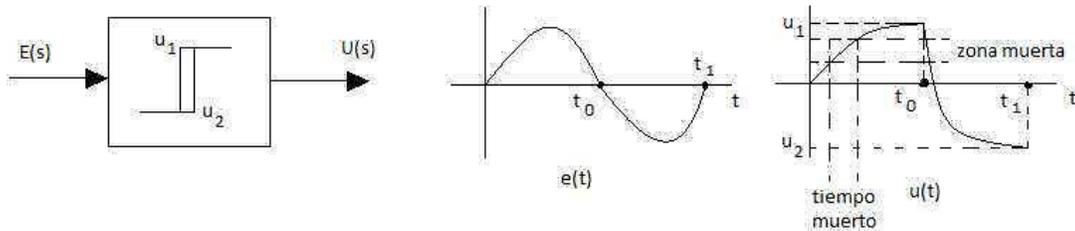


Fig.42: Símbolo y ejemplo de la respuesta real de un controlador de dos posiciones.

Este tipo de controladores son simples y económicos y en general son dispositivos eléctricos, por ejemplo un interruptor, una válvula electromagnética (accionada por un solenoide eléctrico). Los controladores neumáticos proporcionales con muy altas ganancias también tienen un comportamiento similar al de un controlador de dos posiciones.

Las desventajas que tiene este controlador son que no permite un control fino (ya que sólo admite dos valores de salida), a mayor número de conmutaciones su vida útil disminuye, a menor zona muerta aumenta el número de conmutaciones por minuto, requiere un mantenimiento constante. Se tiene que buscar el equilibrio entre exactitud y tiempo de vida útil, ya que a mayor exactitud menor tiempo de vida útil.

2) Control P.

Como ya se mencionó, este controlador asigna en forma proporcional los valores a la señal de control, por lo que esencialmente es un amplificador con ganancia ajustable. Matemáticamente está dado por:

$$u(t) = k_p e(t) \quad , \quad \text{donde } k_p \text{ es la ganancia proporcional del controlador } (k_p > 0)$$

La función de transferencia del controlador P es: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p$, y el símbolo en bloques es:

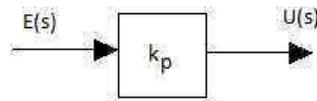


Fig.43: Símbolo de un controlador P.

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta de este tipo de controlador, en donde se observa que si $e(t) = 0$ entonces $u(t) = 0$.

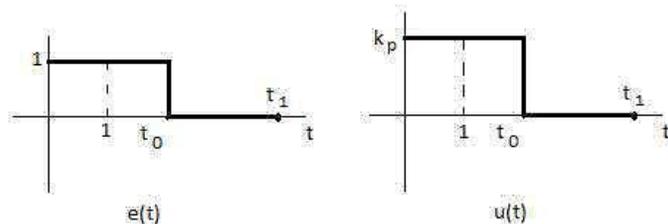


Fig.44: Ejemplo de respuesta de un controlador P.

Obviamente al conectar este controlador a un sistema se modifican sus características tanto estructurales como dinámicas. En general, los cambios estructurales que se producen son:

- Función de transferencia de lazo abierto: la nueva función de transferencia de lazo abierto es $G_c(s)G(s) = k_p G(s)$, por lo que no cambian ni se agregan ceros ni polos de lazo abierto, y el tipo de sistema tampoco se modifica.
- Función de transferencia de lazo cerrado: la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)}$, por lo que no cambian ni se agregan ceros de lazo cerrado, no agrega nuevos polos de lazo cerrado pero si los cambia de valor, y no cambia el orden del sistema.

A través de los siguientes ejemplos se analizarán algunos efectos en la dinámica del sistema que provoca este controlador.

Sistema tipo 0 con control P.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

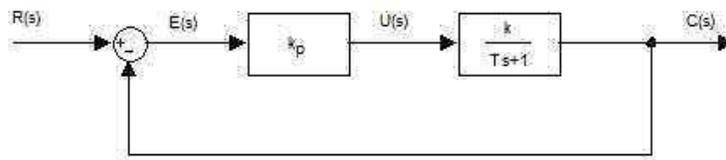


Fig.45: Sistema tipo 0 con control P.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p k}{Ts + k_p k + 1}$, y como $T > 0$, $k_p k > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + k_p k + 1}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una entrada escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \frac{1}{1 + k_p k}$. Con esto se concluye que va a existir un error de corrimiento, ya que el error de estado estacionario va a ser constante diferente de cero, y que a mayor valor de k_p este error será menor.

Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control P.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

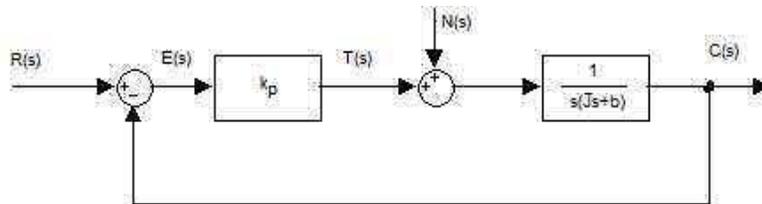


Fig.46: Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control P.

Para el análisis se considerará que la entrada de referencia es cero ($R(s) = 0$). Por lo anterior, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema con respecto a la perturbación es $\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + k_p}$, y como $J > 0$, $b > 0$, $k_p > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error con respecto a la perturbación es $\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{Js^2 + bs + k_p}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una perturbación escalón de valor T_n ($N(s) = \frac{T_n}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\frac{T_n}{k_p}$. Con esto se concluye que a mayor valor de la perturbación T_n el error de estado estacionario será mayor, claro que si se aumenta k_p este error disminuye, pero como la respuesta de este sistema es subamortiguada, si k_p es muy grande con respecto a b el sistema se comportará como oscilatorio puro (de hecho, entre más grande sea k_p más grandes serán las oscilaciones de la salida el sistema).

Sistema de carga inercial con control P.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

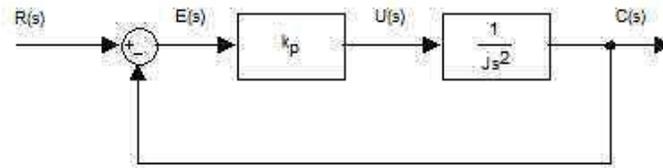


Fig.47: Sistema de carga inercial con control P.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p}{Js^2 + k_p}$, y como $J > 0$, $k_p > 0$ entonces el sistema es oscilatorio puro por lo que no tiene sentido calcular el error de estado estacionario, ya que la salida a una entrada escalón unitario es una senoidal.

En conclusión, el control P tiene los siguientes efectos sobre el sistema: mejora el comportamiento de estado estacionario de un sistema (disminuye e_{ss} de sistemas tipo 0 pero no lo elimina), puede provocar sistemas oscilatorios o sistemas con oscilaciones muy grandes, para un error cero produce una señal de control cero, el tiempo de crecimiento experimenta una pequeña reducción, el sobreimpulso máximo se incrementa, el amortiguamiento se reduce, el tiempo de establecimiento cambia en pequeña proporción, el error de estado estacionario disminuye con incremento de ganancia, el tipo de sistema permanece igual.

3) Control I.

Como ya se mencionó, este controlador asigna en forma integral los valores a la señal de control, por lo que esencialmente es un amplificador en configuración de integrador. Matemáticamente está dado por:

$$u(t) = k_i \int_0^t e(\lambda) d\lambda \quad , \quad \text{donde } k_i \text{ es la ganancia integral del controlador } (k_i > 0)$$

La función de transferencia del controlador I es: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_i}{s}$, y el símbolo en bloques es:

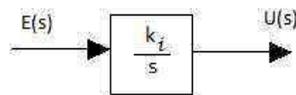


Fig.48: Símbolo de un controlador I.

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta de este tipo de controlador, en donde se observa que si $e(t) = 0$ no necesariamente $u(t) = 0$, de hecho $u(t)$ permanece estacionario (mantiene su valor previo). También es posible deducir que si $e(t)$ duplica su valor entonces $u(t)$ varía al doble su velocidad de cambio.

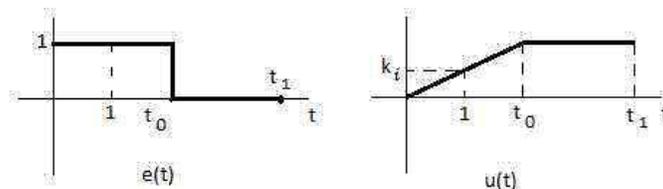


Fig.49: Ejemplo de respuesta de un controlador I.

Un efecto importante que se presenta debido a que es un integrador es que se puede presentar la saturación del actuador, es decir el controlador físicamente puede llegar al máximo valor que puede proporcionar.

Obviamente al conectar este controlador a un sistema se modifican sus características tanto estructurales como dinámicas. En general, los cambios estructurales que se producen son:

- Función de transferencia de lazo abierto: la nueva función de transferencia de lazo abierto es $G_c(s)G(s) = \frac{k_i}{s}G(s)$, por lo que no cambian ni se agregan ceros de lazo abierto, se agrega un nuevo polo de lazo abierto en $s = 0$ sin cambiar los demás polos de lazo abierto, y el tipo de sistema se incrementa en uno.
- Función de transferencia de lazo cerrado: la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{k_i G(s)}{s + k_i G(s)}$, por lo que no cambian ni se agregan ceros de lazo cerrado, se agrega un nuevo polo de lazo cerrado y se cambian los demás polos de lazo cerrado, y el orden del sistema se incrementa en uno.

A continuación se considerarán los ejemplos usados en el control P para analizar algunos efectos en la dinámica del sistema que provoca este controlador.

Sistema tipo 0 con control I.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

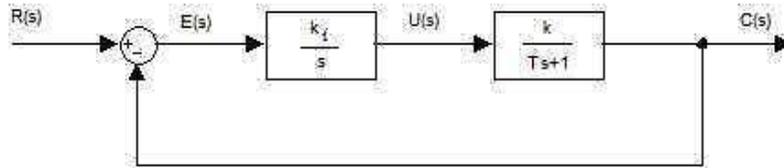


Fig.50: Sistema tipo 0 con control I.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_i k}{Ts^2 + s + k_i k}$, y como $T > 0, k_i k > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s}{Ts^2 + s + k_i k}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una entrada escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$. Con esto se concluye que se elimina el error de corrimiento.

Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control I.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

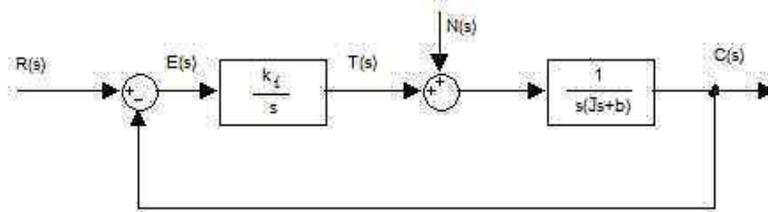


Fig.51: Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control I.

Para el análisis se considerará que la entrada de referencia es cero ($R(s) = 0$). Por lo anterior, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema con respecto a la perturbación es $\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{s}{Js^3 + bs^2 + k_i}$, y como no existe el término correspondiente a la potencia s entonces el sistema es inestable, por lo cual no tiene sentido calcular el error del sistema ni el error de estado estacionario del mismo.

Sistema de carga inercial con control I.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

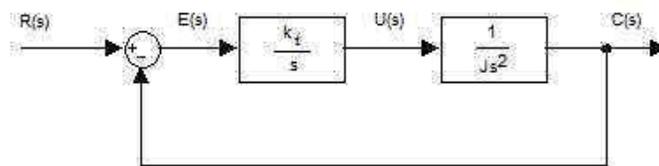


Fig.52: Sistema de carga inercial con control I.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_i}{Js^3 + k_i}$, y como no existen los términos correspondientes a s^2 y s entonces el sistema es inestable, por lo cual no tiene sentido calcular el error del sistema ni el error de estado estacionario del mismo.

En conclusión, el control I tiene los siguientes efectos sobre el sistema: elimina el error de corrimiento en sistemas tipo 0, puede provocar sistemas inestables, puede provocar saturación del actuador, para un error cero se tiene una señal de control no necesariamente cero, el tipo de sistema se incrementa en uno.

4) Control D.

Como ya se mencionó, este controlador asigna en forma derivativa los valores a la señal de control, por lo que esencialmente es un amplificador en configuración de derivador. Matemáticamente está dado por:

$$u(t) = k_d \frac{de(t)}{dt}, \text{ donde } k_d \text{ es la ganancia derivativa del controlador } (k_d > 0)$$

La función de transferencia del controlador D es: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_d s$, y el símbolo en bloques es:

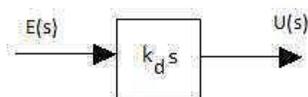


Fig.53: Símbolo de un controlador D.

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta de este tipo de controlador, en donde se observa que si $e(t) = k$ entonces $u(t) = 0$. También se puede deducir que $u(t)$ varía proporcionalmente a la velocidad de cambio de $e(t)$.

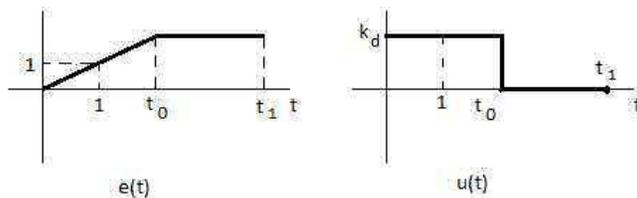


Fig.54: Ejemplo de respuesta de un controlador D.

Un efecto importante que se presenta debido a que es un derivador es que es sensible al ruido que exista en $e(t)$, es decir que amplifica el ruido. También, debido a que es un derivador, se tiene que este control trata de anticiparse al error, es decir que como responde al ritmo de variación del error entonces puede producir una corrección significativa antes de que la magnitud del error sea excesivamente grande.

Obviamente al conectar este controlador a un sistema se modifican sus características tanto estructurales como dinámicas. En general, los cambios estructurales que se producen son:

- Función de transferencia de lazo abierto: la nueva función de transferencia de lazo abierto es $G_c(s)G(s) = k_d s G(s)$, por lo que se agrega un nuevo cero de lazo abierto en $s = 0$ sin cambiar los demás ceros de lazo abierto, no se cambian ni se agregan polos de lazo abierto, y el tipo de sistema disminuye en uno.
- Función de transferencia de lazo cerrado: la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{k_d s G(s)}{1 + k_d s G(s)}$, por lo que se agrega un nuevo cero de lazo cerrado en $s = 0$ sin cambiar los demás ceros de lazo cerrado, no se agregan polos de lazo cerrado pero si se cambian, y el orden del sistema disminuye en uno.

A continuación se considerarán los ejemplos usados en el control P para analizar algunos efectos en la dinámica del sistema que provoca este controlador.

Sistema tipo 0 con control D.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

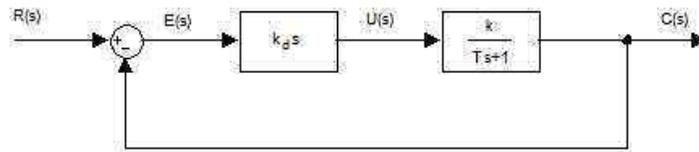


Fig.55: Sistema tipo 0 con control D.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_d k s}{(T + k_d k) s + 1}$, y como $T > 0$, $k_d k > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{T s + 1}{(T + k_d k) s + 1}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una entrada escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 1$. Con esto se concluye que siempre existirá un error de corrimiento de valor 1 independientemente del valor de k_d .

Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control D.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

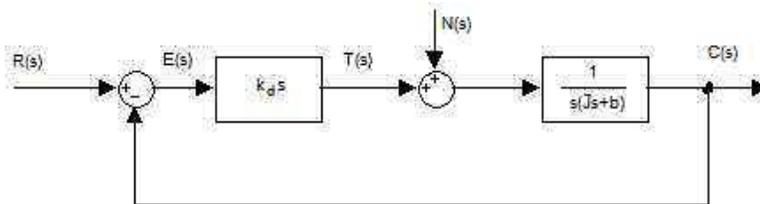


Fig.56: Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control D.

Para el análisis se considerará que la entrada de referencia es cero ($R(s) = 0$). Por lo anterior, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema con respecto a la perturbación es $\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{J s + b + k_d}$, y como $J > 0$, $b > 0$, $k_d > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error con respecto a la perturbación es $\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{J s + b + k_d}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una perturbación escalón de valor T_n ($N(s) = \frac{T_n}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = -\frac{T_n}{b + k_d}$. Con esto se concluye que a mayor valor de la perturbación T_n el error de estado estacionario será mayor, y para disminuir este error se debe aumentar lo más posible el valor de k_d .

Sistema de carga inercial con control D.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

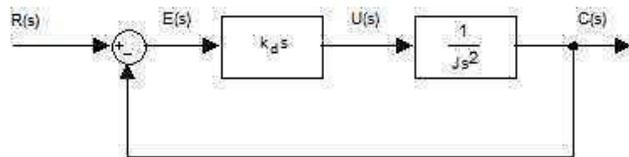


Fig.57: Sistema de carga inercial con control D.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_d}{J s + k_d}$, y como $J > 0$, $k_d > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{J s}{J s + k_d}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una entrada escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0$. Con esto se concluye que se elimina el error de corrimiento del sistema.

En conclusión, el control D tiene los siguientes efectos sobre el sistema: tiene una acción anticipativa al error, es sensible al ruido, para un error constante se tiene una señal de control cero, no afecta directamente el error de estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema permitiendo usar valores de ganancia más grandes lo que

mejora la exactitud en estado estacionario. Debido a sus desventajas, este control generalmente no se usa sólo sino en combinación con otro tipo de control.

5) Control PI.

Como ya se mencionó, este controlador asigna en forma proporcional e integral los valores a la señal de control. Matemáticamente está dado por:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\lambda) d\lambda = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda \right], \text{ donde } T_i \text{ es el tiempo integral del controlador}$$

$$(T_i = \frac{k_p}{k_i} > 0)$$

La función de transferencia del controlador PI es: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = k_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right)$, y el símbolo en bloques es:

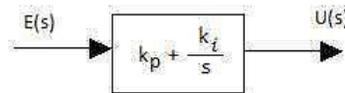


Fig.58: Símbolo de un controlador PI.

El valor $\frac{1}{T_i}$ se llama frecuencia de reposición del controlador e indica el número de veces por minuto que se repite la acción integral.

Como este control combina las acciones P e I, entonces también se combinan los efectos de estas acciones de control.

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta de este tipo de controlador, en donde se observa que si $e(t) = 0$ no necesariamente $u(t) = 0$.

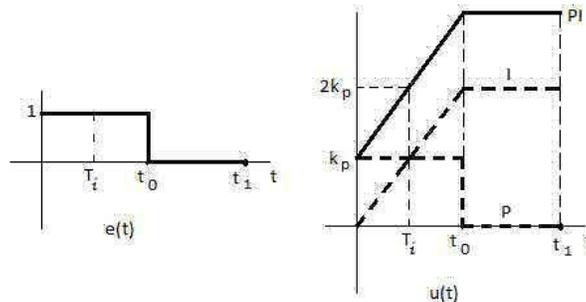


Fig.59: Ejemplo de respuesta de un controlador PI.

Un efecto importante que se presenta debido a la acción integral es que se puede presentar la saturación del actuador.

Obviamente al conectar este controlador a un sistema se modifican sus características tanto estructurales como dinámicas. En general, los cambios estructurales que se producen son:

- Función de transferencia de lazo abierto: la nueva función de transferencia de lazo abierto es $G_c(s)G(s) = k_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right) G(s)$, por lo que se agrega un nuevo cero de lazo abierto en $s = -\frac{1}{T_i}$ sin cambiar los demás ceros de lazo abierto, se agrega un nuevo polo de lazo abierto en $s = 0$ sin cambiar los demás polos de lazo abierto, y el tipo de sistema se incrementa en uno.
- Función de transferencia de lazo cerrado: la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{k_p(T_i s + 1)G(s)}{T_i s + k_p(T_i s + 1)G(s)}$, por lo que se agrega un nuevo cero de lazo cerrado en $s = -\frac{1}{T_i}$ sin cambiar los demás ceros de lazo cerrado, se agrega un nuevo polo de lazo cerrado y se cambian los demás polos de lazo cerrado, y el orden del sistema se incrementa en uno.

A continuación se considerarán los ejemplos usados en el control P para analizar algunos efectos en la dinámica del sistema que provoca este controlador.

Sistema tipo 0 con control PI.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

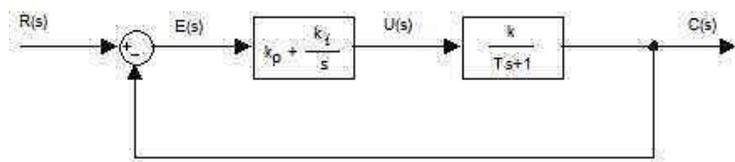


Fig.60: Sistema tipo 0 con control PI.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p k (T_i s + 1)}{T_i T s^2 + (T_i + T_i k_p k) s + k_p k}$, y como $T > 0$, $k > 0$, $k_p > 0$, $k_i > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{T_i T s^2 + T_i s}{T_i T s^2 + (T_i + T_i k_p k) s + k_p k}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una entrada escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0$. Con esto se concluye que se elimina el error de corrimiento del sistema.

Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control PI.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

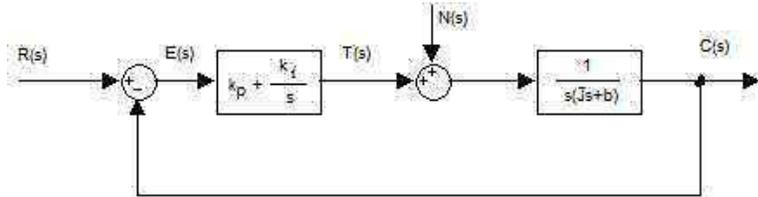


Fig.61: Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control PI.

Para el análisis se considerará que la entrada de referencia es cero ($R(s) = 0$). Por lo anterior, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema con respecto a la perturbación es $\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{T_i s}{T_i J s^3 + T_i b s^2 + T_i k_p s + k_p} = \frac{s}{J s^3 + b s^2 + k_p s + k_i}$, y como $J > 0$, $b > 0$, $k_p > 0$, $T_i > 0$ entonces el sistema puede ser estable al elegir correctamente los valores k_p y T_i , y la función de transferencia del error con respecto a la perturbación es $\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{s}{J s^3 + b s^2 + k_p s + k_i}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una perturbación escalón de valor T_n ($N(s) = \frac{T_n}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0$. Con esto se concluye que se elimina el error de corrimiento del sistema.

Sistema de carga inercial con control PI.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

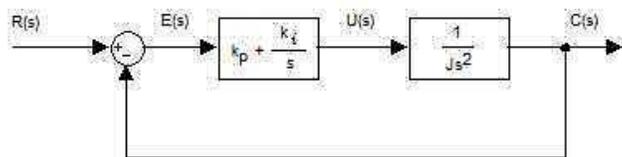


Fig.62: Sistema de carga inercial con control PI.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p (T_i s + 1)}{T_i J s^3 + k_p T_i s + k_p}$, y como no existen el término correspondiente a s^2 entonces el sistema es inestable, por lo cual no tiene sentido calcular el error del sistema ni el error de estado estacionario del mismo.

El propósito del control PI es mejorar la exactitud de estado estacionario del sistema sin degradar la estabilidad.

En conclusión, el control PI tiene los siguientes efectos sobre un sistema: elimina el error de corrimiento en sistemas tipo 0, mejora la estabilidad del sistema, puede provocar sistemas inestables, puede provocar saturación del actuador, para un error cero se tiene una señal de control no necesariamente cero, el amortiguamiento se reduce, el sobreimpulso máximo se incrementa, el tiempo de crecimiento disminuye, el ancho de banda disminuye, los márgenes de ganancia y de fase mejoran, el pico de resonancia mejora, filtra el ruido de alta frecuencia, el tipo de sistema se incrementa en uno, el error de estado estacionario mejora por el incremento del tipo de sistema, el problema de selección de los valores de las ganancias del controlador (para no tener un capacitor en la implementación del circuito excesivamente grande) es más agudo que en el caso del control PD.

6) Control PD.

Como ya se mencionó, este controlador asigna en forma proporcional y derivativa los valores a la señal de control. Matemáticamente está dado por:

$$u(t) = k_p e(t) + k_d \frac{de(t)}{dt} = k_p \left[e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \text{ donde } T_d \text{ es el tiempo derivativo o de adelanto del controlador}$$

$$(T_d = \frac{k_d}{k_p} > 0)$$

La función de transferencia del controlador PD es: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + k_d s = k_p(1 + T_d s)$, y el símbolo en bloques es:

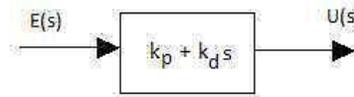


Fig.63: Símbolo de un controlador PD.

Como este control combina las acciones P y D, entonces también se combinan los efectos de estas acciones de control.

