UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

LICENCIATURAS EN: ECONOMÍA, RELACIONES ECONÓMICAS INTERNACIONALES Y ACTUARÍA

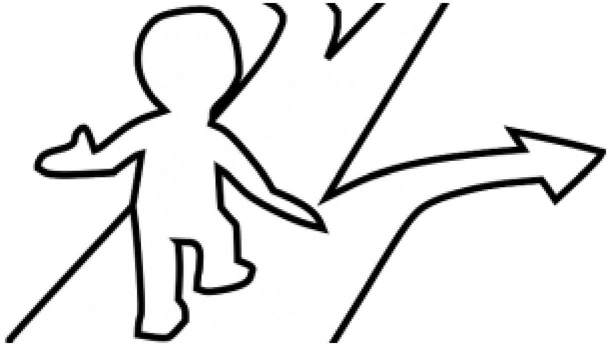
MATERIAL AUDIOVISUAL
DIAPOSITIVAS

UNIDAD DE APRENDIZAJE:
SERIES DE TIEMPO

UNIDAD III
ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN Y MODELOS DE VECTORES AUTORREGRESIVOS VAR

ELABORADO POR: RICARDO RODRÍGUEZ MARCIAL

OCTUBRE 2017



GUÍA DE USO DE LAS DIAPOSITIVAS

ESTAS DIAPOSITIVAS SON UN AUXILIAR PARA EL TRABAJO EN CLASE DE LA ASIGNATURA SERIES DE TIEMPO, QUE SE IMPARTE EN LAS LICENCIATURAS DE ECONOMÍA, RELACIONES ECONÓMICAS INTERNACIONALES Y ACTUARÍA. CONTRIBUIRÁN A DESTACAR LOS ELEMENTOS ESENCIALES DEL CONTENIDO DE LA UNIDAD III.

Presentación:
El presente material consta de seis temas

- TEMAS
  - Introducción
  - Cointegración
  - Raíz Unitaria
  - Prueba de Engel-Granger
  - Cointegración
  - Modelos VAR

OBJETIVO

ESTUDIAR EL ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN; EL CONCEPTO DE RAÍZ UNITARIA Y EL MECANISMO DE CORRECCIÓN DE ERROR; Y LA CONSTRUCCIÓN, ESTIMACIÓN E INTERPRETACIÓN DE UN MODELO DE VECTORES AUTORREGRESIVOS (VAR)

APARTADO 1. INTRODUCCIÓN

SE REVISAN LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS DE COINTEGRACIÓN Y DE LOS MODELOS DE VECTORES AUTORREGRESIVOS: ESTACIONARIEDAD, COINTEGRACIÓN, RAÍZ UNITARIA Y MECANISMO DE CORRECCIÓN DE ERROR; SE REALIZA UN EJERCICIO DONDE SE PRESENTA LA APLICACIÓN DE ESTOS CONCEPTOS A SERIES DE TIEMPO TRASCENDENTES DE LA ECONOMÍA.

PERMITE AL ESTUDIANTE REFLEXIONAR CON MAYOR DETENIMIENTO ACERCA DE LA RELACIÓN DINÁMICA DE DOS SERIES DE TIEMPO, Y ASÍ CUMPLIR CON LA COMPETENCIA ESTABLECIDA EN EL PROGRAMA; QUE EL ALUMNO ELIJA LA REPRESENTACIÓN MÁS ADECUADA A LA SERIES DE TIEMPO BAJO ANÁLISIS.

APARTADO 2. EL CONCEPTO DE COINTEGRACIÓN

UN PROCESO ESTOCÁSTICO ES ESTACIONARIO SI SU MEDIA Y SU VARIANZA SON CONSTANTES EN EL TIEMPO Y SI EL VALOR DE LA COVARIANZA ENTRE DOS PERÍODOS DEPENDE SOLAMENTE DE LA DISTANCIA O REZAGO ENTRE DOS PERÍODOS DE TIEMPO Y NO DEL TIEMPO EN EL CUAL SE HA CALCULADO LA COVARIANZA.

