UAEM | Universidad Autónoma del Estado de México

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: "ROTACION DE EJES, TRASLACION DE EJES Y COORDENADAS POLARES"

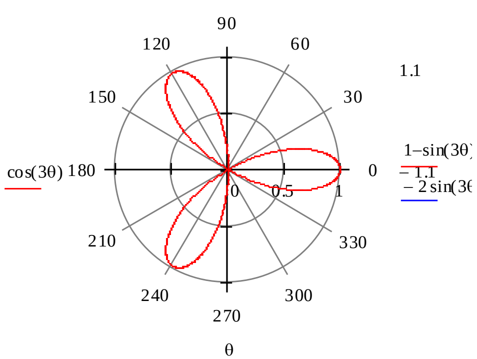
M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

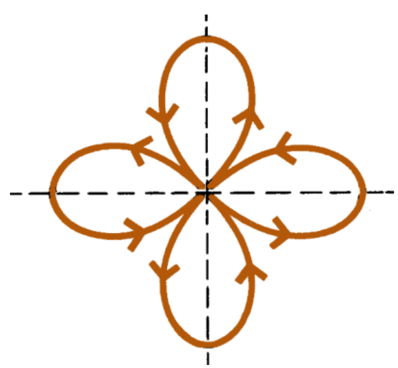
FECHA: AGOSTO DE 2017

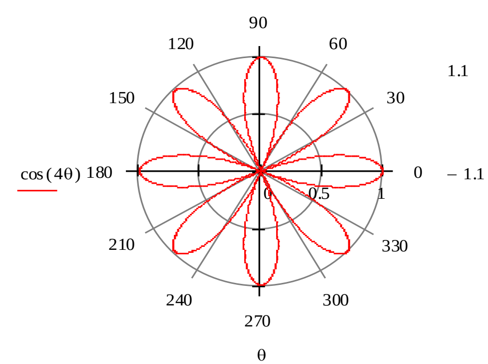
UNIDAD DE APRENDIZAJE
“GEOMETRÍA ANALÍTICA”

UNIDAD DE COMPETENCIA
II. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO.

2.10.- Rotación y/o traslación.
2.10.1.- Ecuación general de segundo grado.
2.11.- Coordenadas polares.

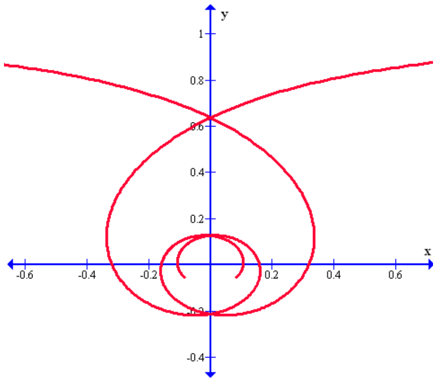






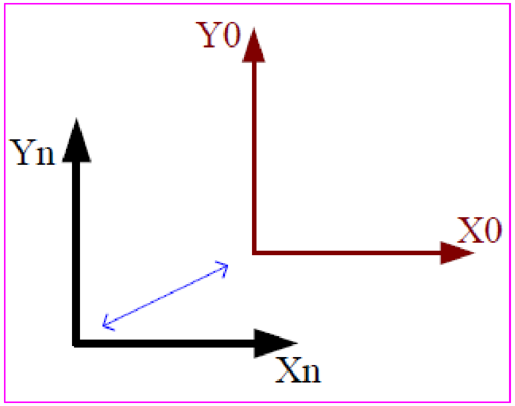
OBJETIVO

- Determinar las ecuaciones de parábolas, elipses e hipérbolas, con centro o vértice fuera del origen y cualquier inclinación de su eje, y obtener sus elementos constitutivos, aplicando las ecuaciones de transformación de coordenadas.
- Determinar las ecuaciones en coordenadas polares, de diversas curvas de uso común en diversas áreas de las matemáticas y otras ciencias.

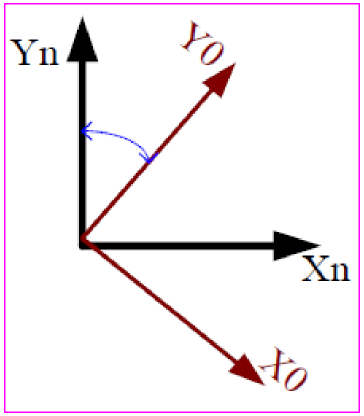


INDICE

1. Objetivo
2. Transformación de coordenadas
3. Rotación de ejes
4. Ejemplo de rotación de ejes
5. Traslación de ejes
6. Ejemplo de traslación de ejes
7. Coordenadas polares



traslación

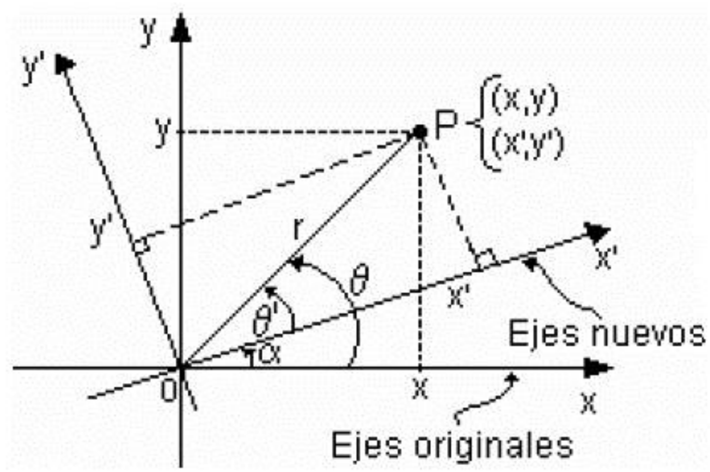


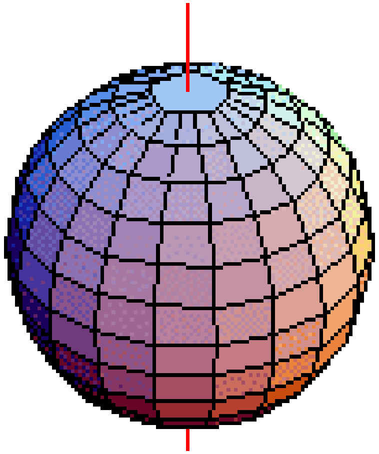
Rotacion

Video

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

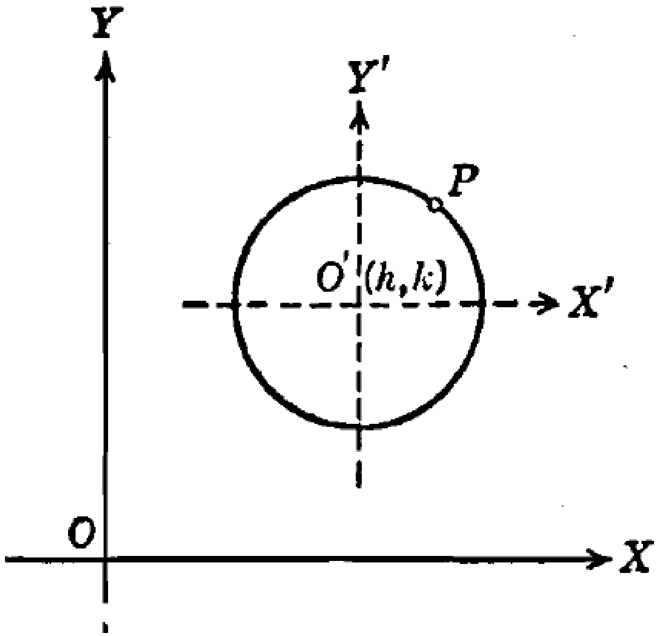
Los movimientos que se pueden hacer con los ejes coordenados son dos: Traslaciones y rotaciones, ya que estos movimientos no alteran las distancias entre puntos, ni los ángulos entre rectas; a este proceso que consiste en cambiar de un par de ejes a otro se le llama transformación de coordenadas





TRASLACIÓN

Cambio de los ejes de referencia sin girarlos, de manera que cada eje permanece paralelo a su posición original. El propósito de tal traslación de ejes es simplificar la ecuación de una curva que nos permita trabajar con las ecuaciones mas simple.



TRASLACIÓN

Una vez que el origen de un sistema de ejes x e y se cambia al punto $O'(x_o, y_o)$ en el sistema original, es necesario dar a cada punto $p(x, y)$ en el sistema original un nuevo conjunto de coordenadas $p'(x', y')$ en el nuevo sistema.

Donde:

$x = x' + h$; $y = y' + k$

O también:

$x' = x - h$; $y' = y - k$

TRASLACIÓN

Mediante una transformación paralela de los ejes, simplificar la ecuación de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

Centro es: (1, 2) por lo que $h = 1$; $k = 2$

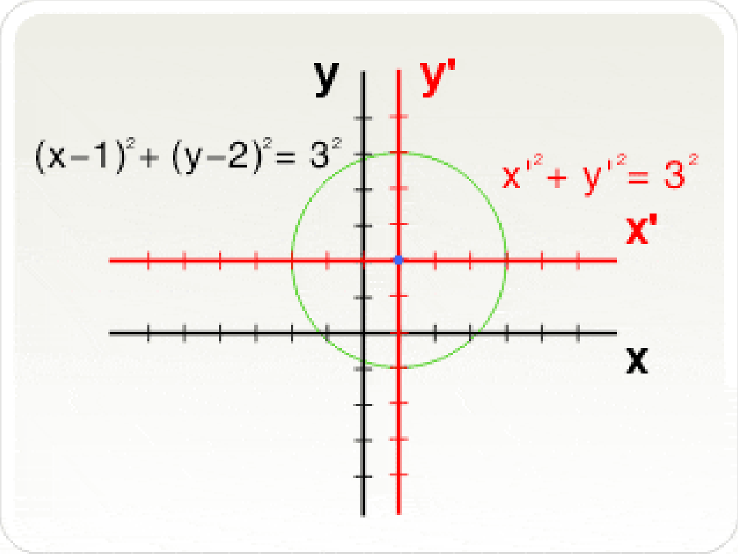
Aplicando las ecuaciones de traslación:

$x = x' + h; \qquad y = y' + k$

$((x' + 1) - 1)^2 + ((y' + 2) - 2)^2 = 9$

$(x' + 1 - 1)^2 + (y' + 2 - 2)^2 = 9$

$x'^2 + y'^2 = 9$



TRASLACIÓN

Mediante una transformación paralela de los ejes, determinar el *centro* de la *circunferencia* cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$.

