Universidad Autónoma del Estado de México

Programa de Maestría en Ciencias
Facultad de Ciencias

FUNCIONES ω-CONFLUENTES Y OTRAS CLASES DE FUNCIONES

TESIS POR ARTÍCULO ESPECIALIZADO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:

ANA CECILIA SIERRA CUEVAS

DIRECTORES DE TESIS:

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI
DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

18 DE SEPTIEMBRE DE 2018

Universidad Autónoma del Estado de México

Programa de Maestría en Ciencias
Facultad de Ciencias

FUNCIONES ω-CONFLUENTES Y OTRAS CLASES DE FUNCIONES

TESIS POR ARTÍCULO ESPECIALIZADO

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:

ANA CECILIA SIERRA CUEVAS

DIRECTORES DE TESIS:

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI
DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

18 DE SEPTIEMBRE DE 2018

Universidad Autónoma del Estado de México
UAEM

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS (BIOLOGÍA)

DRA. PETRA SÁNCHEZ NAVA
COORDINADORA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS AVANZADOS

PRESENTE

Nos permitimos informarle que hemos revisado la tesis tradicional titulado: **"Funciones ω Confluentes y otras clases de funciones"**, que presenta la **Mat. Ana Cecilia Sierra Cuevas.** Dicho trabajo cuenta con nuestro **Voto Aprobatorio**.

ATENTAMENTE

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

DR. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA

DR. DAVID MAYA ESCUDERO

DR. FRANCISCO VÁZQUEZ JUÁREZ

DR. ALFREDO CANO RODRÍGUEZ

DR. ALEJANDRO FUENTES MONTES DE OCA

Acta 110 Acuerdo 339/MC
c.c.p. Archivo
PSN/nmg

Facultad de Ciencias

Agradecimientos

Primeramente agradezco a Dios, por todas las bendiciones que me regala día a día como el tener un gran ser a mi lado como esposo y unos hijos maravillosos quienes son mi fuente de inspiración para lograr todas mis metas.

Agradezco a Enrique el amor de mi vida por apoyarme incondicionalmente y alentarme siempre de todas las formas posibles.
También quiero agradecer a mis otros dos amores Andy y Quiquin por su amor y por ser lo mejor de mi vida. Los amo.

Le doy gracias al Doctor Fernando Orozco Zitli por aceptar ser mi tutor durante mis estudios de maestría y por ser uno de los pilares dentro de mi formación académica como matemática dado que fue uno de mis maestros desde el primer semestre de la licenciatura. Gracias Fer por ser quien me has dado las herramientas necesarias para crecer y madurar académica y científicamente brindandome tu comprensión, paciencia, apoyo y amistad.

Les agradezco a todos mis revisores por dedicar una parte importante de su valioso tiempo para revisar el presente trabajo.

Finalmente pero no memos importante quiero agradecer a mis padres quienes siempre estan a mi lado. Gracias Lupita y Antero por hacer de mi la persona que soy y por brindarme su apoyo siempre.

Ana Cecilia Sierra Cuevas

Índice general

1. Protocolo de Investigación

FUNCIONES ω-CONFLUENTES Y OTRAS CLASES DE FUNCIONES

INTRODUCCIÓN

Sean X un espacio topológico con topología τ y W un subconjunto de X, diremos que W es un conjunto ω-abierto si y solo si para cada x que pertenece a W, existe un abierto U de τ tal que x pertenece a U y U-W es a lo más numerable. Es fácil probar que la familia de los conjuntos ω-abiertos, τ_ω, forman una topología que contiene a τ. Usando esta notación de conjuntos ω-abiertos, uno puede definir lo que es un conjunto ω-conexo, ω-compacto, ω-continuo, siguiendo la noción clásica de dichos conjuntos. Por ejemplo, un espacio X es llamado ω-conexo si X no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos ω-abiertos ajenos y no vacíos. Y diremos que X es ω-compacto si para cada cubierta de ω-abiertos de X tiene una subcubierta finita. En particular, diremos que un espacio X es un ω-continuo si es ω-conexo y ω-compacto al mismo tiempo, y un subconjunto K del espacio X es un ω-continuo si K es ω-conexo y ω-compacto como un subespacio de X.

En [2], se estudian relaciones que hay entre los espacios (X,τ) y (X, τ_ω), por ejemplo: si un espacio (X, τ_ω) es ω-conexo, entonces (X, τ) es conexo.

