UAEM | Universidad Autónoma del Estado de México

# CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

## INGENIERO EN COMPUTACION

## TEMA: "TEORIA DE NÚMEROS"

M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: AGOSTO DE 2017

**UNIDAD DE APRENDIZAJE**
“ALGEBRA SUPERIOR”

**UNIDAD DE COMPETENCIA III:**
“TEORIA DE NÚMEROS”

3.1 Números naturales
3.2 Sucesiones y series
3.3 Principio de inducción matemática
3.4 Progresiones: Aritmética, geométrica y armónica
3.5 Análisis combinatorio: Teorema fundamental del conteo, permutaciones y combinaciones
3.6 Teorema del Binomio

# OBJETIVOS

Plantear y resolver problemas de: Sucesiones y series, Principio de inducción matemática, Progresiones: Aritmética, geométrica y armónica Análisis combinatorio: Teorema fundamental del conteo, permutaciones y combinaciones y Teorema del Binomio

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$
$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$
$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$$

# INDICE

1. Números naturales
2. Sucesiones y series
3. Principio de inducción matemática
4. Progresiones: Aritmética, geométrica y armónica
5. Análisis combinatorio: Teorema fundamental del conteo, permutaciones y combinaciones
6. Teorema del Binomio

# 1. NÚMEROS NATURALES: ORDENACIÓN

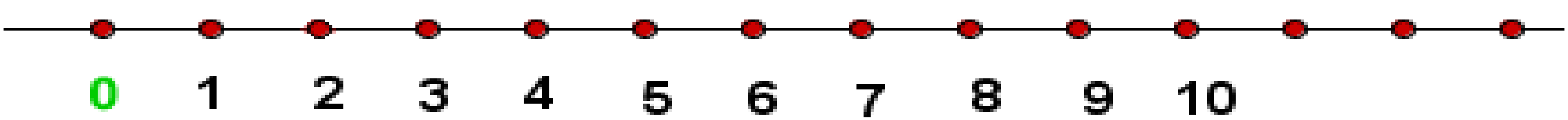
Números naturales. Los números naturales son aquellos que permiten contar los elementos de un conjunto. puede tener un antecesor y un sucesor.

El antecesor de un número es el menor (<).

Así 4 < 5,   3 < 4,   2 < 3,   1 < 2 y   0 < 1

El sucesor de un número es el mayor (>).

Así 5 > 4,   4 > 3,   3 > 2,   2 > 1 y   1 > 0



# 2. SUCESIONES Y SERIES

Sucesión o Progresión. Una sucesión de números se define como un conjunto ordenado de números formados de acuerdo a una ley o regla dada. Si la sucesión tiene un último término se le llama sucesión finita, si el número de términos es ilimitado se le denomina sucesión infinita.

# SUCESIONES Y SERIES: EJEMPLOS

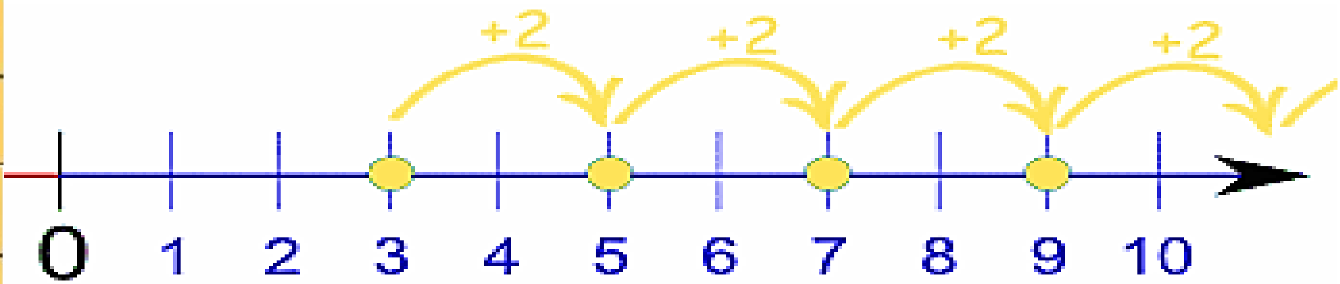
{1, 2, 3, 4 ,...} es una sucesión infinita

{20, 25, 30, 35, ...} también es una sucesión infinita

{1, 3, 5, 7} es una sucesión finita

{a, b, c, d, e} es una sucesión finita

Mencione la regla.