Sustituyendo por las ecuaciones y simplificando:

$(x'+h)^2 + (y'+k)^2 - 2(x'+h) - 6(y'+k) - 6 = 0$

$x'^2 + y'^2 + (2h - 2)x' + (2k - 6)y' + (h^2 + k^2 - 2h - 6k - 6) = 0$

Se deben *desaparecer* los términos de primer grado

$2h - 2 = 0$ Por tanto: $\mathbf{h = 1}$

$2k - 6 = 0$ Por tanto: $\mathbf{k = 3}$

De lo anterior, se tiene que el *centro* es: C(1, 3)

TRASLACIÓN

Mediante una transformación paralela de los ejes, la ecuación $y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$ y determinar la naturaleza de la curva.

$y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$

$(y^2 - 6y + 3^2) - 4x = -5 + 9$

$(y - 3)^2 = 4x + 4$

$(y - 3)^2 = 4(x + 1)$

Aplicando las ecuaciones de traslación:

$x' = x - h; \quad y' = y - k$

$y'^2 = 4x'$

Que corresponde a una parábola horizontal

TRASLACIÓN

Determinar la *translación* que elimina los términos en x y y en la ecuación: $4x^2 + 9y^2 + 16x + 18y - 119 = 0$

$4(x^2 + 4x + 2^2) + 9(y^2 + 2y + 1^2) = 119 + 16 + 9$

$4(x + 2)^2 + 9(y + 1)^2 = 144$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

De tal forma que h=-2 y k=-1. Por lo tendremos que:

$x' = x + 2$ y $y' = y + 1$

$$\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

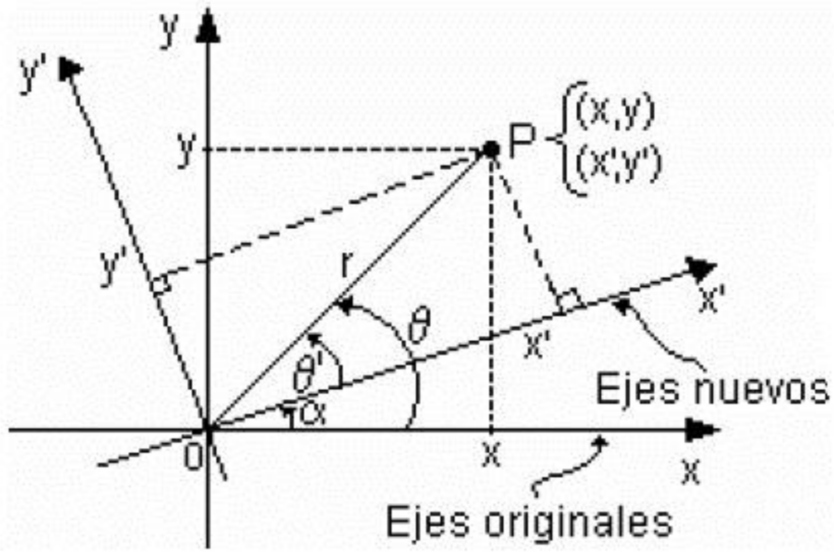
ROTACIÓN DE COORDENADAS

Cambio de la orientación de los ejes de referencia mientras se conserva el origen.

Si los ejes originales x y y rotan en sentido contrario al reloj un ángulo θ, para cualquier punto P(x, y), las coordenadas originales (x, y) se convierten en las nuevas coordenadas (x', y'), que son:

$x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$

$y' = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$



ROTACIÓN DE COORDENADAS

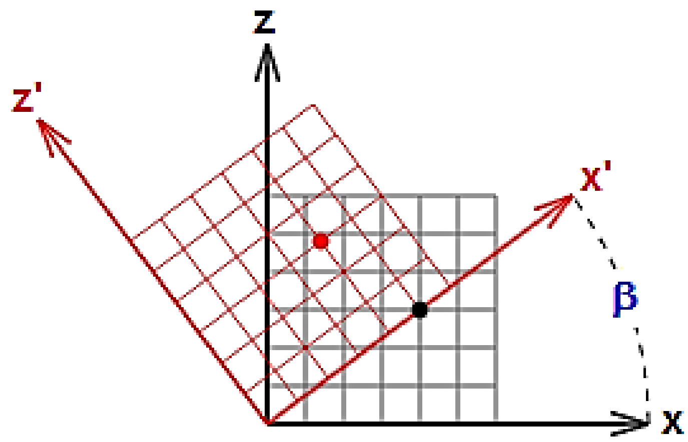
Teorema. Si se giran los ejes *x* y *y* un ángulo θ alrededor del origen 0, entonces las coordenadas (x, y) y (*x´*, *y´*) de un punto P en los dos sistemas está relacionado como sigue:

i) $x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta,$

$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta,$

ii) $x' = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta,$

$y' = -x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$



$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\beta) & -sen(\beta) \\ sen(\beta) & cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$x = x' cos(\beta) - z' sen(\beta)$$

$$z = x' sen(\beta) + z' cos(\beta)$$

ROTACIÓN DE COORDENADAS: EJEMPLO

Ejemplo: Transformar la ecuación $2x^2+\sqrt{3}\,xy+y^2=4$ girando los ejes coordenados un ángulo de 30°. Trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Por teorema, la ecuación de transformación son:

- $x = x´ \cos 30° - y´ \operatorname{sen} 30°, = (\frac{\sqrt{3}}{2}x´ - \frac{1}{2}y´)$
- $y = x´ \operatorname{sen} 30° + y´ \cos 30°, = (\frac{1}{2}x´ + \frac{\sqrt{3}}{2}y´)$

Si sustituimos estos valores de x y de y en la ecuación dada, obtenemos:

$$2(\frac{\sqrt{3}}{2}x´ - \frac{1}{2}y´)^2 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}x´ - \frac{1}{2}y´)\,(\frac{1}{2}x´ + \frac{\sqrt{3}}{2}y´) + (\frac{1}{2}x´ + \frac{\sqrt{3}}{2}y´)^2 = 4$$

Desarrollando

$$2(\frac{3x´2}{4} - \frac{\sqrt{3}x´y´}{2} + \frac{x´2}{4}) + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}x´2}{4} - \frac{x´y´}{4} + \frac{3x´y´}{4} - \frac{\sqrt{3}y´^2}{4}) + (\frac{x´2}{4} - \frac{\sqrt{3}x´y´}{2} + \frac{3y´^2}{4}) = 4$$

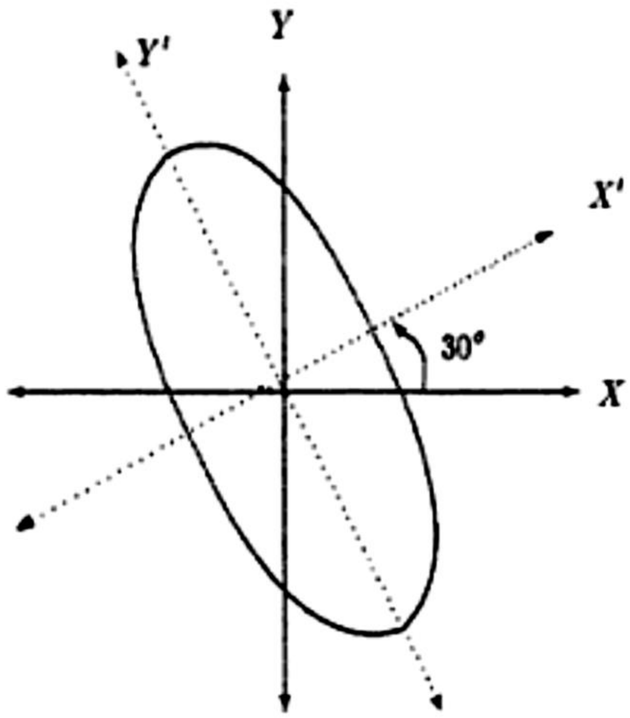
$$\frac{3x´2}{2} - \sqrt{3}x´y´ + \frac{y´^2}{2} + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}x´2}{4} + \frac{x´y´}{2} - \frac{\sqrt{3}y´^2}{4}) + \frac{x´2}{4} - \frac{\sqrt{3}x´y´}{2} + \frac{3y´^2}{4} = 4$$

ROTACIÓN DE COORDENADAS: EJEMPLO

$$\frac{3x'^2}{2} - \sqrt{3}x'y' + \frac{y'^2}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x'^2}{4} + \frac{x'y'}{2} - \frac{\sqrt{3}y'^2}{4}\right) + \frac{x'^2}{4} + \frac{\sqrt{3}x'y'}{2} + \frac{3y'^2}{4} = 4$$

$$\frac{3x'^2}{2} - \sqrt{3}x'y' + \frac{y'^2}{2} + \frac{3x'^2}{4} + \frac{\sqrt{3}x'y'}{2} - \frac{3y'^2}{4} + \frac{x'^2}{4} - \frac{\sqrt{3}x'y'}{2} + \frac{3y'^2}{4} = 4$$

$$\frac{5x'^2}{2} + \left(-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x'y' + \frac{y'^2}{2} = 4$$



$5(x')^2 + (y')^2 = 8;$

$$\frac{x'^2}{\frac{8}{5}} + \frac{y'^2}{8} = 1$$

Que representa una elipse con

$b = \sqrt{\frac{8}{5}}$ y $a = \sqrt{8}$

ROTACIÓN DE COORDENADAS: EJEMPLO

Haciendo girar los ejes un ángulo de 45° probar que la ecuación $y^2 + y\,x + x^2 = 1$ representa una elipse.

a) Ecuaciones de giro.