Por otra parte, en [1], introduce el concepto de función confluente, el cual se define como: dada función continua $f: X\rightarrow Y$ entre continuos (un *continuo* es un espacio de Hausdorff compacto, conexo y diferente del vacío) es confluente si para cada subcontinuo K de Y (un subcontinuo es un continuo contenido en Y) y para cada componente C de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(C)=K$. En ese mismo artículo se realiza un estudio sobre funciones confluentes y las relaciones que hay entre funciones abiertas, quasi monotonas, monotonas, pseudo monotonas, además relaciona funciones confluentes con unicoherencia y heriditariamente unicoherente. Ahora, es natural introducir el concepto de función ω-confluente de la siguiente manera: sean X e Y espacios topológicos y $f: (X,\tau)\rightarrow (Y,\tau\omega)$ una función continua, es llamada función ω-confluente si para cada ω-continuo K de Y y cada componente C de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(C)=K$. En [3], se realiza un estudio sobre las relaciones que hay entre las siguientes clases de funciones: confluentes, quasiconfluentes, ω-confluentes y quasi-ω-confluentes (una función continua $f: X\rightarrow Y$ es llamada una función quasi confluente si para cada continuo K de Y y cada quasicomponente QC de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(QC)=K$ y una función continua $f: X\rightarrow Y$ es llamada una función quasi-ω-confluente si para cada ω-continuo K de Y y cada quasicomponente QC de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(QC)=K$.

En [3] se estudia la relación que hay entre las funciones confluentes, quasiconfluentes, ω-confluentes y quasi-ω-confluentes, por mencionar algunos resultados principales de este artículo: cada función ω-confluente es quasi-ω-confluente y cada función $f: X\rightarrow Y$ quasi-ω-confluente de un espacio de Hausdorff compacto X sobre un espacio de Hausdorff Y es ω-confluente.

Con relación a los artículos [2]-[7], nos interesa analizar las relaciones que hay entre las siguientes clases de funciones: confluentes, débilmente confluentes, hereditariamente débilmente confluente, débilmente semi confluentes, localmente confluentes, localmente débilmente confluentes, quasi confluentes, hereditariamente confluente, pseudo confluente, semi confluentes, ω-confluentes, débilmente ω-confluentes, hereditariamente débilmente ω-confluente, débilmente semi ω-confluentes, localmente ω-confluentes, localmente débilmente ω-confluentes, quasi ω-confluentes, hereditariamente ω-confluente, pseudo ω-confluentes y semi ω-confluentes, por lo cual se considera que esta investigación cubre los requisitos de un protocolo para maestría.

OBJETIVOS Y METAS

- Obtener relaciones que hay entre las siguientes clases de funciones: confluentes, débilmente confluentes, hereditariamente débilmente confluente, débilmente semi confluentes, localmente confluentes, localmente débilmente confluentes, quasi confluentes, hereditariamente confluente, pseudo confluente, semi confluentes, ω-confluentes, débilmente ω-confluentes, hereditariamente débilmente ω-confluente, débilmente semi ω-confluentes, localmente ω-confluentes, localmente débilmente ω-confluentes, quasi ω-confluentes, hereditariamente ω-confluente, pseudo ω-confluentes y semi ω-confluentes.

- Participar como ponente en congresos nacionales e internacionales.
- Enviar un artículo que contemple los resultados de esta investigación a una revista indizada con arbitraje estricto.

METODOLOGÍA

Revisar de forma exhaustiva la bibliografía existente para generar nuevas ideas y estrategias para realizar la investigación.
Reuniones semanales para discutir los avances obtenidos y proponer nuevas estrategias de investigación.
Captura de avances obtenidos en un procesador de textos científicos.
Participar semanalmente en el Seminario de Hiperespacios de Continuos de la Facultad de Ciencias de la UAEMéx.
Difundir anualmente los resultados y avances parciales obtenidos en la investigación en congresos nacionales e internacionales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] J. J. Charatonik, "Confluent mappings and unicoherence of continua", *Fund. Math.* 56 (1964), 213-220.

[2] A. Qahis and M. S. M. Noorani, "On ω-confluent mappings," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 5, 14 (2011), 691–703.

[3] A. Qahis and M. S. M. Noorani, "*On Quasi-ω-Confluent Mappings*", Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 270704, 9 p. (2011).

[4] A. Qahis and M. S. M. Noorani, "More on quasi-Confluent and quasi-ω-Confluent Mappings", Journal of Advanced Studies in Topology, Vol. 3, No. 3 (2012), 69-75.

[5] A. Qahis and M. S. M. Noorani, "A Strong form of confluent mappings", Quest. Answers Gen. Topology, 30, No. 2 (2012), 139-152.