La regla para {3, 5, 7, 9, ...} es: **2n+1**

## 2. SUCESIONES Y SERIES: EJEMPLOS

¿Cuál es el siguiente número de la sucesión 1, 2, 4, 7, ?

Solución 1: suma los dos números anteriores más 1:

**Regla:** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$

Sucesión: 1, 2, 4, 7, **12, 20, 33, ...**

Solución 2: suma los tres números anteriores

**Regla:** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

Sucesión: 1, 2, 4, 7, **13, 24, 44, ...**

¿Cuál es la correcta? Todas son correctas

# 2. SUCESIONES Y SERIES: Ejercicio

Determine la Regla de {- 3, 1, 5, 9, 13, 17 ...}

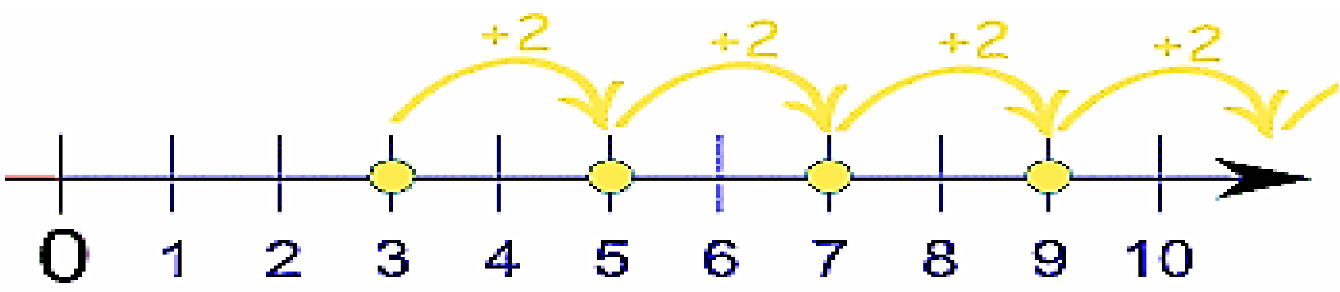
Respuesta: $a_n = 4n - 7$.

Comprobación

| Para | Se obtiene | Que es el |
|---|---|---|
| n = 1 | $a_n = 4(1) - 7 = -3$ | Primer elemento |
| n = 2 | $a_n = 4(2) - 7 = 1$ | Segundo elemento |
| n = 3 | $a_n = 4(3) - 7 = 5$ | Tercer elemento |
| n = 4 | $a_n = 4(4) - 7 = 9$ | Cuarto elemento |
| n = 5 | $a_n = 4(5) - 7 = 13$ | Quinto elemeto |

# 2. SUCESIONES Y SERIES

La suma indicada de los términos de una sucesión reciben el nombre de serie.




Ejemplos

1) 1+2+3+4+5+6
2) 2+4+6+8+10+12
3) 3+8+13+18+23
4) 3+5+7+9+11+13+...
5) 1+4+9+16+25+36+...
6) 1+2++4++8+16+32+...