$x = x´ \cos 45° - y´ \operatorname{sen} 45° = (\frac{1}{\sqrt{2}}x´ - \frac{1}{\sqrt{2}}y´)$

$y = x´ \operatorname{sen} 45° + y´ \cos 45° = (\frac{1}{\sqrt{2}}x´ + \frac{1}{\sqrt{2}}y´)$

Sustituyendo en la ecuación y simplificando:

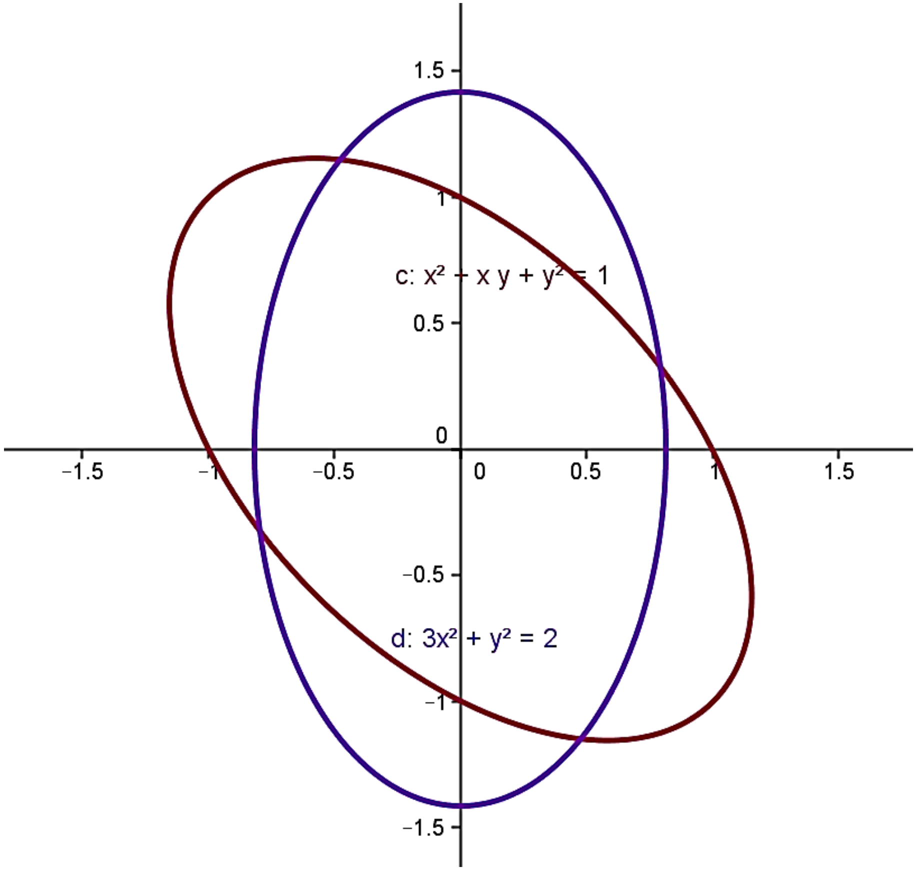
$(\frac{1}{\sqrt{2}}x´+\frac{1}{\sqrt{2}}y´)^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}}x´+\frac{1}{\sqrt{2}}y´)\,(\frac{1}{\sqrt{2}}x´-\frac{1}{\sqrt{2}}y´) + (\frac{1}{\sqrt{2}}x´-\frac{1}{\sqrt{2}}y´)^2 = 1$

$3x´^2 + y´^2 = 2$

La ecuación representa una elipse

ROTACIÓN DE COORDENADAS: EJEMPLO

Graficando las ecuaciones



ROTACIÓN DE COORDENADAS

La cuestión es elegir un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que aplicado a la ecuación general de segundo grado,

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Se obtenga una ecuación con variables x´y y´ que no tenga el término x´y´.

$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$

Como se necesita que B' = 0; Esto se logra haciendo:

$$\theta = \frac{1}{2}cot^{-1}\left(\frac{A-C}{B}\right) \ o \ \theta = \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{B}{A-C}\right)$$

Si A = C, $\theta = 45°$

ROTACIÓN DE COORDENADAS: EJEMPLO

Los nuevos coeficientes son:

$A' = A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta$

$B' = 0$

$C' = A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$

$D' = D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta$

$E' = E \cos \theta – D \operatorname{sen} \theta$

$F' = F$

ROTACIÓN DE COORDENADAS: Otra alternativa

Calcular los valores de **m** que anulan a B´. Para ello se considera la siguiente ecuación:

$$m = \frac{(C-A) \pm \sqrt{(C-A)+B^2}}{B}$$

Dado que m es positivo solo se considera ese signo. Haciendo

$$\frac{C-A}{B} = R; \;\; m = R + \sqrt{R^2+1}$$

Que sustituido en $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

dará una ecuación sin x´y´

ROTACIÓN DE COORDENADAS: Otra alternativa

Si se conoce la pendiente **m** del eje x´, se puede encontrar un punto S tal que la recta que lo une con el origen se este eje. Por ejemplo, $m = \frac{y_1}{x_1}$, se puede tomar **S(x_1, y_1).** De igual manera, se toma un punto **T(x_2, y_2)**. En particular, (-y_1, x_1).

Haciendo $m = \frac{y_1}{x_1}$ las ecuaciones de A´ y D´ son:

Donde: $A' = \frac{Ax_1{}^2 + Bx_1y_1 + Cy_1{}^2}{x_1{}^2 + y_1{}^2}$; $D' = \frac{Dx_1 + Ey_1}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}}$;

Empleando la pendiente del eje y´= $\frac{y_2}{x_2}$ se tiene

C´= ; $\frac{Ax_2{}^2 + Bx_2y_2 + Cy_2{}^2}{x_2{}^2 + y_2{}^2}$; $E' = \frac{Dx_2 + Ey_2}{\sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}}$; $F' = F$

ROTACIÓN DE COORDENADAS: Otra alternativa

Trazar un esquema de la curva $5x^2-4xy + 8y^2 = 36$ después de haber simplificado su ecuación mediante una rotación.

$$\frac{C-A}{B} = R; \quad m = R + \sqrt{R^2+1};$$

$$\mathrm{R} = \frac{8-5}{-4} = -\frac{3}{4}; \qquad m = -\frac{3}{4} + \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Donde **S (2, 1) y T (-1, 2)**

$$A' = \frac{Ax_1{}^2 + Bx_1y_1 + Cy_1{}^2}{x_1{}^2 + y_1{}^2}; \qquad C' = \frac{Ax_2{}^2 + Bx_2y_2 + Cy_2{}^2}{x_2{}^2 + y_2{}^2};$$

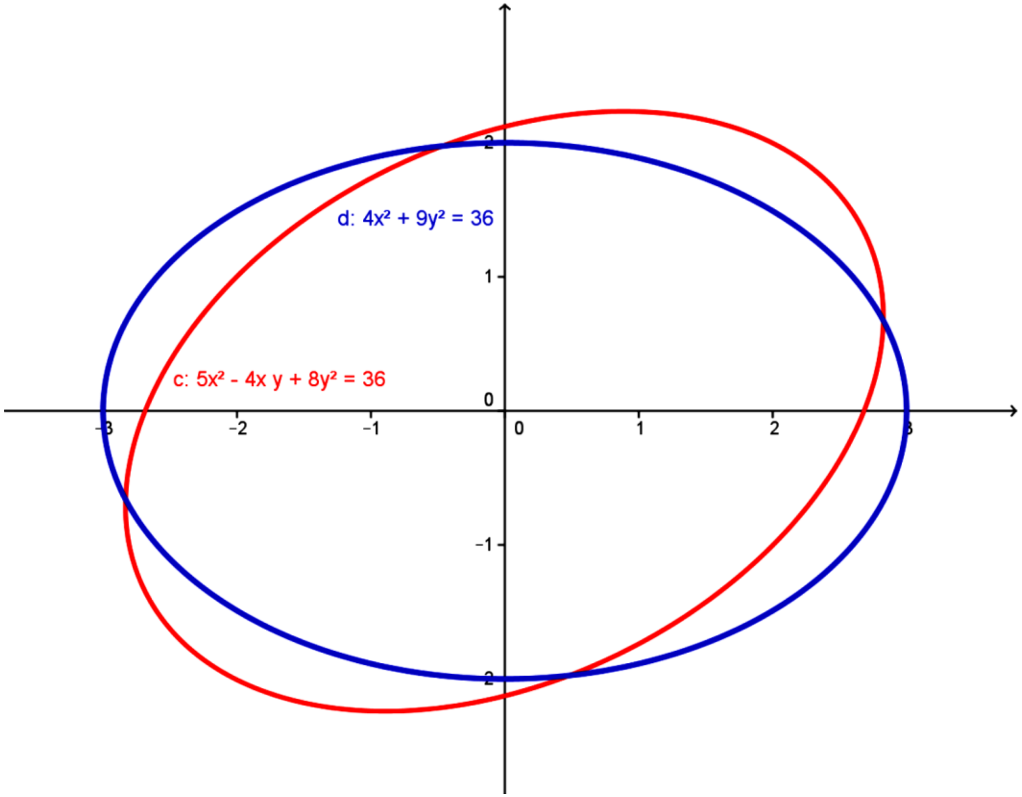
$$A' = \frac{(5)(2^2) + (-4)(2)(1) + (8)(1)^2}{2^2 + 1^2} = \frac{20}{5} = 4;$$

$$C' = \frac{(5)(-1)^2 + (-4)(-1)(2) + (8)(2)^2}{(-1)^2 + 2^2} = \frac{45}{5} = 9$$

La nueva ecuación es $4x'^2 + 9y'^2 = 36$

ROTACIÓN DE COORDENADAS

Graficando las ecuaciones.