Sea Y_t una serie temporal estocástica con las propiedades mencionadas:

$$\text{Media}: \quad E(Y_t) = \mu$$

$$\text{Varianza}: \quad Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$$

$$\text{Covarianza}: \quad \gamma_k = E\left[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)\right]$$

donde γ_k la covarianza al rezago *k*, es la covarianza entre los valores de Y_t y Y_{t+k}, es decir, entre dos valores *Y* que están separados *k* períodos. Si *k* = 0, se obtiene Y_0, que es simplemente la varianza de *Y*.

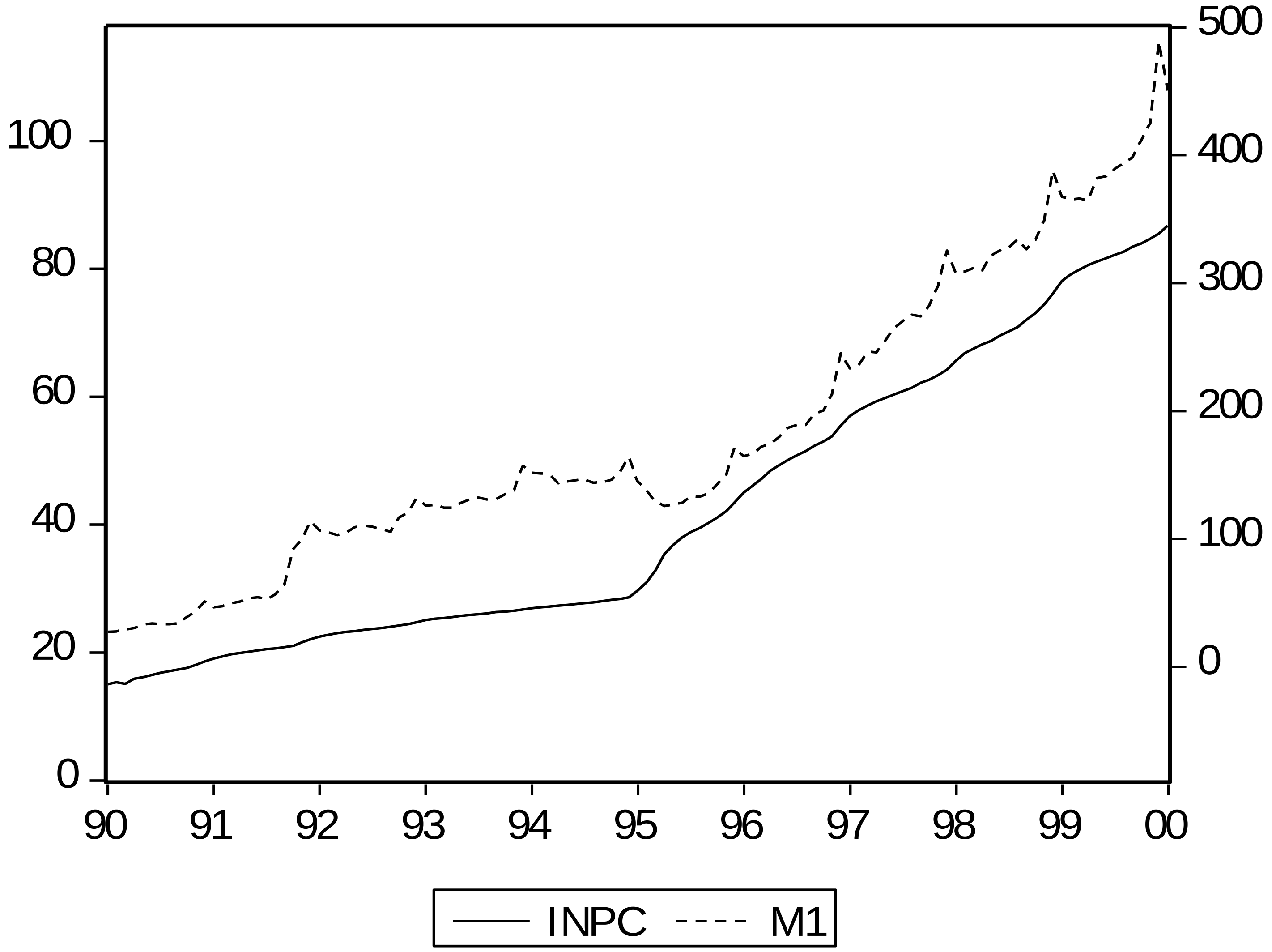
El problema de la regresión espuria

Al efectuar una regresión de una variable de serie de tiempo sobre otra variable de serie de tiempo con frecuencia se obtiene un R^2 muy elevado aunque no haya una relación significativa entre las dos. Esta situación ejemplifica el problema de la ***regresión espuria*****.**

Este problema surge si las dos series de tiempo involucradas presentan tendencias fuertes, el alto R^2 observado se debe a la presencia de la tendencia y no a la verdadera relación entre las dos.

