Universidad Autónoma del Estado de México
Centro Universitario Nezahualcóyotl
Lic. en Ingeniería en Sistemas Inteligentes

PROBLEMARIO DE EJERCICIOS RESUELTOS

Unidad de aprendizaje: Ecuaciones Diferenciales

ACTIVIDAD: Solución a Ejercicios

AUTOR: M. EN C. JOSÉ ANTONIO CASTILLO JIMÉNEZ

UNIVERSIDAD AUTONÓMA DEL ESTADO DE MÉXICO
UNIDAD ACADÉMICA PROFESIONAL NEZAHUALCÓYOTL
COORDINACIÓN DE INGENIERÍA EN SISTEMAS INTELIGENTES

I. ESTRUCTURA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Introducción a las Ecuaciones Diferenciales.

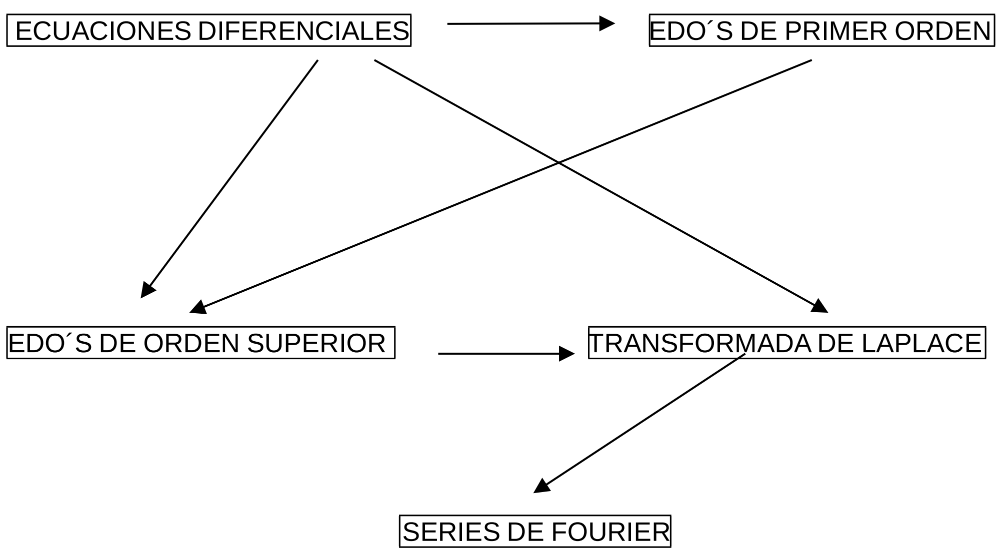
2.- Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.

3.- Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior.

4.- Transformada de Laplace.

5.- Funciones Ortogonales y Series de Fourier.

II. SECUENCIA DIDÁCTICA



CONTENIDO

PRESENTACIÓN

El presente material didáctico tiene como objetivo reforzar el aprendizaje obtenido en las aulas así como proporcionar los elementos tanto matemáticos como conceptuales para la realización de la solución de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden. Los ejercicios han sido seleccionados con la finalidad de dar una mayor comprensión a los conceptos teóricos ya que se espera que, el estudiante aborde los problemas propuestos reflexionando y madurando la teoría y haga uso de sus conocimientos previos de aritmética, algebra, trigonometría, calculo diferencial e integral. Cada una de las secciones contiene una breve explicación y ejercicios resueltos con los cuales se busca que el estudiante refuerce el aprendizaje significativo

Introducción.

En la unidad de aprendizaje Ecuaciones Diferenciales, se divide en dos tipos de soluciones:

1) Las Ecuaciones Diferenciales de primer orden
2) Las Ecuaciones Diferenciales de segundo orden

En este problemario revisaremos particularmente las soluciones a las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior, considerando los métodos: coeficientes constantes, coeficientes indeterminados, variación de parámetros y la técnica de Laplace, estos aplicados a un grupo de problemas propuestos que permitan al estudiante de la unidad de aprendizaje “Ecuaciones Diferenciales”, verificar las técnicas propuestas y analizadas en el salón de clase, de acuerdo **programa de estudios por competencias de la unidad de aprendizaje: Ecuaciones Diferenciales.**

Una ecuación diferencial de segundo orden, se dice que es lineal o mediante algebra puede llevarse a la forma siguiente:

Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de la forma

$$a_n(\mathrm{x})\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(\mathrm{x})\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+.....+a_1(\mathrm{x})\frac{dy}{dx}+a_0(\mathrm{x})\,\mathrm{y}=g(\mathrm{x})$$

con g(x) no igual a cero, se dice que es no homogénea

$$a_n(\mathrm{x})\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(\mathrm{x})\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+.....+a_1(\mathrm{x})\frac{dy}{dx}+a_0(\mathrm{x})\,\mathrm{y}=0$$

se dice que es homogénea.

La palabra homogénea en este contexto no se refiere a los coeficientes que son funciones homogéneas, Después veremos que para resolver una ecuación lineal no homogénea, primero se debe poder resolver la ecuación homogénea asociada.

2. ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR

2.1 Respuesta a la Ecuación Diferencial de Segundo Orden

Sea la ecuación diferencial de orden superior de la forma:

$$a_n(\mathrm{x})\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(\mathrm{x})\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+.....+a_1(\mathrm{x})\frac{dy}{dx}+a_0(\mathrm{x})\,\mathrm{y}=0 \quad donde\ a_{i\neq 0}$$

La cual es una ecuación diferencial de orden superior ***homogénea.***

Si ahora se define que una ecuación diferencial de segundo orden, es también de orden superior y de la forma:

$$a_2(\mathrm{x})\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(\mathrm{x})\frac{dy}{dx}+a_0(\mathrm{x})\,\mathrm{y}=0 \quad con\ a_{i\neq 0}$$

La cual tiene solución, utilizando la transformación:

$$s=\frac{dy}{dx}$$

Entonces la ecuación diferencial de segundo puede ser escrita como una ecuación auxiliar, considerando la transformación anterior, y toma la forma de ecuación cuadrática de segundo orden.

$$as^2+bs+c=0 \quad donde\ a,b,c\ son\ cons\tan tes$$

Si consideramos la solución con la formula general,

$$s_1,s_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta ecuación es llamada solución a la ecuación auxiliar de la ecuación diferencial. La cual considera las dos raíces de la solución de la formula general y los casos del discriminante:

1) $b^2-4ac>0$ caso Raíces reales y diferentes

Bajo la suposición de que la ecuación auxiliar tiene dos raíces reales desiguales s_1 y s_2, encontramos dos soluciones, y1 y y2. Vemos que estas funciones son linealmente independientes en (-∞, ∞) y, por tanto, forman un conjunto fundamental. Se deduce que la solución general de en este intervalo es

$$y(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_1\, e^{s_1 x} + \mathrm{C}_2\, e^{s_2 x} \quad donde\ \mathrm{C}_1\ y\ \mathrm{C}_2\ son\ cons\tan tes$$

2) $b^2 - 4ac = 0$ caso Raíces reales e iguales

Cuando s1 = s2, necesariamente se obtiene sólo una solución exponencial, y1. La cual es derivada para determinar una segunda solución de la forma:

$$y1(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_1\, e^{sx}$$

$$y2(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_2\, xe^{sx}$$

La solución propuesta a este tipo de raíces es:

$$y(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_1\, e^{sx} + \mathrm{C}_2\, xe^{sx} \quad donde\ \mathrm{C}_1\ y\ \mathrm{C}_2\ son\ cons\tan tes$$

3) $b^2 - 4ac < 0$ caso Raíces complejas y conjugadas

Si s1 y s2 son complejas, entonces se puede escribir s1= a + b*i y s2 = a- b*i, donde a y b>0 y son reales. De manera formal, no hay diferencia entre este caso y el caso I y, por tanto,

$$y(\mathrm{x}) = \mathrm{C}_1\, e^{(\alpha+\omega \mathrm{di})x} + \mathrm{C}_2\, e^{(\alpha-\omega \mathrm{di})x} \quad donde\ \mathrm{C}_1\ y\ \mathrm{C}_2\ son\ cons\tan tes$$

Usando la formula de Euler

$$e^{(\omega \mathrm{di})} = \cos\,(\omega\,\mathrm{d}) + sen\,(\omega\,\mathrm{d})\,\mathrm{i}$$

Despues de sustituir y reducir

$$y(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\,\cos(\omega\,\mathrm{d}) + C_2\ sen(\omega\,\mathrm{d}))$$