[6] A. Qahis and M. S. M. Noorani, "On locally path-confluent and locally quasi-confluent mappings", Quest. Answers Gen. Topology, 31, No. 1, (2013), 29-42.

[7] A. Qahis and M. S. M. Noorani, "Strongly path-confluent mappings", Appl. Gen. Topology, 14, no. 1 (2013), 85-95.

COMITÉ DE TUTORES

Dr. Fernando Orozco Zitli
Tutor Académico

Dr. Félix Capulín Pérez
Tutor Académico

Dr. José Guadalupe Anaya Ortega
Tutor Adjunto

2. Artículo

2.1. A note concerning ω-continua sets and ω-confluent maps

Correo de Outlook

Buscar en Correo y Conta...

Nuevo | Responder | Eliminar Archivar ••• Deshacer

Carpetas

Bandeja de e 2553

Correo no desea 12

Borradores 31

Elementos enviad 3

Elementos eliminado

Archivo

Conversation History

Programado

paper IJMA8644

HP

Hikari | Int. Publishers<minchev@m-hikari.com>

sáb 04/08, 12:05 p.m.

Tú

Responder

Respondiste el 06/08/2018 11:04 a.m..

Dr. Emil Minchev
Editorial office, Hikari Ltd
http://www.m-hikari.com

Dear Professor Sierra-Cuevas,

I am happy to inform you that after a positive referee report your paper:

"A note concerning \omega-continua sets and \omega-confluent maps" (authors: Ana C. Sierra-Cuevas, Felix Capulin and Fernando Orozco-Zitli)

has been accepted for publication in International Journal of Mathematical Analysis.

Please send me by e-mail the final Latex file and PDF of your paper as soon as possible.

Your paper will be published within one week after receiving of the final files.

Yours sincerely,

Emil Minchev

Editorial office of
International Journal of Mathematical Analysis

INSTRUCTION TO AUTHORS: The manuscript should be prepared using LaTeX or Word processing system, basic font Roman 12pt size. The papers should be in English and typed in frames 14x21.6 cm (margins 3.5 cm on left and right and 4 cm on top and bottom) on A4-format white paper or American format paper. On the first page leave 7 cm space on the top for the journal's headings. The papers must have abstract and keywords. The references should be in alphabetic order and must be organized as follows:
[1] D.H. Ackley, G.E. Hinton and T.J. Sejnowski, A learning algorithm for Boltzmann machine, Cognitive Science, 9 (1985), 147-169.
[2] F.L. Crane, H. Low, P. Navas, I.L. Sun, Control of cell growth by plasma membrane NADH oxidation, Pure and Applied Chemical Sciences, 1 (2013), 31-42. http://dx.doi.org/10.12988/pacs.2013.3310
[3] D.O. Hebb, The Organization of Behavior, Wiley, New York, 1949.

International Journal of Mathematical Analysis
Vol. x, 20xx, no. xx, xxx - xxx
HIKARI Ltd, www.m-hikari.com
http://dx.doi.org/10.12988/

A note concerning ω-continua sets and ω-confluent maps

Ana C. Sierra-Cuevas[1], **Felix Capulin**[1] **and Fernando Orozco-Zitli**[1]

[1]Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México
Instituto Literario No. 100, Centro 50000
Toluca, Edo. de México, México

Abstract

In [1] is introduced, for any topological space (X, τ) a new topology called τ_ω. In [1] is proved that τ_ω is finer than τ. In [4] the authors defined ω-continuum set and ω-confluent map in order to extend the concepts of continuum and confluent map respectively. The purpose of this note is to prove that the ω-continua are singletons sets and as a consequence of this, the notion of ω-confluent is trivial. Therefore, ω-continua sets and ω-confluent maps add nothing to the general topology. So we will correct mistakes and inconsistencies around of ω-continua sets and ω-confluent maps.

Mathematics Subject Classification: 54C10, 54F65

Keywords: ω-continuum set, ω-confluent map

1 Introduction

The classes of ω-closed subset and ω-open subset of a topological space (X, τ) were defined by H. Hdeib in [3] in order to introduce ω-closed maps and for giving a new topology on a topological space. Let (X, τ) be a topological space and let A be a subset of X. A point $x \in X$ is called a *condensation point* of