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta de este tipo de controlador, en donde se observa que si $e(t) = k$ entonces $u(t) \neq 0$.

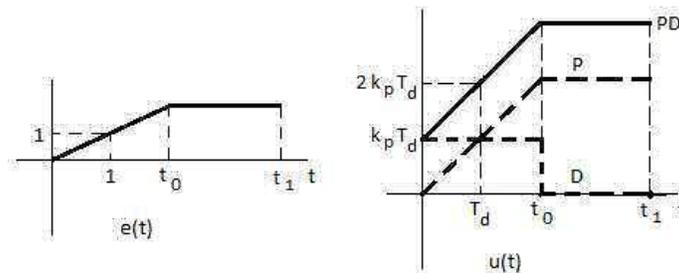


Fig.64: Ejemplo de respuesta de un controlador PD.

Un efecto importante que se presenta debido a la acción derivativa es que es sensible al ruido. También, debido a la acción derivativa, se tiene que este control trata de anticiparse al error.

Obviamente al conectar este controlador a un sistema se modifican sus características tanto estructurales como dinámicas. En general, los cambios estructurales que se producen son:

- Función de transferencia de lazo abierto: la nueva función de transferencia de lazo abierto es $G_c(s)G(s) = k_p(1 + T_d s)G(s)$, por lo que se agrega un nuevo cero de lazo abierto en $s = -\frac{1}{T_d}$ sin cambiar los demás ceros de lazo abierto, no se cambian ni se agregan polos de lazo abierto, y el tipo de sistema no se modifica.
- Función de transferencia de lazo cerrado: la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{k_p(1 + T_d s)G(s)}{1 + k_p(1 + T_d s)G(s)}$, por lo que se agrega un nuevo cero de lazo cerrado en $s = -\frac{1}{T_d}$ sin cambiar los demás

ceros de lazo cerrado, no se agregan polos de lazo cerrado pero si se cambian, y el orden del sistema no se modifica.

A continuación se considerarán los ejemplos usados en el control P para analizar algunos efectos en la dinámica del sistema que provoca este controlador.

Sistema tipo 0 con control PD.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

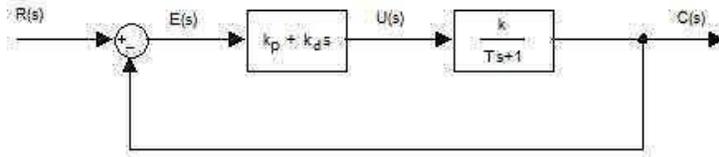


Fig.65: Sistema tipo 0 con control PD.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p k (1 + T_d s)}{(T + T_d k_p k) s + k_p k + 1} = \frac{k_p k (1 + T_d s)}{(T + k_d k) s + k_p k + 1}$, y como $T > 0$, $k > 0$, $k_p > 0$, $T_d > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{T s + 1}{(T + k_d k) s + k_p k + 1}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una entrada escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 1$. Con esto se concluye que siempre existirá un error de corrimiento de valor 1 independientemente del valor de k_d .

Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control PD.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

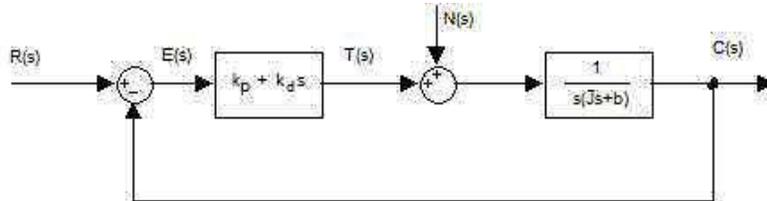


Fig.66: Sistema con un par de perturbación en el elemento de carga con control PD.

Para el análisis se considerará que la entrada de referencia es cero ($R(s) = 0$). Por lo anterior, la función de transferencia de lazo cerrado del sistema con respecto a la perturbación es $\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{1}{Js^2 + (b + k_p T_d) s + k_p} = \frac{1}{Js^2 + (b + k_d) s + k_p}$, y como $J > 0$, $b > 0$, $k_d > 0$, $k_p > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error con respecto a la perturbación es $\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{Js^2 + (b + k_d) s + k_p}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una perturbación escalón de valor T_n ($N(s) = \frac{T_n}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = -\frac{T_n}{k_p}$. Con esto se concluye que a mayor valor de la perturbación T_n el error de estado estacionario será mayor, y para disminuir este error se debe aumentar lo más posible el valor de k_p .

Sistema de carga inercial con control PD.

En la siguiente figura se muestra el sistema considerado:

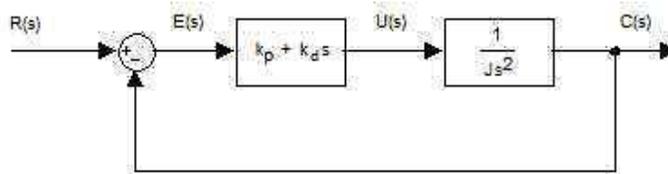


Fig.67: Sistema de carga inercial con control PD.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p(1 + T_d s)}{J s^2 + k_p T_d s + k_p} = \frac{k_p(1 + T_d s)}{J s^2 + k_d s + k_p}$, y como $J > 0$, $k_p > 0$, $T_d > 0$ entonces el sistema es estable y la función de transferencia del error es $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{J s^2}{J s^2 + k_d s + k_p}$. Por lo tanto, el error de estado estacionario del sistema a una entrada escalón unitario ($R(s) = \frac{1}{s}$) es $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = 0$. Con esto se concluye que se elimina el error de corrimiento del sistema.

El propósito del control PD es mejorar la respuesta transitoria del sistema al mismo tiempo que mantiene la estabilidad deseada.

En conclusión, el control PD tiene los siguientes efectos sobre un sistema: tiene una acción anticipativa al error, es sensible al ruido, para un error constante se tiene una señal de control diferente de cero, el amortiguamiento se incrementa, el sobreimpulso máximo se reduce, el tiempo de crecimiento experimenta pequeñas reducciones, el tiempo de establecimiento se reduce, el ancho de banda se incrementa, los márgenes de ganancia y de fase mejoran, el pico de resonancia mejora, el error de estado estacionario presenta pequeños cambios, el tipo de sistema permanece igual, puede acentuar el ruido en altas frecuencias, no es efectivo para sistemas ligeramente amortiguados o inicialmente inestables, puede requerir un capacitor muy grande en la implementación del circuito.

7) Control PID.

Como ya se mencionó, este controlador asigna en forma proporcional, integral y derivativa los valores a la señal de control. Matemáticamente está dado por:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\lambda) d\lambda + k_d \frac{de(t)}{dt} = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

La función de transferencia del controlador PID es: $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = k_p \left(\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right)$, y el símbolo en bloques es:

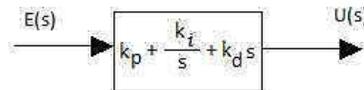


Fig.68: Símbolo de un controlador PID.

Como este control combina las acciones P, I y D, entonces también se combinan los efectos de estas acciones de control.

En la siguiente gráfica se muestra la respuesta de este tipo de controlador, en donde se observa que si $e(t) = k$ entonces $u(t) \neq 0$.

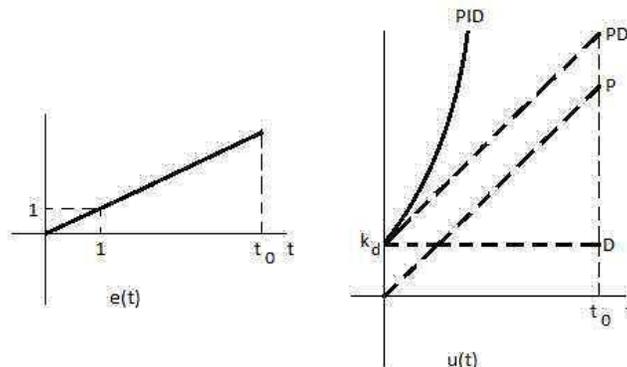


Fig.69: Ejemplo de respuesta de un controlador PID.

Debido a la acción integral puede presentarse saturación del actuador.

Un efecto importante que se presenta debido a la acción derivativa es que es sensible al ruido. También, debido a la acción derivativa, se tiene que este control trata de anticiparse al error.

Obviamente al conectar este controlador a un sistema se modifican sus características tanto estructurales como dinámicas. En general, los cambios estructurales que se producen son:

- Función de transferencia de lazo abierto: la nueva función de transferencia de lazo abierto es $G_c(s)G(s) = k_p \left(\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right) G(s)$, por lo que se agregan dos nuevos ceros de lazo abierto en $s_{1,2} = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d}$ sin cambiar los demás ceros de lazo abierto, se agrega un nuevo polo de lazo abierto en $s = 0$ y los demás polos de lazo abierto no se cambian, y el tipo de sistema se incrementa en uno.
- Función de transferencia de lazo cerrado: la nueva función de transferencia de lazo cerrado es $\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{k_p (T_i T_d s^2 + T_i s + 1) G(s)}{T_i s + k_p (T_i T_d s^2 + T_i s + 1) G(s)}$, por lo que se agregan dos nuevos ceros de lazo cerrado en $s_{1,2} = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d}$ sin cambiar los demás ceros de lazo cerrado, se agrega un nuevo polo de lazo cerrado y se cambian los demás polos de lazo cerrado, y el orden del sistema se incrementa en uno.

Nótese que los ceros que agrega este control se pueden escribir como $s_{1,2} = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d} = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i (T_i - 4T_d)}}{2T_i T_d} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{T_d}{T_i}}}{2T_d}$. Claramente se observa que estos ceros son reales si $T_i \geq 4T_d$, y que si $T_i = 4T_d$ entonces los ceros coinciden en $s_{1,2} = -\frac{1}{2T_d}$, esta elección se utiliza a menudo para simplificar el sintonizado del PID, como se verá en el siguiente tema.

Los ejemplos que se han venido usando para analizar algunos efectos en la dinámica del sistema que provoca el control PID se dejan como ejercicio para los alumnos.

En conclusión, el control PID contiene las mejores características del control PD y del control PI: mejora la estabilidad del sistema, tiene una respuesta anticipatoria al error, disminuye el error de estado estacionario, pero puede causar saturación en el actuador y es sensible al ruido.

Otros aspectos importantes sobre los controladores tipo PID.

Desde el punto de vista de filtrado, el control PD es un filtro pasa altas, el control PI es un filtro pasa bajas, y el control PID es un filtro pasa banda en función de los valores de los parámetros del controlador. Por otro lado, se sabe que un filtro pasa altas introduce fase positiva al sistema en algún intervalo de frecuencias, mientras que el filtro pasa bajas introduce fase negativa. Como se puede deducir, en general, el diseño de controladores en sistemas de control se puede ver como un problema de diseño de filtros, por lo que existe un gran número de esquemas posibles. Estas ideas relacionadas con el filtrado y el corrimiento de fase son útiles si los diseños se realizan en el dominio de la frecuencia.

En los siguientes casos *no se recomienda usar controladores tipo PID*:

- Cuando el sistema tiene un tiempo muerto muy alto.
- Cuando el sistema tiene una dinámica complicada (es de orden alto).
- Cuando el sistema es variante en el tiempo.
- Cuando el sistema es no lineal.

En cambio, en los siguientes procesos industriales *se recomienda usar los controladores tipo PID*:

- Para control de nivel se recomienda usar control P.
- Para control de temperatura se recomienda usar control PID.
- Para control de flujo o control de presión de líquidos se recomienda usar control PI.

En la siguiente figura se muestra un resumen con las principales características que tienen los controladores tipo PID:

Función	Compensador	Función de transferencia	Características
Mejorar error en estado estable	PI	$K \frac{s + z_c}{s}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Aumenta tipo de sistema 2. Error se hace cero 3. El cero en $-z_c$ es pequeño y negativo 4. Se requieren circuitos activos para implementar
Mejorar error en estado estable	Atraso de fase	$K \frac{s + z_c}{s + p_c}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Error mejorado pero no llevado a cero 2. El polo en $-p_c$ es pequeño y negativo 3. El cero en $-z_c$ está cerca y a la izquierda del polo en $-p_c$ 4. No se requieren circuitos activos para implementar
Mejorar respuesta transitoria	PD	$K(s + z_c)$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se selecciona un cero en $-z_c$ para poner el punto de diseño sobre lugar geométrico de las raíces 2. Circuitos activos requeridos para implementar 3. Puede causar ruido y saturación; implementar con realimentación de velocidad o con un polo (adelanto)
Mejorar respuesta transitoria	Adelanto de fase	$K \frac{s + z_c}{s + p_c}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se seleccionan cero en $-z_c$ y polo en $-p_c$ para poner el punto de diseño sobre el lugar geométrico de las raíces 2. El polo en $-p_c$ es más negativo que cero en $-z_c$ 3. No se requieren circuitos activos para implementar
Mejorar el error en estado estable y respuesta transitoria	PID	$K \frac{(s + z_{atraso})(s + z_{adelanto})}{s}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. El cero de atraso en $-z_{atraso}$ y polo en el origen mejoran el error en estado estable 2. El cero de adelanto de fase en $-z_{adelanto}$ mejora la respuesta transitoria 3. El cero de atraso de fase en $-z_{atraso}$ está cerca y a la izquierda del origen 4. Se selecciona un cero de adelanto de fase en $-z_{adelanto}$ para poner punto de diseño sobre el lugar geométrico de las raíces 5. Circuitos activos requeridos para implementar 6. Puede causar ruido y saturación; implementar con realimentación de velocidad o con un polo adicional
Mejorar el error en estado estable y respuesta transitoria	Adelanto-atraso de fase	$K \frac{(s + z_{atraso})(s + z_{adelanto})}{(s + p_{atraso})(s + p_{adelanto})}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se usan un polo de atraso de fase en $-p_{atraso}$ y un cero de atraso de fase en $-z_{atraso}$ para mejorar el error en estado estable 2. Se usan un polo de adelanto de fase en $-p_{adelanto}$ y un cero de adelanto de fase en $-z_{adelanto}$ para mejorar la respuesta transitoria 3. El polo de atraso de fase en $-p_{atraso}$ es pequeño y negativo 4. El cero de atraso de fase en $-z_{atraso}$ está cerca y a la izquierda del polo de atraso de fase en $-p_{atraso}$ 5. Se seleccionan el cero de adelanto de fase en $-z_{adelanto}$ y el polo de adelanto de fase en $-p_{adelanto}$ para poner el punto de diseño sobre el lugar geométrico de las raíces 6. El polo de adelanto de fase en $-p_{adelanto}$ es más negativo que el cero de adelanto de fase en $-z_{adelanto}$ 7. No se requieren circuitos activos para implementar

Fig.70: Características de los controladores tipo PID y de los compensadores.

Los controladores tipo PID que se han analizado son los que se pueden considerar como didácticos o ideales, como es el caso del controlador PID con función de transferencia $\frac{U(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$ que se muestra en la siguiente figura:

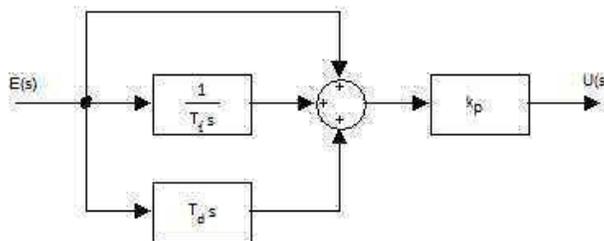


Fig.71: Estructura de un PID ideal o tradicional.

En la práctica, al usar un PID como el que se estudió se pueden presentar otros efectos indeseables en el sistema, es por eso que continuamente se están desarrollando variantes de PID que eliminen o reduzcan esos efectos indeseables. A estos PID se les puede llamar prácticos o reales. A continuación se muestran algunos de estos *PID reales o modificados*, aunque no se analizarán a detalle porque están fuera del alcance del tema, pero se recomienda que los alumnos los consulten en las referencias:

- *Control PI-D*: $U(s) = k_p \left[\left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - T_d s B(s) \right]$, donde $B(s)$ es la señal de retroalimentación:

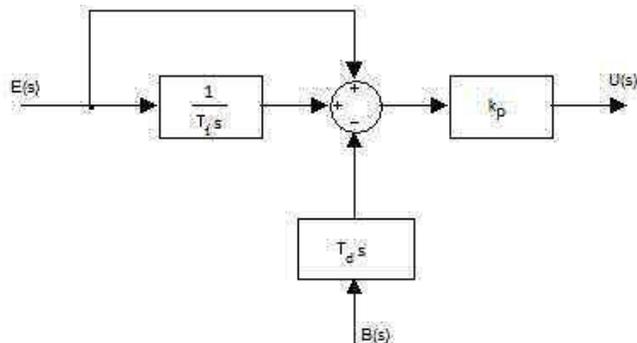


Fig.72: Controlador PI-D.

- *Control I-PD*: $U(s) = k_p \left[\frac{1}{T_i s} E(s) - (1 + T_d s) B(s) \right]$, donde $B(s)$ es la señal de retroalimentación:

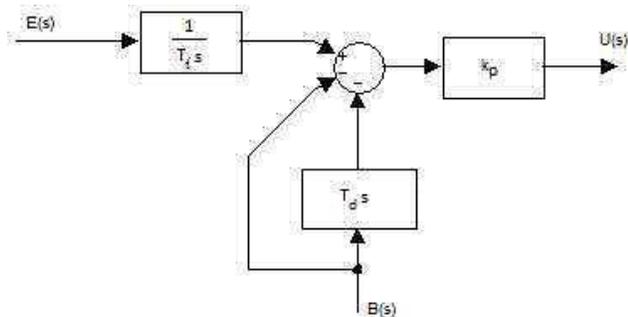


Fig.73: Controlador I-PD.

- *Control PI-PD*: $U(s) = k_{p1} \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - k_{p2} (1 + T_d s) B(s)$, donde $B(s)$ es la señal de retroalimentación. Este es un control de dos grados de libertad. (Los grados de libertad se refieren al número de funciones de transferencias de lazo cerrado independientes que tenga el sistema):

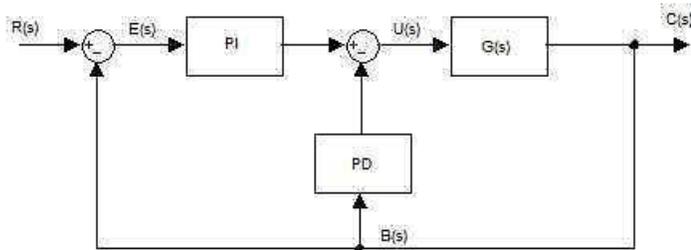


Fig.74: Controlador PI-PD.

- *Control PID-PD*: $U(s) = k_{p1} \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_{d1} s \right) E(s) - k_{p2} (1 + T_{d2} s) B(s)$, donde $B(s)$ es la señal de retroalimentación. Este también es un control de dos grados de libertad:

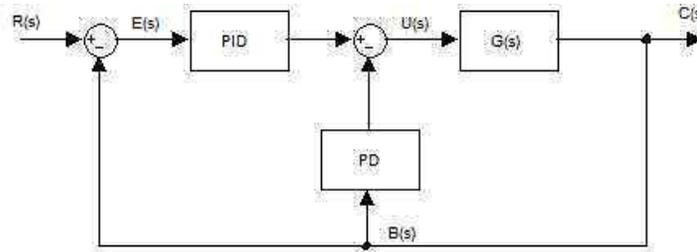


Fig.75: Controlador PID-PD.

2.8 Sintonización de PID's mediante los métodos de Ziegler-Nichols

Sintonización de un PID: consiste en la elección de las ganancias de un PID para lograr un comportamiento deseado en el sistema.

Métodos de sintonización de PID's.

Los métodos de sintonización generalmente son métodos experimentales o de simulación dinámica en donde se utiliza una entrada de prueba, se obtiene la salida y ésta es analizada de acuerdo a las reglas del método usado para obtener los valores de las ganancias del PID. También es posible aplicar estos métodos en forma analítica siempre y cuando se conozcan matemáticamente el sistema y su respuesta.

Algunos *métodos de sintonización* son los siguientes:

1. *Métodos de Ziegler-Nichols.*
2. *Método de Chien-Hrones-Reswick.*
3. *Método de Aström-Hägglund o de autoajuste.*
4. *Método de lugar de las raíces.*
5. *Método de optimización.*
6. *Metodos de dimensionamiento en la frecuencia (usando diagramas de Bode).*
7. *Método de Cohen-Coon.*

A continuación sólo se presentarán los métodos de Ziegler-Nichols debido a que el resto de los métodos están fuera del alcance de este tema, pero se recomienda a los alumnos que los consulten en las referencias.

Ziegler y Nichols propusieron reglas para determinar los valores de las ganancias de un PID basdos en las características de respuesta transitoria de una planta dada. En ambos métodos que propusieron se intenta lograr un 25% de sobreimpulso máximo en la respuesta al escalón unitario del sistema. Generalmente, los métodos de Ziegler-Nichols no se recomiendan cuando el sistema tiene integradores debido a que se obtienen efectos no deseados.

1) Primer método de Ziegler-Nichols o de la curva de reacción o de la curva tipo "S".

Para este método se emplea la configuración de lazo abierto del sistema, como se muestra en la figura siguiente:

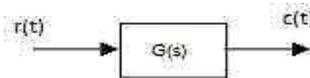


Fig.76: Configuración del primer método de Ziegler-Nichols.

El sistema en lazo abierto se alimenta con una entrada $r(t)$ de prueba escalón unitario, es decir se genera un cambio en la entrada que corresponda a un escalón unitario. Después se obtienen los datos de la salida correspondiente a esta entrada escalón unitario y se grafica dicha salida. Si la salida tiene una forma de "S", como se observa en la

figura siguiente, entonces si es posible aplicar este método de sintonización, sino es así se debe buscar otro método de sintonización.

Una vez que se tiene la curva sigmoide o de forma "S" de la salida se toman los datos que requiere el método. Estos datos se obtienen a partir de la tangente a la curva en el punto de inflexión de la curva, tal como se indica en la siguiente figura:

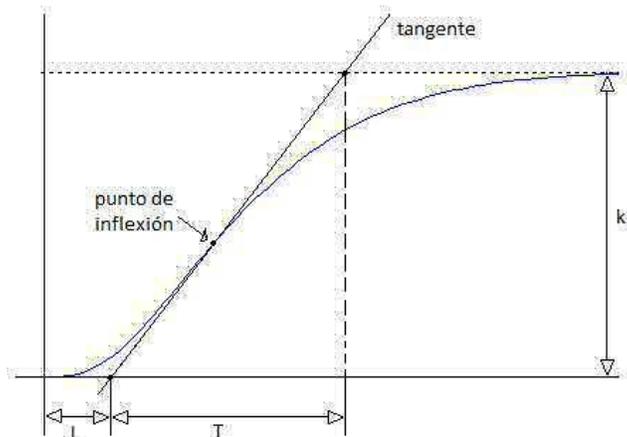


Fig.77: Mediciones de la curva "S" de la salida en el primer método de Ziegler-Nichols.

Con estos datos L (tiempo de atraso del sistema), T (constante de tiempo del sistema) y k (valor final del sistema), se puede aproximar la función de transferencia de lazo cerrado del sistema como un sistema de primer orden con atraso de transporte:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

Finalmente, con los datos obtenidos anteriormente se utiliza la siguiente tabla para obtener las ganancias del controlador deseado:

Tabla 3: Valores del primer método de Ziegler-Nichols.

	k_p	T_i	T_d
Control P	$\frac{T}{kL}$	∞	0
Control PI	$0.9\frac{T}{kL}$	$\frac{L}{0.3}$	0
Control PID	$1.2\frac{T}{kL}$	$2L$	$0.5L$

Con los valores obtenidos se sustituyen en el controlador deseado y ya se procedería a su implementación. Por ejemplo, con este método la función de transferencia del control PID queda

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 1.2\frac{T}{kL} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) = 0.6\frac{T}{k} \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s}$$

por lo que los ceros que agrega este control son $s_{1,2} = -\frac{1}{L}$.

2) Segundo método de Ziegler-Nichols o de máxima ganancia o de resonancia.

Para este método se emplea la configuración de lazo cerrado del sistema con una ganancia variable, como se muestra en la figura siguiente:

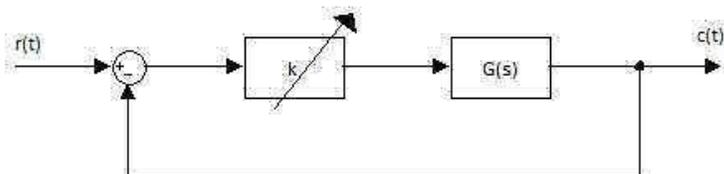


Fig.78: Configuración del segundo método de Ziegler-Nichols.

El sistema en lazo cerrado se alimenta con una entrada $r(t)$ de prueba escalón unitario, es decir se genera un cambio en la entrada que corresponda a un escalón unitario. Después se varía la ganancia variable k hasta que el sistema entre en resonancia, es decir hasta que la salida sea oscilatoria (senoidal) pura, como se observa en la figura siguiente. Si la salida es oscilatoria, entonces si es posible aplicar este método de sintonización, sino es así se debe buscar otro método de sintonización.