Solución a problemas propuestos

1) $4y'' + y' = 0$

$4s^2 + s = 0 \qquad s1, s2 = \frac{-b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$s1 = \frac{-1+\sqrt{1-4(4)(0)}}{2(4)} = \frac{-1+\sqrt{1}}{8} = \frac{-1+1}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

$$s2 = \frac{-1-\sqrt{1}}{8} = \frac{-1-1}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Raíces: Reales y Diferentes

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{0x} + C2e^{-.25x}$

2) $y'' - 36y = 0$

$s^2 - 36 = 0$

$$s1 = \frac{-0+\sqrt{0-4(1)(-36)}}{2(1)} = \frac{\sqrt{144}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$s2 = \frac{-\sqrt{144}}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Raíces: Reales y Diferentes

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{6x} + C2e^{-6x}$

3) $y'' + y' - 6y = 0$

$s^2 - s - 6 = 0$

$$s1 = \frac{1+\sqrt{1-4(1)(-6)}}{2} = \frac{1+\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\sqrt{25}}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$s2 = \frac{1-\sqrt{25}}{2} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Raíces: Reales y Diferentes

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{3x} + C2e^{-2x}$

$4)\ y'' - 3y' + 2y = 0$

$s^2 - s3 - 2 = 0$

$$s1 = \frac{3 + \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{3 + \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$s2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Raíces: Reales y Diferentes

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{2x} + C2e^{x}$

$5)\ y'' + 8y' + 16y = 0$

$s^2 + 8s + 16 = 0$

$$s1 = \frac{-8 + \sqrt{(8)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{-8 + \sqrt{64-64}}{2} = \frac{-8\sqrt{0}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$s1 = s2 = -4$

Raíces: Iguales y Reales

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{-4x} + C2e^{-4x}$

$6)\ y'' - 10y' + 25y = 0$

$s^2 - 10s + 25 = 0$

$$s1 = \frac{10 + \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)} = \frac{10 + \sqrt{100-100}}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$s1 = s2 = 5$

Raíces: Iguales y Reales

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{5x} + C2e^{5x}$

$7)\ 12y'' - 5y' - 2y = 0$

$12s^2 - 5s - 2 = 0$

$$s1 = \frac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4(12)(-2)}}{2(12)} = \frac{5 + \sqrt{25 + 96}}{24} = \frac{5 + \sqrt{121}}{24} = \frac{5 + 11}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$s2 = \frac{5 - \sqrt{121}}{24} = \frac{5 - 11}{24} = \frac{-6}{24} = \frac{-1}{4}$$

Raíces: Reales y Diferentes

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{0.66x} + C2e^{0.25x}$

$8)\ y'' + 4y' - y = 0$

$s^2 + 4s - 1 = 0$

$$s1 = \frac{-4 + \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-4 + \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2} = -2 + \frac{\sqrt{20}}{2} = -2 + \sqrt{5}$$

$$s2 = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} = -2 - \frac{\sqrt{20}}{2} = -2 - \sqrt{5}$$

Raíces: Reales y Diferentes

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x}$

$Yh = C1e^{(-2+\sqrt{5})x} + C2e^{(-2-\sqrt{5})x}$

$9)\ y'' + 9y = 0$

$s^2 + 9 = 0$

$$s1 = \frac{0 + \sqrt{0 - 4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{\sqrt{-36}}{2} = \frac{\sqrt{-36(-1)}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3i$$

$$s2 = \frac{-\sqrt{36}}{2} = \frac{-6}{2} = -3i$$

Raíces: Imaginarias y Conjugadas

$S = \alpha \pm wi$

$Yh = e^{\alpha x}(C1coswx + C2senwx)$

$Yh = e^{0x}(C1cos3x + C2sen - 3x)$

10) $3y'' + y = 0$

$3s^2 + 1 = 0$

$$s1 = \frac{0 + \sqrt{0 - 4(3)(1)}}{2(1)} = \frac{\sqrt{-12}}{2} = \frac{\sqrt{-12(-1)}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}i$$

$$s2 = \frac{-\sqrt{12}}{2} = -\sqrt{3}i$$

Raíces: Imaginarias y Conjugadas

$S = \alpha \pm wi$

$Yh = e^{\alpha x}(C1coswx + C2senwx)$

$Yh = e^{0x}(C1cos\sqrt{3}x + C2sen\sqrt{3}x)$

11) $y'' - 4y' + 5y = 0$

$s^2 - 4s + 5 = 0$

$$s1 = \frac{4 + \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{4 + \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 + \sqrt{(-4)(-1)}}{2} = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 2 + i$$

$$s2 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{-2}{2}i = 2 - i$$

Raíces: Imaginarias y Conjugadas

$S = \alpha \pm wi$

$Yh = e^{\alpha x}(C1coswx + C2senwx)$

$Yh = e^{2x}(C1cosx + C2senx)$

12) $2y'' + 2y' + y = 0$

$2s^2 + 2s + 1 = 0$

$$s1 = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-2 + \sqrt{4 - 8}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{4} = \frac{-2 + \sqrt{-4(-1)}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$s2 = \frac{-2 - \sqrt{4}}{4} = \frac{-2}{4} - \frac{2}{4}i = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Raíces: Imaginarias y Conjugadas

$S = \alpha \pm wi$

$Yh = e^{\alpha x}(C1coswx + C2senwx)$

$Yh = e^{-0.5x}(C1cos0.5x + C2sen0.5x)$

13) $3y'' + 2y' + y = 0$

$3s^2 + 2s + 1 = 0$

$$s1 = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-2 + \sqrt{4 - 12}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{-8}}{6} = \frac{-2 + \sqrt{-8(-1)}}{6} = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

$$s2 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{6} = \frac{-2}{6} - \frac{\sqrt{8}}{6}i = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

Raíces: Imaginarias y Conjugadas

$S = \alpha \pm wi$

$Yh = e^{\alpha x}(C1coswx + C2senwx)$

$Yh = e^{-0.33x}(C1cos0.47x + C2sen0.47x)$

14) $2y'' - 3y' + 4y = 0$

$2s^2 - 3s + 4 = 0$

$$s1 = \frac{3 + \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{3 + \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{3 + \sqrt{-23}}{4} = \frac{3 + \sqrt{-23(-1)}}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i$$

$$s2 = \frac{3 - \sqrt{23}}{4} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i$$

Raíces: Imaginarias y Conjugadas

$S = \alpha \pm wi$

$Yh = e^{\alpha x}(C1coswx + C2senwx)$

$Yh = e^{0.75x}(C1cos1.2x + C2sen1.2x)$

15) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

1	*-4*	*-5*	*0*	*-1*
	-1	*5*	*0*	
1	*-5*	*0*	*0*	

$s^3 - 4s^2 - 5s = 0$

$s1 = -1$ $\qquad$ $s^2 - 5s = 0$

$$s2 = \frac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(0)}}{2(1)} = \frac{5 + \sqrt{25}}{2} = \frac{5 + 5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$s3 = \frac{5-\sqrt{25}}{2} = \frac{5-5}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x} + C3e^{s3x}$$

$$Yh = C1e^{-x} + C2e^{5x} + C3e^{0x}$$

16) $y''' - y = 0$

1	*0*	*0*	*-1*	*1*
	1	*1*	*1*	
1	*1*	*1*	*0*	

$$s^3 - 1 = 0$$

$s1 = 1$ $\quad\quad$ $s^2 \mp s + 1 = 0$

$$s2 = \frac{-1+\sqrt{(1)^2-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1+\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1+\sqrt{4-1}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}}\, i$$

$$s3 = \frac{-1-\sqrt{4-1}}{2} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}\, i$$

$$Yh = C1e^{s1x} + e^{\alpha x}(C2coswx + C3senwx)$$

$$Yh = C1e^{x} + e^{-\frac{1}{2}x}(C2cos\sqrt{\frac{3}{4}}x + C3sen\sqrt{\frac{3}{4}}x)$$

17) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

1	*-5*	*3*	*9*	*-1*
	-1	*6*	*-9*	
1	*-6*	*9*	*0*	

$$s^3 - 5s^2 + 3s + 9 = 0$$

$s1 = -1$ $\quad\quad$ $s^2 - 6s + 9$

$$s2 = \frac{6+\sqrt{(-6)^2-4(1)(9)}}{2(1)} = \frac{6+\sqrt{36-36}}{2} = \frac{6+0}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$s2 = s3 = 3$$

$$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x} + C3ex^{s3x}$$

$$Yh = C1e^{-x} + C2e^{3x} + C3ex^{3x}$$

18) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

1	3	-4	-12	2
	2	10	12	
1	5	6	0	

$s^3 + 3s^2 - 4s - 12 = 0$

$s1 = 2$ $\qquad$ $s^2 + 5s + 6 = 0$

$$s2 = \frac{-5 + \sqrt{(5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{-5 + \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$s3 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 - 1}{2} = -3$$