A if for each $U \in \tau$ with $x \in U$, the set $A \cap U$ is uncountable. A subset of X is called *ω-closed* if it contains all of its condensation points. The complement of an ω-closed subset is called *ω-open*. H. Z. Hdeib observes in [3, p. 67] that a subset W of X is an ω-open set if and only if for each $x \in W$, there exists an open set U of X such that $x \in U$ and $U - W$ is a countable set. As a consequence, a subset W of X is an ω-open set if and only if for each $x \in W$, there exists an open set U of X and a countable set C such that $x \in U - C \subseteq W$, (see also [1, Corollary 2.3, p. 170]). In [1, Proposition 2.5, p. 170] the authors also proved that the family of all ω-open sets in a topological space (X, τ) denoted by τ_ω defines a topology on X finer than τ. M. Noorani and A. Qahis in [4, p. 692] extend the concept of continuum for topological spaces as follows: ([4, Definition 2.3, p. 692]) A topological space (X, τ) is said to be an *ω-continuum* if (X, τ_ω) is compact and connected. In the same paper the authors introduced the concept of ω-confluent map in order to extend the notion of confluent map given by J. J. Charatonik in [2]. Let X and Y be topological spaces, an onto map $f : X \longrightarrow Y$ is called *ω-confluent* provided that for any ω-continuum K of Y, each component C of $f^{-1}(K)$ fulfills that $f(C) = K$. In Theorem 3.2 of [4] is proved that composition of ω-confluent maps is a ω-confluent map too. In order to prove it, they used Lemma 3.1 in [4]. However this result is wrong.

The main purposes of this note is to correct mistakes and inconsistences around of these concepts. First of all, we will see that every ω-continuum is just a singleton set. In other words, ω-continua are degenerated sets. So, this kind of sets are not important. After that we will prove that Lemma 3.1 in [4] is wrong. Finally we will see that every map between topological spaces are ω-confluent and the notion of ω-confluent is trivial. Thus ω-confluent map definition adds nothing to the general topology. So, every theorem in [4] concerning ω-confluent maps is trivial.

2 ω-continua sets and ω-confluent maps. Main corrections

In order to prove that ω-continua are singleton sets we will use the following two results.

Proposition 2.1 *[1, Corollary 3.4, p. 173]. Let A be a countable subset of a topological space (X, τ). Then $(\tau|_A)_\omega = \tau_\omega|_A$ is the discrete topology.*

Proposition 2.2 *[1, Corollary 4.4, p. 177]. Let (X, τ) be a topological space. Then (X, τ_ω) is compact if and only if X is a finite set.*

Now we are ready to prove the following characterization of the ω-continuum.

Theorem 2.3 *Let A be a subset of a topological space (X, τ). Then A is an ω-continuum if and only if $A = \{x\}$.*

Proof: Let $A \subseteq X$ such that A is ω-continuum. Then $(A, \tau_\omega|_A)$ is connected and compact. So, by Proposition 2.2, A is a finite set. Thus, by Proposition 2.1 $(\tau|_A)_\omega$ is the discrete topology. Since A is a connected set, then A is a singleton set. The converse holds always for every singleton set and each topological space. ■

Therefore, [4, Theorem 2.4, (3), p. 692] is trivial.

A. Qahis and M. Noorani use the following result in order to prove Theorem 3.2 in [4].

[4, Lemma 3.1, p. 695] Let $f : X \longrightarrow Y$ be an onto mapping and $g : Y \longrightarrow Z$ be any mapping, such that f is ω-confluent. If $h = g \circ f$, then for each ω-continuum K in Z, and for each component C of $h^{-1}(K)$, $f(C)$ is a component of $g^{-1}(K)$.

Now, we will prove that this lemma is wrong as the following example shows:

Example 2.4 *Let $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ and $Z = \{0\}$ be sets. We consider the topological spaces (X, τ_{dis}), (Y, τ) and (Z, τ_{ind}), where τ_{dis} is the discrete topology, $\tau = \{Y\} \cup \{\mathcal{U} \subseteq Y : 3 \notin \mathcal{U}\}$ and τ_{ind} is the indiscrete topology. Let $f : X \longrightarrow Y$ be a map defined by $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$; and let $g : Y \longrightarrow Z$ be a map defined by $g(x) = 0$. So, the composition map $h = g \circ f : X \longrightarrow Z$ is given by $h(x) = 0$ for each $x \in X$. Notice that the maps f and g fulfill the hypothesis of Lemma 3.1 in [4]. It is clear that the space Y is connected, $K = \{0\}$ is the only ω-continuum of Z, and $C_1 = \{a\}$, $C_2 = \{b\}$ and $C_3 = \{c\}$ are all the components of $h^{-1}(K)$. Thus, $f(C_1) = \{1\}$, $f(C_2) = \{2\}$ y $f(C_3) = \{3\}$. In any case we have that $f(C_i)$, with $i = 1, 2, 3$ is not a component of $g^{-1}(K) = \{1, 2, 3\}$.*

Finally we will show that whether X and Y are topological spaces, then the family of the ω-confluent maps between X and Y is justly the family of onto maps between X and Y. Therefore the ω-confluent map definition adds nothing to the topology. The ω-confluent map concept is trivial.