ROTACIÓN DE COORDENADAS

Simplificar la ecuación $4x^2 - 24xy + 11y^2 – 24x + 32y + 40 = 0$ mediante una rotación.

$$\frac{C-A}{B} = R; \quad m = R + \sqrt{R^2 + 1};$$

$$\mathrm{R} = \frac{11-4}{-24} = -\frac{7}{24}; \qquad m = -\frac{7}{24} + \sqrt{\left(-\frac{7}{24}\right)^2 + 1} = \frac{3}{4}$$

Empleando **S (4, 3) y T(-3, 4)**

$$A´ = \frac{Ax_1{}^2 + Bx_1y_1 + Cy_1{}^2}{x_1{}^2 + y_1{}^2} = \frac{(4)(4^2) + (-24)(4)(3) + (11)(3)^2}{4^2 + 3^2} = -\frac{125}{25} = -5$$

$$C´ = \frac{Ax_2{}^2 + Bx_2y_2 + Cy_2{}^2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} = \frac{(4)(-3)^2 + (-24)(-3)(4) + (11)(4)^2}{(-1)^2 + 2^2} = \frac{500}{25} = 20$$

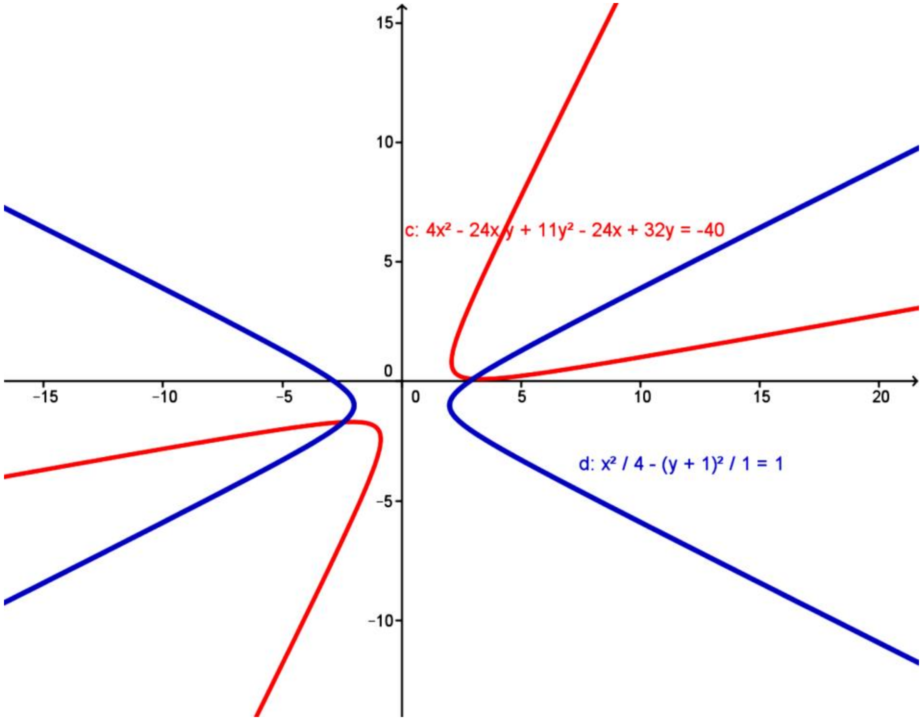
$$D´ = \frac{Dx_1 + Ey_1}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}} = \frac{(-24)(4) + (32)(3)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \; \frac{-96 + 96}{5} = 0$$

$$E´ = \frac{Dx_2 + Ey_2}{\sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}} = \frac{(-24)(-3) + (32)(4)}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \; \frac{200}{5} = 40$$

La nueva ecuación es $-5x´^2 + 20y´^2 + 40y´ + 40 = 0$

ROTACIÓN DE COORDENADAS

La ecuación es $-5x'^2 + 20y'^2 + 40y' + 40 = 0$ que puede escribirse $\frac{x'^2}{4} - \frac{(y'+1)^2}{1} = 1$



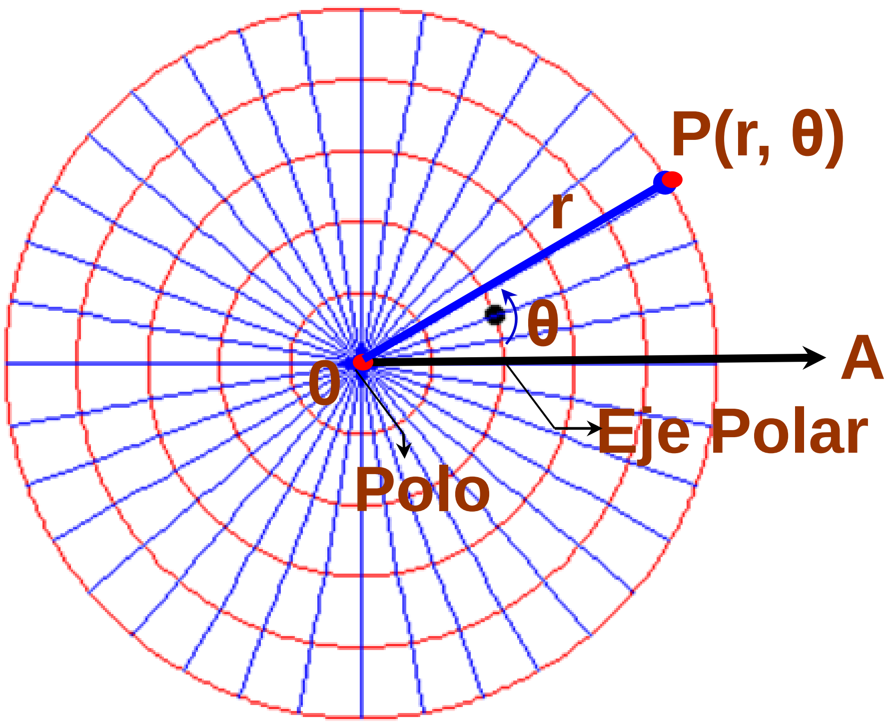
ROTACIÓN DE COORDENADAS

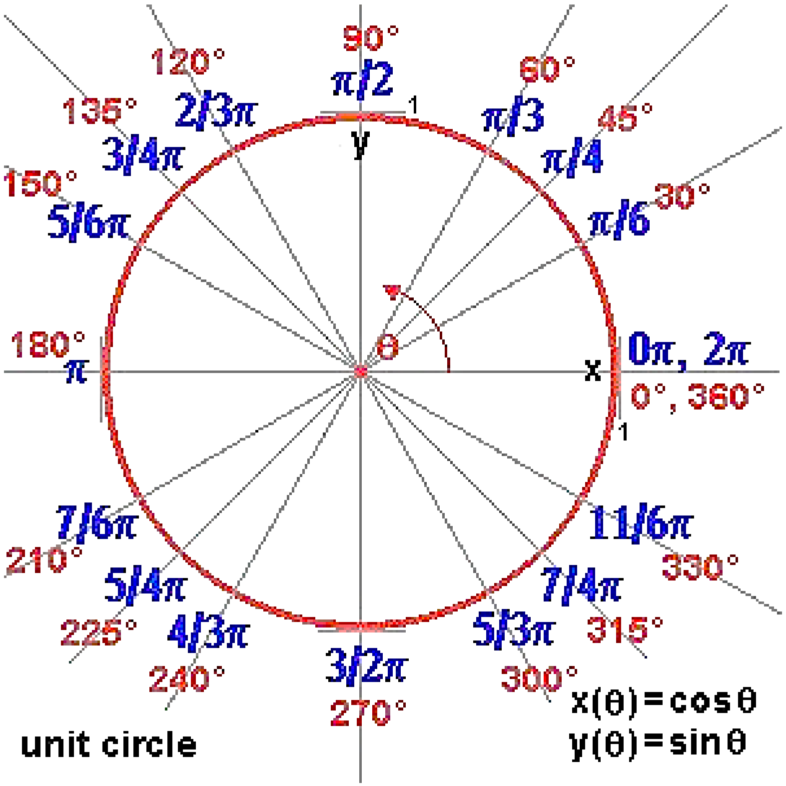
Ejemplo: Analizar y trazar la gráfica de la ecuación

$41x^2 – 24xy + 34y^2 – 25 = 0$

PLANO POLAR

El sistema polar se forma con una recta fija que se llama eje polar y un punto fijo llamado polo. Las coordenadas polares de un punto *P* en el plano son el par ordenado *(r, θ)* *(radio vector, ángulo polar o vectorial)*. Las coordenadas polares *(r, θ)* y *(r, θ+2nπ)* con n entero, corresponden al mismo punto.





COORDENADAS POLARES

Identifique cada punto (r, θ) sobre la figura. Usar θ en grados y radianes.

180° = π radianes por lo que $1\ radian = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

1° = π/180 radianes por lo que $1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right)$