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x} + C3e^{s3x}$

$Yh = C1e^{2x} + C2e^{-2x} + C3e^{-3x}$

19) $\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0$

1	1	0	-2	1
	1	2	2	
1	2	2	0	

$s^3 + s^2 - 2 = 0$

$s1 = 1$ $\qquad$ $s^2 + 2s + 2 = 0$

$$s2 = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-2 + \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{4}}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{2}{2}i = -1 + i$$

$$s3 = \frac{-2 - \sqrt{4}}{2} = \frac{-2}{2} - \frac{2}{2}i = -1 - i$$

$Yh = C1e^{s1x} + e^{\alpha x}(C2coswx + C3senwx)$

$Yh = C1e^{x} + e^{-x}(C2cosx + C3senx)$

20) $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 2u = 0$

1	-1	0	-4	2
	2	2	4	
1	1	2	0	

$s^3 - s^2 - 4 = 0$

$s1 = 2$ $\qquad$ $s^2 + s + 2 = 0$

$$s2 = \frac{-1 + \sqrt{(1)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{4}}i$$

$$s3 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{7}{4}}i$$

$Yh = C1e^{s1x} + e^{\alpha x}(C2coswx + C3senwx)$

$Yh = C1e^{2x} + e^{-\frac{1}{2}x}(C2cos\sqrt{\frac{7}{4}}ix + C3sen\sqrt{\frac{7}{4}}ix)$

21) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

1	3	3	1	-1
	-1	-2	-1	
1	2	1	0	

$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$

$s1 = -1$ $\quad$ $s^2 + 2s + 1$ =0

$$s2 = \frac{-2 + \sqrt{(2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$s2 = s3 = -1$

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x} + C3xe^{s3x}$

$Yh = C1e^{-x} + C2e^{-x} + C3xe^{-x}$

22) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

1	-6	12	-8	2
	2	-8	8	
1	-4	4	0	

$s^3 - 6s^2 + 12s - 8 = 0$

$s1 = 2$ $\quad$ $s^2 - 42s + 4$ =0

$$s2 = \frac{4 + \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4 + \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$s2 = s3 = 2$

$Yh = C1e^{s1x} + C2e^{s2x} + C3xe^{s3x}$

$Yh = C1e^{2x} + C2e^{2x} + C3xe^{2x}$

23) $y^{(4)} + y''' + 3y'' = 0$

$s^4 + s^3 + s^2 = 0$ $\quad$ $s3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}}i$

$s^2(s^2 + s + 1)$

$s1$ =s2=0 $\quad$ $s4 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}i$

$$s3 = \frac{-1 + \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$Yh = C1e^{s1x} + C2xe^{s2x} + e^{\alpha x}(C3coswx + C4senwx)$

$Yh = C1e^{0x} + C2xe^{0x} + e^{-\frac{1}{2}x}(C3cos\sqrt{\frac{3}{4}}x + C4sen\sqrt{\frac{3}{4}}x)$

24) $y^{(4)} + 3y'' + y = 0$

1	0	-2	0	1	2
	1	1	-1	-1	
1	1	-1	-1	0	

1	1	-1	-1	1
	1	2	1	
1	2	1	0	

$s^4 - 2s^2 + 1 = 0$

$s1 = 2$ $\qquad$ $s^2 = 1$

$s^2 + 2s + 1 = 0$

$s3 = \frac{4 + \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4 + \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 + 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$s3 = s4 = -1$

$Yh = C1e^{s1x} + C2xe^{s2x} + C3e^{s3x} + C4xe^{s4x}$

$Yh = C1e^{x} + C2xe^{x} + C3e^{-x} + C4xe^{-x}$

25) $16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

$16s^4 + 24s^2 + 9 = 0 \rightarrow s^4 + \frac{3}{2}s^2 + \frac{9}{16} = 0$

$s1 = s2 = s3 = s4 = -\frac{3}{4}$

$(s^2 + \frac{3}{4})(s^2 + \frac{3}{4})$

$Yh = C1e^{s1x} + C2xe^{s2x} + C3e^{s3x} + C4xe^{s4x}$

$Yh = C1e^{-\frac{3}{4}x} + C2xe^{-\frac{3}{4}x} + C3e^{-\frac{3}{4}x} + C4xe^{-\frac{3}{4}x}$

26) $16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

1	0	-7	0	-18	3
	3	9	6	18	
1	3	2	6	0	

1	3	2	6	-3
	-3	0	-6	
1	0	2	0	

$s^4 - 7s^2 - 18 = 0$

$s1 = 3$

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0 \qquad s^2 + 2 = 0$$

$s2 = -3$

$$s3 = \frac{-5 + \sqrt{(5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{-5 + \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$s4 = \frac{\sqrt{8}}{2} = -\sqrt{2}$$

$$Yh = C1e^{s1x} + C2xe^{s2x} + C3e^{s3x} + C4xe^{s4x}$$

$$Yh = C1e^{3x} + C2xe^{-3x} + C3e^{\sqrt{2}x} + C4xe^{-\sqrt{2}x}$$

27) $\frac{d^5u}{dr^5} + 5\frac{d^4u}{dr^4} - 2\frac{d^3u}{dr^3} - 10\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + 5u = 0$

1	5	-2	-10	1	5	1
	1	6	4	-6	-5	
1	6	4	-6	-5	0	

$s^5 + 5s^4 - 2s^3 - 10s^2 + s + 5 = 0$

$s1 = 1$ $\qquad s^4 + 6s^3 + 4s^2 - 6s - 5 = 0$ $\qquad s2 = 1$

1	6	4	-6	-5	1
	1	7	11	5	
1	7	11	5	0	

1	7	11	5	-1
	-1	-6	-5	
1	6	5	0	

$s^3 + 7s^2 + 11s + 5 = 0 \qquad s3 = -1 \qquad s^2 + 6s + 5 = 0$

$$s4 = \frac{-6 + \sqrt{(6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-6 + \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$s5 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 - 4}{2} = -5$$

$$Yh = C1e^{s1x} + C2xe^{s2x} + C3e^{s3x} + C4xe^{s4x} + C5e^{s5x}$$

$$Yh = C1e^{x} + C2xe^{x} + C3e^{-x} + C4xe^{-x} + C5e^{-5x}$$

28) $2\frac{d^5x}{ds^5} - 7\frac{d^4x}{ds^4} + 12\frac{d^3x}{ds^3} + 8\frac{d^2x}{ds^2}$

$$2s^5 - 7s^4 + 12s^3 + 8s^2 = 0 \ \rightarrow \frac{1}{2}(2s^5 - 7s^4 + 12s^3 + 8s^2) = 0 \rightarrow s^5 - \frac{7}{2}s^4 + 6s^3 + 4s^2 = 0$$

$$s^2(2s^3 - 7s^2 + 12s + 8\,) = 0 \qquad s^2\left(s^3 - \frac{7}{2}s^2 + 6s + 4\right) = 0$$

1	$-\frac{7}{2}$	6	4	-0.5
	$\frac{1}{2}$	2	-4	
1	4	8	0	

$$s4=\frac{4-\sqrt{(-4)^2-4(1)(8)}}{2(1)}=\frac{4+\sqrt{16-32}}{2}=\frac{4+\sqrt{-16+32}}{2}$$

$$s4=\frac{4+\sqrt{16}}{2}=\frac{4}{2}+\frac{4}{2}i=2+2i \qquad s5=2-2i$$

$$Yh=C1e^{s1x}+C2xe^{s2x}+C3e^{s3x}+e^{\alpha x}(C4coswx+C5senwx)$$

$$Yh=C1e^{0x}+C2xe^{0x}+C3e^{-0.5x}+e^{2x}(C4cos2x+C5sen2x)$$

2.2 Respuesta a la Ecuación Diferencial de Segundo Orden. Método Coeficientes Constante

Este método permite determinar el valor de las constantes C_i de la respuesta a la ecuación diferencial de segundo orden, considerando la respuesta homogénea descrita en la sección anterior.

Sea la ecuación diferencial de según do orden de la forma:

$$a_2(\mathrm{x})\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(\mathrm{x})\frac{dy}{dx}+a_0(\mathrm{x})\,\mathrm{y}=0 \quad y(0)=\mathrm{cte}(1)\ y^{'}(0)=\mathrm{cte}(2)$$

Con respuesta generalizada

$$\mathrm{y(x)}=C_1e^{s2x}+C_2e^{s_2x}$$

Donde

C1 y C2 son las constantes que dependen de las condiciones iniciales o de frontera de la ecuación diferencial.

