Portada y contraportada: Felipe Camacho García
Obsesión, (Detalle), 2015
Metamorfosis, 2015

La presente obra recopila investigaciones cuyos resultados enriquecen y brindan aportaciones teórico-prácticas al campo del conocimiento en materia agrícola en áreas desde ciencias básicas hasta ciencias económico-administrativas. El cúmulo de ellas son resultado del trabajo de compilación realizado por catedráticos e investigadores de la Universidad Autónoma Chapingo a través del Centro de Investigación en Economía y Matemáticas Aplicadas (CIEMA) de la División de Ciencias Económico Administrativas (DICEA).

La trascendencia de los resultados se basa en los diferentes criterios metodológicos utilizados, las diversas áreas de conocimiento, en la línea de Ciencias Sociales y Humanidades; y los enfoques multidisciplinarios. Asimismo, lo es la participación de instituciones con prestigio académico y de investigación como el Instituto Politécnico Nacional, la Universidad Autónoma del estado de México, la Universidad Nacional Autónoma de México, entre otras, que enriquecen el contenido

Docencia, Educación y Sociedad

Docencia, Educación y Sociedad

Daniel Sepúlveda Jiménez | Francisco Pérez Soto
Raquel Salazar Moreno | Esther Figueroa Hernández
Lucila Godínez Montoya
Compilación

Docencia, Educación
y
Sociedad

Daniel Sepúlveda Jiménez
Francisco Pérez Soto
Raquel Salazar Moreno
Esther Figueroa Hernández
Lucila Godínez Montoya
(Compilación)

Docencia, Educación y Sociedad

ASOCIACIÓN MEXICANA DE INVESTIGACIÓN INTERDISCIPLINARIA A.C.

**ASOCIACIÓN
MEXICANA DE
INVESTIGACIÓN
INTERDISCIPLINARIA A.C.**

Primera edición en español 2019
ISBN: 978-607-98112-7-3

Editado en México

ÍNDICE

Docencia, Educación y Sociedad

Presentación

El desarrollo agrícola es un aspecto fundamental y prioritario en la agenda pública de cualquier gobierno que busque un crecimiento regional en zonas rurales. Las investigaciones en ciencia básica y aplicada que se desarrollan bajo esta línea temática brindan elementos y resultados valiosos para lograr un crecimiento, desarrollo y la sustentabilidad del campo mexicano. Preocupados por estos aspectos, catedráticos e investigadores de la Universidad Autónoma Chapingo a través del Centro de Investigación en Economía y Matemáticas Aplicadas (CIEMA) de la División de Ciencias Económico Administrativas (DICEA), han desarrollado el presente libro que expone investigaciones cuyos resultados enriquecen y brindan aportaciones teórico-prácticas al campo del conocimiento en materia agrícola.

Los editores de esta obra agradecemos ampliamente a todos los investigadores participantes así como a las instituciones que apoyaron el desarrollo de la misma. De forma específica expresamos nuestro agradecimiento a la Rectoría de la Universidad Autónoma Chapingo, a sus direcciones Generales, particularmente a la Dirección General de Investigación y Posgrado así como al Departamento de Preparatoria Agrícola. Igualmente manifestamos nuestro agradecimiento al Colegio de Posgraduados, a la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM), al Instituto Politécnico Nacional (IPN) y a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

El presente volumen contiene 8 capítulos arbitrados que se ocupan de asuntos sobre la Biodiversidad y Recursos Naturales.

El presente volumen contiene 8 capítulos arbitrados que se ocupan de asuntos sobre Educación, Docencia y Sociedad

Daniel Sepúlveda Jiménez[1]; Orsohe Ramírez Abarca[2]; Daniel Eduardo Sepúlveda Robles[3]*

CONTROL DE CAOS EN MODELOS ECONÓMICOS NO LINEALES EN TIEMPO DISCRETO CON EL MÉTODO OGY

RESUMEN

Los modelos económicos no lineales con frecuencia presentan procesos complejos como bifurcaciones y caos, en este trabajo se analiza el control del caos en sistemas económicos que exhiben una dinámica caótica. Para dicho control se aplica el método de OGY, en este trabajo se usa este procedimiento para controlar el caos en dos modelos de crecimiento económico del tipo Solow. Para mostrar el control de este comportamiento complejo se elaboran las gráficas de bifurcación correspondientes para distintos valores de los parámetros involucrados en los modelos económicos analizados, además de las gráficas de las trayectorias estabilizadas en las órbitas elegidas de periodo uno y de periodo dos.