Theorem 2.5 *Let X and Y be topological spaces. If $f : X \longrightarrow Y$ is an onto map, then f is an ω-confluent map.*

Proof: Let K be any ω-continuum in Y. By Theorem 2.3, $K = \{x\}$ and if C be any component of $f^{-1}(K)$, then $f(C) = K$. Thus f is an ω-confluent map. ■

Since the notion of ω-confluent map is trivial, Proposition 2.8, Theorem 2.13, Theorem 2.16, Teorema 3.2, Theorem 3.3, Theorem 3.5, Theorem 3.7, Theorem 4.4, Theorem 4.5, Theorem 4.6, Theorem 5.4, Theorem 5.6 in [4] are trivial and Example 3.4.1, Example 5.5.1 are wrong by Theorem 2.5.

References

[1] K. Al-Zoubi and B. Al-Nashef, *The topology of ω-open subsets*, Al-Manarah Journal, 9 (2), (2003), 169-179.

[2] J. J. Charatonik, Confluent Mappings and Unicoherence of Continua. Fund. Math., LVI (1964), 213-220.

[3] H. Z. Hdeib, *ω-closed function*, Rev. Colomb. Math., 16 (1-2) (1982), 65-78.

[4] A. Qahis and M. Noorani, *On ω-confluent functions*, Int. Journal of Math. Analysis, 5 (14), (2011), 691-703.

Received: Month xx, 20xx

Conclusiones

Introdujimos diferentes clases de funciones entre espacios topológicos en el contexto de la topología τ_ω dado que el objetivo de este trabajo de investigación fue encontrar las relaciones existentes entre las siguientes clases de funciones: confluentes, semi-confluentes, débilmente confluentes, ω-confluentes, semi ω-confluentes y débilmente ω-confluentes. Por lo que seguimos principalmente dos líneas de investigación:

1. Encontrar la caracterización de los conjuntos ω-continuos considerando la siguiente definición:
   Sean (X, τ_ω) un espacio topológico y A un subconjunto de X, diremos que A es ω-continuo si A es ω-conexo y ω-compacto como subespacio de X.

2. Siguiendo la idea del concepto de función semi-confluente y débilmente confluente definir las funciones semi ω-confluentes y dédilmente ω-confluentes, respectivamente. Y además encontrar las relaciones entre las siguientes clases de funciones: confluentes, semi-confluentes, débilmente confluentes, ω-confluentes, semi ω-confluentes y débilmente ω-confluentes considerando las siguientes definiciones:
   Sean (X, τ) y (Y, σ) dos espacios topológicos y $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función continua y suprayectiva. Decimos que:
   a) f es llamada **confluente** si para cada subcontinuo K de Y y para cada componente C de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(C) = K$.
   b) f es llamada **semi-confluente** si para cada subcontinuo K de Y y para cada dos componentes C_1 y C_2 de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(C_1) \subseteq f(C_2)$ o $f(C_2) \subseteq f(C_1)$.
   c) f es llamada **débilmente confluente** si para cada ω-continuo K de Y existe una componente C de $f^{-1}(K)$ tal que $f(C) = K$.
   d) f es llamada **ω-confluente** si para cada ω-continuo K de Y y cada componente C de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(C) = K$.

Referente a la primer línea de investigación se obtuvo el siguiente resultado el cual aparece en el artículo enviado para su publicación en una revista internacional especializada arbitrada e indexada:

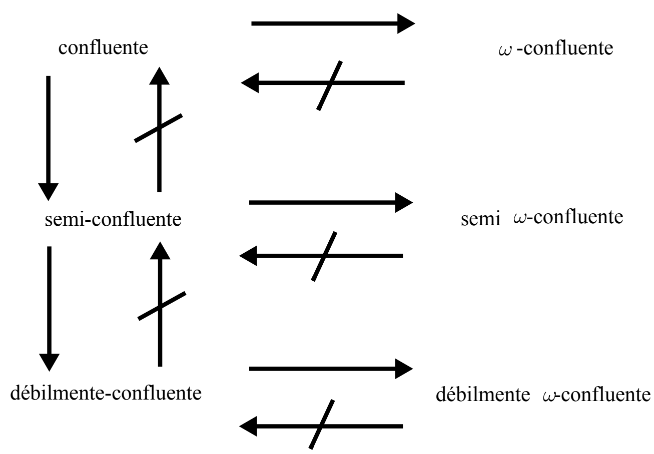
Teorema 1. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico (X, τ). Entonces A es un ω-continuo si y sólo si $A = \{x\}$.*