Tomando la primer condición inicial o de frontera y evaluando en x=0 e igualando a la ecuación diferencial con el resultado de condición inicial, se puede obtener la ecuación resultante de la forma

$$\mathrm{y}(0)=C_1e^{s2(0)}+C_2e^{s_2(0)}=cte(1)$$
$$C_1+C_2=cte(1)$$

La condición inicial en cero es evaluada en la derivada de la respuesta para tener la segunda ecuación

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(C_1 e^{s2(x)}) + \frac{d}{dx}(C_2 e^{s_2(x)})$$
$$y'(0) = \frac{d}{dx}(C_1 e^{s2(0)}) + \frac{d}{dx}(C_2 e^{s_2(0)}) = cte(2)$$
$$C_1 + C_2 = cte(2)$$

Entonces la respuesta general a la ecuación diferencial

$$y(x) = cte(1)e^{s2x} + cte(2)e^{s_2 x}$$

Ejemplos Resueltos

29) $y'' + 16y = 0,\qquad y(0)=2,\quad y'(0)=-2$

$s^2 + 16 = 0$

$s1 = \frac{\sqrt{-4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{\sqrt{-64}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2}i = 4i$

$s1 = -\frac{8}{2}i = -4i \qquad s = \propto x + wi$

1 1 0

$Yh = e^{0x}(C1cos4x + C2sen4x) \;\rightarrow\; Y(0) = e^{0x}(C1cos4(0) + C2sen4(0)) = 2 \quad C1 = 2$

$Y'h = (C1cos4x + C2sen4x)(0e^{0x}) + e^{0x}(-4C1cos4x + 4C2sen4x)$

$y(0) = (C1\, cos4(0) + C2\, sen4(0))\left(0e^{0(0)}\right) + e^{0(0)}(-4C1cos4(0) + 4C2sen4(0)) = -2$

$4C2 = -2 \qquad Yh = e^{0x}\left(2cos4x - \frac{1}{2}sen4x\right)$

$C2 = \frac{-2}{4}$

$C2 = \frac{-1}{2}$

30) $16\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,\qquad y(\pi/3) = 0,\;\; y'(\pi/3) = 2$

$s^2 + 1 = 0$

$s1 = \frac{\sqrt{-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{\sqrt{-4}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2}i = i$

$$s2 = -\frac{\sqrt{4}}{2} = -\frac{2}{2}i = -i$$

$$Yh = e^{\propto x}(C1coswi + C2senwi) \rightarrow \ Yh = e^{0x}(C1cosx + C2senx)$$

$$Y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{e^{0\left(\frac{\pi}{3}\right)}}_{1}\left(C1cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + C2sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0 \quad C1(0.99) + C2(0.01) = 0$$

$$0.99C1 + 0.01C2 = 0$$

$$Y'h = (C1cosx + C2senx)(0e^{0x}) + e^{0x}(-c1senx + C2cosx)$$

$$Y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{\left(C1cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + C2sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}_{0}\left(0\underbrace{e^{0\left(\frac{\pi}{3}\right)}}_{0}\right) + \underbrace{e^{0\left(\frac{\pi}{3}\right)}}_{1}\left(-c1sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + C2cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2 \qquad -0.01C1 + 0.99C2 = 2$$

$(0.99C1 + 0.01C2 = 0) - 99$ $\qquad C1 = -0.02$

$-0.01C1 + 0.99C2 = 2$ $\qquad C2 = 2.02$

$$Yh = e^{0x}(-0.02senx + 2.02cosx)$$

31) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\ \frac{dy}{dt} - 5y = 0, \qquad y(1) = 0,\ \ y'(1) = 2$

$$s^2 - 4s - 3$$

$$s1 = \frac{4 + \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{4 + \sqrt{16 + 12}}{2} = \frac{4 + \sqrt{28}}{2} = 2 + \sqrt{7}$$

$$s2 = \frac{4 - \sqrt{16 + 12}}{2} = \frac{4 - \sqrt{28}}{2} = 2 - \sqrt{7}$$

$$Yh = C1e^{(2+\sqrt{7})x} + C2e^{(2-\sqrt{7})x}$$

$$Yh(0) = 104.14C1 + 0.52C2 = 0$$

$$Y'h = 2 + \sqrt{7}C1e^{(2+\sqrt{7})x} + 2 + \sqrt{7}eC2e^{(2-\sqrt{7})x}$$

$$Y'h(1) = 483.80C1 - 0.33C2 = 2$$

$$C2 = -0.721$$

$$Yh = 0.0036e^{(2+\sqrt{7})x} - 0 - 721e^{(2-\sqrt{7})x}$$

32)4 $y'' - 4y' - 3y = 0, \qquad y($ 0)=1, y' (0)=5

$4s^2 - 4s - 3 = 0$

$$s1 = \frac{4 + \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(-3)}}{2(4)} = \frac{4 + \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{3}{2}$$

$$s2 = \frac{4 - 8}{8} = -\frac{3}{2}$$

$Yh = C1e^{1.5x} + C2e^{-0.5x}$

$Yh(0) = C1e^{1.5(0)} + C2e^{-0.5(0)} = 1$

$Y'h = 1.5C1e^{1.5x} - 0.5e^{-0.5x}$

$Y'h(0) = 1.5C1e^{1.5(0)} - 0.5e^{-0.5(0)}$=5

$C1 = 3.9166$ $C1.75$

$Yh(0) = 3.9166e^{1.5x} + 1.75e^{-0.5x}$

2.3 Coeficientes indeterminados

Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_2(\mathrm{x})\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(\mathrm{x})\frac{dy}{dx} + a_0(\mathrm{x})\,\mathrm{y} = g(\mathrm{x}) \quad y(0) = \mathrm{cte}(1)\; y^{'}(0) = \mathrm{cte}(2)$$

Se debe hacer dos cosas:

1. encontrar la función complementaria *Yh*

2. encontrar alguna solución particular *Yp* de la ecuación no homogénea.

Entonces, la solución general de es

Y(x)=Yh(x)+Yp(x)

La función complementaria *Yh* es la solución general de la ED homogénea asociada de, es decir,

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\,\mathrm{y'} + a_0\,\mathrm{y} = g(\mathrm{x})$$

En la sección anterior se propuso cómo resolver esta clase de ecuaciones cuando los coeficientes eran constantes.
Así, el objetivo en esta sección es desarrollar un método para obtener soluciones particulares.

La primera de las dos formas que se consideran para obtener una solución particular Yp de una ED lineal no homogénea se llama método de coeficientes indeterminados.

La idea fundamental detrás de este método es una conjetura acerca de la forma de Yp, en realidad una intuición educada, motivada por las clases de funciones que forman la función de entrada g(x). El método general se limita a ED lineales donde

1) Los coeficientes a_i, i =0, 1….. , n son constantes y

2) g(x) es una constante k, una función polinomial, una función exponencial e^{ax}, una función seno o coseno o sumas finitas y productos de estas funciones.

Es decir, g(x) es una combinación lineal de funciones de la clase. Y Debido a que la combinación lineal de derivadas:

$$a_n y_P{}^{n} + a_{n-1} y_P{}^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \, y_P{}' + a_0 \, y_P = g(x)$$

Debe ser idéntica a g(x), parece razonable suponer que yp tiene la misma forma que g(x).