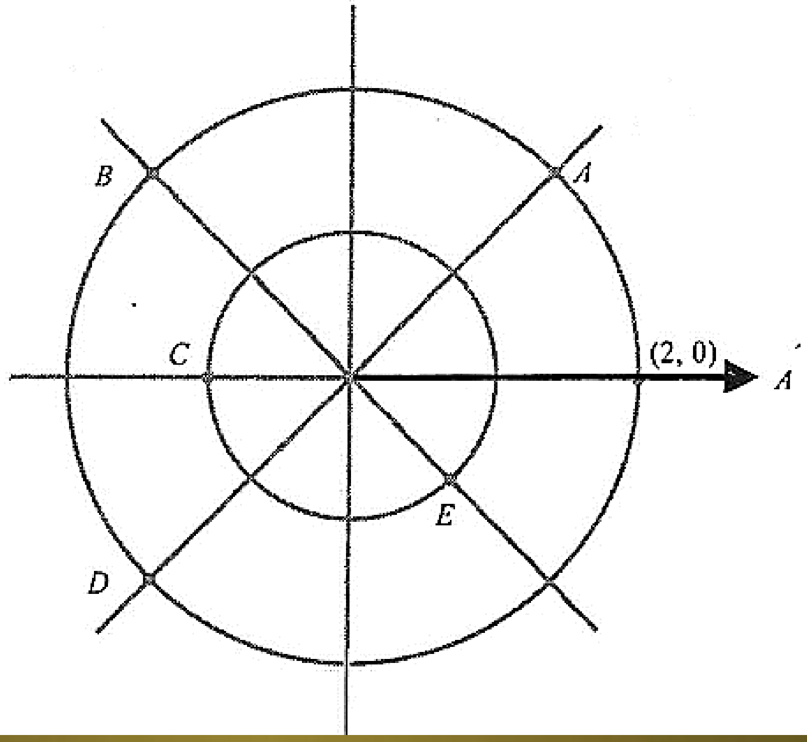
A=

B=

C=

D=

E=

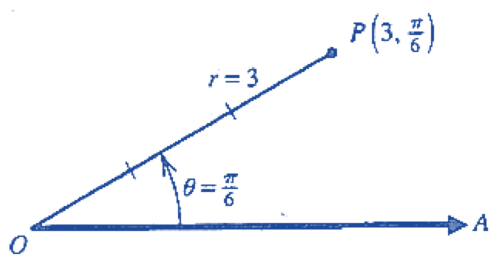


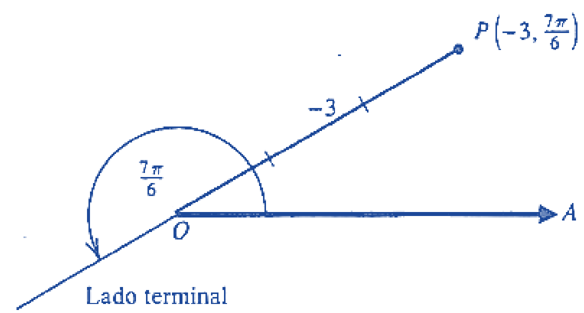
COORDENADAS POLARES

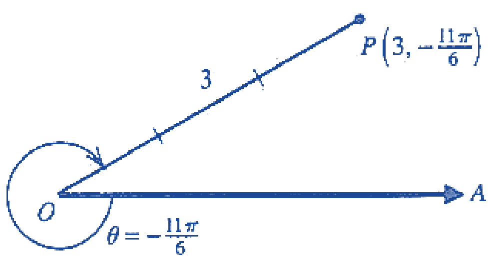
Las coordenadas polares son cantidades con signo. El ángulo vectorial θ se define como positivo o negativo.

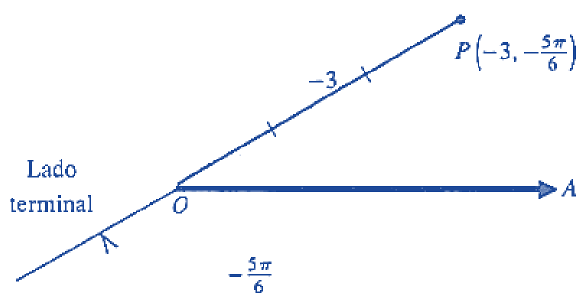
Si $r < 0$, se define como el punto que se encuentra a |r| unidades del polo en la dirección opuesta a la que da θ.

Los siguientes pares de coordenadas definen el mismo punto: $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$; $\left(3, -\frac{11\pi}{6}\right)$; $\left(-3, \frac{7\pi}{6}\right)$ y $\left(-3, -\frac{5\pi}{6}\right)$



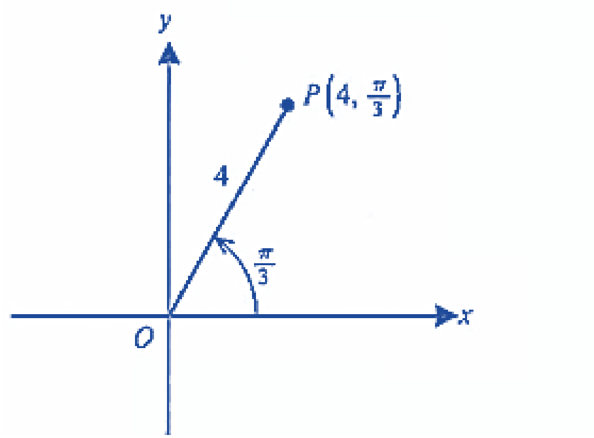


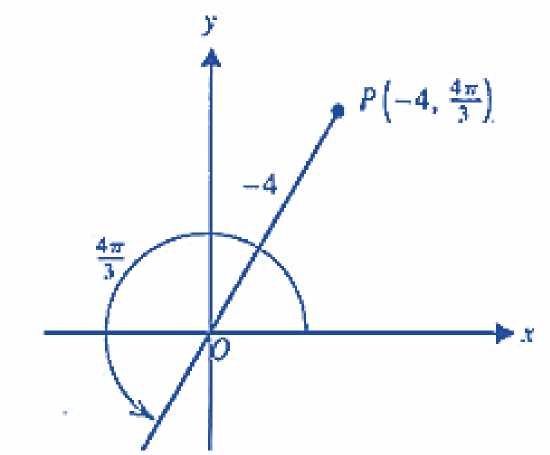


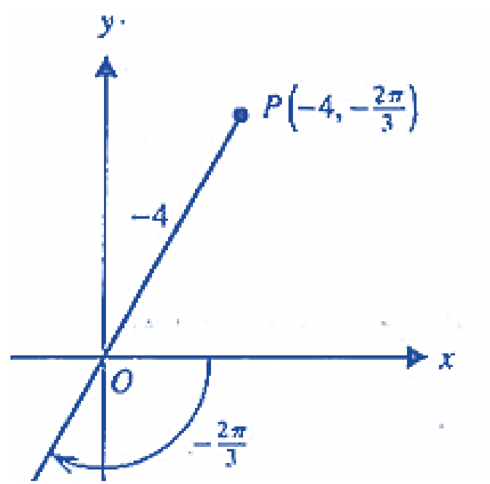


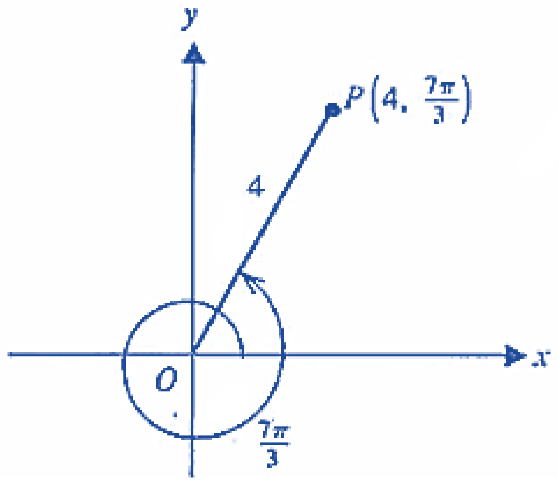
COORDENADAS POLARES

Grafique los siguientes pares de coordenadas: $\left(4,\ \frac{\pi}{3}\right)$; $\left(-4,\ \frac{4\pi}{3}\right)$; $\left(-4,\ -\frac{2\pi}{3}\right)$ y $\left(4,\ \frac{7\pi}{3}\right)$



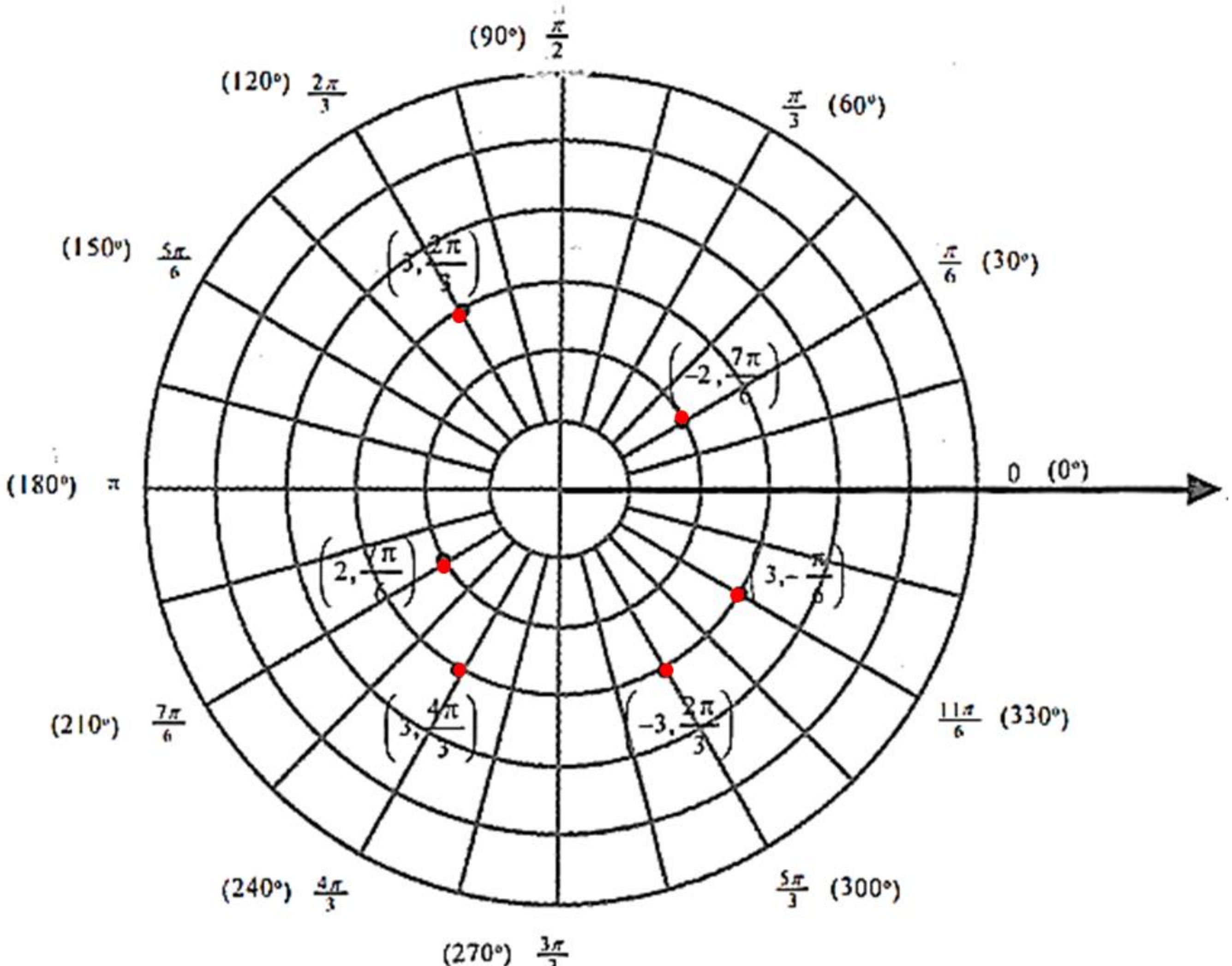






COORDENADAS POLARES

Verifique las distintas maneras de representar el mismo punto. Dibuje las figuras.