Palabras clave: *Modelos de crecimiento, economía caótica, control de caos, método de OGY, caos determinista, modelo de Solow discreto.*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad la teoría económica ha dejado claro que, si uno desea ser participante activo en su desarrollo, no hay otra alternativa que contar con un alto grado de

[1] Centro de Investigación en Economía y Matemáticas Aplicadas de la UACh. sepjim700@yahoo.com.mx; [2*]Universidad Autónoma del Estado de México. Centro Universitario UAEM Texcoco. Av. Jardín Zumpango s/n Fraccionamiento el Tejocote, Texcoco, Estado de México. orsohe@yahoo.com; [3]Liceo Universidad Pedro de Gante, hbky2d@yahoo.com.mx

profesionalismo matemático (Debreu; 1991). De lo contrario se corre el riesgo de quedar al margen de la disciplina. Entre los campos más afectados por la introducción de nuevo conocimiento matemático sobresalen los que hacen acopio de la teoría de sistemas dinámicos (TSD). El reconocimiento de que los mecanismos de mercado pueden ser inherentemente inestables en su dinámica y no sólo deterministas y estables, como era la visión dominante hace unas décadas, ha permitido que se abran nuevas líneas de investigación en economía, las cuales involucran el uso de temas avanzados de la TSD. Se han estudiado nuevos modelos macroeconómicos no lineales que utilizan los últimos avances de las teorías topológica y ergódica de los sistemas dinámicos (Boldrin y Woodford, 1992). También, la aceptación de que las trayectorias de las variables de control pueden experimentar comportamientos dinámicos complejos en la vecindad de los puntos críticos ha demandado el uso de las teorías de estabilidad estructural y de catástrofes en los nuevos modelos de crecimiento económico (Grandmont, 1992; Varian, 1991).

Diversos especialistas concluyen que hay tres grandes etapas en el desarrollo de la matemática en economía (Arrow e Intriligator; 1991; Weintraub; 2002). La primera, que dio forma a la teoría microeconómica entre 1838 y 1947, la cual estuvo basada en la adopción de los métodos de la mecánica clásica y en el uso del cálculo de variable real (Mirowsky; 1989). La segunda, que incluye un periodo corto después de la segunda posguerra (1948-1960), se caracterizó por aplicar las nociones elementales de la teoría de juegos, los modelos lineales y la teoría de conjuntos a diversas áreas de la macroeconomía, microeconomía y crecimiento económico. Y la última, que se extiende hasta nuestros días, conocida como la etapa de integración por aplicar combinadamente la tecnología matemática de las dos etapas anteriores, pero con una profundidad mayor, en casi todas las ramas de la economía (Arrow e Intriligator, 1991).

La cualidad integradora de la tercera etapa se expresa en la decisión de los economistas en el uso del análisis dinámico (Weintraub; 1991). Existen al menos dos razones para considerar la TSD como la principal responsable de la renovada expansión de la matemática en toda la disciplina. La primera es que la amplitud de conocimiento matemático requerido por el análisis de los sistemas dinámicos no tiene comparación en el pasado reciente de la teoría económica. A diferencia de las fases iniciales del desarrollo de los modelos económicos dinámicos, en las que se requería un dominio moderado de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las técnicas de optimización deterministas, la tercera etapa exige no sólo una familiarización más profunda con estos temas, sino también, de manera fundamental, con los sistemas dinámicos no lineales. Y es que los nuevos modelos de ciclos endógenos son esencialmente no lineales y su dominio profundo requiere el uso de topología, teoría de grupos, análisis funcional, teoría de la medida, estabilidad estructural, optimización estocástica y juegos diferenciales que, hasta hace poco, eran relativamente extraños a la disciplina (Boldrin y Woodford; 1992, Ramírez J.C y Juárez D; 2009).