$1. -y'' + 3y' + 2y = 6$

Homogénea:

$s^2 + 3s + 2 = 0$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$s_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} = -0.38 \qquad s_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} = -2.61$$

$$yh_{(x)} = C_1 e^{-0.38X} + C_2 e^{-2.61X}$$

No homogénea:

$f(x) = 6$

$y_p = A$

$y'_p = 0$

$y''_p = 0$

Sustituyendo

$y''_p + 3y'_p + 2y_p = 6$

$0 + 3(0) + 2(\mathrm{A}) = 6$

$0 + 0 + 2\mathrm{A} = 6$

$2\mathrm{A} = 6$

$\mathrm{A} = 3$

$$y(x) = C_1 e^{-0.38X} + C_2 e^{-2.61X} + 3$$

$2. -4y'' + 9y = 15$

Homogénea:

$4s^2 + 9 = 0$

$s = \pm\sqrt{\frac{9}{16}} \quad \therefore \quad s_1 = \frac{3}{4}i \quad s_2 = -\frac{3}{4}i$

$yh(x) = e^{0x}(C_1\, cos\, \frac{3}{4}x + C_2 \frac{3}{4}\sin x)$

$yh(x) = C_1\, cos\, \frac{3}{4}x + C_2 \frac{3}{4}\sin x$

No homogénea:

$f(x) = 15$

$y_p = A$

$y'_p = 0$

$y''_p = 0$

Sustituyendo

$4y''_p + 9y_p = 15$

$4(0) + 9(\mathrm{A}) = 15$

$9\mathrm{A} = 15$

$\mathrm{A} = \frac{5}{3}$

$$yh(x) = C_1 \cos \frac{3}{4}x + C_2 \frac{3}{4} \sin x + \frac{5}{3}$$

$3. -y'' + 10y' + 25y = 30\mathrm{x} + 3$

Homogénea:

$s^2 + 10\mathrm{s} + 25 = 0$

$s = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(1)(25)}}{2(1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2}$

$s_1 = -5$ $\qquad$ $s_2 = -5$

$yh_{(x)} = C_1 e^{-5X} + C_2 x e^{-5X}$

No homogénea:

$f(x) = 30x + 3$

$y_p = A\mathrm{x} + \mathrm{B}$

$y'_p = A$

$y''_p = 0$

Sustituyendo

$y''_p + 10y'_p + 25y_p = 30\mathrm{X} + 3$

$A\mathrm{x} + \mathrm{B} + 10(A) + 25(0) = 30\mathrm{X} + 3$

Para "x"

$25A = 30$

$A = \frac{6}{3}$

Para "termino independiente"

$10A + B = 3$

$10(\frac{6}{3}) + B = 3$

$12 + B = 3$

$B = 3 - 12$

$B = -9$

$$yh_{(x)} = C_1 e^{-5X} + C_2 x e^{-5X} + \frac{6}{3}x - 9$$

$3. -y'' + y' - 6y = 2\text{x}$

Homogénea:

$s^2 + \text{s} - 6 = 0$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$s_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \qquad s_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

$yh_{(x)} = C_1 e^{2X} + C_2 e^{-3X}$

No homogénea:

$f(x) = 2x$

$y_p = A$x +B

$y'_p = A$

$y''_p = 0$

Sustituyendo

$y''_p + y'_p - 6y_p = 2\text{x}$

$0 + \text{A} - 6(A\text{x} + \text{B}) = 2\text{x}$

$\text{A} - 6A\text{x} - 6\text{B} = 2\text{x}$

Para "x"

$-6A = 2$

$A = -\frac{1}{3}$

Para "termino independiente"

$A - 6B = 0$

$-\frac{1}{3} + B = 0$

$B = \frac{1}{3}$

$5. -\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2\text{x}$

Homogénea:

$\frac{1}{4}s^2 + \text{s} + 1 = 0$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(1)}}{2(\frac{1}{4})} = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{\frac{1}{2}}$$

$s_1 = 2$ $\qquad$ $s_2 = -2$

$yh_{(x)} = C_1 e^{2X} + C_2 x e^{-2X}$

No homogénea:

$f(x) = x^2 - 2\text{x}$

$y_p = Ax^2 + Bx + c$ +B

$y'_p = 2Ax + B$

$y''_p = 2A$

Sustituyendo

$$\frac{1}{4} y''_p + y'_p + y_p = x^2 - 2\text{x}$$

$$\frac{1}{4}(2A) + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + c \ + \text{B} = x^2 - 2\text{x}$$

$$\frac{1}{2}\text{A} + 2Ax + B + Ax^2 + Bx + c \ + \text{B} = x^2 - 2\text{xA} - 6A\text{x} - 6\text{B} = 2\text{x}$$

$$x^2(\text{A}) + \text{x}(2\text{A} + \text{B}) + (\frac{1}{2}\text{A} + \text{B} + \text{C}) = x^2 - 2\text{x}$$

Para "x^2"

$A = 1$

Para "x"

$2\text{A} + \text{B} = -2$

$2(1) + \text{B} = -2$

$2 + \text{B} = -2$

$\text{B} = -2 - 2$

$\text{B} = -4$

Para "termino independiente"

$$\frac{1}{2}\text{A} + \text{B} + \text{C} = 0$$

$$\frac{1}{2}(1) - 4 + \text{C} = 0$$

$$B = -\frac{7}{2}$$

$$yh_{(x)} = C_1 e^{2X} + C_2 x e^{-2X} + x^2 - 4x - \frac{7}{2}$$

$6. -y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$

Homogénea:

$s^2 - 8s + 20 = 0$

$$s = \frac{8 \pm \sqrt{-8^2 - 4(1)(20)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{64}i}{2}$$

$$s_1 = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i \qquad s_2 = \frac{8 - 8i}{2} = 4 - 4i$$

$yh(x) = e^{4x}(C_1 \cos 4x + C_2 4\sin x)$

No homogénea:

$f(x) = 100x^2 - 26xe^x$

$y_p = Ax^2 + Bx + c - Dxe^x$

$y'_p = 2Ax + B - Dxe^x + De^x$

$y''_p = 2A - Dxe^x + 2De^x$

Sustituyendo

$y''_p - 8y'_p + 20y_p = 100x^2 - 26xe^x$

$2A - Dxe^x + 2De^x - 8(2Ax + B - Dxe^x + De^x) + 20(Ax^2 + Bx + c - Dxe^x) = 100x^2 - 26xe^x$

$$2A - Dxe^x + 2De^x - 16Ax + 8B - 8Dxe^x + De^x 8 + 20Ax^2 + 20Bx + c - 20Dxe^x) = 100x^2 - 26xe^x$$

$$x^2(2A) + x(16A + 20B) + xe^x(D + 8D - 20D) + e^x(2D - 8D) + (2A - 8B + 20C = 100x^2 - 26xe^x$$

Para "x^2"

$20A = 100$

$A = 50$

Para "x"

$16A + 20B = 0$

$16(50) + 20B = 0$

$800 + 20B = 0$

$$B = \frac{-800}{20}$$

$$B = -40$$

Para "xe^x"

$$-11D = -26$$

$$D = \frac{26}{11}$$

Para "termino independiente"

$$2A - 8B + 20C = 0$$

$$2(50) - 8(-40) + 20C = 0$$

$$100 + 320 + 20C = 0$$

$$C = -\frac{420}{20}$$

$$C = -21$$

$$yh(x) = e^{4x}(C_1 \cos 4x + C_2 \, 4\sin x) + 50x^2 - 40x + \frac{26}{11}xe^x + 21$$

2.4 Variación de Parámetros

El procedimiento que se utiliza para encontrar una solución particular Yp de una ecuación diferencial lineal de primer orden en un intervalo es también aplicable a una ED de orden superior. Para adaptar el método de variación de parámetros a una ecuación diferencial de segundo orden.

$$a_2(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x)$$

Comenzamos por escribir la ecuación en su forma estándar:

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = g(x)$$

Dividiendo entre el coeficiente principal $a_2(x)$. La ecuación es la análoga de segundo orden de la forma estándar de una ecuación lineal de primer orden: y'+ P(x)y = f(x). Se supone que P(x), Q(x) y g(x) son continuas en algún intervalo común I. Como ya hemos visto, no hay dificultad para obtener la función complementaria Yh, la solución general de la ecuación homogénea, cuando los coeficientes son constantes.

Correspondiendo con la suposición $Yp=u_1(x)\ y_1(x)$ que se usó anteriormente para encontrar una solución particular Yp de $y'+P(x)y=f(x)$, para la ecuación lineal de segundo orden se busca una solución de la forma

$$\mathrm{Yp(x)} = u_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) + u_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}_2(\mathrm{x})$$

Donde y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea asociada. Usando la regla del producto para derivar dos veces a Yp, se obtiene

$$\mathrm{Y'p(x)} = u_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y'}_1(\mathrm{x}) + u'_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) + u_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y'}_2(\mathrm{x}) + u'_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}_2(\mathrm{x})$$

$$\mathrm{Y''p(x)} = u_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y''}_1(\mathrm{x}) + u'_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y'}_1(\mathrm{x}) + u''_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) + u'_1(\mathrm{x})\,\mathrm{y'}_1(\mathrm{x}) + u_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y''}_2(\mathrm{x})\ldots\ldots$$
$$+u'_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y'}_2(\mathrm{x}) + u''_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y}_2(\mathrm{x}) + u'_2(\mathrm{x})\,\mathrm{y'}_2(\mathrm{x})$$

Sustiyendo en la ecuación:

$$\mathrm{y''} + P(\mathrm{x})\,\mathrm{y'} + \mathrm{Q(x)}\,\mathrm{y} = g(\mathrm{x})$$