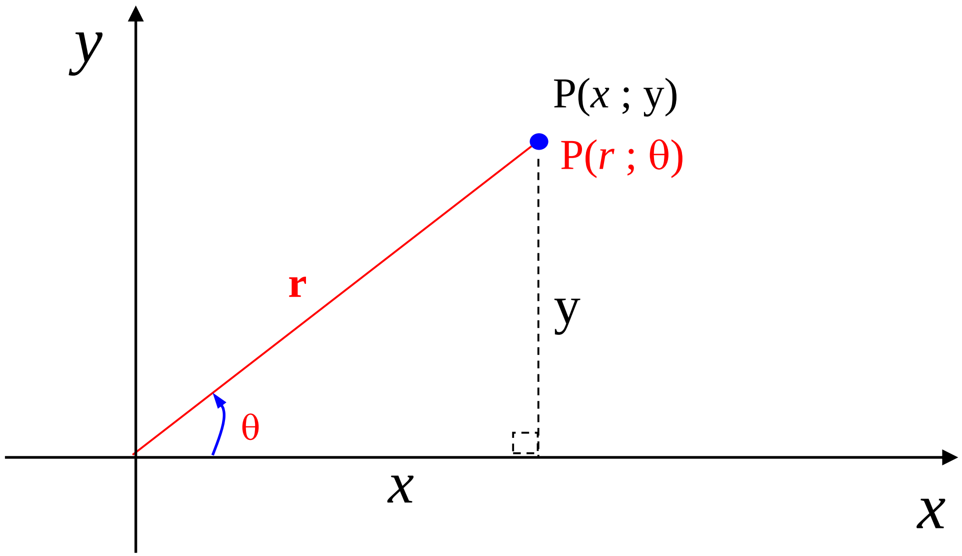
COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

Si P es un punto cuyas coordenadas polares son (r, θ) entonces, las coordenadas rectangulares (x , y) de P serán:

$x = r\ cos\theta;$ $\quad y = r\ sen\theta;$ $\quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$ $\quad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$

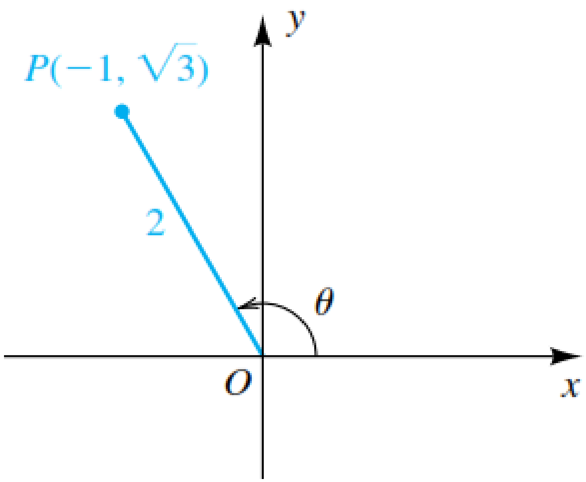
$r^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

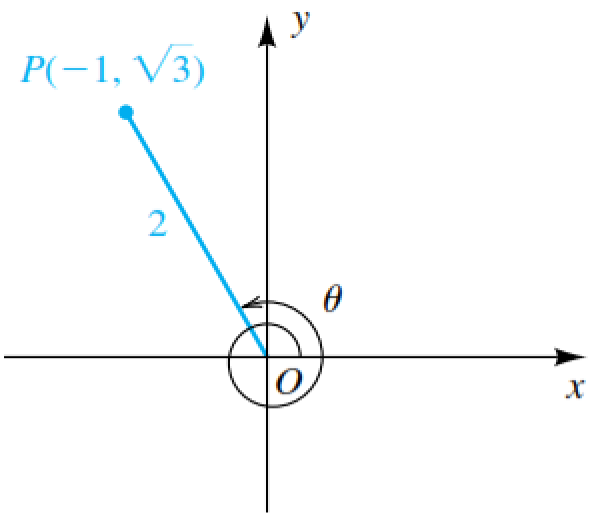
$\theta = tan^{-1}(\frac{y}{x})$ si $x > 0$ y $\pi + \theta = tan^{-1}(\frac{y}{x})$ si $x < 0$

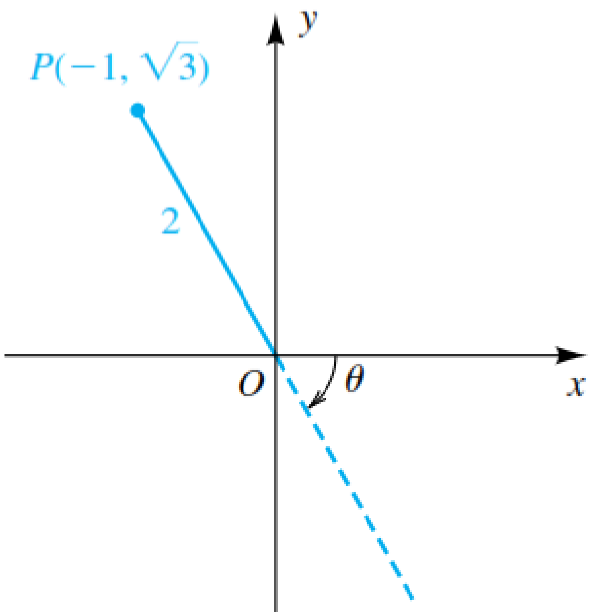


COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

Exprese la coordenada rectangular $(-1, \sqrt{3})$ en términos de coordenadas polares.







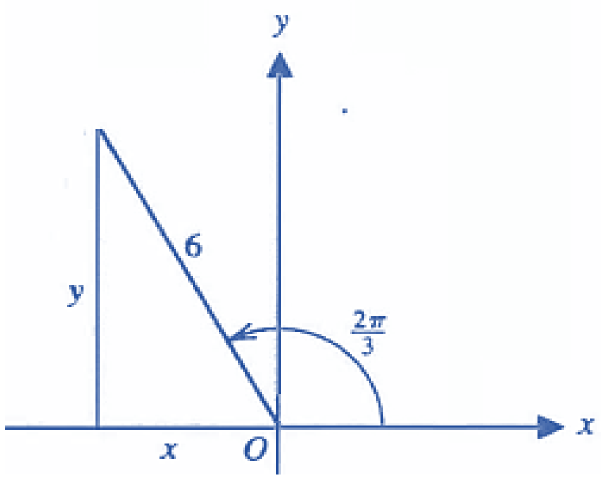
COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

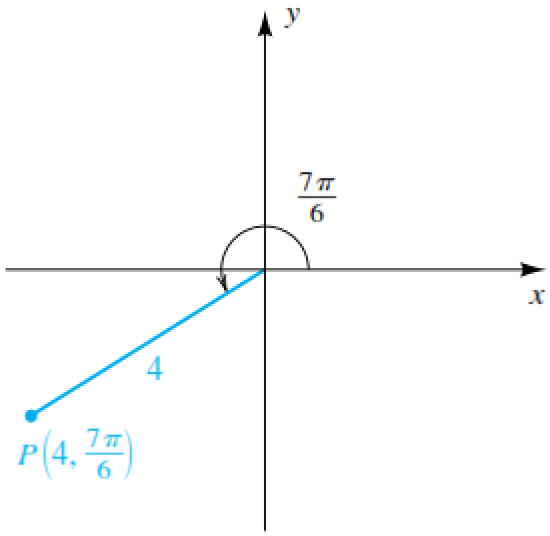
1. Encuentre las coordenadas rectangulares del punto definido por las coordenadas polares $(6, \frac{2\pi}{3})$.

R= Las coordenadas son $(-3,\ 3\sqrt{3})$.

2. Exprese las coordenadas rectangulares $(-2\sqrt{3}, -2)$ en términos de coordenadas polares.

R= Las coordenadas $(4,\ \frac{7\pi}{6})$ es una representación polar.





COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$

Solución: $r^2 - 4rcos\theta - 2rsen\theta + 1 = 0$

Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es $r = \frac{2}{1 - cos\theta}$

Solución: $y^2 = 4x + 4$

COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

En cada uno de los ejercicios pasar de la ecuación rectangular dada a su forma polar.

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $5x - 4y + 3 = 0$
3. $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$
4. $2x - y = 0$
5. $x^2 - y^2 = 4$
6. $x^2 + y^2 - 2y = 0$
7. $xy = 2$
8. $x^2 - 4y - 4 = 0$

COORDENADAS POLARES Y RECTANGULARES

En cada uno de los ejercicios pasar de la ecuación polar dada a su forma rectangular.

1. $r = 4$
2. $r = 3$
3. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$
4. $r = 8 \cos \theta$
5. $r = \dfrac{5}{sen\,\theta - cos\theta}$
6. $r = \dfrac{4}{sen\,\theta + cos\theta}$
7. $r = \dfrac{3}{3 - cos\theta}$
8. $r = \dfrac{4}{4 + sen\,\theta}$

COORDENADAS POLARES: GRAFICACIÓN

La construcción de curvas en coordenadas polares consta de los pasos siguientes:

1. Determinación de las intersecciones con el eje polar y con el eje a 90°
2. Determinación de la simetría de la curva con respecto al eje polar, al eje a 90° y al polo.
3. Determinación de la extensión del lugar geométrico.
4. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada.
5. Trazado de la gráfica.
6. Transformación de la ecuación polar a rectangular.