# 2. SUCESIONES Y SERIES

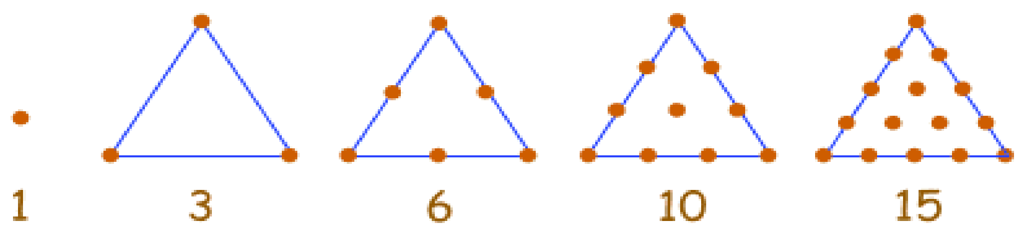
Si existe la fórmula del elemento general que es el que da la regla de formación, en las series se llama ***término general.***

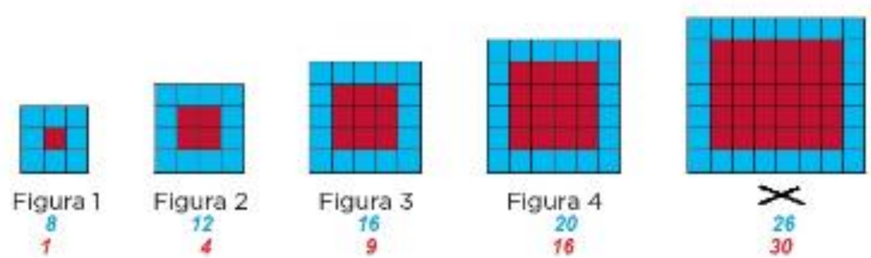
Ejemplos:

*1)* $a_n = 4n + 5$

2) $a_n = 3n – 1$

3) $a_n = n(n+1)/2$

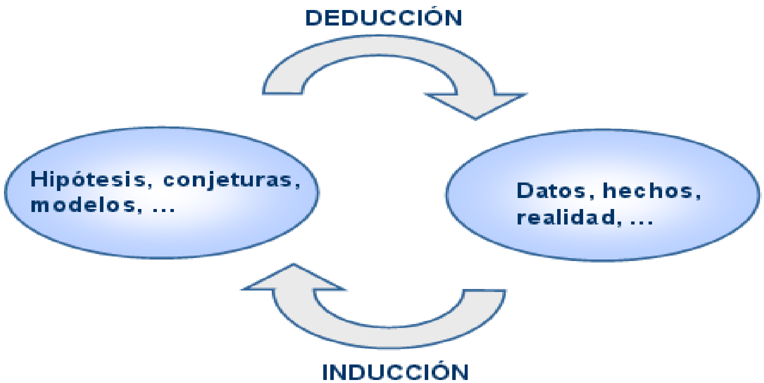


# 3. INDUCCIÓN MATEMATICA

Inducción. Método de razonamiento para obtener conclusiones que parten de hechos particulares aceptados como válidos para llegar a conclusiones, cuya aplicación sea de carácter general.

Inducción matemática: Es un razonamiento que permite demostrar proposiciones que dependen de una variable n, que toma una infinidad de valores enteros.