Reduciendo, Agrupando y Resolviendo utilizando el método de Cramer, se obtienen el sistema de ecuaciones:

$$y_1\,u'_1 + y_2\,u'_2 = 0$$

$$y'_1\,u'_1 + y'_2\,u'_2 = g(\mathrm{x})$$

El cual puede expresarse como una serie de determinantes y resolver para u_1 y u_2

$$W(\mathrm{y1},\mathrm{y2}) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix} \quad W1 = \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ g(\mathrm{x}) & y'_2 \end{bmatrix} \quad W2 = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(\mathrm{x}) \end{bmatrix}$$

Donde se conoce a los determinantes *W* como el ***wronskiano*** de las soluciones de la ecuación diferencia. Considerando el ***wronskiano*** y resolviendo para u'

$$u'_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-y_2\,g(\mathrm{x})}{W} \qquad u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1\,g(\mathrm{x})}{W}$$

Entonces u es: $u_1 = \int u'_1\,du \quad y \quad u_2 = \int u'_2\,du$

Ejemplos Resueltos

1. $y'' + y = \sec x$

Para la homogénea

$s^2 + 1 = 0$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \pm i$$

Raíces imaginarias y conjugadas

$yh(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$yh(x) = e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

$yh(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Para la no homogénea

$yp = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$yp = u_1 \cos x + u_2 \sin x$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$w_1(y_2, f(x)) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w} f(x) = \frac{-\sin x}{1}(\sec x)$$

$$w_2(y_1, f(x)) = \frac{y_1}{w} f(x) = \frac{\cos x}{1}(\sec x) = 1$$

$$u_1 = \int -(\sin x \sec x)\, dx = \log|\cos x|$$

$$u_2 = \int dx = x$$

$yp(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \log|\cos x| \cos x + \sin x$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \log|\cos x| \cos x + \sin x$$

2. $y'' + y = \tan x$

Para la homogénea

$s^2 + 1 = 0$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \pm i$$

Raíces imaginarias y conjugadas

$yh(x) = e^{\alpha x}(C_1\, cos\, \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$yh(x) = e^{0x}(C_1\, cos\, x + C_2 \sin x)$

$yh(x) = C_1\, cos\, x + C_2 \sin x$

Para la no homogénea

$yp = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$yp = u_1 \cos x + u_2 \sin x$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y\acute{}_1 & y\acute{}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix} = cos^2\, x + sin^2\, x = 1$$

$$w_1\big(y_2, f(x)\big) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y\acute{}_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w} f(x) = \frac{-\sin x}{1}(\tan x)$$

$$w_2\big(y_1, f(x)\big) = \frac{y_1}{w} f(x) = \frac{\cos x}{1}(\tan x) = \sin x$$

$$u_1 = \int -(\sin x \tan x)\, dx = \sin x + \log|cos\frac{x}{2} - \sin x\frac{x}{2}| - \log|sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}|$$

$$u_2 = \int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$yp(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \Big(\sin x + \log|cos\frac{x}{2} - \sin x\frac{x}{2}| - \log|sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}|\Big)\cos x - \cos x \sin x$$

$$y(x) = C_1\, cos\, x + C_2 \sin x + \Big(\sin x + \log|cos\frac{x}{2} - \sin x\frac{x}{2}| - \log|sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}|\Big)\cos x - \cos x \sin x$$

3. $y\acute{}\acute{} + y = \sin x$

Para la homogénea

$s^2 + 1 = 0$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \pm i$$

Raíces imaginarias y conjugadas

$yh(x) = e^{\alpha x}(C_1\, cos\, \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$yh(x) = e^{0x}(C_1\, cos\, x + C_2 \sin \beta x)$

$yh(x) = C_1\, cos\, x + C_2 \sin \beta x$

Para la no homogénea

$yp = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$yp = u_1 \cos x + u_2 \sin x$

$$w(y_1,y_2)=\begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix}=\begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix}=cos^2 x+sin^2 x=1$$

$$w_1\big(y_2,f(x)\big)=\frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w}=\frac{-y_2}{w}f(x)=\frac{-\sin x}{1}(\sin x)=-sin^{\,2}x$$

$$w_2\big(y_1,f(x)\big)=\frac{y_1}{w}f(x)=\frac{\cos x}{1}(\sin x)$$

$$u_1=\int -sin^2x=\frac{1}{4}(\sin(2x)-2x)$$

$$u_2=\int \cos x\sin x\,dx=-\frac{1}{2}cos^2x$$

$$yp(x)=u_1y_1+u_2y_2=\left(\frac{1}{4}(\sin(2x)-2x)\right)\cos x-(\frac{1}{2}cos^2x)\sin x$$

$$y(x)=C_1\,cos\,x+C_2\sin\beta x+\left(\frac{1}{4}(\sin(2x)-2x)\right)\cos x-(\frac{1}{2}cos^2x)\sin x$$

4. $y'' + y = \sec\theta\tan\theta$

Para la homogénea

$s^2+1=0$

$$s=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\pm i$$

Raíces imaginarias y conjugadas

$yh(x)=e^{\alpha\theta}(C_1\,cos\,\beta\theta+C_2\sin\beta\theta)$

$yh(x)=e^{0\theta}(C_1\,cos\,\theta+C_2\sin\theta)$

$yh(x)=C_1\,cos\,\theta+C_2\sin\theta$

Para la no homogénea

$yp=u_1y_1+u_2y_2$

$yp=u_1\cos\theta+u_2\sin\theta$

$$w(y_1,y_2)=\begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix}=\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix}=cos^2 x+sin^2 x=1$$

$$w_1\big(y_2,f(\theta)\big)=\frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(\theta) & y'_2 \end{matrix}}{w}=\frac{-y_2}{w}f(\theta)=\frac{-\sin\theta}{1}(\sec\theta\tan\theta)$$

$$w_2\big(y_1,f(\theta)\big)=\frac{y_1}{w}f(\theta)=\frac{cos\theta}{1}(\sec\theta\tan\theta)$$

$$u_1 = \int -(\sin\theta \sec\theta \tan\theta)\, d\theta = \theta - \tan\theta$$

$$u_2 = \int (\cos\theta \sec\theta \tan\theta)\, dx = -\log cos\theta$$

$$yp(x) = u_1y_1 + u_2y_2 = (\theta - \tan\theta)\cos\theta - (-\log cos\theta)\sin\theta$$

$$y(x) = C_1\, cos\ x + C_2 \sin x + (\theta - \tan\theta)\cos\theta - (-\log cos\theta)\sin\theta$$

5. $y'' + y = cos^2 x$

Para la homogénea

$$s^2 + 1 = 0$$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \pm i$$

Raíces imaginarias y conjugadas

$$yh(x) = e^{\alpha x}(C_1\, cos\ \beta x + C_2 \sin\beta x)$$

$$yh(x) = e^{0x}(C_1\, cos\ x + C_2 \sin\beta x)$$

$$yh(x) = C_1\, cos\ x + C_2 \sin\beta x$$

Para la no homogénea

$$yp = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$yp = u_1 \cos x + u_2 \sin x$$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix} = cos^2\ x + sin^2\ x = 1$$

$$w_1(y_2, f(x)) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w} f(x) = \frac{-\sin x}{1}(cos^2 x)$$

$$w_2(y_1, f(x)) = \frac{y_1}{w} f(x) = \frac{\cos x}{1}(cos^2 x) = cos^3 x$$

$$u_1 = \int -(\sin x\, cos^2 x)dx = \frac{cos^3 x}{3}$$

$$u_2 = \int cos^3 x\ dx = \frac{1}{2}(9 \sin x + \sin 3x)$$

$$yp(x) = u_1y_1 + u_2y_2 = \left(\frac{cos^3 x}{3}\right)\cos x + \left(\frac{1}{2}(9\sin x + \sin 3x)\right)\sin x$$

$$y(x) = C_1\, cos\ x + C_2 \sin x + \left(\frac{cos^3 x}{3}\right)\cos x + \left(\frac{1}{2}(9\sin x + \sin 3x)\right)\sin x$$

6. $y'' + y = sec^2 x$

Para la homogénea

$s^2 + 1 = 0$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \pm i$$

Raíces imaginarias y conjugadas

$yh(x) = e^{\alpha x}(C_1\, cos\, \beta x + C_2 \sin \beta x)$

$yh(x) = e^{0x}(C_1\, cos\, x + C_2 \sin x)$

$yh(x) = C_1\, cos\, x + C_2 \sin x$

Para la no homogénea

$yp = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$yp = u_1 \cos x + u_2 \sin x$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{matrix} = cos^2\, x + sin^2\, x = 1$$

$$w_1(y_2, f(x)) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w} f(x) = \frac{-\sin x}{1}(\sec^2 x)$$

$$w_2(y_1, f(x)) = \frac{y_1}{w} f(x) = \frac{\cos x}{1}(\sec^2 x)$$

$$u_1 = \int -(\sin x \sec^2 x)\, dx = -\sec x$$

$$u_2 = \int \cos x\, sec^2 x\, dx = \log\left(\sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right) - \log(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2})$$

$$yp(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (-\sec x)\cos x + \left(\log\left(\sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right) - \log(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2})\right)\sin x$$

$$y(x) = C_1\, cos\, x + C_2 \sin x + (-\sec x)\cos x + \left(\log\left(\sin\frac{x}{2} + cos\frac{x}{2}\right) - \log(cos\frac{x}{2} - sin\frac{x}{2})\right)\sin x$$