Una vez que se tiene la respuesta oscilatoria del sistema se toman los datos que requiere el método. Estos datos (T_o periodo de la señal oscilatoria) se obtienen a partir de la curva oscilatoria de la salida, obtenida con el valor de la ganancia de resonancia o de máxima ganancia k_o ajustada, tal como se indica en la siguiente figura:

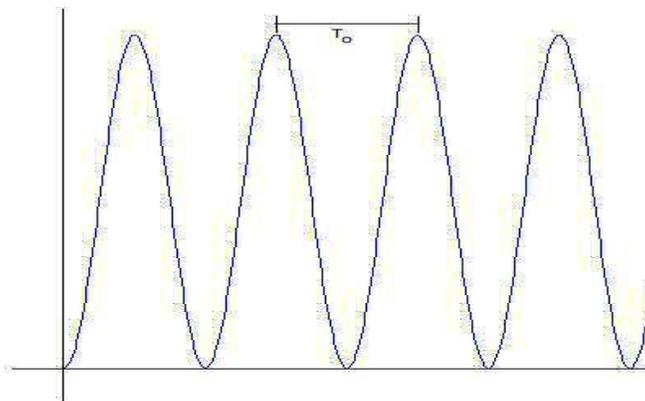


Fig.79: Mediciones de la respuesta resonante en el segundo método de Ziegler-Nichols.

Finalmente, con los datos obtenidos anteriormente se utiliza la siguiente tabla para obtener las ganancias del controlador deseado:

Tabla 4: Valores del segundo método de Ziegler-Nichols.

	k_p	T_i	T_d
Control P	$0.5k_o$	∞	0
Control PI	$0.45k_o$	$\frac{T_o}{1.2}$	0
Control PID	$0.6k_o$	$0.5T_o$	$0.125T_o$

Con los valores obtenidos se sustituyen en el controlador deseado y entonces se procedería a su implementación. Por ejemplo, con este método la función de transferencia del control PID queda

$$G_{PID}(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 0.6k_o \left(1 + \frac{1}{0.5T_o s} + 0.125T_o s \right) = 0.075k_o T_o \frac{\left(s + \frac{4}{T_o} \right)^2}{s}$$

por lo que los ceros que agrega este control son $s_{1,2} = -\frac{4}{T_o}$.

Como se puede observar, los métodos de Ziegler-Nichols sólo sirven para obtener los controladores P, PI y PID, así que si se quiere diseñar un control PD se tendría que usar otro método, por ejemplo el método de Cohen-Coon permite diseñar los controladores P, PI, PD y PID.

Para concluir este tema a continuación se muestra la siguiente figura que proporciona la información necesaria para implementar electrónicamente los controladores tipo PID mediante circuitos activos (usando amplificadores operacionales). Observe que la función del segundo amplificador es la de invertir la señal regresándola a su polaridad inicial, esto debido a que todo amplificador operacional causa una inversión de la señal. Para usar esta tabla se igualan los valores de las ganancias obtenidos en la sintonización con su correspondiente par en la función de transferencia de la tabla, y se resuelve el sistema de ecuaciones así obtenido para determinar los valores de los componentes electrónicos del circuito deseado. Note que en este sistema de ecuaciones siempre hay más incógnitas que ecuaciones.

	Acción de control	$G(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)}$	Circuitos de amplificador operacional
1	P	$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1}$	
2	I	$\frac{R_4}{R_3} \frac{1}{R_1 C_2 s}$	
3	PD	$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} (R_1 C_1 s + 1)$	
4	PI	$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{R_2 C_2 s}$	
5	PID	$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \frac{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{R_2 C_2 s}$	
6	Adelanto o retardo	$\frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$	
7	Adelanto-retardo	$\frac{R_6 R_4}{R_5 R_3} \frac{[(R_1 + R_3)C_1 s + 1](R_2 C_2 s + 1)}{(R_1 C_1 s + 1)[(R_2 + R_4)C_2 s + 1]}$	

Fig.80: Implementación de los controladores PID y de los compensadores con circuitos activos.

Una forma de simplificar la anterior implementación consiste en enfocarse únicamente en el primer amplificador, debido a que es en él en donde recae la función. Con este enfoque se utilizarían las siguientes figuras:

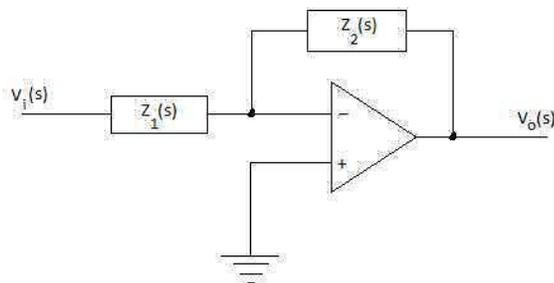


Fig.81: Amplificador operacional para implementar los controladores tipo PID y los compensadores.

Función	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Ganancia			$-\frac{R_2}{R_1}$
Integración			$-\frac{1}{RCs}$
Diferenciación			$-RCs$
Controlador PI			$-\frac{R_2}{R_1} \left(s + \frac{1}{R_2 C} \right)$
Controlador PD			$-R_2 C \left(s + \frac{1}{R_1 C} \right)$
Controlador PID			$-\left[\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right) + R_2 C_1 s + \frac{1}{R_1 C_2} \right]$
Compensación de atraso de fase			$-\frac{C_1}{C_2} \left(\frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \right)$ donde $R_2 C_2 > R_1 C_1$
Compensación de adelanto de fase			$-\frac{C_1}{C_2} \left(\frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \right)$ donde $R_1 C_1 > R_2 C_2$

Fig.82: Elementos de impedancia usados en el amplificador operacional de la Fig.80.

Al utilizar este enfoque simplificado no hay que olvidar la necesidad de utilizar un inversor para recuperar la polaridad inicial, además es posible construir el compensador de atraso-adelanto conectando en cascada un compensador de atraso con un compensador de adelanto.

Finalmente, no hay que olvidar que en el diseño de un controlador siempre cabe la posibilidad de la incertidumbre (inexactitud) en los parámetros del sistema, por lo que siempre es recomendable una verificación constante del funcionamiento del controlador, esto es una vez que se llega a un diseño teórico hay que comprobarlo o verificarlo a través de cálculos, hacer ajustes si es necesario y verificar nuevamente a través de simulación, hacer ajustes si es necesario y ahora si implementarlo físicamente dejando siempre la forma de realizar ajustes a los parámetros del controlador (a través de potenciómetros, por ejemplo) para realizar el ajuste final del mismo, y si es posible antes de conectarlo a la planta real realizar una prueba física a escala.

Ejemplos: Sintonzar un PID y un PI para los siguientes sistemas:

a) $G(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 5s}$.

b) $G(s) = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}$.

3 Método de respuesta transitoria

3.1 Análisis de respuesta transitoria de un sistema

Método de respuesta transitoria: es un método que muestra la salida, y sus características, de un sistema a una entrada escalón unitario sin condiciones iniciales.

Antes de presentar el método de respuesta transitoria es necesario recordar los siguientes conceptos sobre la dinámica de un sistema.

Estado de equilibrio de un sistema: es la condición o valor (estado) en que se mantiene o permanece la salida de un sistema en ausencia de entradas externas y sin c.i.

Estabilidad absoluta de un sistema: es la propiedad o capacidad que tiene el sistema de regresar a su estado de equilibrio cuando sólo existe c.i. sin entradas externas.

Un sistema es *inestable (no estable) absoluto* cuando no tiene la capacidad de regresar a su estado de equilibrio cuando sólo existe c.i. sin entradas externas.

Estabilidad relativa de un sistema: es una medida del grado de estabilidad de un sistema, es decir permite saber cuán cerca está el sistema de la inestabilidad. En otras palabras, permite saber cuánto se puede "mover" el sistema sin que caiga en la inestabilidad.

Respuesta transitoria o de estado transitorio, $c_{ts}(t)$: es la parte de la salida del sistema que desaparece (se hace cero) cuando el tiempo se vuelve muy grande ($t \rightarrow \infty$).

Respuesta permanente o de estado estacionario, $c_{ss}(t)$: es la parte de la salida del sistema que permanece cuando el tiempo se vuelve muy grande ($t \rightarrow \infty$).

Recordemos que la salida completa de un sistema es: $c(s) = c_{ts}(t) + c_{ss}(t)$.

Como consecuencia de la definición de la estabilidad absoluta se tiene que un sistema estable absoluto tiene la característica de que su respuesta transitoria, cuando sólo existen c.i. sin entradas externas, se hace cero cuando el tiempo tiende a infinito.

Condición necesaria y suficiente para la estabilidad (absoluta) de un sistema: el sistema es estable si y sólo si todos los polos de su función de transferencia de lazo cerrado tienen parte real estrictamente negativa, esto es si gráficamente sus polos de lazo cerrado se ubican en el semiplano izquierdo abierto del plano complejo.

Como consecuencia de la condición necesaria y suficiente para la estabilidad de un sistema y de la definición de estabilidad relativa se deduce que la estabilidad relativa corresponde a la distancia que existe entre el eje imaginario y los polos de lazo cerrado del sistema que estén más cerca de él, por lo que a mayor distancia mayor estabilidad relativa.

Por otra parte, en este método de respuesta transitoria se utiliza la función de transferencia de lazo cerrado del

sistema:
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} .$$

Orden de un sistema: es la característica o propiedad de un sistema que indica el grado de complejidad del mismo. Matemáticamente corresponde al orden de la ecuación diferencial del sistema (es decir a la máxima derivada de la salida en la ecuación diferencial), o bien corresponde al orden de la función de transferencia de lazo cerrado del sistema (esto es al grado del polinomio del denominador de la función de transferencia o polinomio característico del sistema).

Clasificación de sistemas de acuerdo a su orden:

- *Sistemas de primer orden:* es cuando el sistema tiene orden 1, esto es $n = 1$.
- *Sistemas de segundo orden:* es cuando el sistema tiene orden 2, esto es $n = 2$.
- *Sistemas de orden superior:* es cuando el sistema tiene orden n .

Para aplicar el método de respuesta transitoria se utilizan las siguientes entradas de prueba: impulso unitario, escalón unitario y rampa unitaria. Sin embargo, el escalón unitario es la entrada que se utiliza por default debido a que matemáticamente es simple, es fácil de generar físicamente y es lo suficientemente drástica para brindar información relevante del sistema. Es por ello que al hablar de método de respuesta transitoria inmediatamente se presupone que la entrada es escalón unitario, salvo que se indique lo contrario, sin olvidar que las condiciones iniciales son cero.

El análisis de respuesta transitoria de un sistema consiste en obtener: la ecuación de la salida, la gráfica de la salida, y los valores de los parámetros de desempeño o de respuesta transitoria del sistema. Los parámetros de respuesta transitoria son valores que describen el comportamiento de la salida del sistema y que indican que tan "bueno" o eficiente es el sistema.

A continuación se realizará el análisis de respuesta transitoria de los diferentes sistemas, de acuerdo a su orden, a una entrada escalón unitario. Si se desea conocer la respuesta transitoria a entradas impulso unitario o rampa unitaria se puede realizar un análisis similar al que se presentará o bien consultarlo en las referencias.

1) Sistemas de primer orden.

En control se consideran dos grupos de sistemas de primer orden: los estándar y los no estándar. Los sistemas de primer orden estándar se llaman así por tener una forma matemática común y por ser muy frecuentes en control, mientras que los no estándar no tienen esa forma matemática y son menos frecuentes en control. A continuación se muestra la obtención de la respuesta transitoria de sistemas de primer orden estándar estables.

La forma matemática de un sistema de primer orden estándar es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_s}{Ts + 1}$$

con los siguientes parámetros del sistema: k_s es la ganancia del sistema y T es la constante de tiempo del sistema. Normalmente se considera que $k_s > 0$. Observe que si $T < 0$ entonces el sistema es inestable, y que si $T > 0$ entonces es estable. Por ello, para tener un análisis de respuesta transitoria coherente o que tenga sentido se considera que $T > 0$.

Si la entrada es un escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s}$, entonces la salida está dada por $C(s) = \left(\frac{k_s}{Ts + 1}\right) \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{k_s}{s(Ts + 1)}$.

Al aplicar descomposición en fracciones parciales se obtiene: $C(s) = \frac{k_s}{s} - \frac{k_s T}{Ts + 1} = \frac{k_s}{s} - \frac{k_s}{s + \frac{1}{T}}$.

Y al aplicar transformada inversa de Laplace se obtiene la salida del sistema de primer orden estándar a una entrada escalón unitario:

$$c(t) = k_s \left[1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right], \quad t \geq 0$$

Ahora bien, para obtener la gráfica de la salida se obtienen los siguientes puntos de muestra:

$c(0) = 0$	$c(3T) = 0.9502k_s$
$c(\infty) = k_s$	$c(4T) = 0.9816k_s$
$c(T) = 0.6321k_s$	$c(5T) = 0.9932k_s$
$c(2T) = 0.8646k_s$	$c(6T) = 0.9975k_s$

Y observe que $c(\infty) = k_s$. Por lo anterior, la gráfica de la salida de un sistema de primer orden estándar a un escalón unitario tiene la forma que se muestra en la siguiente figura:

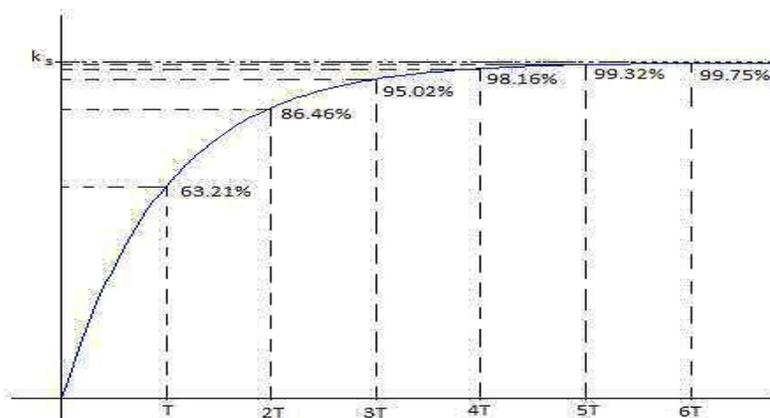


Fig.83: Respuesta de un sistema de primer orden estándar a un escalón unitario.

Ahora bien, los parámetros de respuesta transitoria para un sistema de primer orden son:

1. *Valor final*, ϕ : es el valor que toma la salida del sistema cuando el tiempo tiende a infinito, esto es $\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c(\infty)$.

2. *Tiempo de establecimiento, de asentamiento, de estabilización o de respuesta, t_s* : es el tiempo que tarda la salida del sistema en alcanzar su etapa de respuesta de estado estacionario.

De la tabla de valores muestra de la salida y de la gráfica misma se observa que para los sistemas de primer orden estándar la etapa de respuesta de estado estacionario se alcanza para $t = \infty$, por lo que este valor no es un valor práctico para el t_s . Debido a lo anterior, en la práctica se debe considerar un umbral en el que ya no cambie "demasiado" la salida como el punto en que comienza la respuesta de estado estacionario, normalmente se considera que este punto ocurre cuando la salida alcanza aproximadamente el 98% de su valor final.

De acuerdo a lo anterior se tiene que los parámetros de desempeño de un sistema de primer orden estándar toman los valores de: $\phi = k_s$, y $t_s = 4T$.

Claramente se observa que para tener un tiempo de respuesta pequeño, T debe ser pequeño.

Si el sistema de primer orden fuera no estándar entonces su análisis de respuesta transitoria se debe realizar con todos los pasos, esto es no se puede simplificar usando únicamente los fórmulas que se obtuvieron para sistemas de primer orden estándar.

Ejemplos: Realizar el análisis de respuesta transitoria de los siguientes sistemas:

a) $G(s) = \frac{5}{s+1}$, $H(s) = 1$.

b) $G(s) = \frac{3}{2s+3}$, $H(s) = 1$.

c) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s+5}$.

d) $G(s) = \frac{10}{3s+4}$, $H(s) = 1$.

e) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s}{2s+3}$.

f) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{2s+3}$.

2) Sistemas de segundo orden.

Al igual que los sistemas de primer orden, se tienen dos grupos de sistemas de segundo orden: los estándar y los no estándar. Los sistemas de segundo orden estándar se llaman así por tener una forma matemática común y por ser muy frecuentes en control, mientras que los no estándar no tienen esa forma matemática y son menos frecuentes en control. A continuación se muestra la obtención de la respuesta transitoria de sistemas de segundo orden estándar estables.

Para mejor comprensión de los sistemas de segundo orden primero se verá brevemente su origen. El origen de los sistemas de segundo orden viene del movimiento oscilatorio armónico presentado por sistemas mecánicos y otros. Un sistema mecánico con esta característica tiene la siguiente función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{Js^2 + Bs + k}$$

donde J es el momento de inercia del cuerpo, B es el amortiguamiento existente, y k es la constante de restitución del resorte torsional. Dentro de estos sistemas se sabe que esta función se puede escribir como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde $\omega_n^2 = \frac{k}{J}$, $\xi = \frac{B}{B_c}$, y $B_c = 2\sqrt{Jk}$. El valor ω_n se llama frecuencia natural no amortiguada del sistema (valor de frecuencia en el que el sistema oscilará si no hay amortiguamiento), B_c es el amortiguamiento crítico del sistema (valor mínimo de amortiguamiento en el que el sistema deja de oscilar), y ξ es el amortiguamiento relativo del sistema (cociente del amortiguamiento real entre el amortiguamiento crítico del sistema), además se puede definir la atenuación del sistema (valor con el cual decae la amplitud de las oscilaciones de un sistema) como $\sigma = \xi\omega_n = \frac{B}{2J}$. Estos valores son característicos del sistema y de la forma de su respuesta, como se verá a continuación.

La forma matemática de un sistema de segundo orden estándar es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_s\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

con los siguientes parámetros del sistema: k_s es la ganancia del sistema, ω_n $\left[\frac{rad}{seg} \right]$ es la frecuencia natural no amortiguada del sistema, y ξ [adimensional] es el amortiguamiento relativo del sistema. Normalmente se considera

que $k_s > 0$. Observe que los polos del sistema están dados por $-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$, entonces para determinar los casos de estabilidad de este sistema se considerará que $\omega_n > 0$ y se verá lo que sucede al variar ξ :

- $\xi < 0$: primero note que si $\xi = -1$ entonces los polos son reales repetidos de valor $\omega_n > 0$. Ahora bien, si $-1 < \xi < 0$ entonces los polos son complejos conjugados de valor $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ y con parte real $-\xi\omega_n > 0$. Y si $\xi < -1$ entonces los polos son reales diferentes de valor $-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$, pero como $\xi > \sqrt{\xi^2 - 1}$ entonces el signo de ambos polos queda determinado por $-\xi\omega_n > 0$. Por lo tanto, para $\xi < 0$ el sistema es inestable.
- $\xi = 0$: los polos son imaginarios conjugados de valor $\pm j\omega_n$, por lo que el sistema es críticamente estable, oscilatorio o no amortiguado ($B = 0$).
- $0 < \xi < 1$: los polos son complejos conjugados de valor $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ y con parte real $-\xi\omega_n < 0$, por lo que el sistema es estable subamortiguado ($B < B_c$).
- $\xi = 1$: los polos son reales repetidos de valor $-\omega_n < 0$, por lo que el sistema es estable críticamente amortiguado ($B = B_c$).
- $\xi > 1$: los polos son reales diferentes de valor $-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$, pero como $\xi > \sqrt{\xi^2 - 1}$ entonces el signo de ambos polos queda determinado por $-\xi\omega_n < 0$, por lo que el sistema es estable sobreamortiguado ($B > B_c$).

Los resultados anteriores son consistentes con el comportamiento físico de un sistema: $\xi > 0$ significa que el sistema disipa (pierde) energía y $\xi < 0$ que absorbe (gana) energía, y la presencia de un amortiguador en el sistema disipa la energía del mismo.

Un análisis similar se puede hacer considerando $\omega_n < 0$, pero como ω_n es una frecuencia de "giro" (por definición es un valor positivo y el signo sólo indica si gira a la derecha o a la izquierda) no tiene sentido físico proponer este caso. Por lo anterior, para tener un análisis de respuesta transitoria coherente o que tenga sentido se considera que $\omega_n > 0$ y $\xi > 0$ para tener sistemas estables.

a) *Sistemas de segundo orden subamortiguados* ($0 < \xi < 1$).

Un sistema de segundo orden subamortiguado estándar tiene la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_s\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

y sus polos están dados por $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} = -\sigma \pm j\omega_d$. Donde $\sigma = \xi\omega_n \left[\frac{rad}{seg} \right]$ es la atenuación del sistema y $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \left[\frac{rad}{seg} \right]$ es la frecuencia natural amortiguada del sistema (valor de frecuencia en el que el sistema oscilará cuando tiene un amortiguamiento específico).

Si la entrada es un escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s}$, entonces la salida está dada por $C(s) = \left(\frac{k_s\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{k_s\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$.

Al aplicar descomposición en fracciones parciales se obtiene: $C(s) = \frac{k_s}{s} - \frac{k_s(s + 2\xi\omega_n)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$.

Ahora, al completar trinomio cuadrado perfecto se tiene: $C(s) = \frac{k_s}{s} - \frac{k_s(s + 2\xi\omega_n)}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} = \frac{k_s}{s} - \frac{k_s(s + \xi\omega_n)}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{k_s(\xi\omega_n)}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$.

Y al aplicar transformada inversa de Laplace se obtiene la salida del sistema de segundo orden subamortiguado estándar a una entrada escalón unitario:

$$c(t) = k_s \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t) \right] \right\} = k_s \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \left[\omega_d t + \arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right] \right\}, \quad t \geq 0$$

Observe que $c(0) = 0$ y que $c(\infty) = k_s$. Además, la salida del sistema presenta oscilaciones senoidales (debido a los términos trigonométricos) con frecuencia ω_d , mismas que van disminuyendo de amplitud conforme avanza el tiempo (debido al factor exponencial) con atenuación $\xi\omega_n$. Por lo tanto, la gráfica de la salida de un sistema de segundo orden

subamortiguado estándar a un escalón unitario tiene la forma que se muestra en la figura siguiente:

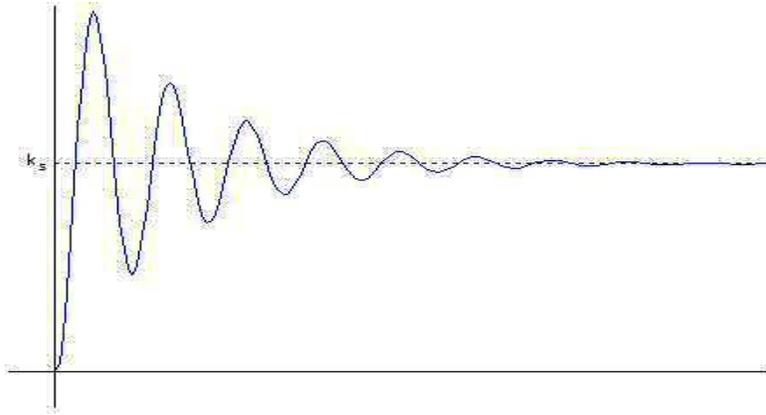


Fig.84: Respuesta de un sistema de segundo orden estándar subamortiguado a un escalón unitario.

b) *Sistemas de segundo orden críticamente estables* ($\xi = 0$).

Un sistema de segundo orden críticamente estable estándar tiene la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_s \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

y sus polos están dados por $p_{1,2} = \pm j\omega_n$. Para obtener su respuesta a un escalón unitario con facilidad y rapidez se considerará la salida de un sistema de segundo orden subamortiguado estándar a un escalón unitario, que es:

$$c(t) = k_s \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right] \right\}$$

Ahora bien, la salida buscada se obtiene aplicando el siguiente límite a la expresión anterior:

$$c(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} k_s \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right] \right\}$$

Por lo que la salida de un sistema de segundo orden críticamente estable estándar es:

$$c(t) = k_s [1 - \cos(\omega_n t)] \quad , \quad t \geq 0$$

Observe que $c(0) = 0$ y que $c(\infty)$ no está definido, ya que la salida del sistema presenta oscilaciones senoidales mantenidas con frecuencia ω_n y amplitud k_s (debido al término trigonométrico y a la ausencia de factor exponencial). Por lo anterior, la gráfica de un sistema de segundo orden críticamente estable estándar a un escalón unitario tiene la forma que se muestra en la figura siguiente:

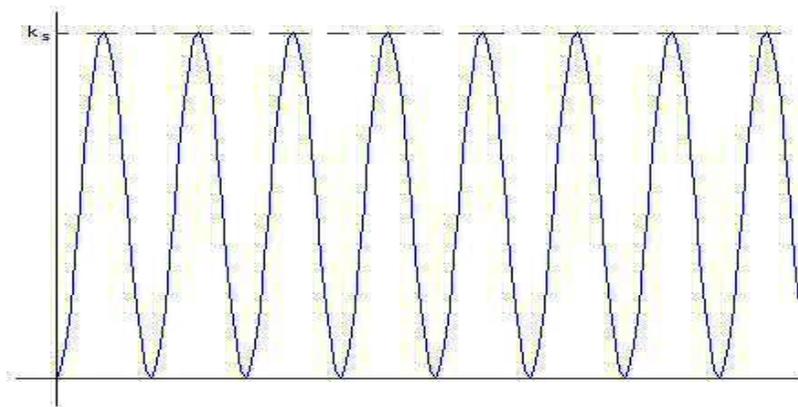


Fig.85: Respuesta de un sistema de segundo orden estándar críticamente estable a un escalón unitario.

c) *Sistemas de segundo orden críticamente amortiguados* ($\xi = 1$).