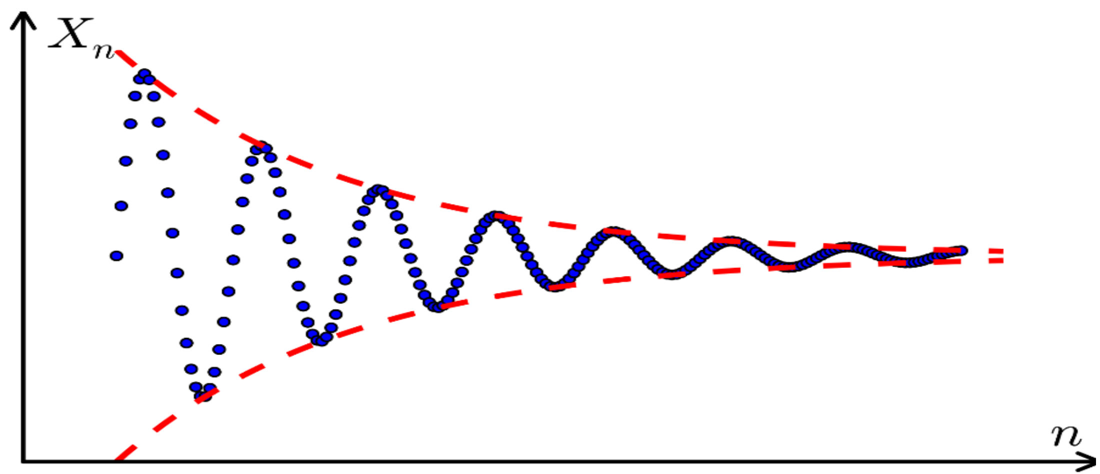
# 3. INDUCCIÓN MATEMATICA

Axiomas de inducción matemática. Supóngase que un conjunto S de enteros positivos tiene las 2 siguientes propiedades:

1) S tiene al número entero 1.

2) Siempre que S contenga a un entero positivo k, S también contiene a k+1.

"Entonces S contiene a todo entero positivo"



## 3. INDUCCIÓN MATEMATICA: PRINCIPIO

Sea $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ el conjunto de los números naturales, y $P(n)$ una cierta propiedad que puede ser o no cierta para cada número natural $n$. El principio de inducción matemática afirma que si:

i) $P(1)$ es cierta, es decir, el número natural 1 verifica la propiedad, y

ii) suponiendo que $P(k)$ es cierta.

iii) Y si se puede probar que $P(k + 1)$ también es cierta, entonces, cualquier número natural verifica la propiedad.

# 3. INDUCCIÓN MATEMATICA: Ejemplo

Demostrar que para todo entero positivo n, la suma de los primeros enteros positivos 1 + 2 + 3 +…+ n = $\frac{n(n+1)}{2}$

Paso 1. (n=1) 1= $\frac{1(1+1)}{2}$ = 1; Verdadero

Paso 2. (n=k) 1 + 2 + 3 +…+ k = $\frac{k(k+1)}{2}$ Verdadero

Paso 3. (n=k+1); 1+2 + 3 +…+ k + (k+1) =$\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

1 + 2 + 3 +…+ k + (k + 1) = $\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

Valor de k (paso 2)

Último Valor

Valor de K+1 en fórmula

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

# 3. INDUCCIÓN MATEMATICA: Ejemplo

(continuación)

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)((k+1+1)}{2}$$

$$\frac{(k^2+k)+2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

## 4. SUCESIONES O PROGRESIONES.

Progresión aritmética. Una **progresión aritmética** es una **sucesión de números** en que cada término después del primero, es igual al anterior más un número fijo llamado **diferencia común** que se representa por **d**.

$a_{n+1} = a_n + d;$ donde Diferencia: $d = a_n - a_{n-1}$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_1$ = primer término
$a_n$ = último término
n = números de términos

# 4. PROGRESION ARITMÉTICA

En las progresiones aritméticas existen cinco variables: el primer término ($a_1$), el último término ($a_n$), el número de términos (n), la diferencia (d) y la suma de todos esos términos (S). Conocidas tres de ellas se pueden calcular las otras dos con la utilización de las fórmulas:

1) $\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}}$

2) $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]}$

# 4. PROGRESION ARITMÉTICA

Ejemplo: El primer término de una progresión aritmética es 5, el último es 45 y la suma es 275. Calcule n y d

$a_1 = 5$

$a_n = 45$

$S = 275$

$n = ?$

$d = ?$

$n = 11$

$d = 4$

# 4. PROGRESION ARITMÉTICA

Medios aritméticos. Los términos entre el primero y el último de una progresión se llama medios aritméticos. Para encontrar los medios aritméticos se usa la fórmula: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Ejemplo: En la progresión aritmética 3, 6, 9, 12, 15

Medios aritméticos: 6, 9 y 12 Extremos: 3 y 15

Ejemplo: Interpolar 5 medios aritméticos entre 9 y -3

-3 = 9 + 6d d = -2 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3

# 4. PROGRESION GEOMÉTRICA

Progresión geométrica: Una **progresión geométrica** es una **sucesión** en la que cada término posterior al primero, se obtiene multiplicando al anterior una cantidad fija **r**, llamada **razón común**.