EJEMPLO

Sean dos series de tiempo para México: la primera se refiere al índice de precios (INPC) y en la segunda a la Oferta monetaria (M1), la información está dada en datos mensuales para el período de Enero de 1990 a Enero de 2000, para ambas series.



Si tomamos a la variable INPC (*Y*) como variable dependiente y a la variable M1 (*X*) como variable independiente. Efectuándose la regresión de INPC sobre M1, utilizando la información correspondiente, los resultados son los siguientes:

$$INPC = 7.040392 + 0.190014\,M1$$
$$t = (7.7673) \qquad (45.1674)$$
$$R^2 = 0.9448 \qquad d = 0.1639$$

Problema: R^2 elevado y DW bajo

La sincronía es intuitivamente la idea detrás de las series de tiempo cointegradas. Así los resultados pueden no ser espurios y las pruebas *t y F* serán validas. Como lo afirma Granger "una prueba de cointegración puede ser considerada como un prueba previa para evitar situaciones de regresión espuria".

Considérese la regresión

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t \qquad (1)$$

donde X y Y son procesos estocásticos no estacionarios o caminatas aleatorias. A pesar de esto, la combinación lineal de estas variables podría ser estacionaria. Más específicamente si se escribe como:

$$u_t = Y_t - \beta_1 - \beta_2 X_t \qquad (2)$$

Si se encuentra que u_t (es decir la combinación lineal) es estacionaria, y la podemos denotar $I(0)$ entonces se dice que las variables Y y X están cointegradas; es decir están sobre la misma longitud de onda.

La regresión de las dos variables, es significativa (es decir no es espuria); y no se pierde información valiosa de largo plazo, lo cual sucedería si se utilizaran sus primeras diferencias.

Apartado 3: Prueba de Raíz Unitaria

Una prueba sobre estacionariedad, se conoce como la "Prueba de raíz unitaria". Para mostrar esta prueba considérese el siguiente modelo:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t \qquad (3)$$

donde u_t es el término de error estocástico que siguen los supuestos clásicos, a saber: tiene media cero, varianza constante σ^2 y no está autocorrelacionado. Un término de error con tales propiedades es conocido también como ***término de error ruido blanco.***

Reconózcase que la ecuación anterior es una regresión de primer orden o $AR(1)$, en la cual se efectúa la regresión del valor de Y en el tiempo t sobre su valor en el tiempo $(t-1)$. Ahora bien, si el coeficiente de Y_{t-1} es en realidad igual a 1, surge lo que se conoce como el problema de raíz unitaria es decir, una situación de no estacionariedad. Por consiguiente, si se efectúa la regresión:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t \qquad (4)$$

y se encuentra que $\rho = 1$, entonces se dice que la variable estocástica Y_t tiene raíz unitaria.

La forma alternativa:

$$\Delta Y_t = (\rho - 1) Y_{t-1} + u_t \qquad (5)$$
$$= \delta Y_{t-1} + u_t$$

donde $\delta = (\quad - 1)$ y donde Δ, es el operador de primera diferencia. Obsérvese que : Haciendo uso de esta definición, el lector puede ver fácilmente que (4) y (5) son iguales. Sin embargo, ahora la hipótesis nula es que δ = 0, porqué si δ es en realidad 0, se puede escribir (5) como:

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = u_t \qquad (6)$$

La ecuación (6) dice que la primera diferencia de una serie de tiempo de caminata aleatoria (u_t) es una serie de tiempo estacionaria porque, por supuestos, u_t es puramente aleatoria.