Referente a la segunda línea de investigación se definieron las funciones semi ω-confluentes y débilmente ω-confluentes como sigue:

1. f es llamada **semi ω-confluente** si para cada ω-continuo K de Y y para cada dos componentes C_1 y C_2 de $f^{-1}(K)$, se tiene que $f(C_1) \subseteq f(C_2)$ o $f(C_2) \subseteq f(C_1)$.

2. f es llamada **débilmente ω-confluente** si para cada ω-continuo K de Y existe una componente C de $f^{-1}(K)$, tal que $f(C) = K$.

Y se obtuvieron las relaciones entre estas clases de funciones las cuales se resumen en el siguiente diagrama:



Además se obtuvieron las siguientes equivalencias entre las clases de funciones: ω-confluentes, semi ω-confluentes y débilmente ω-confluentes dado que los ω-continuos de un espacio topológico (X, τ) son los conjuntos unipuntuales. Dichas equivalencias se resumen a continuación:

$$\omega\text{-confluente} \iff \text{semi } \omega\text{-confluente} \iff \text{débilmente } \omega\text{-confluente}$$

También como resultado de este estudio se obtuvo un artículo.

Además de esta investigación se introdujo otra topología denotada por τ_κ y se trabajo con los espacios topológicos llamados espacios puerta para definir una función κ-confluente siguiendo la misma idea del concepto de función confluente y se obtuvieron algunos resultados al respecto y una conjetura. También se definieron otras clases de funciones usando la topología τ_ω y se obtuvieron algunos resultados para estas otras clases de funciones.

Productos

Como productos de este trabajo de investigación se obtuvieron los siguientes:

- Se expuso un cartel en el 50 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.
- Se dirigio el trabajo de Tesis titulado "Un acercamiento a los conjuntos ω-abiertos"del Mat. Edgar Segundo Castillo.
- Se envío a una revista internacional indexada y con arbitraje un artículo titulado "A note concerning ω-continua sets and ω-confluent maps".

Conjuntos ω - abiertos

Ana Cecilia Sierra Cuevas - Fernando Orozco Zitli

Universidad Autonóma del Estado de México
Facultad de Ciencias

Introducción

Hoy en día en matemáticas los conceptos topológicos están presentes en todas las áreas, como la definición de espacio topológico, conjunto abierto y conjunto cerrado; así como el análisis de conceptos fundamentales como son la compacidad y la conexidad. En este trabajo pretendemos introducir al lector en el mundo de los conjuntos ω - abiertos, en el espacio topológico generado por estos y en sus relaciones elementales. La clase de subconjuntos ω-cerrados de un espacio topológico (X,τ) fue definido por H. Hdeib[1] para introducir las funciones ω-cerradas, al complemento de un conjunto ω-cerrado lo llamo ω-abierto. Así la colección τ_ω que contiene a todos los subconjuntos ω-abiertos de X forma una topología sobre X más fina que τ. En este trabajo, en la sección 1 definimos los conjuntos ω-abiertos y damos algunas relaciones entre estos conjuntos y los conjuntos conocidos como los casi abiertos. En la sección 2 estudiamos algunas relaciones entre los espacios (X,τ) y (X,τ_ω). En la sección 3 damos algunas propiedades para la compacidad del espacio (X,τ_ω). Si (X,τ) es un espacio dado, entonces $int_\tau(A)$ $(cl_\tau(A))$, $int_{\tau_\omega}(A)$ $(cl_{\tau_\omega}(A))$ denotan el interior de A (la cerradura de A) en (X,τ) y (X,τ_ω) en respectivamente.

Conjuntos ω - abiertos

- Sea (X,τ) un espacio dado y sea $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ es un **punto de condensación** de A, si para cada $U \in \tau$ tal que $x \in U$, se tiene que $A \cap U$ es no numerable.
- Consideremos al espacio de los números reales con la topología usual $(\mathbb{R},\tau_u)$. Entonces

a) Si $A=(0,1)$, entonces cualquier elemento de $[0,1]$ es un punto de condensación de A.

b) El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no tiene puntos de condensación.