Último término**: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$**

Razón común = $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Ejemplo:

En 6/3, 12/3, 24/3…. La razón común es r = 2 dado que:

6/3 * 2 = 12/3, 12/3 * 2 = 24/3

# 4. PROGRESION GEOMÉTRICA

Suma de la Progresión geométrica: En las progresiones geométricas existen cinco variables: el primer término ($a_1$), el último término ($a_n$), el número de términos (n), la razón (r) y la suma de todos esos términos ($S_n$). Conocidas tres de ellas se pueden calcular las otras dos con la utilización de las fórmulas:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{(a_1-a_nr)}{1-r}$$

# 4. PROGRESION GEOMÉTRICA: Ejemplos

1. Si el último término es $\frac{1}{4}$, número de términos 9 y la razón $\frac{1}{2}$. Calcula el primer término y la suma de ellos.

2. Si una persona decide guardar 1 centavo el primer día, 2 el segundo, 4 el tercero, etc. ¿Cuánto debe guardar el quinceavo día? ¿Cual es el total ahorrado a los 30 días?

3.

# 4. PROGRESION GEOMÉTRICA

Medios geométricos. En una progresión geométrica los términos que están entre los dos términos $a_1$ y $a_n$ se le llaman medios geométricos. para conocer los medios se emplea la formula $a_n = a.r^{n-1}$

Ejemplo: -8, 24, -72, 216, -648

Medios geométricos: 24, -72, 216

Extremos: -8 y -648

1. Calcular los 5 medios geométricos entre 3 y 192.

# 4. PROGRESION ARMÓNICA

Progresión Armónica. La sucesión formada por los recíprocos (inversas) de los términos de una sucesión aritmética recibe el nombre de sucesión armónica. Se llaman progresiones armónicas porque cada término es la media armónica entre el anterior y el siguiente

Ejemplo:

Sucesión Aritmética: 2, 5, 8, 11, 14

Sucesión Armónica: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}$

# 4. PROGRESION ARMÓNICAS

A fin de determinar el n-ésimo término de una sucesión armónica se escribe la sucesión aritmética correspondiente, se halla el n-ésimo término de la sucesión aritmética y se calcula su recíproco.

Ejemplo: ¿Cuál es el décimo término de una sucesión armónica si el primero y el tercer término son 1/2 y 1/6?

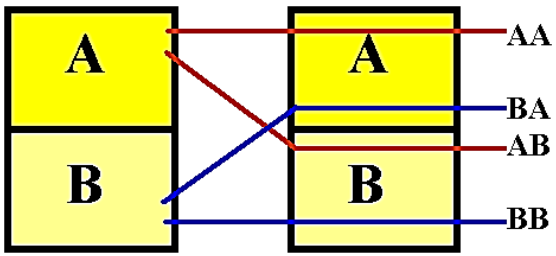
2, , 6, n=3, $a_1=2$ $a_n=6$

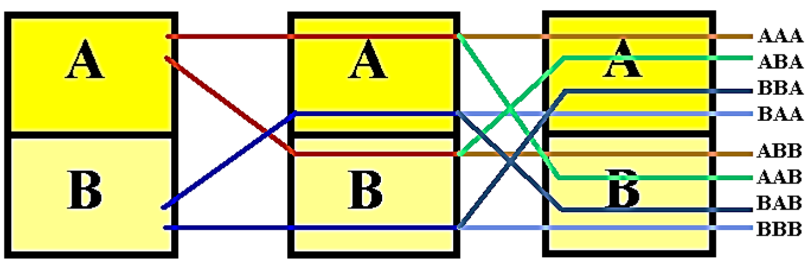
$a_n = a_1 + (n-1)d$ 6 = 2 + (3 -1) d d=2

$a_{10} = 2 + (10 - 1)\ 2 = 2 + 18 = 20$

# 5. ANALISIS COMBINATORIO

Análisis combinatorio: Es el conjunto de procedimientos y técnicas que nos permite determinar el número de subconjuntos que pueden formarse a partir de un conjunto dado, de acuerdo a ciertas instrucciones.