Prueba Dickey-Fuller

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + u_t \qquad (7)$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \delta Y_{t-1} + u_t \qquad (8)$$

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + u_t \qquad (9)$$

donde *t* es la variable de tiempo o tendencia. En cada caso, la hipótesis nula es que δ = 0, es decir que hay una raíz unitaria. La diferencia entre (7) y las otras dos regresiones se encuentra en la inclusión de la constante (el intercepto) y el término de tendencia.

Si el término de error u_t está autocorrelacionado, se modifica (9) de la siguiente forma:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta Y_{t-1} + \alpha_i \sum_{i=1}^{m} \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t \qquad (10)$$

APARTADO 4. PRUEBA DE ENGLE-GRANGER (EG) O PRUEBA DE ENGLE-GRANGER AUMENTADA (AEG)

Puesto que la u estimada está basada en el parámetro de cointegración estimado β_2, los valores críticos de significancia DF y ADF no son del todo apropiados, Engle y Granger han calculado estos valores. Por consiguiente, en el contexto actual, las pruebas DF y ADF se conocen como la prueba de Engle – Granger (EG) y la prueba Engle – Granger aumentada (AEG).

Estimándose el modelo como (1)

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t$$

Que para nuestro ejercicio sería:

$$INPC = 7.040392 + 0.190014M1$$

Obteniendo los residuales (2):

$$u_t = Y_t - \beta_1 - \beta_2 X_t$$

Ahora se puede estimar la regresión siguiente:

$$\Delta\hat{u}_t = \hat{u}_{t-1}$$

$$\Delta\hat{u}_t = -0.0786\hat{u}_{t-1}$$

$$t = -2.1475$$

$$r^2 = 0.0316$$

Los valores críticos de τ al 1% y 5% de Engle y Granger (estadístico *t* en la regresión anterior) son -2.60 y -1.95, respectivamente. Puesto que en términos absolutos, el valor τ estimado de 2.1475 no excede el valor crítico de Engle y Granger al 1% (-2.60), podemos decir que el u_t estimado no es estacionario (es decir tiene raíz unitaria) y por consiguiente INPC y M1 no pueden ser cointegradas.

APARTDADO 5. COINTEGRACIÓN Y MECANISMO DE CORRECCIÓN DE ERRORES

Si se demuestra que Y y X están cointegradas, se puede decir, que existe una relación de equilibrio de largo plazo entre las dos. Por supuesto, en el corto plazo, puede haber desequilibrio. En consecuencia, se puede tratar el término de error en (2) como el *error de equilibrio*. Y se puede utilizar este término de error para atar el comportamiento de corto plazo de *Y* con su valor de largo plazo. El mecanismo de corrección de errores (MCE) utilizado por primera vez por Sargan y popularizado más tarde por Engle y Granger, corrige el desequilibrio.

Suponga el siguiente modelo:

$$\Delta Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta X_t + \alpha_2 \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (11)$$

Retomado nuestro ejercicio el modelo quedaría de la siguiente forma:

$$\Delta INPC_t = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta M1_t + \alpha_2 \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta INPC_t = 0.6122 - 0.0046 M1_t + 0.03510 \hat{u}_{t-1}$$

$$t = (14.006) \quad (\text{-}1.1606) \qquad (4.2382)$$

$$R^2 = 0.1330 \qquad d = 0.4756$$

La regresión (11) relaciona el cambio en *Y* con el cambio en *X* y el error equilibrador en el período anterior. En esta regresión, Δ*X* recoge las perturbaciones de corto plazo en *X* mientras que el término de corrección de errores recoge el ajuste hacia el equilibrio de largo plazo. Si α_2 es estadísticamente significativo, éste dice qué proporción del desequilibrio en *Y* en un período es corregida en el período siguiente.

APARTADO 6. MODELOS DE VECTORES AUTORREGRESIVOS

- El surgimiento de los modelos VAR tiene que ver con los modelos de ecuaciones simultáneas donde se establecen una serie de restricciones para poder llevar a cabo su estimación.
- Estas restricciones se extraían de la teoría económica así como la dinámica de los mismos.
- Christopher Sims en 1980 en un artículo denominado “Macroeconomía y realidad”, critica fuertemente estas características mencionadas.
- Todas las variables deben ser tratadas sobre una base de igualdad, no debe existir ninguna distinción a priori entre endógenas y exógenas.
- La dinámica de los sistemas se determina únicamente el número máximo de retardos con el que intervienen las variables y se deja que los datos determinen la longitud temporal del modelo.