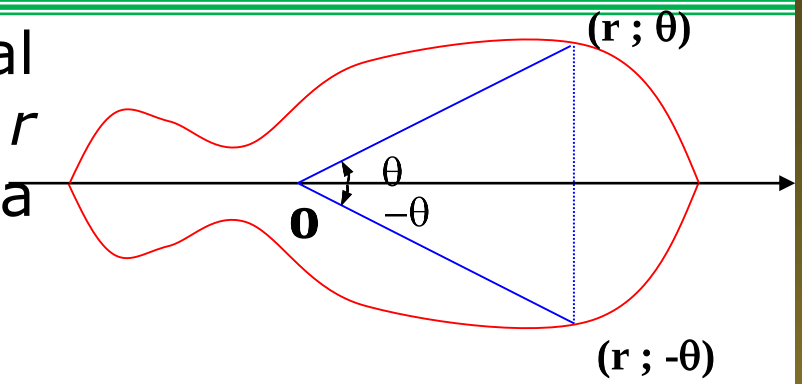
COORDENADAS POLARES: Intersecciones

1. Las intersecciones con el eje polar. Cuando existen, pueden obtenerse resolviendo la ecuación polar dado para r, cuando a θ se le asignan sucesivamente los valores $0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \text{etc}$.
2. Intersecciones con el eje a 90°. Pueden obtenerse asignando a θ los valores $\frac{n\pi}{2}$, en donde *n* es un número impar cualquiera.

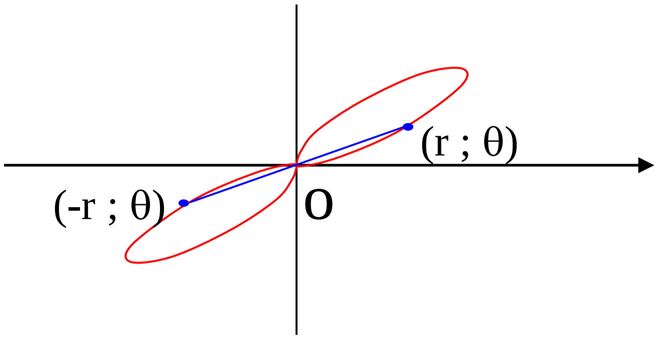
Si existe un valor de θ para el cual sea r = 0, la gráfica pasa por el polo.

COORDENADAS POLARES: Simetría

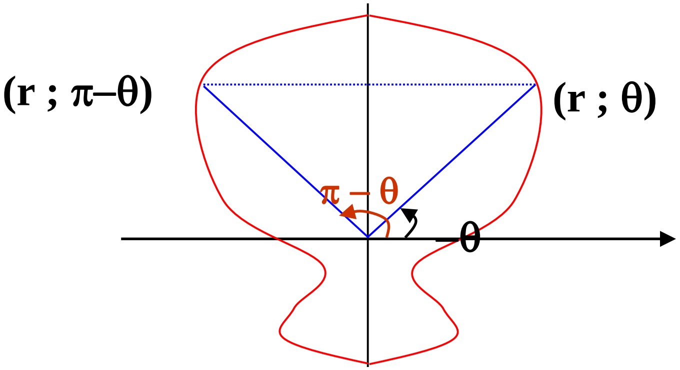
1. Si una ecuación no cambia al sustituir θ por $-\theta$, ó θ por $\pi-\theta$ y r por $-r$ la gráfica es simétrica respecto al eje polar



2. Si una ecuación no cambia al sustituir θ por $\pi+\theta$, ó r por $-r$, la gráfica es simétrica respecto al polo.



3. Si una ecuación no cambia al sustituir θ por $\pi-\theta$; ó θ por $-\theta$ y r por $-r$, gráfica es simétrica respecto al eje a 90°. q = $\frac{\pi}{2}$ (eje y)



COORDENADAS POLARES: Calculo de puntos

1. Si r es finito para todos los valores de θ, se trata de una curva cerrada. Si en cambio, r se vuelve infinita para ciertos valores de θ, la gráfica no puede ser una curva cerrada.

2. Asignando un valor particular a θ, podemos obtener el valor o valores reales correspondientes de r.

3. Los puntos del lugar geométrico pueden trazarse directamente a partir de los valores de las coordenadas obtenidas anteriormente.

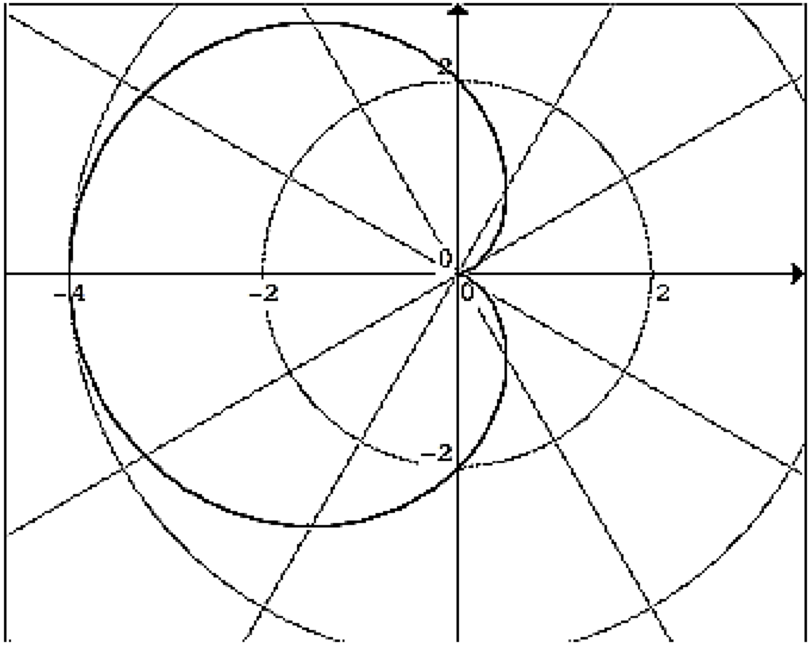
Ejemplo: Trazar la curva cuya ecuación es

$r = 2(1 - cos\theta)$

GRAFICA DE COORDENADAS POLARES: Ejemplo

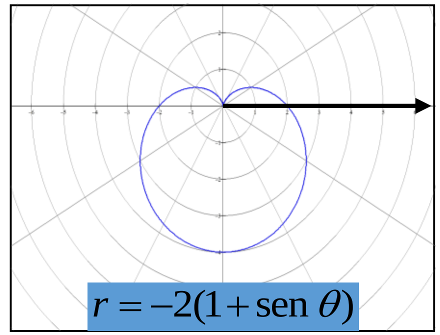
Ejemplo: Trazar la curva cuya ecuación es $r = 2(1 - cos\theta)$

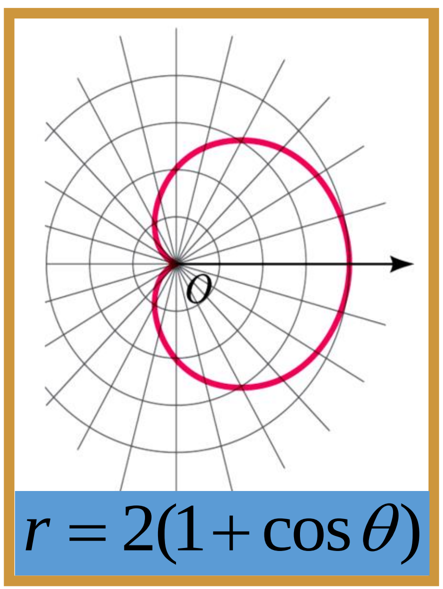
Grados radianes $\theta = t(theta)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Grados sexagesimales	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$r = f(\theta)$	0	0.27	0.59	1	2	3	3.73	4	3.73	3	2	1	0.27	0



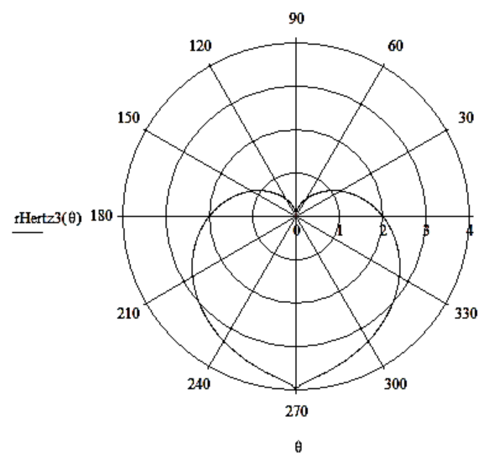
GRÁFICA DE COORDENADAS POLARES: Cardiodes

En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma $r = a(1 \pm cos\theta)$ y $r = a(1 \pm sen\theta)$ es una CARDIODE (forma de CORAZÓN)

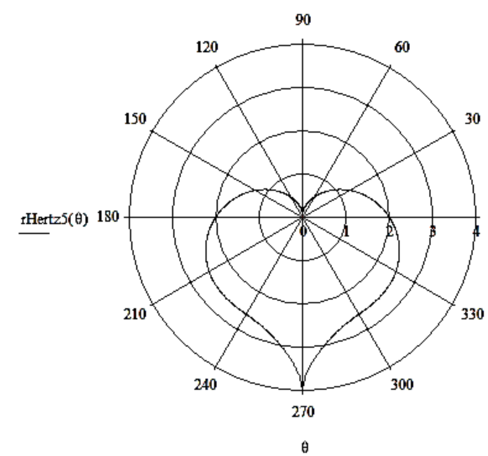




$$\mathrm{rHertz3}(\theta) := \frac{\sin(\theta)\cdot\sqrt{|\cos(\theta)|}}{\sin(\theta) + \frac{7}{3}} - 2\cdot\sin(\theta) + 2$$



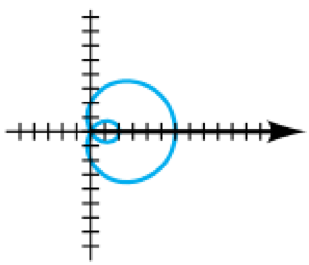
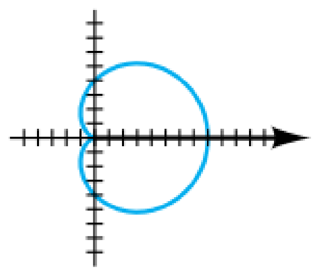
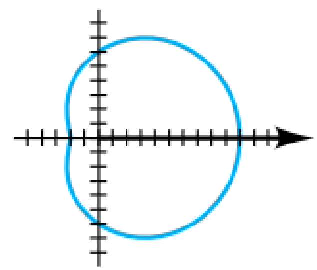
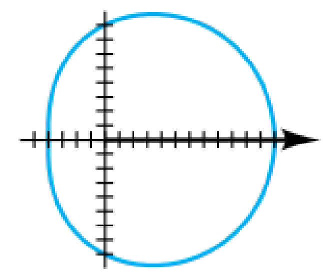
$$\mathrm{rHertz5}(\theta) := \frac{\sin(\theta)\cdot\sqrt{|\cos(\theta)|}}{\sin(\theta) + \frac{7}{5}} - 2\cdot\sin(\theta) + 2$$