7. $y'' - y = \cosh x$

Para la homogénea

$s^2 - 1 = 0$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \pm 1$$

Raíces reales y diferentes

$yh(x) = C_1e^{s_1x} + C_2e^{s_2x}$

$yh(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$

Para la no homogénea

$yp = u_1y_1 + u_2y_2$

$yp = u_1e^{x} + u_2e^{-x}$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y\acute{}_1 & y\acute{}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{matrix} = -2e^{x}e^{-x}$$

$$w_1(y_2, f(x)) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y\acute{}_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w}f(x) = \frac{-e^{-x}}{-2e^{x}e^{-x}}(\cosh x)$$

$$w_2(y_1, f(x)) = \frac{y_1}{w}f(x) = \frac{e^{x}}{-2e^{x}e^{-x}}(\cosh x)$$

$$u_1 = \int \frac{-e^{-x}}{-2e^{x}e^{-x}}(\cosh x)\,dx = \frac{x}{4}\frac{-e^{-2x}}{8}$$

$$u_2 = \int \frac{e^{x}}{-2e^{x}e^{-x}}(\cosh x)dx = \frac{1}{8}(-2x - e^{2x})$$

$$yp(x) = u_1y_1 + u_2y_2 = \left(\frac{x}{4}\frac{-e^{-2x}}{8}\right)e^{x} + (\frac{1}{8}(-2x - e^{2x}))e^{-x}$$

$$y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + \left(\frac{x}{4}\frac{-e^{-2x}}{8}\right)e^{x} + (\frac{1}{8}(-2x - e^{2x}))e^{-x}$$

8. $y\acute{}\acute{} - y = \sinh 2x$

Para la homogénea

$s^2 - 1 = 0$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \pm 1$$

Raíces reales y diferentes

$yh(x) = C_1e^{s_1x} + C_2e^{s_2x}$

$yh(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$

Para la no homogénea

$yp = u_1y_1 + u_2y_2$

$yp = u_1e^{x} + u_2e^{-x}$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y\acute{}_1 & y\acute{}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{matrix} = -2e^{x}e^{-x}$$

$$w_1(y_2, f(x)) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w} f(x) = \frac{-e^{-x}}{-2e^x e^{-x}} (\sinh 2x)$$

$$w_2(y_1, f(x)) = \frac{y_1}{w} f(x) = \frac{e^x}{-2e^x e^{-x}} (\sinh 2x)$$

$$u_1 = \int \frac{-e^{-x}}{-2e^x e^{-x}} (\sinh 2x)\, dx = \frac{e^{-3x}}{12} + \frac{e^x}{4}$$

$$u_2 = \int \frac{e^x}{-2e^x e^{-x}} (\sinh 2x) dx = -\frac{1}{12} e^{-x} (e^{4x} + 3)$$

$$yp(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \left(\frac{e^{-3x}}{12} + \frac{e^x}{4}\right) e^x + (-\frac{1}{12} e^{-x} (e^{4x} + 3)) e^{-x}$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(\frac{e^{-3x}}{12} + \frac{e^x}{4}\right) e^x + (-\frac{1}{12} e^{-x} (e^{4x} + 3)) e^{-x}$$

9. $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

Para la homogénea

$s^2 - 4 = 0$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \pm 2$$

Raíces reales y diferentes

$yh(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}$

$yh(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Para la no homogénea

$yp = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$yp = u_1 e^{2x} + u_2 e^{-2x}$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{matrix} = -4e^{2x} e^{-2x}$$

$$w_1(y_2, f(x)) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w} f(x) = \frac{-e^{-2x}}{-4e^{2x} e^{-2x}} \left(\frac{e^{2x}}{x}\right)$$

$$w_2(y_1, f(x)) = \frac{y_1}{w} f(x) = \frac{e^{2x}}{-4e^{2x} e^{-2x}} \left(\frac{e^{2x}}{x}\right)$$

$$u_1 = \int (\frac{-e^{-2x}}{-4e^{2x} e^{-2x}} \left(\frac{e^{2x}}{x}\right)) dx = \log \frac{x}{4}$$

$$u_2 = \int \frac{e^{2x}}{-4e^{2x}e^{-2x}}\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)dx =$$

$$yp(x) = u_1y_1 + u_2y_2 = \left(\log\frac{x}{4}\right)e^{2x} + (\dots)e^{-2x}$$

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \left(\log\frac{x}{4}\right)e^{2x} + (\dots)e^{-2x}$$

10. $y'' - 9y = \frac{9x}{e^{3x}}$

Para la homogénea

$$s^2 - 9 = 0$$

$$s = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \pm 3$$

Raíces reales y diferentes

$$yh(x) = C_1e^{s_1x} + C_2e^{s_2x}$$

$$yh(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$$

Para la no homogénea

$$yp = u_1y_1 + u_2y_2$$

$$yp = u_1e^{3x} + u_2e^{-3x}$$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{matrix} = -6e^{3x}e^{-3x}$$

$$w_1\big(y_2, f(x)\big) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w}f(x) = \frac{-e^{-3x}}{-6e^{3x}e^{-3x}}\left(\frac{9x}{e^{3x}}\right)$$

$$w_2\big(y_1, f(x)\big) = \frac{y_1}{w}f(x) = \frac{e^{3x}}{-6e^{3x}e^{-3x}}\left(\frac{9x}{e^{3x}}\right)$$

$$u_1 = \int \frac{-e^{-3x}}{-6e^{3x}e^{-3x}}\left(\frac{9x}{e^{3x}}\right) = -\frac{1}{24}e^{-6x}(6x+1)$$

$$u_2 = \int \left(\frac{e^{3x}}{-6e^{3x}e^{-3x}}\left(\frac{9x}{e^{3x}}\right)\right)dx = \frac{-3x^2}{4}$$

$$yp(x) = u_1y_1 + u_2y_2 = \left(-\frac{1}{24}e^{-6x}(6x+1)\right)e^{3x} + \left(\frac{-3x^2}{4}\right)e^{-3x}$$

$$y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + \left(-\frac{1}{24}e^{-6x}(6x+1)\right)e^{3x} + \left(\frac{-3x^2}{4}\right)e^{-3x}$$

11. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$

Para la homogénea

$s^2 + 3s + 2 = 0$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$s_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$$s_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$$

Raíces reales y diferentes

$yh(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}$

$yh(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Para la no homogénea

$yp = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$yp = u_1 e^{-x} + u_2 e^{-2x}$

$$w(y_1, y_2) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{matrix} = \begin{matrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{matrix} = -e^{-x} e^{-2x}$$

$$w_1\big(y_2, f(x)\big) = \frac{\begin{matrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{matrix}}{w} = \frac{-y_2}{w} f(x) = \frac{-e^{-2x}}{-e^{-x}e^{-2x}}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)$$

$$w_2\big(y_1, f(x)\big) = \frac{y_1}{w} f(x) = \frac{e^{-x}}{-e^{-x}e^{-2x}}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)$$

$$u_1 = \int \frac{-e^{-2x}}{-e^{-x}e^{-2x}}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) dx = \log -e^x - 1$$

$$u_2 = \int \quad \left(\frac{e^{-x}}{-e^{-x}e^{-2x}}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)\right) dx = \log(x+1) - e^x$$

$$yp(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (\log(-e^x - 1))e^{-x} + (\log(x+1) - e^x)e^{-2x}$$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (\log(-e^x - 1))e^{-x} + (\log(x+1) - e^x)e^{-2x}$$