# 5. ANALISIS COMBINATORIO

PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN. Si una actividad puede realizarse en dos pasos sucesivos (debe ocurrir uno y después el otro) de manera tal que el paso 1 se realiza de n maneras y el paso 2 de m maneras, entonces la actividad puede realizarse de m*n maneras distintas.

# 5. ANALISIS COMBINATORIO: Ejemplos

1. Al seleccionar una computadora nueva para su centro de cómputo, el responsable del mismo examina modelos diferentes considerando:

A: El dispositivo para CD y B: La pantalla

Si encuentra que A = 5 y B = 4. ¿Cuántas formas tiene de seleccionar su modelo?

Respuesta: **Hay m * n posibilidades de seleccionar A y B: 5 * 4 = 20**

2. ¿Cuántos códigos de una letra y un número de un dígito se pueden formar con las 26 letras del alfabeto y los números 0, 1, 2,...,9?

# 5. ANALISIS COMBINATORIO

## PERMUTACION SIMPLE O SIN REPETICION.

Es un arreglo en el cual es importante el orden de los objetos seleccionados de un grupo específico de ellos. Arreglo de r objetos seleccionados a partir de un grupo único de n objetos posibles.

La fórmula es: $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

Ejemplo: ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con las nueve cifras significativas del sistema decimal?

$$P_{n,r} = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

# 5. ANALISIS COMBINATORIO

En el caso especial en que n = k el número de permutaciones de *n* objetos diferentes tomados todos a la vez es *n*! (se lee "*n* factorial" o "factorial de *n*").

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Ejemplo: Con las letras de la palabra DISCO ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar (con o sin sentido)?

# 5. ANALISIS COMBINATORIO

Permutaciones con repetición. Según la regla del producto, las maneras de escoger *r* elementos de entre un total de *n* según un determinado **orden**, y con la posibilidad de **repetir** los elementos en cada elección, son: $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^r$

Esta expresión se conoce como *permutaciones con repetición* y se representa como:

$$PR_{n,r} = n^r$$

*Se lee: "Permutaciones con repetición de n elementos tomados de r en r".*

# 5. ANALISIS COMBINATORIO

Combinaciones: Es un arreglo donde no es importante el orden de los objetos seleccionados de un grupo especifico de ellos. Es el número de modos de elegir r objetos de un grupo de n objetos sin considerar el orden.

$$C_n^r = C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Ejemplo: Cuantos Equipos de 5 alumnos pueden formarse con los 30 alumnos de un grupo. **No** importa el **orden**, luego **no** hay **repetición**.

$$C(30,5) = \binom{30}{5} = \frac{30!}{5!\,(30-5)!} = 142{,}506$$

Combinación

# 5. ANALISIS COMBINATORIO

Combinaciones con repetición: El número de *r*-combinaciones de un conjunto con *n* objetos distintos, cada uno repetido infinitamente, es:

$$CR_r^n = CR(n,r) = \binom{n-1+r}{r}$$

Ejemplo: En una Tienda de equipos de cómputo hay 5 tipos de computadoras. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro computadoras? Puede haber dos o más computadoras del mismo tipo en un grupo.

$$CR_4^{5-1+4} = CR\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$$

# 6. TEOREMA DEL BINOMIO

El teorema del binomio: También llamado binomio de Newton, expresa la enésima potencia de un binomio como un polinomio. El desarrollo del binomio $(a + b)^n$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = \underbrace{(a+b)(a+b)}_{2\ veces} = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{3\ veces} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{4\ veces} = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{5\ veces} = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = \underbrace{(a+b)\cdots(a+b)}_{6\ veces} = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

# 6. TEOREMA DEL BINOMIO: Propiedades

a) Tiene n +1 términos

b) Las potencias de a empiezan con n en el primer término y van disminuyendo hasta cero en el último. Las potencias de b empiezan con exponente cero en el primer término y van aumentando hasta n en el último.

c) Para cada término la suma de los exponentes de a y b es n y el coeficiente del primer término es 1 y el del segundo es n.

d) El coeficiente de un término cualquiera es igual al **producto** del coeficiente del término anterior por el exponente de a **dividido** entre el número que indica el orden de ese término (lugar que ocupa).

e) Los términos que equidistan de los extremos tienen coeficientes iguales.