Un sistema de segundo orden críticamente amortiguado estándar tiene la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_s \omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k_s \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

y sus polos están dados por $p_{1,2} = -\omega_n$.

En este caso no se puede aplicar $\lim_{\xi \rightarrow 1}$ a la salida de un sistema de segundo orden subamortiguado estándar a un escalón unitario debido a que se obtendría términos no definidos, por lo cual se realizará paso a paso.

Si la entrada es un escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s}$, entonces la salida está dada por $C(s) = \left(\frac{k_s \omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{k_s \omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$.

Al aplicar descomposición en fracciones parciales se obtiene: $C(s) = \frac{k_s}{s} - \frac{k_s}{(s + \omega_n)} - \frac{k_s \omega_n}{(s + \omega_n)^2}$.

Y al aplicar transformada inversa de Laplace se obtiene la salida del sistema de segundo orden críticamente amortiguado estándar a una entrada escalón unitario:

$$c(t) = k_s [1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)], \quad t \geq 0$$

Observe que $c(0) = 0$ y que $c(\infty) = k_s$. Además, la salida del sistema no presenta oscilaciones senoidales (debido a la ausencia de términos trigonométricos), pero tiene un crecimiento exponencial similar al de los sistemas de primer orden estándar (debido al factor exponencial). Por lo tanto, la gráfica de la salida de un sistema de segundo orden críticamente amortiguado estándar a un escalón unitario tiene la forma que se muestra en la siguiente figura:

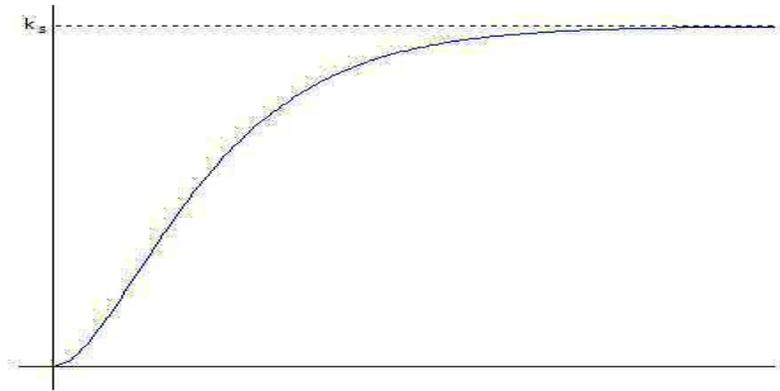


Fig.86: Respuesta de un sistema de segundo orden estándar críticamente amortiguado a un escalón unitario.

d) *Sistemas de segundo orden sobreamortiguados* ($\xi > 1$).

Un sistema de segundo orden sobreamortiguado estándar tiene la forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_s \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k_s \omega_n^2}{(s + s_1)(s + s_2)}$$

donde $s_{1,2} = \xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ (note que $s_2 < s_1$) y sus polos están dados por $p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} = -s_{1,2}$.

Si la entrada es un escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s}$, entonces la salida está dada por $C(s) = \left(\frac{k_s \omega_n^2}{(s + s_1)(s + s_2)} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{k_s \omega_n^2}{s(s + s_1)(s + s_2)}$.

Al aplicar descomposición en fracciones parciales se obtiene: $C(s) = \frac{k_s \omega_n^2}{s_1 s_2} + \frac{k_s \omega_n}{2s_1 \sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{(s + s_1)} - \frac{k_s \omega_n}{2s_2 \sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{(s + s_2)} = \frac{k_s}{s} + \frac{k_s \omega_n}{2s_1 \sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{(s + s_1)} - \frac{k_s \omega_n}{2s_2 \sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{1}{(s + s_2)}$.

Y al aplicar transformada inversa de Laplace se obtiene la salida del sistema de segundo orden sobreamortiguado estándar a una entrada escalón unitario:

$$c(t) = k_s \left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2} \right) \right], \quad t \geq 0$$

Observe que $c(0) = 0$ y que $c(\infty) = k_s$. Además, la salida del sistema no presenta oscilaciones senoidales (debido a la ausencia de términos trigonométricos), pero tiene un crecimiento exponencial similar al de los sistemas de primer orden estándar (debido a que $s_2 < s_1$, por lo que $e^{-s_1 t} < e^{-s_2 t}$ en cualquier instante t). Por lo anterior, la gráfica de la salida de un sistema de segundo orden sobreamortiguado estándar a un escalón unitario tiene la forma que se muestra en la siguiente figura:

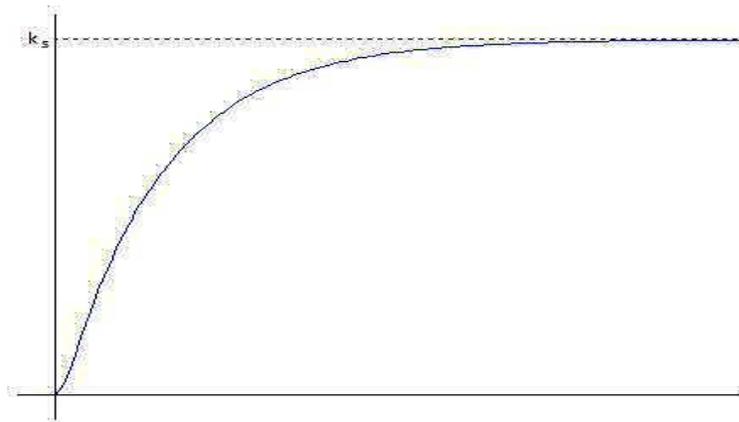


Fig.87: Respuesta de un sistema de segundo orden estándar sobreamortiguado a un escalón unitario.

e) *Parámetros de desempeño o de respuesta transitoria a un escalón unitario de sistemas de segundo orden.*

Los parámetros de respuesta transitoria para un sistema de segundo orden son:

1. *Valor final, ϕ* : es el valor que toma la salida del sistema cuando el tiempo tiende a infinito, esto es $\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c(\infty)$.
2. *Tiempo de retardo, t_d* : es el tiempo que tarda la salida del sistema en alcanzar el 50% de su valor final.
3. *Tiempo de crecimiento, de subida o de levantamiento, t_r* : si el sistema es subamortiguado es el tiempo que tarda la salida del sistema en alcanzar por primera vez su valor final. Si el sistema es críticamente amortiguado o sobreamortiguado es el tiempo que tarda la salida del sistema en pasar del 10% al 90% de su valor final, o bien en pasar del 5% al 95% de su valor final (normalmente se utiliza el primero)
4. *Tiempo pico, t_p* : es el tiempo que tarda la salida del sistema en alcanzar su pico máximo de valor, esto es su primer pico de sobreelongación.
5. *Sobreimpulso máximo, sobrepico máximo, sobretiro máximo o sobreelongación máxima, M_p* : es el valor que toma la salida del sistema cuando alcanza su pico máximo medido a partir de su valor final, esto es $M_p = c(t_p) - \phi$. Para tener una medida absoluta del sobreimpulso máximo es común expresarlo en porcentaje: $\%M_p = 100 \frac{M_p}{\phi} = 100 \frac{c(t_p) - \phi}{\phi}$.
6. *Tiempo de establecimiento, de asentamiento, de estabilización o de respuesta, t_s* : es el tiempo que tarda la salida del sistema en alcanzar su etapa de respuesta de estado estacionario. Debido a que la salida del sistema puede presentar oscilaciones, el tiempo de establecimiento de un sistema de segundo orden se establece haciendo una extensión del caso de sistemas de primer orden: el tiempo de establecimiento de un sistema de segundo orden es el tiempo que tarda la salida del sistema en entrar, y no volver a salir de ahí, en un rango de $\pm 2\%$ o de $\pm 5\%$ de su valor final.

Algunos autores incluyen algunos otros parámetros, como son:

- *Periodo de oscilación, de amortiguamiento o amortiguado, T_d* : es el tiempo que tarda un ciclo de onda de la salida del sistema, esto es $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$.
- *Razón de decrecimiento, de decaimiento, de decremento o de asentamiento, R_d* : es el valor que indica la proporción en que disminuyen las oscilaciones de la salida del sistema. Se puede establecer entre los dos primeros picos

positivos, $R_d = \frac{\text{segundo pico} +}{\text{primer pico} +} = e^{-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, o bien entre los dos primeros picos, $R_d = \frac{\text{primer pico} -}{\text{primer pico} +} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, lo más común es utilizar este último.

- *Número de oscilaciones, N_o* : es la cantidad de ciclos de onda que presenta la salida del sistema antes de alcanzar su etapa de estado estacionario, es decir antes de t_s , por lo que matemáticamente es $N_o = \frac{t_s}{T_d}$.

De todos estos parámetros los más utilizados son los primeros debido a que estos tres últimos o son redundantes, como la razón de decrecimiento que está relacionada con el sobreimpulso máximo, o son muy obvios, como los otros dos.

También se puede observar que muchos de estos parámetros tienen sentido si la salida del sistema presenta oscilaciones, es decir si es un sistema subamortiguado, ya que debido a su definición no se puede establecer su valor para sistemas críticamente amortiguados o sobreamortiguados. Por ello, a continuación se muestran gráficamente estos parámetros para un sistema subamortiguado:

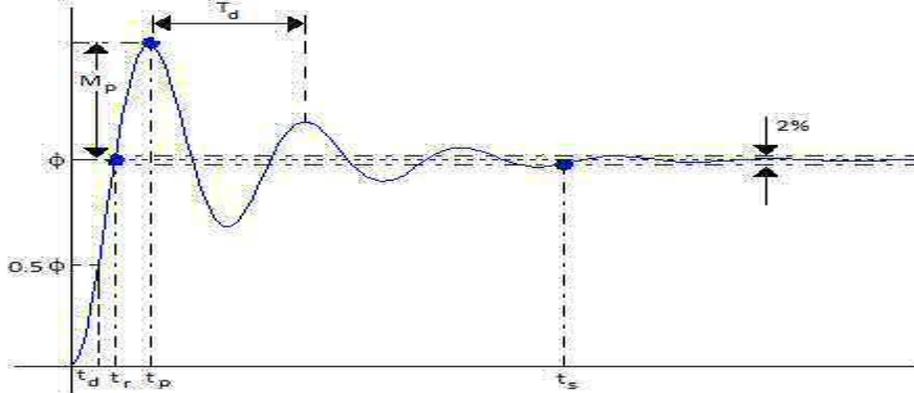


Fig.88: Parámetros de respuesta transitoria de un sistema subamortiguado.

Para analizar el caso más completo, a continuación se establecerán las fórmulas de cálculo de los parámetros de desempeño para un sistema subamortiguado.

Valor final.

Cuando se obtuvo la salida de un sistema de segundo orden subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado se observó que $c(\infty) = k_s$ en todos ellos, por lo que $\phi = k_s$ para sistemas de segundo orden estándar.

Tiempo de crecimiento.

Por definición del tiempo de crecimiento se tiene que $c(t_r) = \phi$, por lo que $c(t_r) = k_s$. Por otro lado, como se conoce la salida $c(t)$ de un sistema subamortiguado es posible establecer la siguiente expresión

$$c(t_r) = c(t)|_{t=t_r} = k_s \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right] \right\} \Big|_{t=t_r}.$$

$$\text{Es decir } k_s = k_s \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t_r} \left[\cos(\omega_d t_r) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_r) \right] \right\}.$$

$$\text{De donde se obtiene } k_s e^{-\xi\omega_n t_r} \left[\cos(\omega_d t_r) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_r) \right] = 0.$$

Se sabe que un producto es cero si y sólo si alguno de sus factores es cero, y como $k_s e^{-\xi\omega_n t_r} \neq 0$ ya que t_r es un valor finito por definición, se tiene que $\cos(\omega_d t_r) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_r) = 0$.

Ahora bien, dividiendo entre la función coseno y despejando la función trigonométrica resultante se tiene $\tan(\omega_d t_r) = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$. Por lo que $\omega_d t_r = \arctan\left(-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = \theta$.

Sin embargo, para obtener correctamente el valor de $\omega_d t_r$ es necesario conocer la ubicación correcta del punto que forman los catetos. Para ello se va a considerar la siguiente gráfica, que corresponde a la ubicación de un polo complejo conjugado del sistema subamortiguado, y se va a medir el ángulo β desde el eje real negativo en sentido horario hasta el punto de interés.

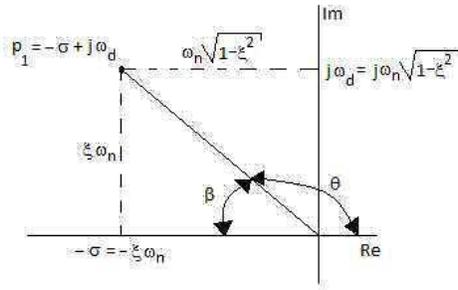


Fig.89: Posición de un polo complejo conjugado.

Con lo anterior se obtiene que el valor correcto de $\omega_d t_r$ se puede establecer como $\omega_d t_r = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right)$ y auxiliándose de $\beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ se tiene que $\omega_d t_r = \theta = \pi - \beta$.

En conclusión, $\beta = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right)$ [rad] y $t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$ [seg] para sistemas subamortiguados estándar.

Claramente se observa que para tener un tiempo de crecimiento pequeño, ω_d debe ser grande.

Tiempo pico.

Por definición en este tiempo se alcanza el máximo valor de la salida, por lo que $\dot{c}(t)|_{t=t_p} = 0$. Por otro lado, como se conoce la salida $c(t)$ de un sistema subamortiguado es posible establecer la siguiente expresión

$$\dot{c}(t)|_{t=t_p} = \frac{d}{dt} \left\{ k_s \left[1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right] \right] \right\} \Big|_{t=t_p} = 0.$$

Haciendo los cálculos necesarios se obtiene

$$k_s \left\{ \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t_p} \left[\cos(\omega_d t_p) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_p) \right] - e^{-\xi\omega_n t_p} \left[-\omega_d \sin(\omega_d t_p) + \frac{\xi\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_d t_p) \right] \right\} = 0.$$

Simplificando términos se obtiene $k_s \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p) = 0$.

Y como $e^{-\xi\omega_n t_p} \neq 0$, debido a que t_p es un valor finito por definición, se tiene que $\sin(\omega_d t_p) = 0$. Por lo que $\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$

Finalmente, observando la gráfica de la salida de un sistema subamortiguado y como el t_p se presenta en el primer pico de oscilación se concluye que $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ [seg] para sistemas subamortiguados estándar.

Claramente se observa que para tener un tiempo pico pequeño, ω_d debe ser grande.

Sobreimpulso máximo.

Por definición $M_p = c(t_p) - \phi$. Por otro lado, como $\phi = k_s$, $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ y se conoce la salida $c(t)$ de un sistema subamortiguado es posible establecer la siguiente expresión

$$M_p = k_s \left\{ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right] \right\} \Big|_{t=\frac{\pi}{\omega_d}} - k_s$$

$$\text{Por lo que } M_p = -k_s e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cos(\pi) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi).$$

En conclusión $M_p = k_s e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} = k_s e^{-\frac{\sigma}{\omega_d}\pi}$ y en forma porcentual $\%M_p = 100e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} = 100e^{-\frac{\sigma}{\omega_d}\pi}$ para sistemas subamortiguados estándar.

Claramente se observa que para tener un sobreimpulso máximo pequeño, ξ debe ser grande.

Tiempo de establecimiento.

Utilizando conocimientos de geometría analítica es posible establecer que la salida de un sistema submortiguado tiene unas curvas envolventes, es decir que tiene unas curvas auxiliares que la envuelven (no la dejan "salir" de entre

ellas) en todo momento. Las ecuaciones de estas curvas envolventes son $k_s \left(1 \pm e^{-\frac{\xi\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}t} \right)$ y claramente se observa que tienen una constante de tiempo $T \approx \frac{1}{\xi\omega_n}$. A continuación se muestran gráficamente estas envolventes.

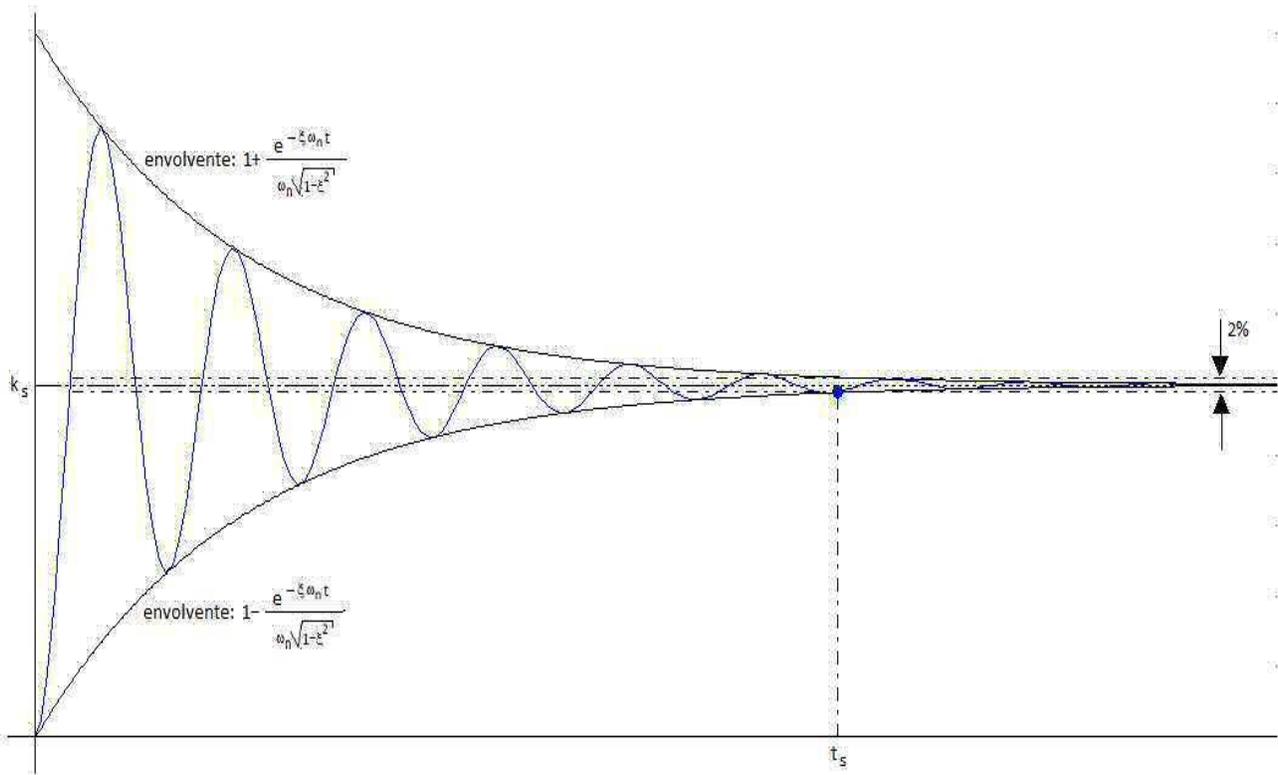


Fig.90: Envolventes de una respuesta subamortiguada.

Para establecer el tiempo de establecimiento se usarán estas curvas envolventes, ya que una vez que éstas entran en el rango de interés con mayor razón lo hace la salida del sistema y no vuelven a salir de él (ver la gráfica anterior). Finalmente, como estas envolventes tienen forma exponencial se puede usar lo obtenido en sistemas de primer orden, por lo que el tiempo de establecimiento para sistemas subamortiguados estándar es $t_s = 4T = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\sigma}$ [seg] para el criterio del 2%, o bien $t_s = 3T = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{\sigma}$ [seg] para el criterio del 5%.

Claramente se observa que para tener un tiempo de respuesta pequeño, σ debe ser grande.

Tiempo de retardo.

Para este parámetro no se puede establecer una fórmula.

f) Comparación entre los diferentes sistemas de segundo orden.

Para entender mejor el comportamiento del sobreimpulso máximo a continuación se muestra una gráfica del comportamiento del $\%M_p$ con respecto a ξ , en ella se puede apreciar que para un $\xi = 0$ se tiene un sobreimpulso del 100% (sistema oscilatorio puro), y que al ir aumentando el valor de ξ va disminuyendo el sobreimpulso (sistema subamortiguado) hasta llegar a $\xi = 1$ en donde ya no hay sobreimpulso (sistema críticamente amortiguado).

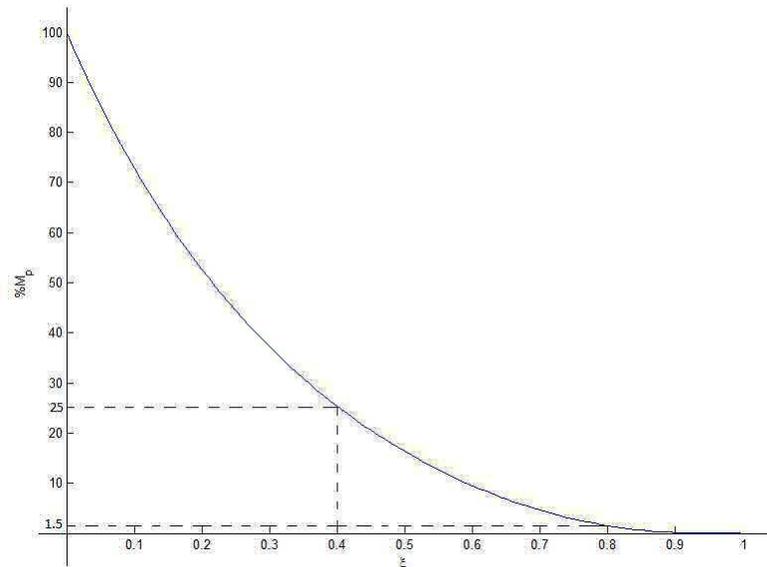


Fig.91: Gráfica del sobreimpulso máximo.

Para entender mejor las diferencias de comportamiento entre los casos subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado a continuación se muestra una familia de gráficas de respuesta a escalón unitario para diferentes valores de ξ , $\omega_n = 1 \frac{rad}{seg}$ y $k_s = 1$. Se observa que tienen diferente patrón oscilatorio (esto indica que tienen diferente estabilidad relativa), su ω_d es diferente, y también tienen diferente tamaño de picos. Finalmente se observa que a mayor ξ la respuesta es más rápida (el t_s es menor) y que los picos son menores (el $\%M_p$ es menor).

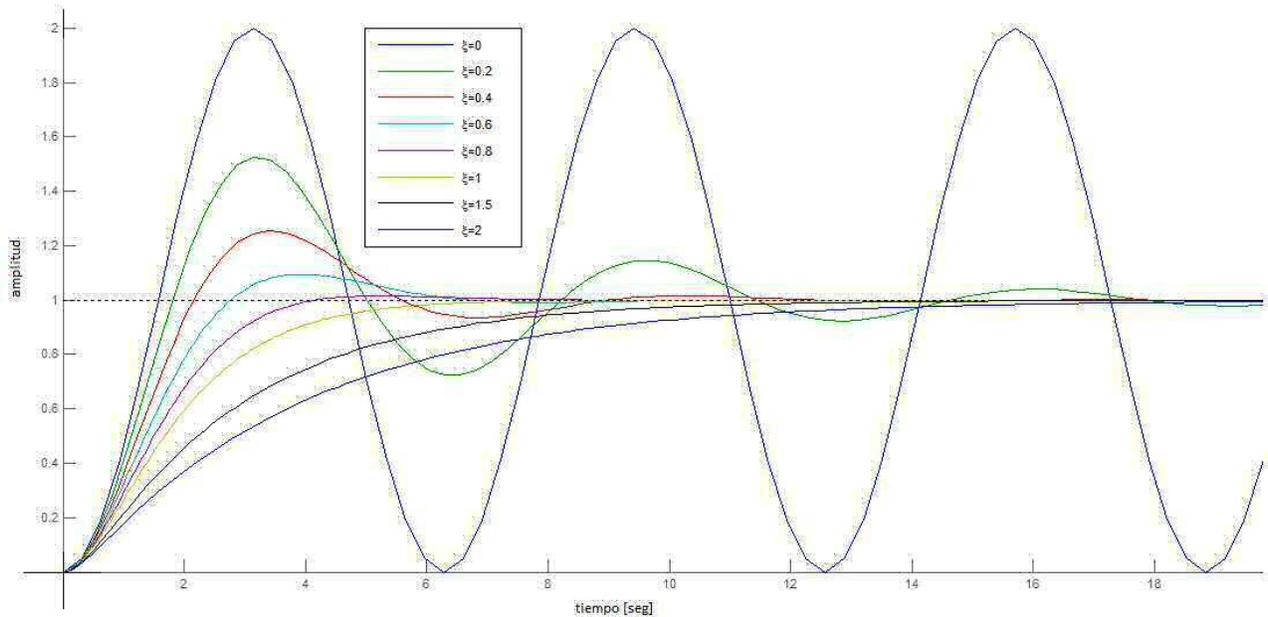


Fig.92: Respuesta a un escalón unitario de sistemas de segundo orden estándar con diferente ξ .