- Un subconjunto H de un espacio (X,τ) es llamado **ω-cerrado** si H contiene a todos sus puntos de condensación. El complemento de un ω-cerrado es llamado **ω-abierto**. La familia de todos los subconjuntos de $X\omega$-abiertos es denotada por τ_ω.
- Sean (X,τ) un espacio topológico y W un subconjunto de X. Entonces W es ω-abierto si y sólo si para cada $x \in W$, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U-W$ es a lo más numerable. Así $\tau_\omega = \{W \subseteq X : \forall x \in W,\ \exists U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U-W$ es a lo más numerable$\}$
- Sean (X,τ) un espacio topológico y W un subconjunto de X. Entonces W es ω-abierto si y sólo si para cada $x \in W$, existe $U \in \tau$ y C un conjunto a lo más numerable tal que $x \in U - C \subseteq W$.
- Si X es un conjunto a lo más numerable, entonces cada subconjunto W en el espacio (X,τ) es ω-abierto.
- Para cualquier espacio (X,τ) tenemos que τ_ω es una topología sobre X con $\tau \subseteq \tau_\omega$.
- Consideremos $(\mathbb{R},\tau_u)$. Entonces el conjunto $W = \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ es ω-abierto, pero W no es abierto.
- Sea A un subconjunto de un espacio (X,τ), entonces $(\tau|_A)_\omega = \tau_\omega|_A$.
- Un espacio (X,τ) es un **P-espacio** si la intersección a lo más numerable de conjuntos abiertos es abierta.
- Si (X,τ) es un P-espacio entonces $\tau = \tau_\omega$.
- Sea A un subconjunto de un espacio (X,τ), entonces:

a) A es un conjunto **semi-abierto** si existe un conjunto abierto U tal que $U \subseteq A \subseteq cl_\tau(U)$.

b) A es un conjunto **preabierto** si $A \subseteq int_\tau(cl_\tau(U))$

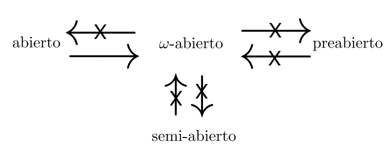
- Consideremos el espacio $(\mathbb{R},\tau_u)$

a) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ es ω-abierto pero no es semi-abierto.

b) $[0,1)$ es semi-abierto pero no es ω-abierto.

c) $\mathbb{Q}$ es preabierto pero no es ω-abierto.

- Sea $X=\{a,b\}$ y $\tau=\{\emptyset,\{a\},X\}$, entonces $W=\{b\}$ es un conjunto ω-abierto de (X,τ) pero W no es preabierto.
- El siguiente diagrama resume las relaciones entre estos tipos de conjuntos:



Los espacios (X,τ) y (X,τ_ω)

- Un espacio (X,τ) es llamado **localmente a lo más numerable** si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta a lo más numerable.
- Si X es a lo más numerable, entonces (X,τ) es localmente a lo más numerable.
- Si X es discreto no numerable, entonces X es localmente a lo más numerable.
- Si (X,τ) es un espacio localmente a lo más numerable, entonces τ_ω es la topología discreta en X.
- Si (X,τ) es un espacio a lo más numerable entonces τ_ω es la topología discreta.
- Sea A un subespacio a lo más numerable de un espacio (X,τ), entonces $(A,\tau_\omega|_A)$ es un espacio discreto.
- Para cualquier espacio (X,τ) tenemos que $\tau_\omega = \tau_{\omega\omega}$.
- Dado cualquier espacio (X,τ), la topología τ_ω es más fina que la topología co-numerable (τ_{conum}) sobre X.
- El espacio (X,τ_ω) es un espacio T_1 para cualquier espacio (X,τ) dado.
- Si (X,τ) es un espacio T_2, entonces (X,τ_ω) es un espacio T_2.
- El inverso de la proposición anterior es falsa. Consideremos el espacio de los naturales con la topología cofinita $(\mathbb{N},\tau_{cof})$, Entonces:

a) $(\mathbb{N},\tau_\omega)$ es un espacio discreto y es un espacio T_2.

b) $(\mathbb{N},\tau)$ no es un espacio T_2.

- (X,τ) se llama **espacio anti-localmente a lo más numerable** si cada conjunto abierto no vacío es un conjunto no numerable.
- Sea (X,τ) un espacio anti-localmente a lo más numerable, entonces

a) Si $W \in \tau_\omega$ entonces $cl_\tau(W) = cl_{\tau_\omega}(W)$.

a) La hipótesis de ser anti-localmente a lo más numerable es necesaria.

b) El supuesto de que G es ω-abierto es esencial.