# 6. TEOREMA DEL BINOMIO

| | Coeficientes | Exponentes |
|---|---|---|
| $(a+b)^0$ | 1 | |
| $(a+b)^1$ | 1 1 | $a^1b^0 + a^0b^1$ |
| $(a+b)^2$ | 1 2 1 | $a^2b^0 + a^1b^1 + a^0b^2$ |
| $(a+b)^3$ | 1 3 3 1 | $a^3b^0 + a^2b^1 + a^1b^2 + a^0b^3$ |
| $(a+b)^4$ | 1 4 6 4 1 | $a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4$ |
| $(a+b)^5$ | 1 5 10 10 5 1 | ............................... |
| $(a+b)^6$ | 1 6 15 20 15 6 1 | |
| $(a+b)^7$ | 1 7 21 35 35 21 7 1 | |

# 6. TEOREMA DEL BINOMIO: Ejemplos

1. $(x + 2)^5 = C_{5,0} .x^5 + C_{5,1} .x^4 .2 + C_{5,2} .x^3 .4 + C_{5,3} .x^2 .8 + C_{5,4} .x .16 + C_{5,5} . 32$

2. $(x – 3)^4 = C_{4,0} .x^4 – C_{4,1} .x^3 .3 + C_{4,2} .x^2 .9 – C_{4,3} .x . 27 + C_{4,4} . 81$

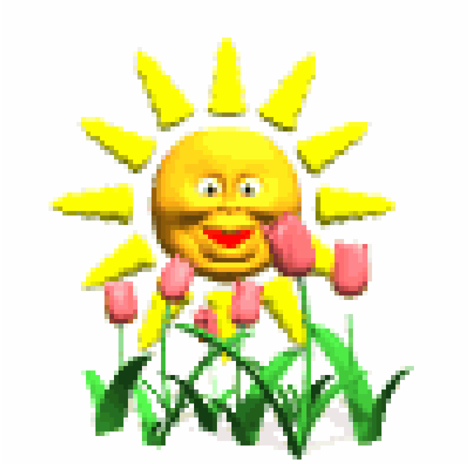
3. $(4 – x)^5 = C_{5,0} .4^5 – C_{5,1} .4^4 .x + C_{5,2} .4^3 . x^2 – C_{5,3} .4^2 . x^3 + C_{5,4} . 4. x^4 – C_{5,5} . x^5$

4. $(x + 1)^{17} = C_{17,0} .x^{17} + C_{17,1} .x^{16} + C_{17,2} .x^{15} + \ldots. + C_{17,16} .x + C_{17,17}$

5. $(– 2.x – 3)^9 = C_{9,0} .(- 2x)^9 + C_{9,1} .(- 2x)^8 .(- 3) + C_{9,2} .(- 2x)^3 .(- 3)^2 +\ldots. + C_{9,9} .(- 3)^9$

# BIBLIOGRAFIA


- Ayres Jr., Frank (1991) *Álgebra Superior*. Mc. Graw Hill. México.
- Becerril Vilchis Francisco y Ojeda Toche Lilia (2003) *Álgebra Superior, Conceptos y Formulas*. UAEM.
- Lehman (2003) *Álgebra*, Limusa Noriega Editores.. México.
- Lovaglia (1987) *Álgebra*, Harla. México.
- Rees y Spark (1994) Álgebra. México
- Hasser, Lasalle Sullivan.  *Análisis matemático*.. vol. I Trillas. México.



FIN DE LA PRESENTACION