La principal propiedad de la dinámica caótica es su sensibilidad a las condiciones iniciales, esto significa que trayectorias inicialmente vecinas se separan una de la otra de manera exponencial en el curso del tiempo. Esta característica hace que el caos sea indeseable, ya que la sensibilidad a las condiciones iniciales de los sistemas caóticos reduce su previsibilidad en escalas de tiempo largas. Por otro lado, la capacidad de la dinámica caótica para amplificar pequeñas perturbaciones mejora su utilidad para alcanzar estados específicos deseados con muy alta flexibilidad y bajo coste energético.

METODOLOGÍA

Los modelos económicos no lineales con frecuencia presentan fenómenos complejos como bifurcaciones y caos, el caos es a veces indeseable y en muchos casos se quiere evitar y eliminar. En esta investigación se usa el método OGY (E. Ott, C. Gregory y J. A. York; Controlling chaos, 1990) para el control de caos en modelos económicos no lineales con tiempo discreto. Como ejemplo del control de caos clásico se aplica el método OGY al modelo de crecimiento económico de Solow. El contenido de la investigación es como sigue: Se describe brevemente el Método OGY para el control de caos, se muestra en forma concisa el modelo de crecimiento económico de Solow, se ha mostrado que este modelo muestra una dinámica compleja con aparición de caos. Se continúa con la aplicación del método OGY para el control de caos en este modelo para dos casos, se presentan los resultados obtenidos y se discuten dichos resultados, finalmente se dan las conclusiones respectivas.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO OGY

Dentro del estudio de la dinámica no lineal se encuentran los sistemas dinámicos caóticos y su interés se centra en el análisis de los procesos cuya evolución en el tiempo es irregular e impredecible, a pesar de estar regidos por una ley de movimiento determinista que describe la evolución temporal del sistema.

Un atractor de un sistema dinámico es un subconjunto del espacio de fases que es invariante bajo la acción del sistema, es decir, las trayectorias o soluciones de un sistema dinámico que parten de condiciones iniciales dentro del atractor permanecerán confinadas dentro de él. Los atractores son entonces equilibrios dinámicos estables del

sistema, es decir, son los estados en los cuales el sistema se estabiliza y permanece de manera indefinida hasta que se produzca una alteración externa.

Los atractores están constituidos por estados o puntos del sistema, una secuencia de estos genera una órbita que será recorrida por la trayectoria o solución del sistema a partir de las condiciones iniciales. Cuando la órbita del sistema está constituida por un número infinito de puntos que la solución recorre de forma aperiódica, es decir, las trayectorias no pasan o repiten su tránsito por puntos o estados de la órbita que ya habían sido visitados se dice que se tiene un atractor extraño. El comportamiento aperiódico e irregular generado por un sistema dinámico determinista, cuando queda atrapado en un atractor extraño se conoce como caos determinista y el sistema es caótico.

Estos sistemas dinámicos caóticos muestran tres características que permiten que el sistema pueda ser controlado: Sensibilidad a las condiciones iniciales, existencia de órbitas periódicas inestables y ergodicidad. Según la hipótesis ergódica, todos los movimientos de un sistema pasan arbitrariamente cerca de cualquiera de sus estados posibles si se espera un tiempo suficiente. Durante su evolución temporal, una trayectoria del sistema dinámico recorrerá secuencialmente todos los puntos de cada una de las orbitas periódicas inestables alojadas dentro del atractor extraño. El control de una trayectoria caótica se realizará cuando esta se aproxime a una órbita periódica inestable deseada que se encuentre en el atractor, en ese momento se aplicará una pequeña perturbación al parámetro del sistema, lo que hará que la trayectoria se mueva hacia la vecindad de la ´orbita periódica deseada y se estabilice. La sensibilidad a las condiciones iniciales permite alterar el comportamiento del sistema mediante pequeñas perturbaciones en el parámetro adecuado.

Un procedimiento para estabilizar órbitas periódicas inestables (UPOs), es el método OGY, propuesto por OTT, Grebogi y York [1990]. Este método consiste en aplicar una pequeña perturbación a un parámetro del sistema cuando una trayectoria se acerque o pase de forma natural por una órbita periódica inestable de un atractor extraño. Como se describe por OTT y colaboradores, el Método OGY es un enfoque para controlar un sistema caótico que implica estabilizar una UPO particular cuando una trayectoria está cerca de ella.