Para completar el análisis que se viene realizando a continuación se muestra una familia de gráficas de respuesta a escalón unitario para diferentes valores de ω_n , $\xi = 0.5$ y $k_s = 1$. Se observa que tienen el mismo patrón oscilatorio (esto indica que tienen la misma estabilidad relativa) aunque su ω_d es diferente, y también tienen el mismo tamaño de picos. Finalmente se observa que a mayor ω_n la respuesta es más rápida (el t_s es menor) y que los picos no varían (no cambia el $\%M_p$).

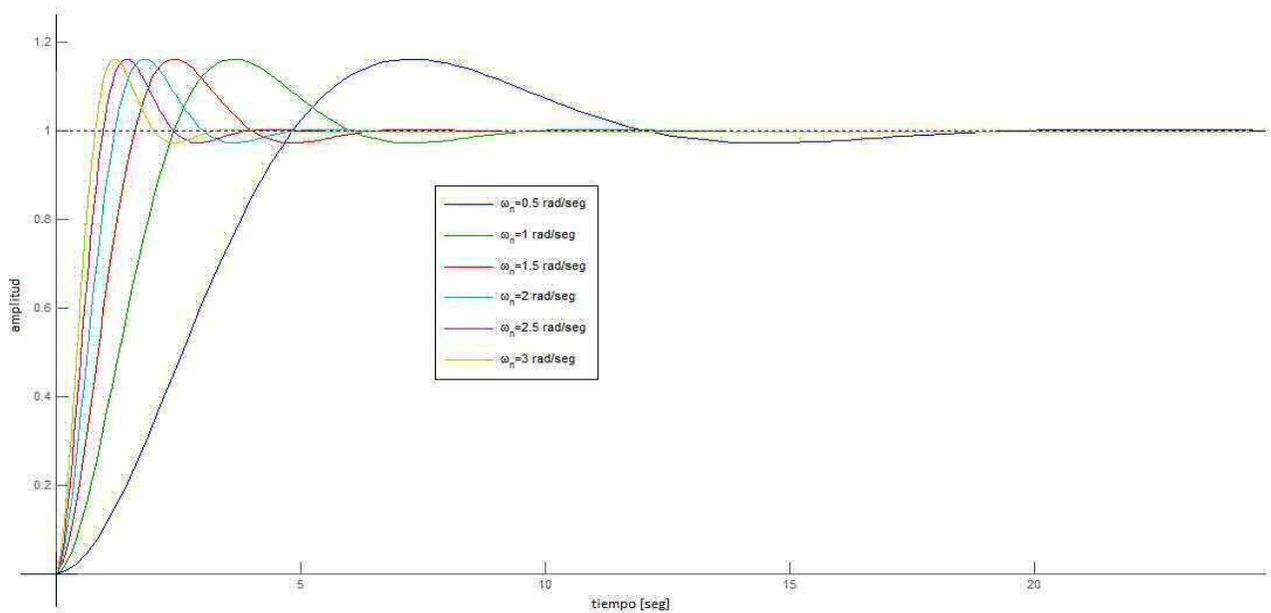


Fig.93: Respuesta a un escalón unitario de sistemas de segundo orden estándar con diferente ω_n .

En conclusión, una respuesta críticamente amortiguada es más rápida que una sobreamortiguada y una respuesta subamortiguada puede ser más rápida que una críticamente amortiguada. Por lo anterior, en la práctica se prefiere una respuesta subamortiguada lo suficientemente rápida y amortiguada siempre y cuando el sistema tolere las oscilaciones. Se aconseja tener un sistema críticamente amortiguado o sobreamortiguado y a que tendrá un amortiguamiento aceptable $25 \geq \%M_p \geq 1.5$. Si $\xi < 0.4$ habrá un sobreimpulso excesivo y si $\xi > 0.8$ será muy lento.

Es importante recordar que si el sistema de segundo orden fuera no estándar entonces su análisis de respuesta transitoria se debe realizar con todos los pasos, esto es no se puede simplificar usando únicamente los fórmulas que se obtuvieron para sistemas de segundo orden estándar.

Para mayor claridad de las diferencias entre sistemas estándar y no estándar, en la siguiente figura se presenta una tabla que muestra la respuesta a un escalón unitario de algunos sistemas de primer orden y de segundo orden no estándar, donde claramente se observa que la gráfica de la salida difiere considerablemente de las respuestas de sistemas estándar analizadas previamente.

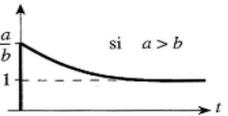
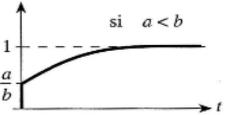
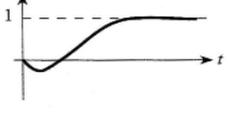
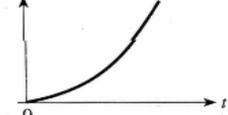
Función de transferencia	Respuesta al escalón	Comentarios
$\frac{1+as}{1+bs} = \frac{a(s+1/a)}{b(s+1/b)}$		Proceso con un polo y un cero, ambos en el lado izquierdo del plano, s .
$\frac{1+as}{1+bs} = \frac{a(s+1/a)}{b(s+1/b)}$		Proceso con un polo y un cero, ambos en el lado izquierdo del plano, s .
$\frac{1-as}{1+bs} = \frac{a(s-1/a)}{b(s+1/b)}$		Proceso con un polo en el lado izquierdo del plano y un cero en el lado derecho del plano, s (proceso de fase no mínima).
$\frac{1-as}{(1+bs)(1+cs)}$		Proceso con dos polos del lado izquierdo del plano y un cero del lado derecho del plano, s (también éste es un proceso de fase no mínima).
$\frac{1+as}{1-bs}$		Proceso con un polo en el lado derecho del plano y un cero del lado izquierdo del plano, s (proceso inestable).

Fig.94: Respuesta a un escalón unitario de algunos sistemas no estándar ($a > 0, b > 0$).

Un sistema de fase mínima es aquel que tiene todos sus polos y ceros en el semiplano izquierdo del plano complejo, y un sistema de fase no mínima tiene al menos un cero en el semiplano derecho y todos sus polos en el semiplano izquierdo. Una característica importante que tienen los sistemas de fase no mínima es que su respuesta a un escalón unitario empieza en forma invertida, como se observa en la figura anterior. Otra característica de un sistema de fase no mínima se observa cuando se realiza un análisis en frecuencia (esto se verá en Control II) y es que, como su nombre lo dice, no alcanza un valor mínimo de fase, a diferencia de un sistema de fase mínima en que sí se alcanza; esto significa que un sistema de fase no mínima tiene un gran atraso de fase para altas frecuencias, situación que no ocurre con un sistema de fase mínima.

Ejemplos: Realizar el análisis de respuesta transitoria de los siguientes sistemas:

a) $G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}, H(s) = 1.$

b) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 1}.$

c) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{2s^2 + 7s + 2}.$

d) $G(s) = \frac{10}{3s^2 + 4s}, H(s) = 1.$

e) $G(s) = \frac{2s+5}{s^2}, H(s) = 1.$

f) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}.$

g) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s^2}{s^2 + 2s + 5}.$

h) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 2s + 5}.$

3) Sistemas de orden superior.

En el caso de sistemas de orden superior no se considera una forma estándar particular. Esto se debe a que un sistema de orden superior en esencia es la combinación de sistemas de primer orden y de segundo orden.

Un sistema de orden superior está dado por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad m \leq n, \quad n \geq 3$$

De acuerdo al teorema general del álgebra un polinomio de grado n tiene n raíces, y como los coeficientes del polinomio característico son reales entonces esas n raíces pueden ser reales diferentes, reales repetidas, complejas conjugadas o una combinación de las anteriores. Por lo tanto, la respuesta a un escalón unitario de un sistema de orden superior debe ser la combinación de las salidas de sistemas de primer orden y de segundo orden según sea el valor de sus polos (raíces de su polinomio característico).

Polos dominantes de lazo cerrado: si existen son los polos de lazo cerrado más cercanos al eje imaginario y que no tienen otros polos de lazo cerrado ni ceros de lazo cerrado cerca. Esta distancia de otros polos o ceros se mide dividiendo su parte real entre la parte real del posible polo dominante, y el resultado tiene que ser mayor a 5 para que se considere alejado.

Polos no dominantes de lazo cerrado: si existen son todos aquellos polos de lazo cerrado que no cumplen con las condiciones de dominancia.

La importancia de los polos dominantes de lazo cerrado radica en que si existen, entonces los polos no dominantes de lazo cerrado contribuyen de manera insignificante al comportamiento del sistema, es decir la respuesta es prácticamente la que dan los polos dominantes de lazo cerrado.

En general, los polos de lazo cerrado de un sistema determinan el tipo de respuesta transitoria que tendrá el sistema y las características de la respuesta en estado estacionario, principalmente la estabilidad. Por otro lado, los ceros de lazo cerrado del sistema determinan la forma de la respuesta transitoria del sistema, esto es las características de la respuesta transitoria, principalmente los coeficientes del transitorio.

En estos sistemas se pueden emplear los mismos parámetros de desempeño establecidos con anterioridad dependiendo de la forma gráfica de su respuesta, pero los valores se deben determinar por mediciones gráficas ya que no es posible establecer fórmulas.

Ejemplos: Realizar el análisis de respuesta transitoria de los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{4}{(s+4)(s^2+s+1.25)} \\ \text{b) } \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{4}{(s+1.5)(s^2+s+1.25)} \end{aligned}$$

a) *Reducción del orden de sistemas de orden superior.*

Cuando se tiene un sistema de orden superior en ocasiones es posible reducir su orden, es decir que se puede encontrar una función de transferencia de menor orden que tenga una respuesta muy cercana a la del sistema de orden superior. Cuando esto sucede, entonces es posible utilizar el sistema de menor orden en los cálculos siguientes en lugar de usar el sistema de orden superior original, esto simplificará los cálculos sin una pérdida significativa de información y sin cometer errores por omisión significativos.

Para realizar esta aproximación de sistemas de orden superior por sistemas de menor orden o reducción de su orden se pueden emplear los siguientes métodos:

- *Método por identificación de sistemas:* este método se verá en el siguiente tema.
- *Método por polos dominantes:* para poder emplear este método se requiere que el sistema tenga polos dominantes en lazo cerrado, ya que al tenerlos lo que propone el método es la eliminación de los polos no dominantes de la función de transferencia de lazo cerrado. Para eliminar los polos no dominantes lo que se hace es eliminar la variable "s" del factor correspondiente a él. Una consideración importante que se debe tener es que nunca se debe eliminar un polo que se ubique en el semiplano derecho del plano complejo, debido a que se cambiaría drásticamente el comportamiento del sistema de inestable estable sin justificación válida.

Siempre que se realice una reducción del orden de sistemas de orden superior se debe verificar al final que la aproximación obtenida sea adecuada, si no fuera así habría que aplicar otro método de aproximación o bien dejar al sistema original. También existen otros métodos para realizar esta reducción de orden, como el criterio formal de aproximación, pero están fuera del alcance de este tema, por lo que se recomienda a los alumnos que los consulten en las referencias.

Ejemplos: Obtener la aproximación de los siguientes sistemas por sistemas de menor orden:

$$\text{a) } \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{(s+4)(s^2+s+1.25)}$$

$$b) \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{(s + 1.5)(s^2 + s + 1.25)}$$

3.2 Identificación de sistemas y diseño de controladores mediante respuesta transitoria

Existen dos aplicaciones básicas del metodo de respuesta transitoria, que son la identificación de sistemas y el diseño de controladores "simples".

Identificación de sistemas.

Identificación de sistemas: es un problema de control que consiste en la obtención del modelo matemático de un sistema en forma experimental, es decir sin tener que realizar el análisis matemático correspondiente para su obtención. Para la identificación de sistemas existen tanto métodos temporales como frecuenciales. El método basado en la respuesta transitoria es el más básico de ellos, se realiza en el dominio del tiempo y se obtiene la función de transferencia del sistema de interés.

A continuación sólo se presenta la identificación de sistemas basado en el análisis a la respuesta al escalón (método de respuesta transitoria) debido a que el resto de los métodos existentes, como el análisis experimental de frecuencias y la identificación de parámetros por mínimos cuadrados, están fuera del alcance de este tema, pero se recomienda a los alumnos que los consulten en las referencias.

Procedimiento para la identificación de sistemas mediante respuesta transitoria:

1. Obtener la gráfica de la salida del sistema a una entrada escalón unitario.
2. Elegir la forma de la función de transferencia estándar o conocida que tenga la respuesta transitoria más parecida a la salida que tiene el sistema. Esto se realiza observando la similitud de esta gráfica con las gráficas de respuesta transitoria conocidas para las diferentes funciones de transferencia conocidas.
3. Determinar los parámetros de respuesta transitoria que correspondan a la forma elegida de la función de transferencia. Esto se realiza a partir de la gráfica de la salida real obtenida.
4. Establecer un sistema de ecuaciones con los valores obtenidos de los parámetros de respuesta transitoria y las fórmulas de dichos parámetros. Las incógnitas de este sistema de ecuaciones son los parámetros de la función de transferencia buscada.
5. Obtener los valores de los parámetros de la función de transferencia buscada. Esto se realiza resolviendo el sistema de ecuaciones anterior.
6. Verificar si la función de transferencia obtenida es adecuada, es decir si su respuesta transitoria se aproxima lo suficiente a la salida real. Si la aproximación no es adecuada entonces hay que volver a identificar el sistema, ya sea con otro método o proponiendo otra función de transferencia.

La figura siguiente presenta una tabla que muestra un concentrado de la respuesta a un escalón unitario de algunos sistemas que puede usarse en la identificación de sistemas. Además, la tabla de la Fig.91 también puede utilizarse con fines de identificación de sistemas.

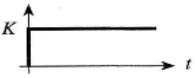
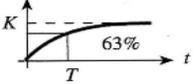
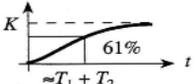
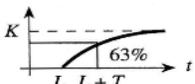
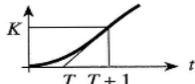
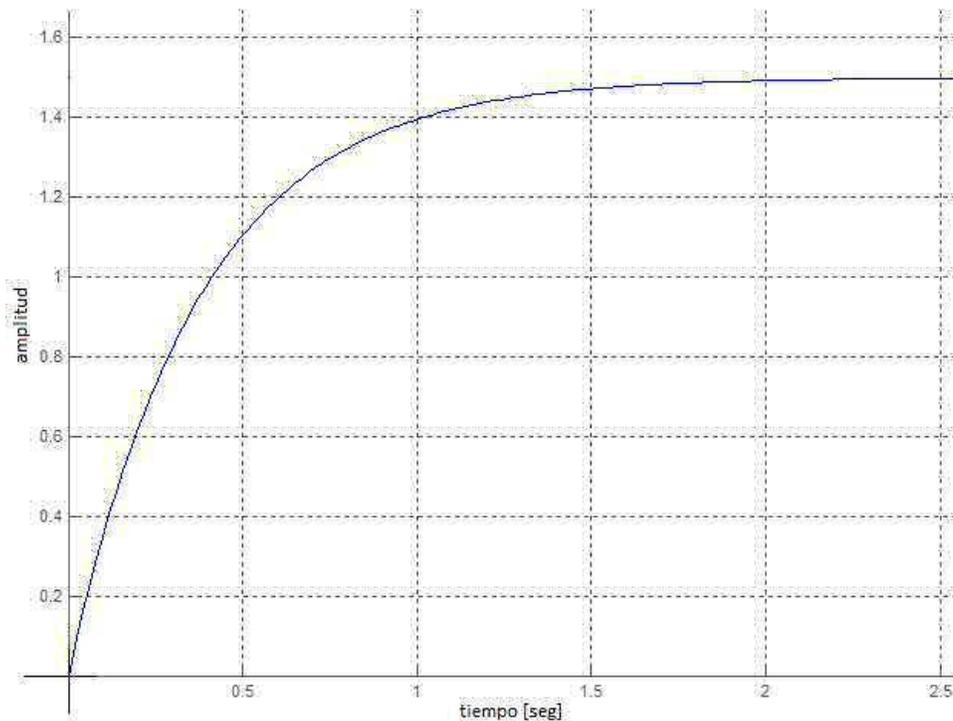
Tipo de proceso	Función de transferencia	Respuesta escalón
Constante	$G(s) = K$	
Una constante de tiempo	$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$	
Dos constantes de tiempo	$G(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$	
Una constante de tiempo y retardo	$G(s) = \frac{K}{1+Ts} e^{-Ls}$	
Integración	$G(s) = \frac{K}{s}$	
Integración y una constante de tiempo	$G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$	
Integración y retardo	$G(s) = \frac{K}{s} e^{-Ls}$	
Procesos de segundo orden con sobrepaso	$G(s) = \frac{K}{as^2 + bs + 1}$	

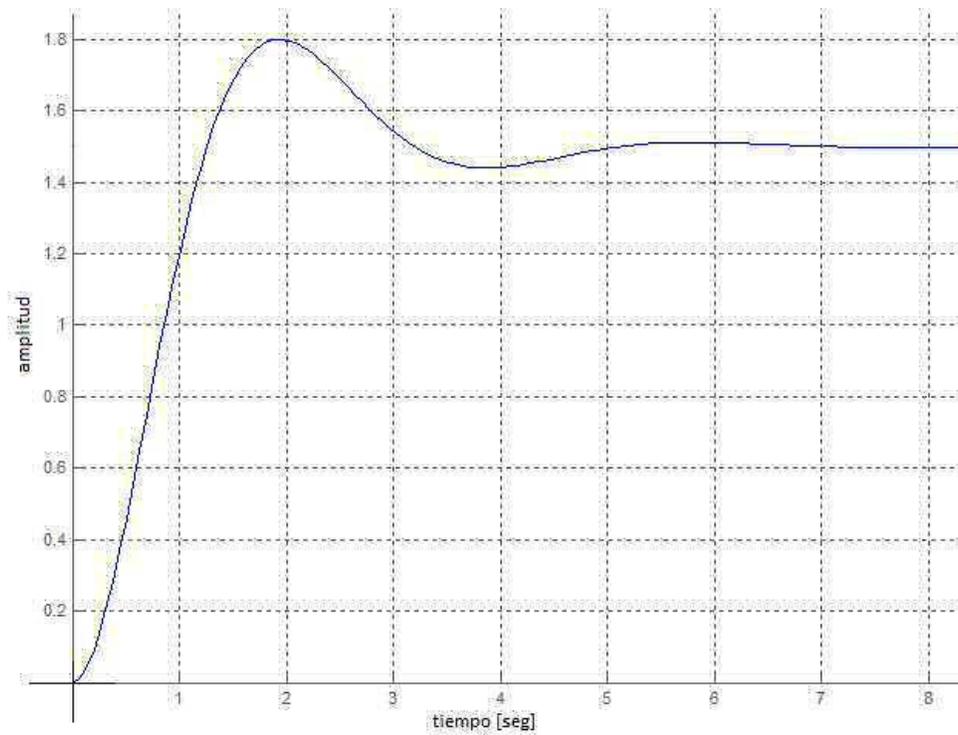
Fig.95: Respuesta a un escalón unitario usada en identificación de sistemas.

Ejemplos: Identificar los sistemas cuya salida a un escalón unitario es:

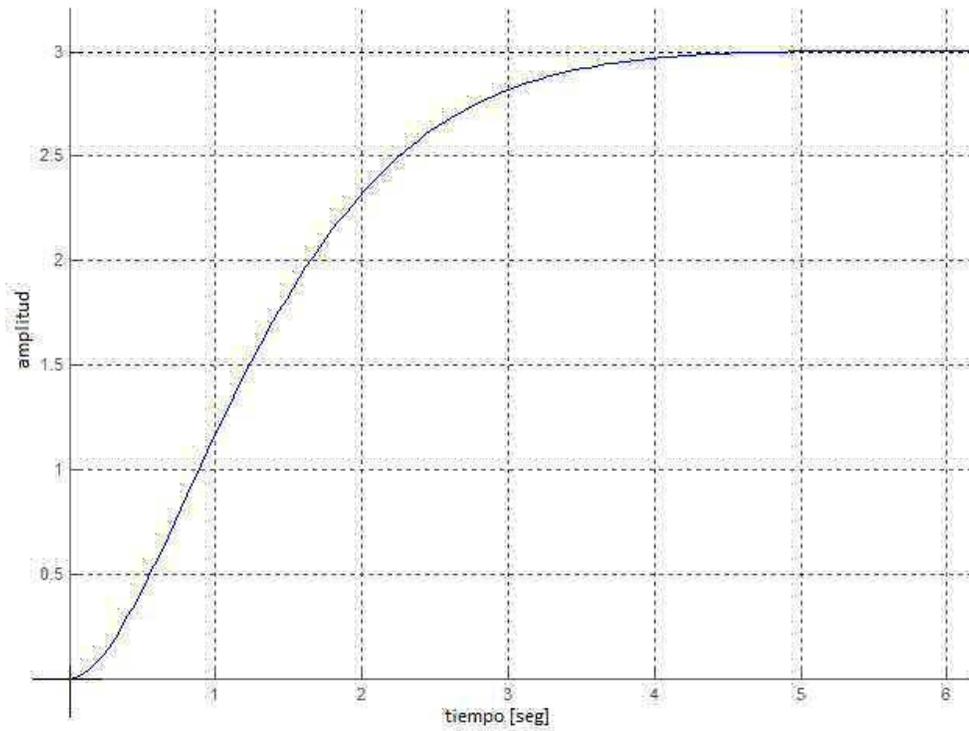
a)



b)



c)



Procedimiento para el diseño de controladores mediante respuesta transitoria:

1. Identificar, a partir de las especificaciones deseadas para los parámetros de respuesta transitoria, si se desea un comportamiento de primer o de segundo orden y verificar si el sistema original cumple con los valores deseados. Si no los cumple entonces es necesario diseñar un controlador, y si los cumple ya está resuelto el problema.

2. Proponer la función de transferencia del controlador y su ubicación en el sistema. Esto se realiza de acuerdo a la experiencia del diseñador y al comportamiento de primer o segundo orden deseado.
3. Obtener la función de transferencia de lazo cerrado del sistema con el controlador propuesto y las fórmulas de los parámetros de respuesta transitoria que correspondan a las especificaciones deseadas.
4. Establecer un sistema de ecuaciones con las fórmulas anteriores y los valores deseados. Las incógnitas de este sistema de ecuaciones son los parámetros de la función de transferencia del controlador buscado.
5. Obtener los valores de los parámetros de la función de transferencia del controlador buscado. Esto se realiza resolviendo el sistema de ecuaciones anterior.
6. Verificar si el controlador propuesto funciona correctamente. Si no proporciona las especificaciones deseadas entonces hay que rediseñar el controlador, ya sea corrigiendo valores, reubicando el controlador o proponiendo un controlador diferente.

Ejemplos: Diseñar un controlador para los siguientes sistemas:

a) Se desea que el sistema $G(s) = \frac{1}{s+4}$ con retroalimentación unitaria tenga una respuesta al escalón unitario con $\phi = 1.5$, y $t_s = 2.5$ seg.

b) Se desea que el sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+3s}$ con retroalimentación unitaria tenga una respuesta al escalón unitario con $\phi = 0.25$, $\%M_p = 22\%$, $t_p = 1$ seg, y $t_s = 2.66$ seg con el criterio de 2%.

3.3 Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz: es un método tabular basado en los coeficientes del polinomio característico de un sistema que sirve para determinar su estabilidad sin tener que calcular sus polos. Además permite conocer el número de polos del sistema en el semiplano derecho del plano complejo.