- Sea (X,τ) anti-localmente a lo más numerable. Si H es τ-cerrado entonces $int_\tau(H) = int_{\tau_\omega}(H)$
- Para un espacio (X,τ) dado escribimos $SO(X,\tau)$ (respectivamente $PO(X,\tau)$) para denotar la familia de todos los subconjuntos semi-abiertos (respect. pre-abiertos) de (X,τ).
- Sea (X,τ) un espacio anti-localmente a lo más numerable, entonces:

a) $SO(X,\tau) \subseteq SO(X,\tau_\omega)$.

b) $PO(X,\tau_\omega) \subseteq PO(X,\tau)$.

- $(\mathbb{R},\tau_u)$ es anti-localmente a lo más numerable.

Propiedades para la compacidad del espacio (X,τ_ω)

Una consecuencia inmediata de que $\tau \subseteq \tau_\omega$ es la siguiente:

- Sea (X,τ) un espacio tal que (X,τ_ω) es compacto (respectivamente compacto a lo más numerable). Entonces (X,τ) es compacto (respectivamente compacto a lo más numerable).
- El espacio $(\mathbb{N},\tau_{cof})$ es compacto y por lo tanto compacto a lo más numerable, pero como $(\mathbb{N},\tau_\omega)$ es un espacio discreto, entonces no es compacto ni compacto a lo más numerable.
- Sea (X,τ) un espacio tal que (X,τ_ω) es compacto a lo más numerable. Entonces X es un conjunto finito.
- Si (X,τ) es un espacio, entonces (X,τ_ω) es compacto si y sólo si X es finito.
- Un espacio (X,τ) es Lindelöf si sólo si (X,τ_ω) es Lindelöf.
- Un espacio (X,τ) es hereditariamente Lindelöf si sólo si (X,τ_ω) es hereditariamente Lindelöf.
- Si (X,τ) es un espacio tal que (X,τ_ω) es débilmente Lindelöf, entonces (X,τ) es débilmente Lindelöf.
- Sea (X,τ) un espacio anti-localmente a lo más numerable. Si (X,τ) es débilmente Lindelöf, entonces (X,τ_ω) también lo es.

[1] H. Hdeib, ω-closed mappings. Revista Colomb, De Matem. 16(1982) 65-78

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CONACYT

IMAS UNAM

La Sociedad Matemática Mexicana

otorga el presente

RECONOCIMIENTO

A: **Ana Cecilia Sierra Cuevas**

Por la presentación del Cartel:
Conjuntos ?-abiertos
realizado dentro de las Actividades del 50 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, llevado a cabo del 22 al 27 de Octubre de 2017, en CU, México.

Octubre de 2017
Ciudad de México, México.

Dr. Gelasio Salazar Anaya
Presidente de la SMM

50° CONGRESO NACIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

L - C - 764 - 1152

Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias
Licenciatura en Matemáticas

UN ACERCAMIENTO A LOS CONJUNTOS $\omega - ABIERTOS$

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
EDGAR SEGUNDO CASTILLO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

CODIRECTORA DE TESIS:
MAT. ANA CECILIA SIERRA CUEVAS

UAEM

2018

Bibliografía

[1] K. Al-Zoubi and B. Al-Nashef, *The topology of ω-open subsets*, Al-Manarah Journal, 9 (2), (2003), 169-179.

[2] J. J. Charatonik, Confluent Mappings and Unicoherence of Continua. Fund. Math., LVI (1964), 213-220.

[3] H. Z. Hdeib, *ω-closed function*, Rev. Colomb. Math., 16 (1-2) (1982), 65-78.

[4] A. Qahis and M. Noorani, *On ω-confluent functions*, Int. Journal of Math. Analysis, 5 (14), (2011), 691-703.

[5] A. Qahis and M. S. M. Noorani, *On quasi-ω-confluent mappings*, Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 270704, (2011), 9 p.

[6] A. Qahis and M. S. M. Noorani, *More on quasi-confluent and quasi-ω-confluent mappings*, Journal of Advanced Studies in Topology, Vol. 3, No. 3 (2012), 69-75.

[7] A. Qahis and M. S. M. Noorani, *A strong form of confluent mappings*, Quest. Answers Gen. Topology, 30, No. 2 (2012), 139-152.

[8] A. Qahis and M. S. M. Noorani, *On locally path-confluent and locally quasi-confluent mappings*, Quest. Answers Gen. Topology, 31, No. 1, (2013), 29-42.

[9] A. Qahis and M. S. M. Noorani, *Strongly path-confluent mappings*, Appl. Gen. Topology, 14, no. 1 (2013), 85-95.