12. $Y'' - 2Y' + Y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$

Para la homogénea

$s^2 - 2s + 1 = 0$

$s=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}$=1 s1=1 s2= -1

$yh(x)=e^{1x}(C1cosx+C2senx)$

Para la no homogénea

yp=u1(cosx)+u2(senx)

w(y1,y2)=$\begin{bmatrix} cosx & senx \\ senx & cosx \end{bmatrix}$= cos^2x+sen^2x=1

w1=$\begin{bmatrix} 0 & y2 \\ f(x) & y'2 \end{bmatrix}$= y2/w f(x)= $senx\,\frac{e^x}{1+x^2}$

w1=$\begin{bmatrix} y1 & 0 \\ y'1 & f(x) \end{bmatrix}$= y1/w f(x)= $cosx\,\frac{e^x}{1+x^2}$

u1=$\int\ -sen\,xdx\,\frac{e^x}{1+x^2}dx$ u1=$\int\ cos\,xdx\,\frac{e^x}{1+x^2}dx$

yp(x)= $\int\ -sen\,xdx\,\frac{e^x}{1+x^2}dx\quad e^x$ - $\int\ cos\,xdx\,\frac{e^x}{1+x^2}dx\quad e^x$

13. $Y''+3Y'+2Y=sen\,e^x$

Para la homogénea

s^2-2s+1 =0

$s=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}$=1 s1=1 s2= -1

$yh(x)=e^{1x}(C1cosx+C2senx)$

Para la no homogénea

yp=u1(cosx)+u2(senx)

w(y1,y2)$\begin{bmatrix} cosx & senx \\ senx & cosx \end{bmatrix}$= cos^2x+sen^2x=1 w1=$\begin{bmatrix} 0 & y2 \\ \\ f(x) & y'2 \end{bmatrix}$= y2/w f(x)= $senx(senx)$= sen^2x

w1=$\begin{bmatrix} y1 & 0 \\ \\ y'1 & f(x) \end{bmatrix}$= y1/w f(x)= $cosxsenx$

u1=$\int \ -sen^2xsendx$ u1=$\int \ cos\, xdsenxdx$

yp(x)=c1cosx+c2senx+ $\int \ -sen^2xsendx$ cosx+ $\int \ cos\, xdsenxdx$ senx

14.

$Y'' - 2Y' + Y = e^x \arctan t$

Para la homogénea

$s^2 - 2s + 1$ =0

$s = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}$=1 s1=1 s2= -1

$yh(x) = e^{1x}(C1cosx + C2senx)$

Para la no homogénea

yp=u1(cosx)+u2(senx)

w(y1,y2)$\begin{bmatrix} cosx & senx \\ \\ senx & cosx \end{bmatrix}$= $cos^2x + sen^2x$=1

w1=$\begin{bmatrix} 0 & y2 \\ \\ f(x) & y'2 \end{bmatrix}$= y2/w f(x)= $senx\ (e^x \arctan t)$

w1=$\begin{bmatrix} y1 & 0 \\ \\ y'1 & f(x) \end{bmatrix}$= y1/w f(x)= $cosxe^x \arctan t$

u1=$\int \ -sen\, xdxe^x \arctan t\, dx$ u1=$\int \ cos\, xdxe^x \arctan t\, dx$

yp(x)= $\int \quad e^x \arctan t\, dx \quad e^x$ - $\int \quad e^x \arctan t\, dx \quad e^x$

15. $Y'' + 2Y' + Y = e^{-t} \ln t$

Para la homogénea

$s^2 - 2s + 1$ =0

$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2}$=1 s1=1 s2= -1

$yh(x) = e^{1x}(C1cosx + C2senx)$

Para la no homogénea

yp=u1(cosx)+u2(senx)

w(y1,y2)$\begin{bmatrix} cosx & senx \\ senx & cosx \end{bmatrix}$= $cos^2x + sen^2x$=1

w1=$\begin{bmatrix} 0 & y2 \\ f(x) & y'2 \end{bmatrix}$= y2/w f(x)= $senx(e^{-t} \ln t)$=

w1=$\begin{bmatrix} y1 & 0 \\ y'1 & f(x) \end{bmatrix}$= y1/w f(x)= $cosx(e^{-t} \ln t)$

u1=$\int \quad e^{-t} \ln t\, x$ u1=$\int \quad e^{-t} \ln t\, dx$

yp(x)= $\int \quad e^{-t} \ln t\, dx \quad e^x$+ $\int \quad e^{-t} \ln t\, dx\; e^x$

16. $2Y'' + 2Y' + Y = 4\sqrt{x}$

Para la homogénea

$2s^2 + 2s + 1$ =0

$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 8}}{2}$=1 s1=-0 s2= 2

$yh(x) = e^x(C1cosx + C2senx)$

Para la no homogénea

yp=u1(cosx)+u2(senx)

w(y1,y2)$\begin{bmatrix} cosx & senx \\ senx & cosx \end{bmatrix}$= $cos^2x + sen^2x$=1

w1=$\begin{bmatrix} 0 & y2 \\ f(x) & y'2 \end{bmatrix}$= y2/w f(x)= $senx4\sqrt{x}$

w1=$\begin{bmatrix} y1 & 0 \\ y'1 & f(x) \end{bmatrix}$= y1/w f(x)= $cosx4\sqrt{x}$

u1=$\int -sen\,xdx4\sqrt{x}dx$ u1=$\int cos\,xdx4\sqrt{x}dx$

yp(x)= $\int -sen\,xdx4\sqrt{x}dx$ + $\int cos\,xdx4\sqrt{x}dx$

17. $3Y'' - 6Y' + 6Y = e^x secx$

Para la homogénea

$3s^2 - 6s + 6$ =0

$s = \frac{-6\pm\sqrt{36-72}}{6}$=1 s1=2 s2= 0

$yh(x) = e^x(C1cosx + C2senx)$

Para la no homogénea

yp=u1(cosx)+u2(senx)

w(y1,y2)$\begin{bmatrix} cosx & senx \\ senx & cosx \end{bmatrix}$= $cos^2x + sen^2x$=1

w1=$\begin{bmatrix} 0 & y2 \\ f(x) & y'2 \end{bmatrix}$= y2/w f(x)= $senx(e^x secx)$

w1=$\begin{bmatrix} y1 & 0 \\ y'1 & f(x) \end{bmatrix}$= y1/w f(x)= $cosx(e^x secx)$

u1=$\int \quad -sen\,xdxe^{x}secxdx$ u1=$\int \quad cos\,xdxe^{x}secxdx$

yp(x)= $\int \quad -sen\,xdxe^{x}secxdx \quad e^{x}$ - $\int \quad cos\,xdxe^{x}secxdx \quad e^{x}$

18. $4Y'' - 4Y' + Y = e^{x/2}\sqrt{1} - x^{2}$

Para la homogénea

$4s^{2} - 4s + 1$ =0

$s = \frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}$=1 s1=2 s2= -2

$yh(x) = e^{1x}(C1cosx + C2senx)$

Para la no homogénea

yp=u1(cosx)+u2(senx)

w(y1,y2)=$\begin{bmatrix} cosx & senx \\ senx & cosx \end{bmatrix}$= $cos^{2}x + sen^{2}x$=1

w1=$\begin{bmatrix} 0 & y2 \\ f(x) & y'2 \end{bmatrix}$= y2/w f(x)= $senx(e^{x/2}\sqrt{1} - x^{2})$

w1=$\begin{bmatrix} y1 & 0 \\ y'1 & f(x) \end{bmatrix}$= y1/w f(x)= $cosx(e^{x/2}\sqrt{1} - x^{2})$

u1=$\int \quad -sen\,xdxsenx(e^{x/2}\sqrt{1} - x^{2})dx$ u1=$\int \quad cos\,xdxcosx(e^{x/2}\sqrt{1} - x^{2})dx$

yp(x)= $\int \quad -sen\,xdxsenx(e^{x/2}\sqrt{1} - x^{2})dx \quad 1$- $\int \quad \int \quad -sen\,xdxsenx(e^{x/2}\sqrt{1} - x^{2})\,dx \quad 1$

CONCLUSIONES

El curso de ecuaciones diferenciales para el área de ingeniería permite el estudio de la dinámica de sistemas de áreas como física, química, economía, evolución, estadística de población, computación, etc. La computación es una excelente herramienta que permite ver el comportamiento de la solución de ecuaciones diferenciales por lo que en este curso, los estudiantes de ingeniería en sistemas encuentran una aplicación directa a la programación.

BIBLIOGRAFÍA

1. ZILL, D.G., CULLEN, M. R. ECUACIONES DIFERENCIALES CON PROBLEMAS DE VALORES A LA FRONTERA. ED. THOMSON. MÉXICO
2. BOYCE y DIPRIMA. ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS DE VALOR DE FRONTERA. ED. WILEY- LIMUSA. MÉXICO
3. SIMMONS, G.F. ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES Y NOTAS HISTORICAS. ED. THOMSON. MÉXICO
4. HSU, H.P. ANALISIS DE FOURIER. ADDISON-WESLEY, MÉXICO.