- Para el caso de dos variables, a lo largo del tiempo la variable $\{Y_t\}$ puede verse afectada por realizaciones pasadas y corrientes de la variables $\{Z_t\}$ y de la misma manera $\{Z_t\}$ puede verse afectada por realizaciones pasadas y corrientes de $\{Y_t\}$. Considerando el sistema bivariado:

$$y_t = b_{10} - b_{12} z_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \qquad (12)$$

$$z_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \qquad (13)$$

donde se asume que:

y_t y z_t: son estacionarias.

ε_{yt} y ε_{zt} : Son ruido blanco con desviaciones estándar σ_y y σ_z respectivamente y no están correlacionadas

- Las ecuaciones (12) y (13) constituyen un vector autorregresivo de primer orden (VAR) donde la amplitud del rezago es la unidad.

Podemos escribir el modelo de forma compacta:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_t \\ z_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y_{t-1} \\ Z_{t-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{vmatrix}$$

o

$$BX_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$Donde$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{vmatrix}$$

$$x_t = \begin{vmatrix} y_t \\ z_t \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_0 = \begin{vmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \qquad E_t = \begin{vmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{vmatrix}$$

- Premultiplicando por B^{-1} nos lleva a obtener el modelo de vector Autorregresivo (VAR) en su forma compacta:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + e_t \qquad (14)$$

$$\text{Donde}:$$

$$A_0 = B^{-1}\Gamma_0$$

$$A_1 = B^{-1}\Gamma_1$$

$$e_t = B^{-1}\varepsilon_t$$

a_{i0} : El elemento i del vector A_0

a_{ij} : El elemento de la fila i y columna j de la matriz A_1

e_{it} : El elemento i del vector e_t.

Usando esta nueva notación se puede reescribir (14) de la siguiente forma equivalente :

$$y_t = a_{10} + a_{11} y_{t-1} + a_{12} z_{t-1} + e_{1t} \qquad (15\,a)$$

$$z_t = a_{20} + a_{21} y_{t-1} + a_{22} z_{t-1} + e_{2t} \qquad (15\,b)$$

Para distinguir entre los sistemas representados por (12) y (13) de los (15a) y (15b) los primeros son llamados VAR estructural o sistema primitivo y los segundos son llamados VAR en forma estándar.

ESTIMACIÓN DE UN VAR

Sims (1980) da argumentos para una estrategia de estimación alternativa. Considere la siguiente generalización multivariante de un proceso autorregresivo:

$$x_t = A_0 + A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \ldots\ldots + A_p x_{t-p} + e_t \qquad (16)$$

donde: x_t = Un $(\eta \times 1)$ vector que contiene cada una de las η variables incluidas en el VAR.

$A_0 = Un\ (\eta \times 1)$ vector de términos de intercepto.

$A_i = (\eta \times \eta)$ matrices de coeficientes

$e_t = un\ (\quad 1)$ vector de términos de error.

Las variables a ser incluidas en el VAR son seleccionadas de acuerdo a la relevancia en el modelo económico. La prueba de la longitud del retardo selecciona la longitud del retardo apropiada. De otra forma, no intenta explicitar de hecho para “disminuir” el número de parámetros estimados. La matriz A_0 contiene η términos de intercepto y cada matriz A_i contiene η^2 coeficientes; de aquí que se necesitan estimar $\eta + p\eta^2$ términos. Incuestionablemente, un VAR será sobreparametrizado y muchos de estos coeficientes estimados pueden ser excluidos del modelo.

LA FUNCIÓN IMPULSO RESPUESTA

Al igual que un autorregresivo tiene una representación de promedio móvil, un vector autorregresivo puede ser escrito como un vector de promedios móviles (VMA)

La representación VMA es una característica esencial de la metodología de Sims (1980) que permite trazar la trayectoria en el tiempo de varios shocks sobre las variables contenidas en el sistema VAR.

Descomposición de la Varianza

La descomposición de la varianza del error de previsión nos dice la proporción del movimiento en una secuencia debido a un shock "directo" contra shocks de las otras variables. Si $_{zt}$ no explica los shocks de la varianza del error de previsión de $\{y_t\}$ en todo el horizonte de previsión, podemos decir que la secuencia $\{y_t\}$ es exógena. En esta circunstancia, $\{y_t\}$ se desarrolla independientemente de la secuencia $\{Z_t\}$ y del shock $_{zt}$.