Para aplicar este método se debe tener la función de transferencia de lazo cerrado del sistema escrita de la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}}, \quad m \leq n, \quad a_0 \neq 0$$

Procedimiento del criterio de Routh-Hurwitz:

1. *Escribir el polinomio característico del sistema como:* $p(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$.
2. *Aplicar la condición necesaria de Stodola al polinomio característico:* un polinomio estable tiene todos sus coeficientes del mismo signo. Esto significa que si existe al menos un coeficiente con signo diferente a los demás entonces el polinomio es no estable y ya no es necesario continuar con el procedimiento; y si todos los coeficientes tienen el mismo signo entonces cabe la posibilidad de que sea estable y se continua con el paso 3.
3. *Construir la tabla o arreglo de Routh-Hurwitz:* para facilitar esta construcción se escribe el polinomio característico con $a_0 > 0$, y una vez hecho esto se construye la tabla siguiente:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	\dots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	a_9	\dots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\dots	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\dots	
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	\dots		
\vdots	\vdots	\vdots				
s^2	e_1	e_2				
s^1	f_1					
s^0	g_1					

La tabla tiene $n+1$ renglones y se construye renglón por renglón, en los dos primeros renglones van los coeficientes del polinomio característico alternados y los siguientes elementos se obtienen siguiendo el patrón:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \quad b_4 = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1}, \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \quad \dots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}, \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}, \quad \dots$$

Como se puede observar esta tabla tiene una forma final "triangular". También es posible multiplicar o dividir todo un renglón por un número positivo sin alterar la conclusión del método, pero esto se hace después de calcular todo el renglón que se va a cambiar y antes de calcular el siguiente renglón. Debido a que la construcción es renglón por renglón algo similar no es posible hacerlo sobre las columnas.

4. Contar el número de cambios de signo de los elementos de la primera columna de la tabla de Routh-Hurwitz: si no hay cambios de signo entonces el polinomio no tiene raíces en el semiplano derecho del plano complejo (el sistema es estable), pero si tiene r cambios de signo entonces el polinomio tiene r raíces en el semiplano derecho del plano complejo (el sistema es inestable).

Ejemplos: Determinar la estabilidad de los siguientes polinomios y sistemas utilizando el criterio de Routh-Hurwitz:

- a) $p(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 1$.
 b) $p(s) = 3s^3 + 2s^2 + s + 1$.
 c) $p(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$.
 d) $p(s) = 2s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 2$.
 e) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^6 + 2s^5 + 3s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$.
 f) $G(s) = \frac{10}{s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + 3}$, $H(s) = 1$.

Ejemplos: Obtener condiciones de estabilidad para los siguientes polinomios usando el criterio de Routh-Hurwitz:

- a) $p(s) = a_0 s + a_1$.
 b) $p(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2$.
 c) $p(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$, $a_i > 0$.

Casos especiales del criterio de Routh-Hurwitz:

1. *Un elemento de valor cero en la primera columna de la tabla de Routh-Hurwitz mientras los demás elementos de ese renglón son diferentes de cero:* cuando se presenta este caso el polinomio ya es inestable, pero el seguir aplicando el método brinda información adicional de las raíces del polinomio. Para continuar con el método se sustituye el elemento cero por un valor muy pequeño $\epsilon > 0$ y se continúa con el método normalmente. El análisis final se realiza de la siguiente manera: si los elementos arriba y abajo del elemento ϵ tienen el mismo signo entonces el polinomio tiene un par de raíces imaginarias conjugadas adicionalmente a los cambios de signo que pudieran existir; pero si los elementos arriba y abajo del elemento ϵ tienen signo diferente entonces se deben contabilizar los cambios de signo normalmente.
2. *Un renglón con todos sus elementos de valor cero:* cuando se presenta este caso el polinomio ya es inestable, pero el seguir aplicando el método brinda información adicional de las raíces del polinomio. Para continuar con el método se construye un polinomio auxiliar $p_a(s)$ con el renglón arriba del renglón cero, se sustituye todo el renglón cero por los coeficientes de la derivada del polinomio auxiliar y se continúa con el método normalmente. El análisis final se realiza de la siguiente manera: la existencia del renglón cero indica que el polinomio tiene un par de raíces imaginarias conjugadas y/o un par de raíces reales con la misma magnitud pero signo diferente (estas raíces son también raíces del polinomio auxiliar), adicionalmente a los cambios de signo que pudieran existir. Este caso puede suceder únicamente en renglones impares debido a que las raíces se presentan en pares.

Ejemplos: Aplicar el criterio de Routh-Hurwitz a los siguientes polinomios:

- a) $p(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$.
 b) $p(s) = s^3 - 3s + 2$.
 c) $p(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50$.
 d) $p(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50$.
 e) $p(s) = s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 4s + 10$.

Otras aplicaciones del criterio de Routh-Hurwitz:

1. *Determinar el rango de estabilidad de un sistema:* el rango de estabilidad de un sistema es aquel intervalo(s) de valores de un parámetro (generalmente es la ganancia) para los cuales el sistema es estable. Esto se realiza construyendo normalmente la tabla de Routh-Hurwitz, pero "arrastrando" la ganancia k , luego se obtienen las condiciones para estabilidad a partir de la primera columna de la tabla, y finalmente se resuelve para k el sistema de desigualdades formado por dichas condiciones. La solución encontrada es el rango de estabilidad para k del sistema.
2. *Determinar la estabilidad relativa de un sistema:* para obtener este valor se obtiene el polinomio $p(\hat{s})$ a partir del cambio de variable $s = \hat{s} - \sigma$ con σ constante en el polinomio característico $p(s)$, luego se aplica el método de Routh-Hurwitz normalmente al polinomio $p(\hat{s})$, y el número de cambios de signo corresponde al número de raíces con parte real a la derecha de la recta $s = -\sigma$. Este procedimiento se puede realizar de forma similar al rango de estabilidad, solo que resolviendo para σ , aunque normalmente se realiza dando valores arbitrarios a σ , comenzando con un valor pequeño (situación sin cambios de signo) y luego incrementándolo poco a poco hasta llegar a la situación de cambios de signo. El valor σ para el cual sucede este cambio es la estabilidad relativa del sistema.

Ejemplos: Obtener el rango de estabilidad para k de los siguientes sistemas y polinomios:

a) $G(s) = \frac{k}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s}$, $H(s) = 1$.

b) $p(s) = s^4 + 10s^3 + 3s^2 + ks + 3$.

c) $G(s) = \frac{k}{s^3 + 3s^2 + 2s}$, $H(s) = 1$.

d) $p(s) = s^4 + 2s^3 + (4+k)s^2 + 9s + 25$.

e) $G(s) = \frac{k(s-2)}{(s+1)(s^2+6s+25)}$, $H(s) = 1$, $k > 0$.

Ejemplo: Obtener la estabilidad relativa del sistema $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2 + 4s + 3}$.

4 Método del lugar de las raíces

4.1 Obtención del lugar de las raíces de un sistema

Lugar (geométrico) de las raíces o lugar geométrico de Evans: es un método que muestra la gráfica de todos los polos de lazo cerrado posibles de un sistema cuando su ganancia varía de cero a infinito. Este método se basa en la contribución que tienen los polos y ceros de lazo abierto del sistema en la ubicación de los polos de lazo cerrado del mismo.

Para establecer los principios de este método se considerará un sistema con retroalimentación no unitaria como el que se muestra a continuación:

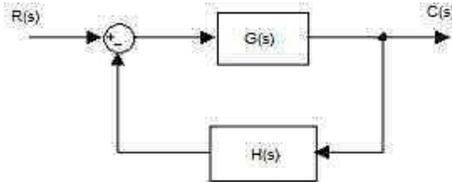


Fig.99: Sistema de control con retroalimentación no unitaria.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$, por lo cual la ecuación característica de lazo cerrado es $1 + G(s)H(s) = 0$, y las raíces de esta ecuación son los polos de lazo cerrado del sistema.

Ahora bien, dicha ecuación característica de lazo cerrado se puede escribir como $G(s)H(s) = -1$, y obviamente los valores de s que satisfagan esta ecuación son los polos de lazo cerrado del sistema.

Como la ecuación anterior es una función de variable compleja, entonces es equivalente a las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} |G(s)H(s)| = 1 \\ \angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2k + 1) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

La primera se llama condición de magnitud y la segunda condición de ángulo, y obviamente los valores de s que satisfagan estas dos condiciones son los polos de lazo cerrado del sistema, de hecho el lugar de las raíces muestra gráficamente los puntos s que satisfacen la condición de ángulo y las raíces correspondientes a valores específicos de ganancia se obtienen con la condición de magnitud. También observe que estas dos condiciones están basadas en la función de transferencia de lazo abierto del sistema.

Para establecer el método de lugar de las raíces se considerará la función de transferencia de lazo abierto escrita en la forma de polos y ceros:

$$G(s)H(s) = \frac{k \prod_{i=0}^m (s + z_i)}{\prod_{i=0}^n (s + p_i)} \quad , \quad \text{donde } -z_i \text{ son los ceros de lazo abierto del sistema, } -p_i \text{ son los polos de lazo abierto del sistema, } k \text{ es la ganancia de lazo abierto del sistema.}$$

El lugar de las raíces tiene las siguientes características: siempre es simétrico con respecto al eje real debido a que las raíces complejas son conjugadas, el plano complejo tiene la misma escala en los ejes real e imaginario, tiene tantas ramas (curvas independientes) como raíces tiene la ecuación característica del sistema (generalmente coincide con el número de polos de lazo abierto), las ramas tienen comportamiento asintótico para cuando la ganancia tiende a infinito, una rama siempre inicia en un polo de lazo abierto y siempre termina en un cero de lazo abierto, ya sea finito o infinito.

Debido a los comentarios anteriores es importante recordar el concepto de ceros de una función de transferencia.

Ceros de una función de transferencia: son los valores de s tales que hacen cero a la función de transferencia, esto es hacen $G(s) = 0$.

Dada la definición anterior se observan dos tipos de ceros de la función de transferencia, que son:

Ceros finitos: son los valores de s finitos (diferentes de infinito) que hacen cero a la función de transferencia. Por lo tanto, son las raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia.

Ceros al infinito: son los valores de $s = \infty$ que hacen cero a la función de transferencia.

Por ejemplo, la función de transferencia $G(s) = \frac{s + 0.5}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ tiene un cero finito que es la raíz del polinomio del numerador $s = -0.5$. Para observar los ceros al infinito se dividen ambos polinomios de la función de transferencia entre s a la máxima potencia que tenga en el denominador, en este caso se obtiene $G(s) = \frac{\frac{1}{s^2} + \frac{0.5}{s^3}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}}$. Ahora bien, los ceros son las raíces del numerador, esto es $\frac{1}{s^2} + \frac{0.5}{s^3} = 0$, que se puede escribir como $\frac{1}{s^2} \left(1 + \frac{0.5}{s}\right) = 0$. De esta última expresión se obtiene, del segundo factor $1 + \frac{0.5}{s} = 0$, el cero finito ya conocido, y se obtienen, del primer factor $\frac{1}{s^2} = 0$, dos ceros al infinito.

Procedimiento para obtener el lugar de las raíces de un sistema.

1. *Dibujar el mapa de ceros y polos de lazo abierto del sistema:* dada la función de transferencia de lazo abierto del sistema $G(s)H(s)$ se determinan los polos de lazo abierto $-p_i$ y los ceros finitos de lazo abierto $-z_i$, y estos valores se ubican o grafican en el plano complejo o plano s . Los polos se grafican con el símbolo x , y los ceros con el símbolo o . El número de polos de lazo abierto se denota como n , y el número de ceros finitos de lazo abierto como m .
2. *Dibujar el lugar de las raíces sobre el eje real:* para este paso sólo se consideran los polos y ceros de lazo abierto reales, ya que en este caso los polos y ceros de lazo abierto complejos conjugados no contribuyen a la condición de ángulo. Se toma un punto de prueba s_o ubicado a la izquierda del polo o cero de lazo abierto real más a la izquierda del eje imaginario y se cuenta el número de polos y ceros de lazo abierto reales a la derecha de este punto s_o . Si este conteo da un número par, entonces s_o no pertenece al lugar de las raíces; pero si el conteo es impar, entonces s_o sí pertenece al lugar de las raíces. Esta ubicación y conteo se hace recorriendo de izquierda a derecha, a la izquierda de un polo o cero de lazo abierto real, hasta que ya no haya polos ni ceros de lazo abierto reales a la derecha. Si los polos y ceros finitos de lazo abierto reales son simples, entonces el lugar de las raíces alterna segmentos de pertenencia a lo largo del eje real.
3. *Dibujar las asíntotas del lugar de las raíces:* el número de asíntotas de un lugar de las raíces es igual a $n - m$, y todas las asíntotas se cruzan entre sí en un mismo punto con el eje real, este punto está dado por $s_a = \frac{\sum \text{polos l.a.} - \sum \text{ceros l.a.}}{n - m}$. Finalmente, para poder graficar las asíntotas ya sólo basta con conocer el ángulo de cada asíntota, que está dado por $\angle as = \frac{\pm 180^\circ (2k + 1)}{n - m}$, $k = 0, 1, 2, \dots$
4. *Ubicar los puntos de ruptura y los puntos de ingreso del lugar de las raíces sobre el eje real:* un punto de ruptura es aquel punto en que dos ramas del lugar de las raíces sobre el eje real se encuentran y salen (rompen) hacia fuera del eje real. Un punto de ruptura siempre estará en un lugar de las raíces sobre el eje real que esté en medio de dos polos de lazo abierto reales. Un punto de ingreso es aquel punto en que dos ramas del lugar de las raíces llegan (entran) al eje real. Un punto de ingreso siempre estará en un lugar de las raíces sobre el eje real que esté en medio de dos ceros de lazo abierto reales. Para determinar estos puntos, si es que existen, se utiliza la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$, se despeja la ganancia k , se obtiene la derivada $\frac{dk}{ds}$ y se iguala a cero. Las raíces de $\frac{dk}{ds} = 0$ son los posibles puntos de ruptura y de ingreso del lugar de las raíces, que se identifican utilizando las definiciones correspondientes a cada uno de ellos.
5. *Determinar los ángulos de salida y los ángulos de entrada de los polos y ceros de lazo abierto complejos conjugados:* el ángulo de salida es la dirección (ángulo) en la cual una rama del lugar de las raíces sale de un polo complejo de lazo abierto. El ángulo de llegada es la dirección (ángulo) en la cual una rama del lugar de las raíces llega a un cero complejo de lazo abierto. El ángulo de salida de un polo complejo de lazo abierto se obtiene usando la fórmula

$$\angle \text{salida del polo complejo l.a. } p_o = 180^\circ - \sum \angle \text{vectores de otros polos l.a. a } p_o + \sum \angle \text{vectores de ceros l.a. a } p_o$$

Similarmente, el ángulo de llegada a un cero complejo de lazo abierto está dado por

$$\angle \text{llegada al cero complejo l.a. } z_o = 180^\circ - \sum \angle \text{vectores de otros ceros l.a. a } z_o + \sum \angle \text{vectores de polos l.a. a } z_o$$

6. *Determinar los puntos de cruce del lugar de las raíces con el eje imaginario:* para determinar estos puntos, si es que existen, se puede utilizar el criterio de Routh-Hurwitz aplicado a la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$ para obtener las ganancias críticas de cruce con el eje imaginario y luego sustituir estos valores en la misma ecuación característica con $s = j\omega$ para obtener los puntos de cruce con el eje imaginario. Otro método que se puede emplear es utilizar directamente la ecuación $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$ y por igualación de valores se encuentran las ganancias críticas de cruce y los puntos de cruce con el eje imaginario.
7. *Dibujar el lugar de las raíces completo considerando la vecindad del origen:* se dibujan las ramas del lugar de las raíces completas usando toda la información anterior, y lo que sucede con el lugar de las raíces alrededor del origen. En la mayoría de los casos con toda la información de los demás pasos se deduce lo que pasa alrededor del origen. Si la información previa no es suficiente para determinar el lugar de las raíces alrededor del origen, entonces se debe utilizar un punto de prueba s_o cerca del origen y la condición de ángulo.

En la siguiente figura se muestra el lugar de las raíces de algunos sistemas. Algunas conclusiones que se obtienen al analizar los lugares de las raíces son: cuando $n - m \geq 2$ entonces si una raíz se mueve a la izquierda las otras hacen a la derecha, y cuando $n - m \geq 3$ entonces siempre existirá un valor de k para el cual el lugar de las raíces cruce al semiplano derecho del plano complejo.

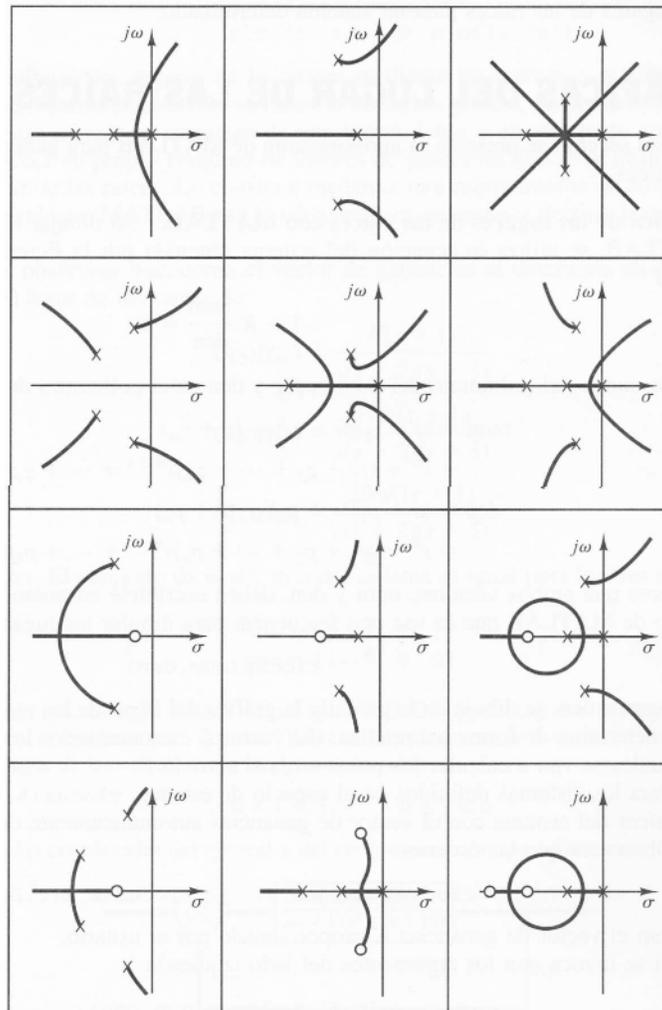


Fig.100: Ejemplos de lugares de las raíces.

Ejemplos: Obtener el lugar de las raíces de los siguientes sistemas:

a) $G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$, $H(s) = 1$.

b) $G(s) = \frac{k(s+2)}{s^2 + 2s + 3}$, $H(s) = 1$.

- c) $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+5)}$, $H(s) = 1$.
- d) $G(s) = \frac{k(s+4)}{(s+1)^2}$, $H(s) = 1$.
- e) $G(s) = \frac{2k(s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}$, $H(s) = 1$.
- f) $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+6)}$, $H(s) = \frac{1}{s+3}$.

Casos especiales del lugar de las raíces.

Una situación que se llega a presentar con relativa frecuencia es la *cancelación de polos de $G(s)$ con ceros de $H(s)$* . Para entender lo que sucede en estos casos primero se debe comprender que el lugar de las raíces obtenido por el método presentado sólo muestra las raíces de la ecuación característica reducida. La ecuación característica $1+G(s)H(s) = 0$ se presenta en forma reducida cuando sucede este tipo de cancelación, por lo que se "pierde" el polo cancelado. En segundo lugar, debe quedar claro que este polo cancelado si es un polo de lazo cerrado del sistema, pero que es un polo constante (que no cambia de valor cuando varía la ganancia). Finalmente, como este polo cancelado si pertenece al conjunto de polos de lazo cerrado del sistema, al final se debe agregar al lugar de las raíces.

Para que quede claro, se considerará el sistema $G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$ con retroalimentación $H(s) = s+1$. Como se puede observar, la función de transferencia de lazo abierto es reducida, $G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{k}{s(s+2)}$, debido a que hay una cancelación del polo $s = -1$, por lo cual se obtiene una ecuación característica reducida $1+G(s)H(s) = 1 + \frac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{s(s+2)+k}{s(s+2)} = 0$, esto es $s(s+2)+k = 0$. Por lo anterior, el lugar de las raíces tendrá sólo dos ramas, ya que eso indica la ecuación característica reducida, y al aplicar el procedimiento para obtener el lugar de las raíces a la función de transferencia de lazo abierto reducida se obtiene la siguiente gráfica:

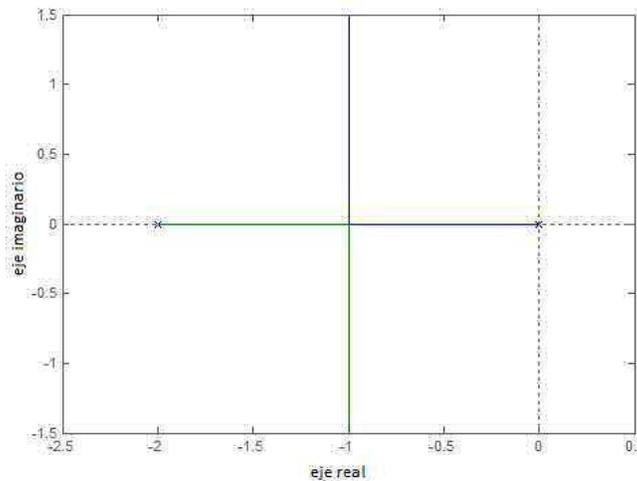


Fig.101: Lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto reducida del sistema.

Por otro lado, al obtener la función de transferencia de lazo cerrado del sistema se tiene $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{k}{s(s+1)(s+2)+k(s+1)} = \frac{k}{(s+1)[s(s+2)+k]}$. Claramente se observa que la ecuación característica completa del sistema es $(s+1)[s(s+2)+k] = 0$, y que hay un polo de lazo cerrado constante (independiente del valor de la ganancia) en $s = -1$, y que hay dos polos de lazo cerrado que dependen del valor de la ganancia y que están dados por $s(s+2)+k = 0$, que es el mismo polinomio de la ecuación característica reducida. Por lo tanto, para completar el lugar de las raíces del sistema se debe agregar a la gráfica anterior este polo cancelado obteniéndose la siguiente gráfica:

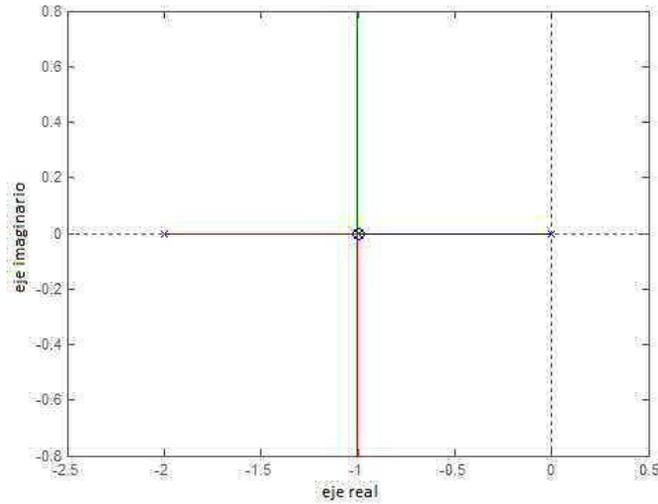


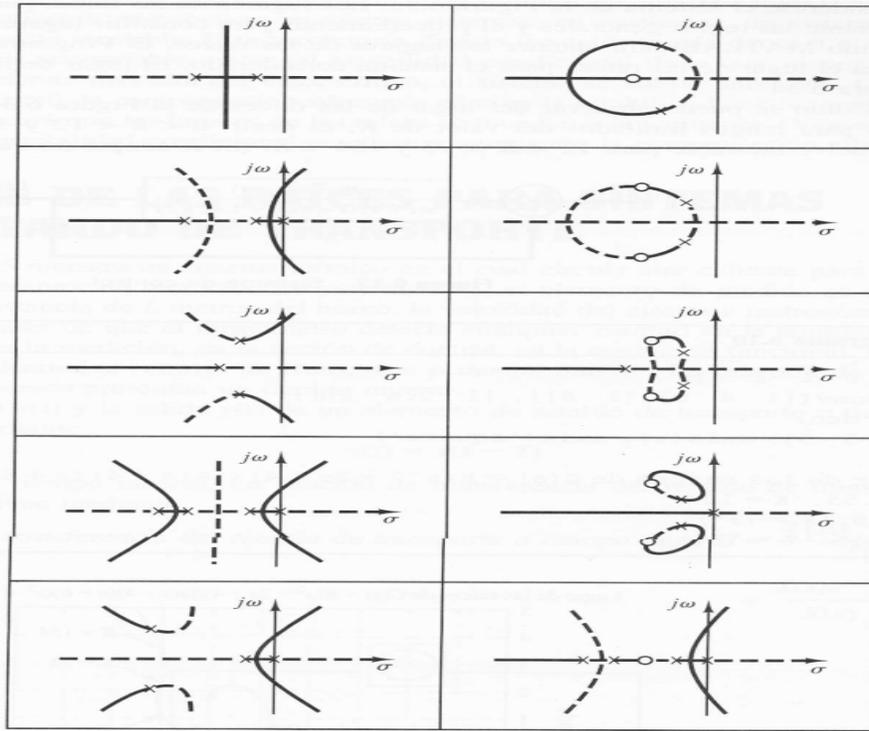
Fig.102: Lugar de las raíces completo del sistema.