GRÁFICA DE COORDENADAS POLARES: Caracoles

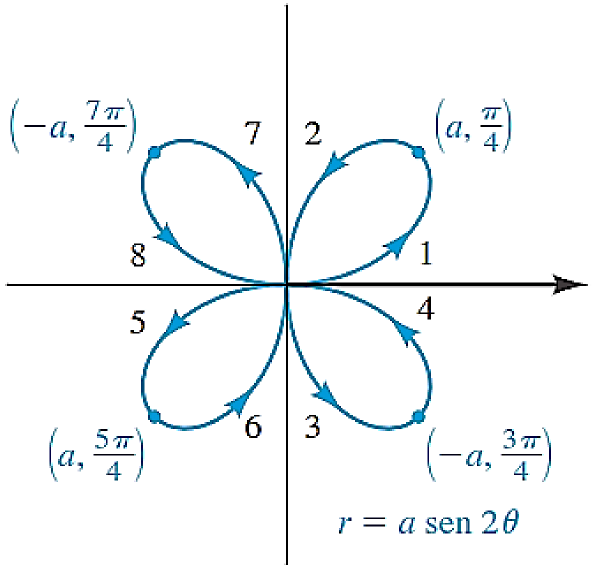
Si a y b no son cero, entonces las gráficas de las siguientes ecuaciones polares son limaçon (caracoles)

$r = a \pm b\ cos\theta$ y $r = a \pm bsen\theta$.

Nombre	Limaçon con un lazo interior	Cardioide	Limaçon con un rizo	Limaçon convexo
Condición	$\frac{a}{b} < 1$	$\frac{a}{b} = 1$	$1 < \frac{a}{b} < 2$	$\frac{a}{b} \geq 2$
Gráfica específica				
Ecuación específica	$r = 2 + 4\cos\theta$	$r = 4 + 4\cos\theta$	$r = 6 + 4\cos\theta$	$r = 8 + 4\cos\theta$

GRÁFICA DE COORDENADAS POLARES

Ejemplo: Si a es una constante positiva, la grafica polar de $r = a\cos k\theta$ o $r = a\,\text{sen}\,k\theta$ se obtiene una rosa con N-pétalos



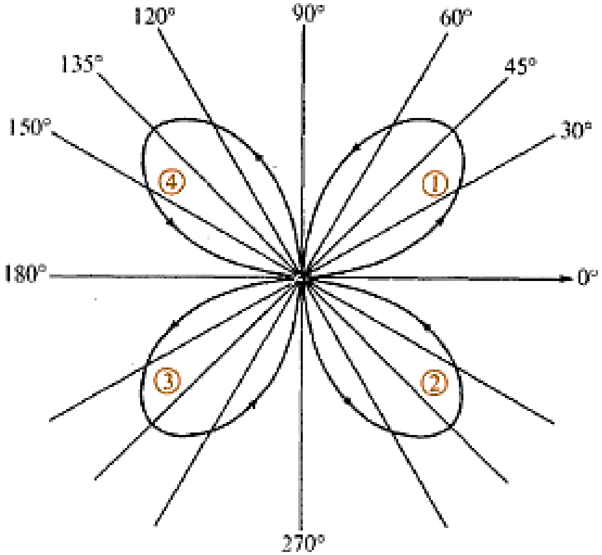
	θ	2θ	$\text{sen}\,2\theta$	$r = a\,\text{sen}\,2\theta$
(1)	$0 \to \pi/4$	$0 \to \pi/2$	$0 \to 1$	$0 \to a$
(2)	$\pi/4 \to \pi/2$	$\pi/2 \to \pi$	$1 \to 0$	$a \to 0$
(3)	$\pi/2 \to 3\pi/4$	$\pi \to 3\pi/2$	$0 \to -1$	$0 \to -a$
(4)	$3\pi/4 \to \pi$	$3\pi/2 \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$-a \to 0$
(5)	$\pi \to 5\pi/4$	$2\pi \to 5\pi/2$	$0 \to 1$	$0 \to a$
(6)	$5\pi/4 \to 3\pi/2$	$5\pi/2 \to 3\pi$	$1 \to 0$	$a \to 0$
(7)	$3\pi/2 \to 7\pi/4$	$3\pi \to 7\pi/2$	$0 \to -1$	$0 \to -a$
(8)	$7\pi/4 \to 2\pi$	$7\pi/2 \to 4\pi$	$-1 \to 0$	$-a \to 0$

GRÁFICAS DE COORDENADAS POLARES

Ejemplo: $r = \text{sen}\, 2\theta$

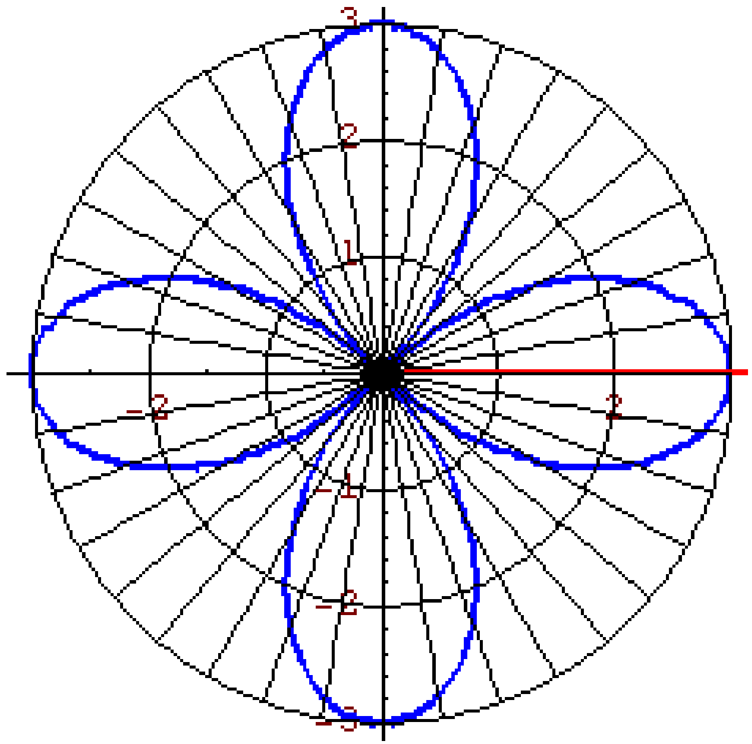
θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
2θ	$0°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$240°$	$270°$	$300°$	$360°$
$r = \text{sen}\, 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

θ	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
2θ	$360°$	$420°$	$450°$	$480°$	$540°$	$600°$	$630°$	$660°$	$720°$
$r = \text{sen}\, 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0



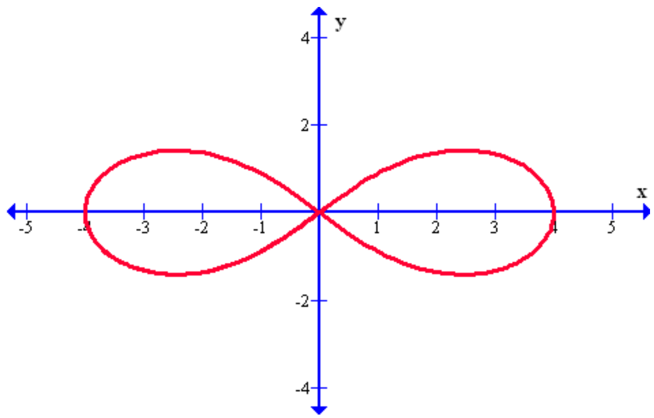
GRAFICAS DE COORDENADAS POLARES

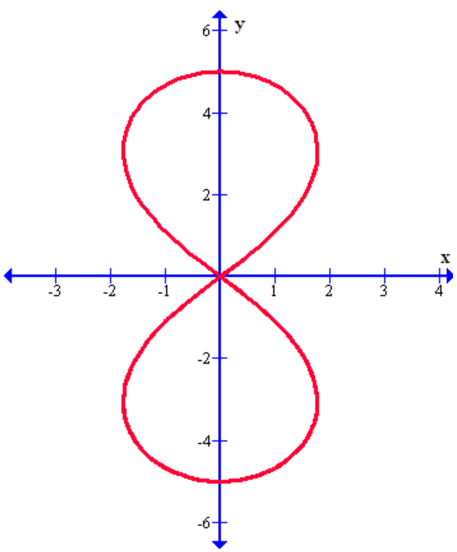
Ejemplo: Trazar la curva cuya ecuación es $r = 3(\cos 2\theta)$



GRAFICAS DE COORDENADAS POLARES

Si a es una constante positiva, la grafica polar de $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ o $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ son llamadas lemniscatas (cinta colgante)





BIBLIOGRAFÍA

1. Arcos Ismael, Geometría analítica para estudiantes de ingeniería GECEI-FIUAEM México 2005

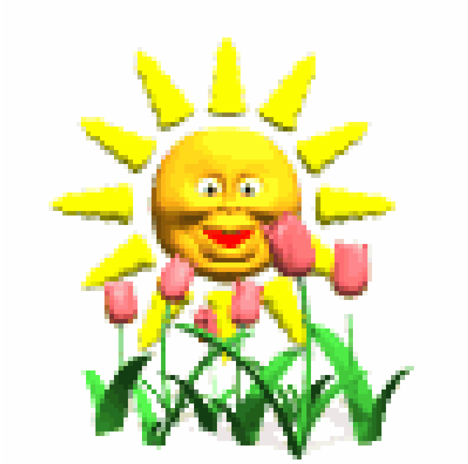
2.- Filloy, Hitt, Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

3.- Lehmann. Geometría Analítica. Limusa. México.

4.- Solis y Nolasco, Geometría Analítica, Editorial Limusa, México.

5. Menna Z. Geometría analítica del espacio, un enfoque vectorial LIMUSA México.

6. Wexler C. Geometría analítica, un enfoque vectorial Montaner y Simon, Espana



FIN DE LA PRESENTACION