Ejemplo práctico

Supóngase que desea estudiarse la relación que tiene la tasa de interés en la base monetaria de México. 1994-2016 mensual

Una vez inducida la estacionariedad de las series, se obtiene el número de rezagos óptimos, en este caso 2 u 8

Lag	LogL	LR	FPE	AIC	SC	HQ
0	-6809.901	NA	5.47e+20	53.42668	53.45445	53.43785
1	-6804.990	9.707635	5.43e+20	53.41953	53.50285	53.45304
2	***-6787.733***	***33.83741***	***4.89e+20***	***53.31555***	***53.45442****	***53.37141****
3	-6787.330	0.783010	5.03e+20	53.34377	53.53819	53.42197
4	-6786.474	1.651898	5.16e+20	53.36842	53.61840	53.46897
5	-6781.018	10.44073	5.10e+20	53.35701	53.66253	53.47990
6	-6775.456	10.55828	5.04e+20	53.34475	53.70582	53.48999
7	-6770.798	8.767121	5.01e+20	53.33959	53.75621	53.50717
8	***-6761.133***	***18.04233****	***4.80e+20****	***53.29516****	***53.76733***	***53.48508***
9	-6760.917	0.398316	4.94e+20	53.32484	53.85256	53.53711
10	-6759.665	2.298159	5.05e+20	53.34639	53.92966	53.58101
11	-6758.961	1.281806	5.18e+20	53.37224	54.01106	53.62920
12	-6756.120	5.124747	5.23e+20	53.38133	54.07570	53.66064
13	-6755.337	1.400432	5.37e+20	53.40656	54.15648	53.70821
14	-6754.220	1.980334	5.49e+20	53.42917	54.23464	53.75316
15	-6751.356	5.031451	5.55e+20	53.43808	54.29910	53.78442
16	-6748.919	4.242194	5.62e+20	53.45035	54.36691	53.81903
17	-6747.950	1.672478	5.76e+20	53.47412	54.44623	53.86514
18	-6747.327	1.064429	5.91e+20	53.50061	54.52827	53.91398
19	-6744.090	5.484673	5.95e+20	53.50659	54.58980	53.94230
20	-6743.501	0.988559	6.12e+20	53.53334	54.67210	53.99140

Posteriormente, se define el orden de la series:
En este caso, estadísticamente a partir del test de Granger, se obtuvo que la variable de tasa de interés fue más endógena que la misma base monetaria
El resultado del modelo VAR, es el siguiente:

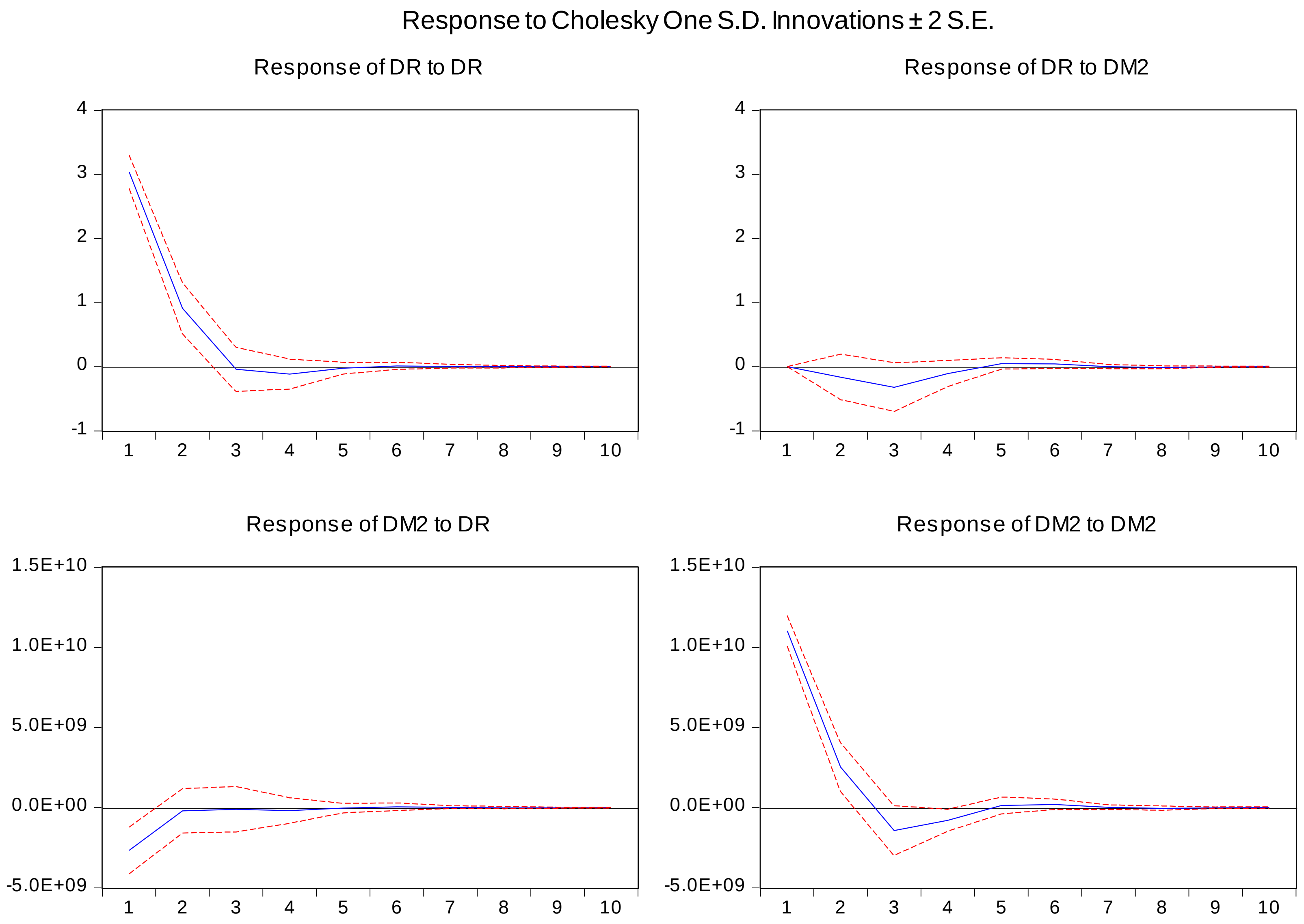
DR = 0.287479250085*DR(-1) - 0.11966799514*DR(-2) - 1.45860945847e-11*DM2(-1) - 2.14732874661e-11*DM2(-2) + 0.0501936792916