Observe que esta cancelación es exacta, es decir que el polo y cero cancelados son exactamente iguales, por lo que hay dos consideraciones importantes que se deben tener. La primera es que nunca se debe cancelar un polo que se ubique en el semiplano derecho del plano complejo, debido a que si llegará a haber pequeños cambios de valor entre éste y el cero que lo cancelaría entonces ya no existiría la cancelación exacta, de tal forma que la inestabilidad del polo se hará presente. Y la segunda es que si se puede llegar a considerar una cancelación práctica (no exacta) cuando el polo y cero a cancelar están en el semiplano izquierdo del plano complejo y la contribución del polo a cancelar en la respuesta del sistema a una escalón unitario es despreciable en comparación con la contribución de los otros polos (esto se determina al evaluar los residuos de la respuesta, es decir al comparar los coeficientes de la ecuación de respuesta del sistema).

Ejemplos: Determinar si es posible la cancelación de polos y ceros de los siguientes sistemas:

- a) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{8.75(s+2)}{(s+1.75)(s+2.5)(s+4)}$.
- b) $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{9.925(s+2)}{(s+1.985)(s+2.5)(s+4)}$.

Existen otros casos especiales al obtener el lugar de las raíces: *sistemas de fase no mínima*, *sistemas con retroalimentación positiva*, *sistemas condicionalmente estables*, *sistemas con retardo de transporte*. Algunos de ellos requieren modificar el procedimiento visto y otros ser cuidadosos al aplicarlo, pero estos casos quedan fuera del alcance del tema, por lo que se recomienda a los alumnos que los consulten en las referencias. Únicamente, y con el fin de ilustrar estos casos, a continuación se muestra el lugar de las raíces de algunos sistemas con retroalimentación negativa contra los mismos sistemas (esto es con los mismos polos y ceros de lazo abierto) pero con retroalimentación positiva:



Las líneas y curvas gruesas corresponden a los sistemas con retroalimentación negativa; las líneas y curvas discontinuas corresponden a los sistemas con retroalimentación positiva.

Fig.103: Lugar de las raíces de sistemas con retroalimentación negativa y con retroalimentación positiva.

4.2 Análisis del lugar de las raíces de un sistema

La información que se puede obtener de un lugar de las raíces se basa en las siguientes observaciones geométricas: considerando un par de polos complejos conjugados de la forma $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, como los de un sistema de segundo orden subamortiguado estándar (véase el tema 3.1), se tiene que la ubicación geométrica del polo s_1 es un vector que va del origen del plano complejo hasta ese punto como se muestra en la figura siguiente:

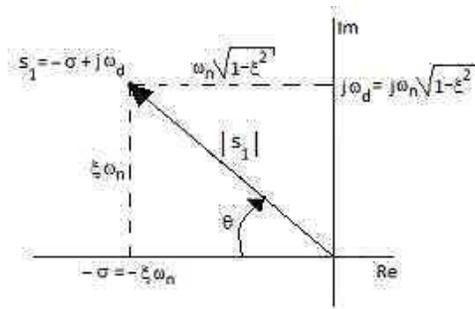


Fig.104: Ubicación de un polo complejo conjugado.

Ahora bien, al obtener la magnitud del polo s_1 (su distancia al origen) se tiene $|s_1| = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \omega_n$. Esto significa que su distancia al origen es de valor ω_n . Si se grafican todos los puntos que cumplan la condición $|s| = \omega_n$ se obtiene una circunferencia con centro en el origen de radio ω_n . Si esto se hace para diferentes valores de ω_n se obtiene una serie de círculos concéntricos que se llaman círculos o lugares M y que cada uno de ellos se distingue por corresponder a un valor de frecuencia natural no amortiguada ω_n , como se muestra en la figura siguiente:

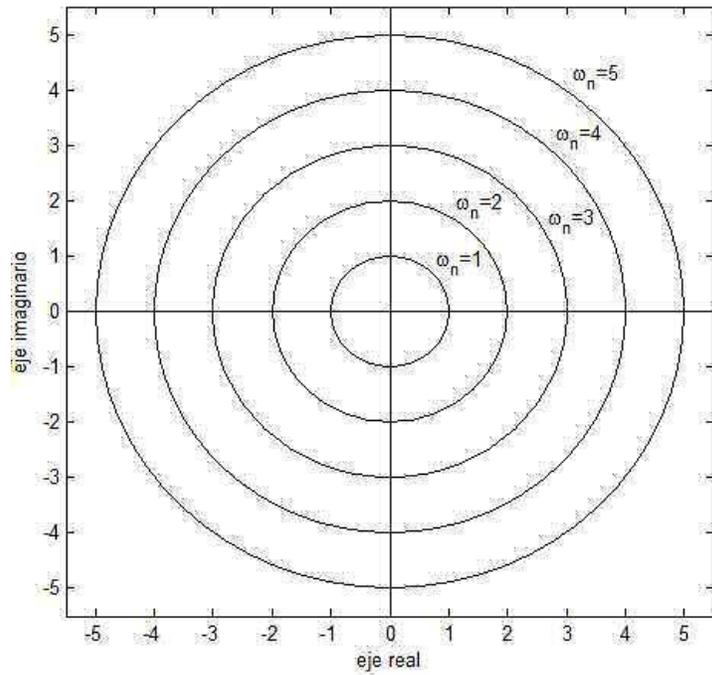


Fig.105: Círculos o lugares M.

Por otro lado, al obtener la función coseno del ángulo de s_1 con respecto al eje real negativo se tiene $\cos(\angle s_1) = \cos(\theta) = \frac{\xi\omega_n}{|s_1|} = \xi$. Esto significa que el coseno de su ángulo θ es de valor ξ . Si se grafican todos los puntos que cumplan la condición $\cos(\theta) = \xi$ se obtiene una recta o rayo que inicia en el origen y que tiene un ángulo cuyo coseno es de valor ξ . Si esto se hace para diferentes valores de ξ se obtiene una serie de rectas o lugares N y que cada uno de ellos se distingue por corresponder a un valor de amortiguamiento relativo ξ . Además, no hay que olvidar la simetría que se genera debido a que se tienen pares de polos complejos conjugados, y observe que si $\xi < 0$ entonces el polo correspondiente debe estar en la parte derecha del plano complejo (es decir el polo es inestable). Estos lugares N se muestran en la figura siguiente:

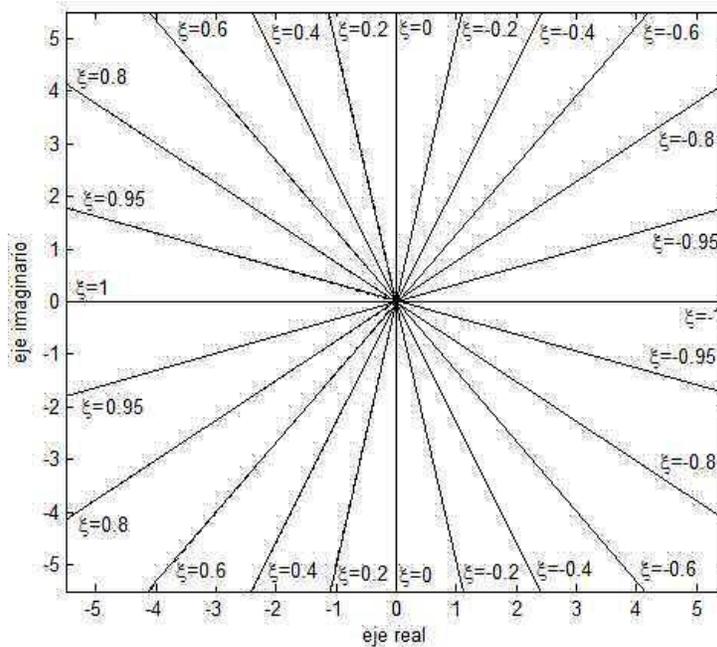


Fig.106: Rectas o lugares N.

Con las observaciones geométricas presentadas se puede obtener la siguiente información de un lugar de las raíces:

1. *Determinar el rango de estabilidad del sistema:* esto se realiza observando el lugar de las raíces. Si hay partes del lugar de las raíces en el semiplano derecho del plano complejo entonces significa que el sistema es estable para un rango de valores de k específico. Este rango de estabilidad queda limitado por los valores de ganancia crítica de cruce con el eje imaginario que se obtienen en el paso 6 del método para graficar el lugar de las raíces y considerando las partes del lugar de las raíces estables (en el semiplano izquierdo del plano complejo).
2. *Obtener el valor de ganancia k para que el sistema tenga un polo de lazo cerrado ubicado en s_o :* esto se realiza primero observando si el punto s_o pertenece al lugar de las raíces. Si está ubicado en el lugar de las raíces entonces se utiliza la condición de magnitud $|G(s)H(s)|_{s=s_o} = 1$ y se despeja de ella el valor k . Si no está ubicado en el lugar de las raíces entonces no existe valor k tal que se tenga el polo de lazo cerrado deseado.
3. *Obtener el valor de amortiguamiento relativo ξ de un polo de lazo cerrado ubicado en s_o :* esto se realiza midiendo el ángulo que forma el vector o recta del polo s_o al origen con respecto al eje real negativo, y utilizando la condición $\cos(\theta) = \xi$.
4. *Obtener el valor de frecuencia natural no amortiguada ω_n de un polo de lazo cerrado ubicado en s_o :* esto se realiza midiendo el vector o recta que une el polo s_o con el origen, y utilizando la condición $|s_o| = \omega_n$.
5. *Obtener el valor de un polo de lazo cerrado s_o que tenga un amortiguamiento relativo ξ :* esto se realiza trazando la recta que inicia en el origen con un ángulo θ con respecto al eje real negativo que cumpla la condición $\cos(\theta) = \xi$, y el punto de cruce de esta recta con el lugar de las raíces es el polo de lazo cerrado s_o buscado, cuyo valor se obtiene por medición cartesiana. Si no hay punto de cruce entonces no existe un polo de lazo cerrado del sistema que tenga el valor ξ deseado.
6. *Obtener el valor de un polo de lazo cerrado s_o que tenga una frecuencia natural no amortiguada ω_n :* esto se realiza trazando un círculo de radio ω_n con centro en el origen, y el punto de cruce de este círculo con el lugar de las raíces es el polo de lazo cerrado s_o buscado, cuyo valor se obtiene por medición cartesiana. Si no hay punto de cruce entonces no existe un polo de lazo cerrado del sistema que tenga el valor ω_n deseado.
7. *Obtener el valor de un polo de lazo cerrado s_o que tenga un amortiguamiento relativo ξ y una frecuencia natural no amortiguada ω_n :* esto se realiza trazando la recta que inicia en el origen con un ángulo θ con respecto al eje real negativo que cumpla la condición $\cos(\theta) = \xi$ y el círculo de radio ω_n con centro en el origen, y el punto de cruce de la recta con el círculo y con el lugar de las raíces es el polo de lazo cerrado s_o buscado, cuyo valor se obtiene por medición cartesiana. Si no hay punto de cruce entonces no existe un polo de lazo cerrado del sistema que tenga los valores ξ y ω_n deseados.
8. *Obtener el valor de ganancia k para que el sistema tenga un polo de lazo cerrado con valor ξ , ω_n ó (ξ, ω_n) :* esto se realiza primero utilizando el numeral 5, 6 o 7 según corresponda, y si existe el polo deseado entonces se usa el numeral 2.
9. *Obtener los polos de lazo cerrado para un valor de ganancia k :* esto se realiza por sustitución directa del valor k en la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$ y encontrando las raíces del polinomio resultante.

Ejemplos: Para todos los lugares de las raíces obtenidos en el tema anterior obtener:

- a) El rango de estabilidad.
- b) El valor de ganancia para que se tengan polos de lazo cerrado en $s_{1,2} = -1 + j$.
- c) El valor de ganancia para que se tenga un polo de lazo cerrado con $\xi = 0.5$.
- d) El valor de ganancia para que se tenga un polo de lazo cerrado con $\omega_n = 1.5$ rad/seg.
- e) El valor de ganancia para que se tenga un polo de lazo cerrado con $\xi = 0.4$ y $\omega_n = 3$ rad/seg.
- f) Los polos de lazo cerrado para $k = 5$.

4.3 Diseño de compensadores mediante lugar de las raíces

Compensador (de fase): es un controlador, es decir es un elemento que se agrega al sistema para satisfacer las especificaciones deseadas, que modifica la fase del sistema para lograr el comportamiento deseado.

Configuraciones para la compensación de un sistema.

Un compensador se puede conectar en dos formas básicas al sistema: compensación en serie o en cascada, y compensación en paralelo o en retroalimentación. En la siguiente figura se muestran las configuraciones de compensación básicas mencionadas:

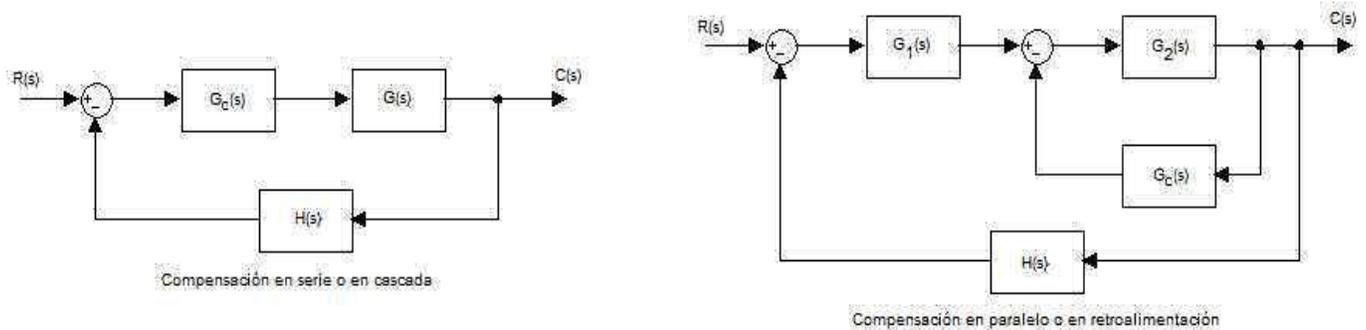


Fig.107: Configuraciones básicas para la compensación de un sistema.

Tipos de compensadores.

Independientemente de la configuración usada para la compensación existen tres *tipos de compensadores*, que son:

1. *Compensador de adelanto de fase, derivativo, PD o lead-phase:* es aquel compensador que agrega fase al sistema, es decir la adelanta, para lograr el comportamiento deseado.
2. *Compensador de atraso de fase, de retardo de fase, integral, PI o lag-phase:* es aquel compensador que atenúa las altas frecuencias para lograr el comportamiento deseado. Al atenuar las altas frecuencias está agregando fase negativa al sistema, es decir la está reduciendo.
3. *Compensador de atraso-adelanto de fase, retardo-adelanto de fase, integral-derivativo, PID o lead-lag-phase:* es aquel compensador que combina el adelanto de fase y la atenuación en altas frecuencias para lograr el comportamiento deseado en un sistema. En otras palabras combina el compensador de adelanto y el compensador de atraso.

Para entender mejor y más fácilmente el comportamiento de los compensadores a continuación se analizan los *efectos de agregar polos o ceros de lazo abierto a un sistema*:

- *Adición de polos de lazo abierto:* en la siguiente figura se muestra el lugar de las raíces que va generando la adición de polos a la función de transferencia de lazo abierto. En ellas se observan los siguientes efectos: el lugar de las raíces se desplaza a la derecha, por lo que la estabilidad relativa disminuye y el tiempo de establecimiento aumenta. Por otro lado, recuerde que el control PI es el que agrega un polo en lazo abierto al sistema.

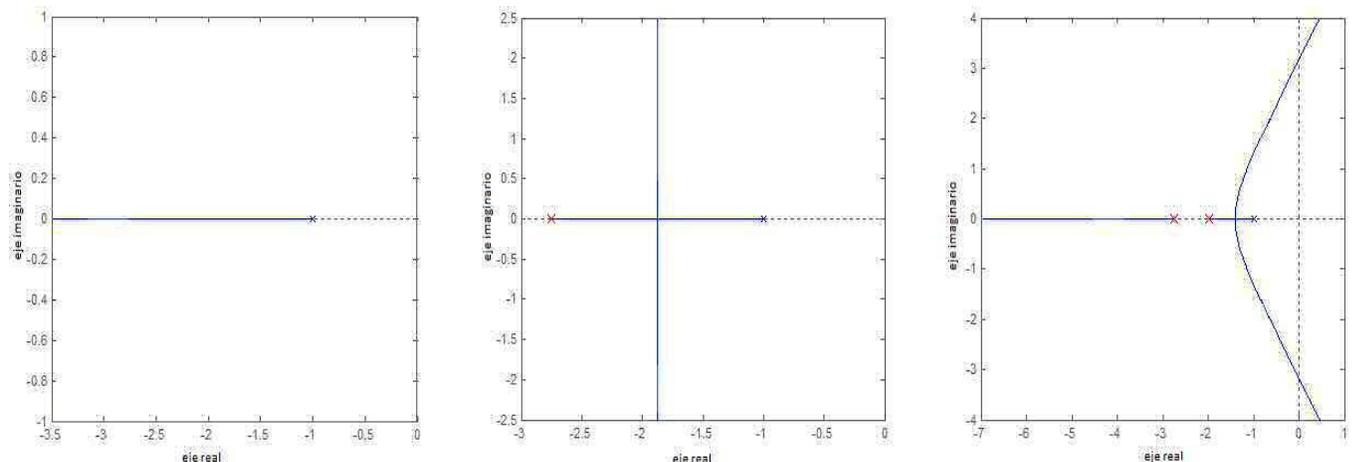


Fig.108: Efectos de la adición de polos de lazo abierto a un sistema (los polos agregados se muestran en rojo).

- *Adición de ceros de lazo abierto:* en la siguiente figura se muestra el lugar de las raíces que va generando la adición de ceros a la función de transferencia de lazo abierto. En ellas se observan los siguientes efectos: el lugar de las raíces se desplaza a la izquierda, por lo que la estabilidad relativa aumenta y el tiempo de establecimiento disminuye. Por otro lado, recuerde que el control PD es el que agrega un cero en lazo abierto al sistema.

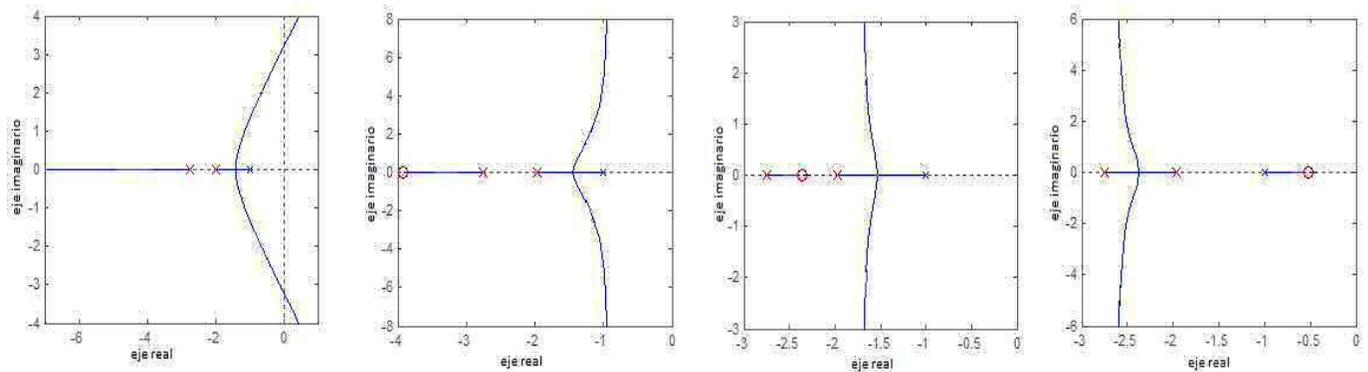


Fig.109: Efectos de la adición de ceros de lazo abierto a un sistema (el cero agregado se muestra en rojo).

Como ya se mencionó un compensador de adelanto introduce fase positiva al sistema en algún intervalo de frecuencias, mientras que el compensador de atraso introduce fase negativa. Desde el punto de vista de filtrado, un compensador de adelanto es un filtro pasa altas, el compensador de atraso es un filtro pasa bajas, y el compensador de atraso-adelanto es un filtro pasa banda. Como se puede deducir, en general, el diseño de controladores en sistemas de control se puede ver como un problema de diseño de filtros, por lo que existe un gran número de esquemas posibles. Estas ideas relacionadas con el filtrado y el corrimiento de fase son útiles cuando los diseños se realizan en el dominio de la frecuencia.

A continuación se van a describir los compensadores, así como se va a presentar el método de diseño, basado en el lugar de raíces, para cada uno de cada uno de ellos. Para ello se va a considerar el siguiente sistema con compensación en serie con retroalimentación unitaria:

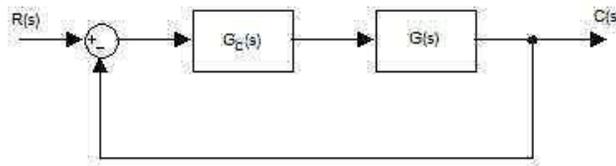


Fig.110: Sistema con compensación en serie con retroalimentación unitaria.

Compensador de adelanto.

Procedimiento para diseñar un compensador de adelanto basado en lugar de las raíces:

1. *Determinar la ubicación deseada de los polos dominantes de lazo cerrado $s_{1,2}$:* esto se realiza a partir de las especificaciones de comportamiento deseadas del sistema.
2. *Graficar el lugar de las raíces del sistema no compensado $G(s)H(s) = G(s)$ y verificar si con un ajuste de ganancia k se puede lograr la ubicación deseada de los polos $s_{1,2}$:* si con un ajuste de ganancia se logra la ubicación deseada y no hay valor de constante de error estática deseado entonces ya no es necesario diseñar ningún compensador ya que basta con cambiar el valor de dicha ganancia. Si no funciona el ajuste de ganancia entonces si es necesario diseñar un compensador de adelanto.

Si existe especificación deseada sobre la constante de error estática entonces no se puede diseñar un compensador de adelanto y se tendrá que diseñar otro tipo de compensador o bien utilizar el método de diseño en la frecuencia.

3. *Determinar el ángulo de deficiencia ϕ que tiene el sistema para alcanzar la ubicación deseada s_1 :* esto se realiza a partir de la condición de ángulo $\angle G_c(s)G(s)|_{s=s_1} = \pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, por lo que $\phi = \angle G_c(s)|_{s=s_1} = 180^\circ - \angle G(s)|_{s=s_1}$. Si $\phi \leq 65^\circ$ entonces es posible diseñar un compensador de adelanto de la forma

$$G_c(s) = k_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

donde $k_c > 0$ es la ganancia del compensador, α es la constante de atenuación del compensador, y $T > 0$ es la constante de tiempo del compensador.

Si $\phi > 65^\circ$ entonces la construcción física de un compensador de adelanto de una sola etapa es muy difícil debido a los valores de sus componentes, pero si se podrían diseñar varias etapas de adelanto para lograr el ángulo requerido.

4. *Determinar el polo* $(-\frac{1}{\alpha T})$, *el cero* $(-\frac{1}{T})$ *y la constante de atenuación* α *del compensador*: esto se realiza usando el valor del ángulo que debe agregar el compensador ϕ y la relación geométrica del polo y del cero del compensador con el polo s_1 deseado. En general existen tres métodos para realizar este paso: método de la bisectriz, método de cancelación de un polo o cero de la planta, y método de asignación arbitrario. Estos métodos se explicarán en los ejemplos.
5. *Determinar la ganancia* k_c *del compensador*: esto se realiza a partir de la condición de magnitud $|G_c(s)G(s)|_{s=s_1} = 1$ y despejando k_c .
6. *Verificar si el sistema compensado* $G_c(s)G(s)H(s) = G_c(s)G(s)$, *esto es con el compensador diseñado, cumple las especificaciones deseadas*: si no las cumple entonces hay que rediseñar, y si las cumple ya se terminó el diseño.

En la siguiente figura se muestra el mapa de polos y ceros del compensador de adelanto:

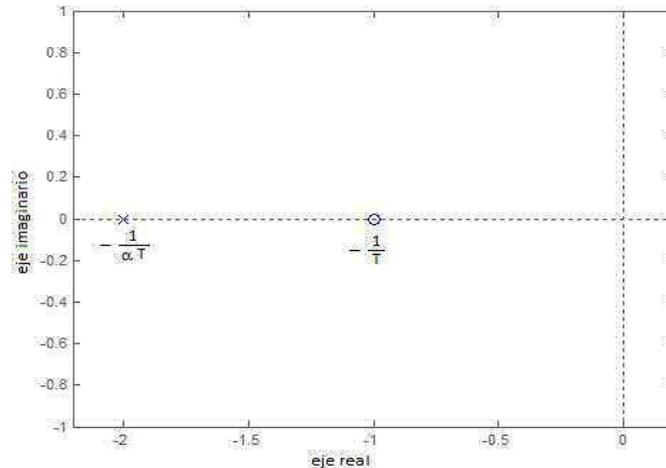


Fig.111: Mapa de polos y ceros de un compensador de adelanto.