DM2 = 134428618.206*DR(-1) - 216961057.232*DR(-2) + 0.229144603767*DM2(-1) - 0.180351103752*DM2(-2) + 1638802624.25

Función Impulso-Respuesta

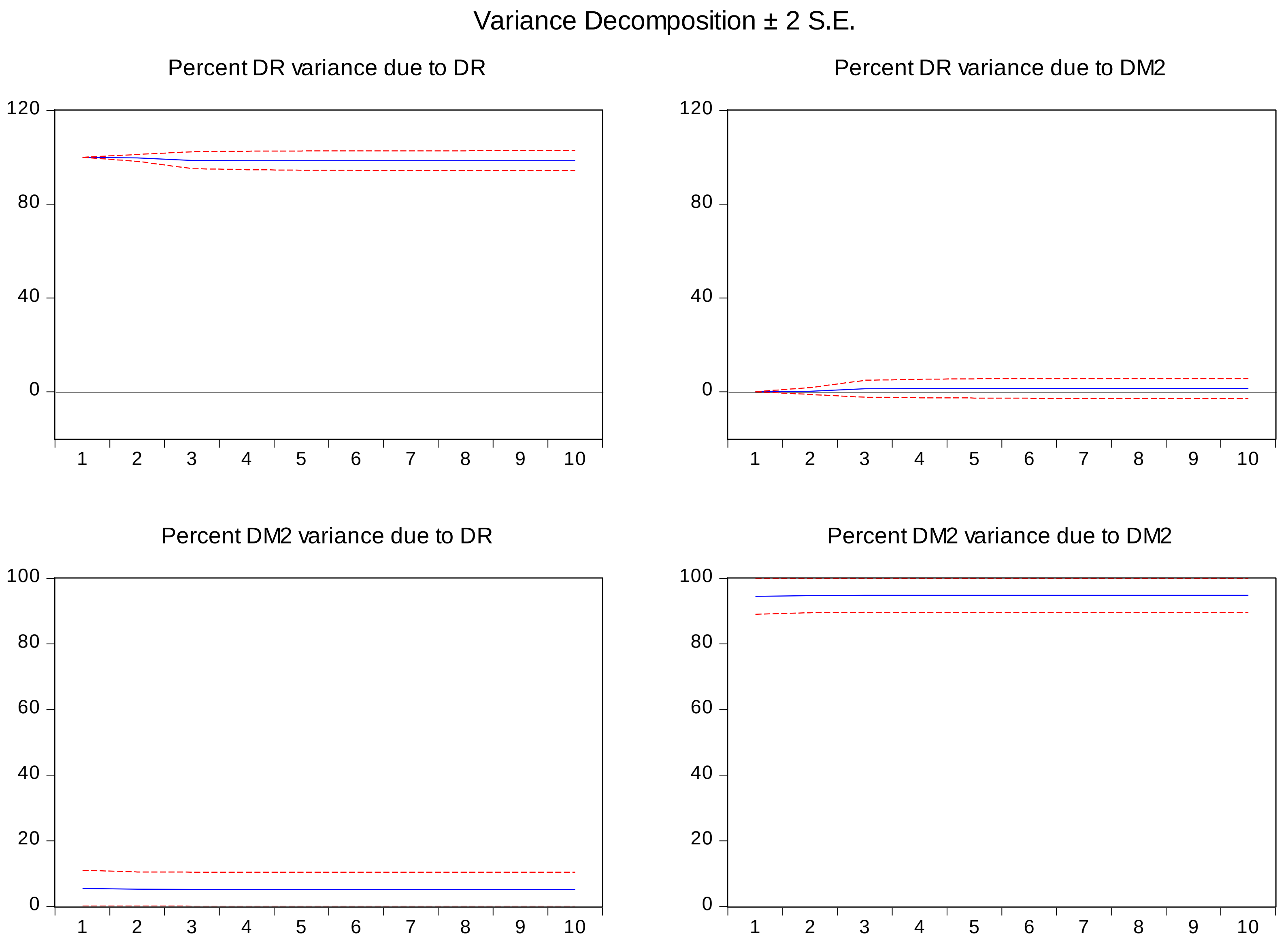
Analizando la FIR, se puede observar como ante la presencia de un choque exógeno en alguna variable, estas varían pero al cabo del tiempo estas tienden a recobrar su nivel de equilibrio.

Este tipo de funciones son muy importantes para los hacedores de política, pues, por ejemplo ayuda a interpretar el resultado en la economía ante un movimiento en las herramientas gubernamentales.



Descomposición de la Varianza

Tal como se mencionó anteriormente, la descomposición de la varianza del error de previsión nos dice la proporción del movimiento en una secuencia debido a un shock "directo" contra shocks de las otras variables.



B I B L I O G R A F I A

Aznar, Antonio y Trívez, F. Javier; *Métodos de Predicción en Economía I. Fundamentos, Input-Output, Modelos econométricos y métodos no paramétricos de series temporales*, 1ª. ed. Editorial Ariel, España enero 1993.

Arias, E. & Torres, C., 2004. *Modelos VAR y VECM para el pronóstico de Corto Plazo*, s.l.: Banco Central de Costa Rica

Bjørnland, H., 2000. *VAR Models in Macroeconomic Research*. Statistics Norway Research Department

Bowerman, Bruce L., Richard T. O'Connell y Anne B. Koehler; *Pronósticos, series de tiempo y regresión. Un enfoque aplicado*, 4ª. ed. Thomson Editores, México 2007.

Enders, W., *Applied Econometric Time Series*, second edition. Wiley, USA, 2004.

Gujarati, D. & Porter, D., 2010. *Econometría.* Quinta ed. México, D.F.: Mc Graw Hill.

Novales, A., *Econometría*, segunda edición. McGraw-Hill, Madrid, 1993.

Schmidt, Stephen, J., *Econometría*, primera edición. McGraw-Hill, México, 2005.