En conclusión, el compensador de adelanto logra el resultado deseado gracias a su propiedad de adelanto de fase, por lo que esta característica es utilizada en el método de diseño, y actúa aproximadamente como un control PD.

Efectos de la compensación en adelanto: brinda esencialmente una mejora apreciable en la respuesta transitoria, causa una pequeña modificación en la exactitud en estado estacionario, puede acentuar los ruidos en alta frecuencia, puede incrementar el amortiguamiento del sistema cuando se emplea en forma adecuada, reduce los tiempos de crecimiento y de establecimiento, no afecta el error de estado estacionario ya que $G_c(0) = 1$, agrega un cero y un polo (el cero a la derecha del polo) a la función de transferencia de la trayectoria directa, aumenta el orden del sistema en uno, mejora el margen de fase del sistema en lazo cerrado, mejora los márgenes de ganancia y de fase del sistema, incrementa el ancho de banda del sistema, mejora la estabilidad relativa del sistema, cambia de manera significativa la ubicación de los polos de lazo cerrado del sistema compensado.

Limitaciones de la compensación de adelanto de fase: si el sistema original es inestable o tiene un margen de estabilidad bajo, el adelanto de fase adicional requerido para lograr el margen de fase deseado puede ser excesivo provocando un incremento del ancho de banda del sistema compensado y la transmisión de ruido de alta frecuencia; el máximo adelanto de fase que puede proporcionar es de 65° por lo que si se requiere un valor mayor deben usarse varias etapas de control.

Compensador de atraso.

Procedimiento para diseñar un compensador de atraso basado en lugar de las raíces:

1. *Determinar la ubicación deseada de los polos dominantes de lazo cerrado $s_{1,2}$* : esto se realiza a partir de las especificaciones de comportamiento deseadas del sistema.
2. *Graficar el lugar de las raíces del sistema no compensado $G(s)H(s) = G(s)$ y verificar si con un ajuste de ganancia k se puede lograr la ubicación de los polos $s_{1,2}$ deseados*: si no funciona el ajuste de ganancia entonces no es posible diseñar un compensador de atraso y deberá diseñarse un compensador de otro tipo. Si con un ajuste de ganancia se logra la ubicación deseada entonces en los pasos siguientes se utiliza el sistema con esta ganancia ajustada para lograr la constante de error estática deseada usando un compensador de atraso de la forma

$$G_c(s) = k_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta T s + 1} = k_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}, \quad \beta > 1$$

donde $k_c > 0$ es la ganancia del compensador, β es la constante de atenuación del compensador, y $T > 0$ es la constante de tiempo del compensador.

3. *Determinar la constante de atenuación β del compensador*: el valor β es igual al incremento de la constante de error estática necesario para alcanzar la especificación deseada, por lo que esto se realiza a partir de la condición $\beta = \frac{\text{cte. error est. deseada}}{\text{cte. error est. original}}$.

4. *Determinar la ubicación del polo $(-\frac{1}{\beta T})$ y del cero $(-\frac{1}{T})$ del compensador*: esto se realiza a partir de la condición $\beta = \frac{\text{cero compensador}}{\text{polo compensador}}$ y fijando arbitrariamente el valor del polo o del cero del compensador. Generalmente se fija el valor del polo del compensador debido a que es el valor más cercano al origen. El valor absoluto que se debe elegir debe ser muy pequeño, más pequeño que la menor constante de tiempo del sistema.

5. *Elegir la ubicación final de los polos de lazo cerrado s_f* : esto se realiza graficando, en forma sobrepuesta, el lugar de las raíces del sistema sin compensar $G(s)H(s) = G(s)$ y del sistema con el compensador con ganancia unitaria $G_c(s)G(s)H(s) = G_c(s)G(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}G(s)$. Si el ángulo que aporta el compensador es muy pequeño, normalmente debe ser $-5^\circ < \angle G_c(s)|_{s=s_f} < 0$, entonces las dos gráficas deben ser casi idénticas. Se elige un polo de lazo cerrado s_f sobre el lugar de las raíces del sistema con el compensador lo más cercano posible a la ubicación del polo de lazo cerrado deseado s_1 que está sobre el lugar de las raíces del sistema sin compensar.

6. *Determinar la ganancia final k_c del compensador*: esto se realiza a partir de la condición de magnitud $|G_c(s)G(s)|_{s=s_f} = 1$ y despejando k_c . El valor encontrado debe ser casi unitario debido a que $|G_c(s)|_{s=s_f} \approx 1$.

7. *Verificar si el sistema compensado $G_c(s)G(s)H(s) = G_c(s)G(s)$, esto es con el compensador diseñado, cumple las especificaciones deseadas*: si no las cumple entonces hay que rediseñar, y si las cumple ya se terminó el diseño.

En la siguiente figura se muestra el mapa de polos y ceros del compensador de atraso:

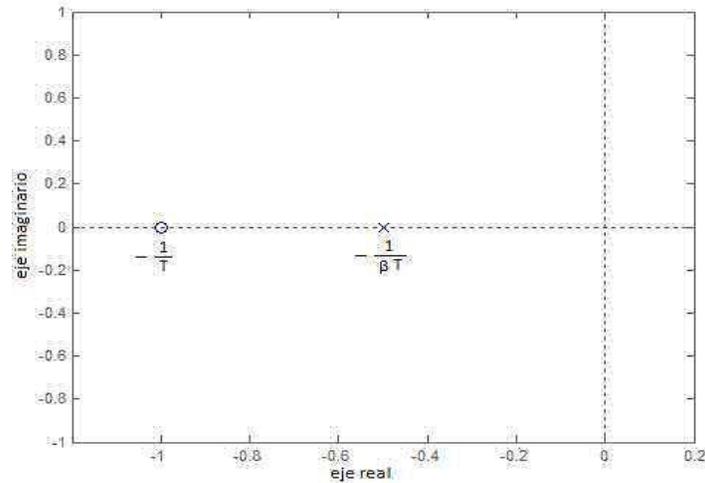


Fig.112: Mapa de polos y ceros de un compensador de atraso.

En conclusión, el compensador de atraso logra el resultado deseado gracias a su propiedad de atenuación en altas frecuencias, por lo que su característica de atraso de fase no es utilizada en el método de diseño, y actúa aproximadamente como un control PI.

Efectos de la compensación en atraso: brinda una mejora apreciable en la exactitud de estado estacionario a expensas de un aumento del tiempo de respuesta transitoria, suprime los efectos de ruidos de alta frecuencia, mejora la estabilidad relativa del sistema, reduce el ancho de banda del sistema, incrementa los tiempos de crecimiento y de establecimiento, agrega un cero y un polo (el cero a la izquierda del polo) a la función de transferencia de la trayectoria directa, aumenta el orden del sistema en uno, aumenta la sensibilidad del sistema a variaciones en los parámetros para todas las frecuencias aproximadamente mayores que el ancho de banda del sistema, reduce el error de estado estacionario, prácticamente no cambia la ubicación de los polos de lazo cerrado del sistema no compensado.

Limitaciones de la compensación de atraso de fase: por parecerse a un control PI tiende a tornarse menos estable, para evitar esto la constante de tiempo T debe ser superior a la mayor constante de tiempo del sistema; puede producir estabilidad condicional o incluso inestabilidad si el sistema tiene saturación.

Compensador de atraso-adelanto.

Para diseñar un compensador de atraso-adelanto existen dos métodos, en el primero se consideran dos constantes de atenuación diferentes, y en el segundo se considera sólo una constante de atenuación.

Procedimiento para diseñar un compensador de atraso-adelanto con $\gamma \neq \beta$ basado en lugar de las raíces:

1. *Determinar la ubicación deseada de los polos dominantes de lazo cerrado $s_{1,2}$:* esto se realiza a partir de las especificaciones de comportamiento deseadas del sistema.
2. *Graficar el lugar de las raíces del sistema no compensado $G(s)H(s) = G(s)$ y verificar si con un ajuste de ganancia k se puede lograr la ubicación deseada de los polos $s_{1,2}$:* si con un ajuste de ganancia se logra la ubicación deseada entonces no es necesario diseñar un compensador de atraso-adelanto, y dependiendo de si hay o no especificación de constante de error estática deseada se diseña un compensador de atraso o de adelanto para resolver el problema. Si no funciona el ajuste de ganancia entonces si es necesario diseñar un compensador de atraso-adelanto de la forma

$$G_c(s) = k_c \frac{\beta}{\gamma} \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma}s + 1\right)(\beta T_2s + 1)} = k_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right), \quad \gamma > 1, \beta > 1, T_2 > T_1$$

donde $k_c > 0$ es la ganancia del compensador, γ y β son las constantes de atenuación del compensador (una de la parte de adelanto y otra de la parte de atraso), y $T_1 > 0$ y $T_2 > 0$ son las constantes de tiempo del compensador (una de la parte de adelanto y otra de la parte de atraso). Observe que la parte de adelanto corresponde a los términos con T_1 y que la parte de atraso corresponde a los términos con T_2 .

3. *Determinar el ángulo de deficiencia ϕ que tiene el sistema para alcanzar la ubicación deseada s_1 :* esto se

realiza a partir de la condición de ángulo $\angle \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} G(s) \Big|_{s=s_1} = \pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, por lo tanto

$\phi = \angle \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \Big|_{s=s_1} = 180^\circ - \angle G(s) \Big|_{s=s_1}$. Si $\phi \leq 65^\circ$ entonces es posible diseñar un compensador de una sola etapa, de no ser así se tendrían que diseñar varias etapas. La parte de atraso no contribuye a la condición de

ángulo porque debe tener un ángulo muy pequeño, $-5^\circ < \angle \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \Big|_{s=s_1} < 0$, y esto se logra para T_2 lo

suficientemente grande.

4. *Determinar el polo $(-\frac{\gamma}{T_1})$, el cero $(-\frac{1}{T_1})$ y la constante de atenuación γ de la parte de adelanto del compensador:* esto se realiza usando el valor del ángulo que debe agregar el compensador ϕ y la relación geométrica del polo

y del cero de la parte de adelanto con el polo s_1 deseado dada por $\angle \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \Big|_{s=s_1} = \phi$. En general existen tres

métodos para realizar este paso: método de la bisectriz, método de cancelación de un polo o cero de la planta, y método de asignación arbitrario.

5. *Determinar la ganancia k_c del compensador:* esto se realiza a partir de la condición de magnitud del sistema

compensado $\left| k_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) G(s) \right|_{s=s_1} = 1$ y despejando k_c . La parte de atraso no contribuye a la condición de

magnitud porque debe tener una magnitud cercana a la unidad, $\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right|_{s=s_1} \approx 1$, y esto se logra para T_2 lo

suficientemente grande.

6. *Determinar la constante de atenuación β de la parte de atraso del compensador:* esto se realiza a partir de la constante de error estática deseada del sistema compensado, por ejemplo si es k_v se tiene $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) =$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s k_c \frac{\beta}{\gamma} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma} s + 1 \right) (\beta T_2 s + 1)} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s k_c \frac{\beta}{\gamma} G(s), \text{ y despejando } \beta.$$

7. *Determinar el polo $(-\frac{1}{\beta T_2})$ y el cero $(-\frac{1}{T_2})$ de la parte de atraso del compensador:* esto se realiza a partir de

las condiciones de magnitud y de ángulo de la parte de atraso $\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right|_{s=s_1} \approx 1$ y $-5^\circ < \angle \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \Big|_{s=s_1} < 0$.

Se busca un valor T_2 lo suficientemente grande para satisfacer las dos condiciones anteriores. Esta búsqueda normalmente se realiza a prueba y error.

8. *Verificar si el sistema compensado $G_c(s) G(s) H(s) = G_c(s) G(s)$, esto es con el compensador diseñado, cumple las especificaciones deseadas:* si no las cumple entonces hay que rediseñar, y si las cumple ya se terminó el diseño.

Procedimiento para diseñar un compensador de atraso-adelanto con $\gamma = \beta$ basado en lugar de las raíces:

1. *Determinar la ubicación deseada de los polos dominantes de lazo cerrado $s_{1,2}$:* esto se realiza a partir de las especificaciones de comportamiento deseadas del sistema.

2. Graficar el lugar de las raíces del sistema no compensado $G(s)H(s) = G(s)$ y verificar si con un ajuste de ganancia k se puede lograr la ubicación deseada de los polos $s_{1,2}$: si con un ajuste de ganancia se logra la ubicación deseada entonces no es necesario diseñar un compensador de atraso-adelanto, y dependiendo de si hay o no especificación de constante de error estática deseada se diseña un compensador de atraso o de adelanto para resolver el problema. Si no funciona el ajuste de ganancia entonces si es necesario diseñar un compensador de atraso-adelanto de la forma

$$G_c(s) = k_c \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma}s + 1\right)(\gamma T_2s + 1)} = k_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\gamma T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\gamma T_2}} \right), \quad \gamma > 1, T_2 > T_1$$

donde $k_c > 0$ es la ganancia del compensador, γ es la constante de atenuación del compensador, y $T_1 > 0$ y $T_2 > 0$ son las constantes de tiempo del compensador (una de la parte de adelanto y otra de la parte de atraso). Observe que la parte de adelanto corresponde a los términos con T_1 y que la parte de atraso corresponde a los términos con T_2 .

3. Determinar el ángulo de deficiencia ϕ que tiene el sistema para alcanzar la ubicación deseada s_1 : esto se

realiza a partir de la condición de ángulo $\angle \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\gamma T_1}} G(s) \Big|_{s=s_1} = \pm 180^\circ (2k + 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, por lo tanto

$\phi = \angle \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{1}{\gamma T_1}} \Big|_{s=s_1} = 180^\circ - \angle G(s) \Big|_{s=s_1}$. Si $\phi \leq 65^\circ$ entonces es posible diseñar un compensador de una sola etapa, de no ser así se tendrían que diseñar varias etapas. La parte de atraso no contribuye a la condición de

ángulo porque debe tener un ángulo muy pequeño, $-5^\circ < \angle \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \Big|_{s=s_1} < 0$, y esto se logra para T_2 lo

suficientemente grande.

4. Determinar la ganancia k_c del compensador: esto se realiza a partir de la constante de error estática deseada, por ejemplo si es k_v se tiene $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s k_c \frac{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}{\left(\frac{T_1}{\gamma}s + 1\right)(\gamma T_2s + 1)} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s k_c G(s)$, y despejando k_c .

5. Determinar el polo de adelanto $(-\frac{\gamma}{T_1})$, el cero de adelanto $(-\frac{1}{T_1})$ y la constante de atenuación γ del com-

pensador: esto se realiza a partir de las condiciones de magnitud y de ángulo $\left| k_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) G(s) \right|_{s=s_1} = 1$ y

$\angle \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \Big|_{s=s_1} = \phi$. Se busca valores T_1 y γ que satisfagan las dos condiciones anteriores, por lo que sólo hay

una solución posible. Únicamente hay un método para hacer esto que está basado en la relación geométrica del polo y del cero de la parte de adelanto con el polo s_1 deseado, el cual se explicará en los ejemplos. La parte de atraso no contribuye a la condición de magnitud porque debe tener una magnitud cercana a la unidad,

$\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right|_{s=s_1} \approx 1$, y esto se logra para T_2 lo suficientemente grande

6. Determinar el polo $(-\frac{1}{\gamma T_2})$ y el cero $(-\frac{1}{T_2})$ de la parte de atraso del compensador: esto se realiza a partir de

las condiciones de magnitud y de ángulo de la parte de atraso $\left| \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right|_{s=s_1} \approx 1$ y $-5^\circ < \angle \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \Big|_{s=s_1} < 0$.

Se busca un valor T_2 lo suficientemente grande para satisfacer las dos condiciones anteriores. Esta búsqueda normalmente se realiza a prueba y error.

7. Verificar si el sistema compensado $G_c(s)G(s)H(s) = G_c(s)G(s)$, esto es con el compensador diseñado, cumple las especificaciones deseadas: si no las cumple entonces hay que rediseñar, y si las cumple ya se terminó el diseño.

En la siguiente figura se muestra el mapa de polos y ceros del compensador de atraso-adelanto:

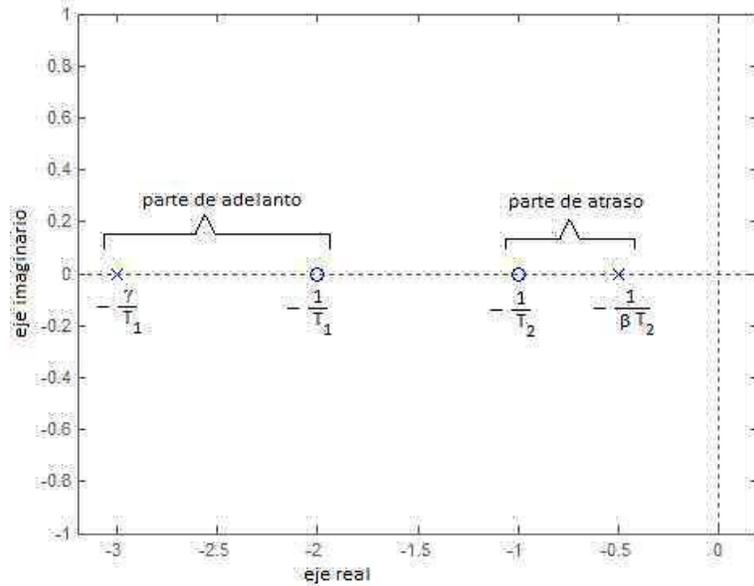


Fig.113: Mapa de polos y ceros de un compensador de atraso-adelanto.

En conclusión, el compensador de atraso-adelanto logra el resultado deseado gracias a la combinación del adelanto de fase (de la parte de adelanto) y la atenuación de altas frecuencias (de la parte de atraso). En la compensación de atraso-adelanto, primero se utiliza la parte de adelanto para lograr un tiempo de crecimiento más pequeño y un ancho de banda más grande, y después se usa la parte de atraso para mejorar el amortiguamiento del sistema, este orden se ve reflejado en los métodos de diseño.

Efectos de la compensación de atraso-adelanto: combina las mejores características del compensador de atraso y del compensador de adelanto; agrega dos ceros y dos polos (el polo y cero de adelanto a la izquierda del polo y cero de atraso) a la función de transferencia de la trayectoria directa; aumenta el orden del sistema en dos, por lo que el sistema se vuelve más complejo y el comportamiento de respuesta transitoria se torna más difícil de controlar.

Ejemplos: Diseñar un compensador para los siguientes sistemas:

a) Sea el sistema $G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ con retroalimentación unitaria. Se desea que el sistema tenga polos de lazo cerrado dominantes con $\xi = 0.5$ y $\omega_n = 4$ rad/seg.

b) Sea el sistema $G(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$ con retroalimentación unitaria. Se desea que el sistema tenga polos de lazo cerrado dominantes en $s_{1,2} = -0.23 \pm j0.883$ y que tenga $k_v \approx 5 \text{ seg}^{-1}$.

c) Sea el sistema $G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$ con retroalimentación unitaria. Se desea que el sistema tenga polos de lazo cerrado dominantes en $s_{1,2} = -2.5 \pm j4.33$ y que tenga $k_v \approx 80 \text{ seg}^{-1}$.

Un resumen de las características de los compensadores se encuentra en la Fig.70 en el tema 2.7.

Finalmente, una vez que se tiene el diseño del compensador, éste se puede construir físicamente con un circuito electrónico de un circuito activo (con amplificadores operacionales como los mostrados en la Fig.80 y la Fig.82 en el tema 2.8) o de un circuito pasivo como las que se muestran en la tabla de la figura siguiente:

Función	Red	Función de transferencia $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$
Compensación de atraso de fase		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2) C}}$
Compensación de adelanto de fase		$\frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}}$
Compensación de adelanto-atraso de fase		$\frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$

Fig.114: Implementación de los compensadores con circuitos pasivos.

Además es posible implementar un compensador de atraso-adelanto con circuitos pasivos conectando un compensador de atraso en cascada con un compensador de adelanto a través de un amplificador de aislamiento de ganancia -1 .

Compensación en serie con retroalimentación no unitaria.

El diseño anterior presentado para los compensadores en serie fue con un sistema con retroalimentación unitaria, el cual tiene la siguiente función de transferencia de lazo cerrado $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s) G(s)}{1 + G_c(s) G(s)}$, por lo cual la ecuación característica de lazo cerrado es $1 + G_c(s) G(s) = 0$.

Ahora se va a considerar un sistema con compensación en serie con retroalimentación no unitaria como el siguiente:

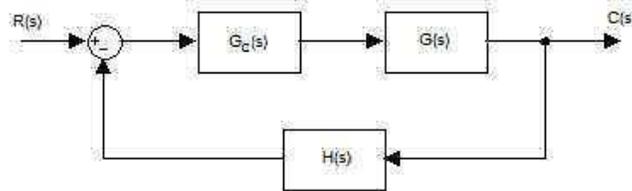


Fig.115: Sistema con compensación en serie con retroalimentación no unitaria.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s) G(s)}{1 + G_c(s) G(s) H(s)}$, por lo cual la ecuación característica de lazo cerrado es $1 + G_c(s) G(s) H(s) = 0$. Al comparar esta ecuación característica con la ecuación característica del sistema con compensador en serie con retroalimentación unitaria se concluye que para que tengan la misma estructura basta con proponer $G_1(s) = G(s) H(s)$, con lo cual se obtiene la ecuación característica $1 + G_c(s) G_1(s) = 0$.

Por lo tanto, cuando se tiene un sistema con retroalimentación no unitaria se propone $G_1(s) = G(s)H(s)$ y se aplican los métodos de diseño para compensadores en serie para la función $G_1(s)$.

Compensación en paralelo.

El diseño anterior presentado para los compensadores en serie fue con un sistema con retroalimentación unitaria, el cual tiene la siguiente función de transferencia de lazo cerrado $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$, por lo cual la ecuación característica de lazo cerrado es $1 + G_c(s)G(s) = 0$.

Ahora se va a considerar un sistema con compensación en paralelo como el siguiente:

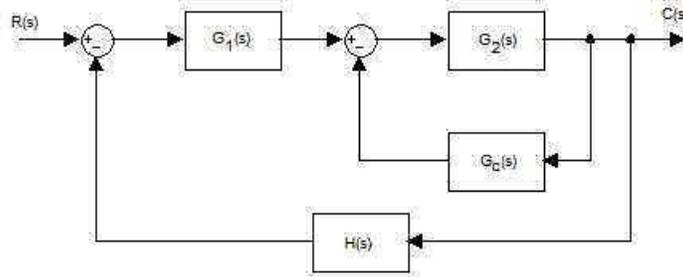


Fig.116: Sistema con compensación en paralelo.

La función de transferencia de lazo cerrado del sistema es $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_c(s)G_2(s) + G_1(s)G_2(s)H(s)}$, por lo cual la ecuación característica de lazo cerrado es $1 + G_1(s)G_2(s)H(s) + G_c(s)G_2(s) = 0$. Al comparar esta ecuación característica con la ecuación característica del sistema con compensador en serie con retroalimentación unitaria se concluye que para que tengan la misma estructura hay de dividir entre $1 + G_1(s)G_2(s)H(s)$, con lo cual se obtiene $1 + \frac{G_c(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = 0$. Ahora bien, proponiendo $G_f(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$ se tiene la ecuación característica $1 + G_c(s)G_f(s) = 0$.

Por lo tanto, cuando se tiene un sistema con retroalimentación no unitaria se propone $G_f(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$ y se aplican los métodos de diseño para compensadores en serie para la función $G_f(s)$.

Referencias

1. Bolton, W. Ingeniería de control, 2^a ed. México: Alfaomega, 2001.
2. Bolzern, P.; Scattolini, R.; Schiavoni, N. Fundamentos de control automático, 3a ed. España: McGraw Hill, 2009.
3. Dorf, R.C.; Bishop, R.H. Sistemas de control moderno, 10^a ed. España: Prentice Hall, 2004.
4. Dorsey, J. Sistemas de control continuos y discretos. México: McGraw Hill, 2005.
5. Franklin, G.F.; Powell, J.D.; Emami-Naeini, A. Feedback control of dynamic systems, 5^a ed. Estados Unidos: Prentice Hall, 2006.
6. Hernández Gaviño, R. Introducción a los sistemas de control. México: Prentice Hall, 2010.
7. Kuo, B.C. Sistemas de control automático. 7^a ed. México: Prentice Hall, 1996.
8. Navarro Viadana, R. M. Ingeniería de control analógica y digital. México: McGraw Hill, 2004.
9. Nise, N.S. Sistemas de control para ingeniería. 3^a ed. México: CECOSA, 2002.
10. Ogata, K. Ingeniería de control moderna, 5^a ed. España: Prentice Hall, 2010.
11. Ogata, K. Problemas de ingeniería de control utilizando MatLab. España: Prentice Hall, 1999.
12. Rodríguez Ávila, J.E. Introducción a la ingeniería del control automático. México: McGraw Hill, 1998.
13. Umez-Eronini, E. Dinámica de sistemas y control. México: Thomson, 2001.