Para implementar el método OGY, consideremos el siguiente sistema dinámico discreto:

$$x_{n+1} = f(x_n, r); \quad x\varepsilon[x_0, x_f]; \quad r\epsilon[r_0, r_f] \tag{1}$$

Este mapeo puede mostrar comportamiento caótico para algunas formas de la función $f(x_n,r)$ y para ciertos valores del parámetro r_0. El punto fijo del mapeo denotado por x^* para el periodo uno, satisface la condición $x_{n+1} = x_n = x^*$ y se puede determinar por medio de la relación $x^* = f(x^*,r)$. Es posible estabilizar este punto fijo inestable si se hacen pequeños ajustes en el parámetro de bifurcación $r_n = r_0 + \delta r_n$, donde: $\delta r_n = \gamma(x_n - x^*)$, cuando el sistema está en la vecindad del punto fijo, es decir x_n está cercano a x^*, la dinámica puede ser aproximado por un mapeo lineal dado por:

$$x_{n+1} = x^* + \alpha(x_n - x^*) + \beta\delta r_n \tag{2}$$

En esta ecuación el multiplicador de Floquet del mapeo no controlado está dado por:

$$\alpha = \frac{\partial f(x,r)}{\partial x}\Big]_{x=x^*}.$$

Y la sensibilidad de la perturbación está dada por $\beta = \frac{\partial f(x,r)}{\partial r}\Big]_{x=x^*}$.
Si se usan las ecuaciones anteriores es posible concluir que:

$$x_{n+1} - x^* = \alpha(x_n - x^*) + \beta\gamma(x_n - x^*) \tag{3}$$

Es conveniente definir la dispersión como $y_{n+1} = x_{n+1} - x^*$. Así que la ecuación (3) puede ser escrita como:

$$y_{n+1} = (\alpha + \beta\gamma)\,(x_n - x^*) \tag{4}$$

En ausencia de control $\gamma = 0$, y la perturbación del sistema crece, es decir el punto fijo es inestable cuando $|\alpha| > 1$. Con control, desde la ecuación (4) se infiere que la perturbación se reducirá cuando $|\alpha + \beta\gamma| < 0$; y por lo tanto el control estabiliza con éxito el punto fijo. Cualquier valor de γ que satisface esta condición controlará el caos, pero el tiempo para lograr el control y la sensibilidad del sistema al ruido se verán afectados por la elección específica. Si el control se aplica cuando la perturbación y_n no es pequeña, entonces los efectos no lineales son importantes y es necesario control adicional de las perturbaciones para estabilizar el punto fijo.

El modelo de crecimiento económico de Solow

El Modelo de Crecimiento Económico de Robert M. Solow, (Solow R. M., 1956), fue elaborado a partir del Modelo de Domar, para demostrar que la trayectoria de crecimiento de dicho modelo puede no tender al equilibrio, si se cambia la función de producción que Domar utilizó en su análisis. Domar supuso una función de producción definida como $f(k_t) = \rho K_t$, lo cual significa que la producción depende sólo de las existencias de capital, o bien, que el trabajo está combinado con el capital en una proporción fija.

En cambio, Solow planteó que el capital y el trabajo pueden combinarse en proporciones variables, de tal manera que la producción, a nivel macroeconómico, puede definirse en forma explícita como una función del capital y el trabajo. Es decir: $f(k_t) = F(K_t,L_t)$.

El modelo de crecimiento de Solow en tiempo discreto. Una versión detallada del modelo de Solow puede encontrarse en Palmisiani C. (Palmisiani C., 2008), aquí solo se expone brevemente. Considérese una economía de un solo bien, o sea una economía en la cual solamente un bien se produce y se consume, suponga además que el tiempo t es discreto. Se definen las siguientes variables: $Y_t, K_t, C_t, I_t, L_t, S_t$, las cuales respectivamente indican, el total de la producción o ingreso nacional, el capital disponible, el consumo, la inversión, la mano de obra o fuerza laboral y el ahorro. El capital y la fuerza laboral al tiempo $t = 0$ están dados por: K_0, L_0. La constante s representa la propensión marginal al ahorro, mientras que la constante n representa la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo. Los supuestos del modelo son:

1.- Se produce un solo bien en la economía y para todos los tiempos $t = 0,1,2,\ldots$, la economía está en equilibrio, esto es el total de la producción o ingreso nacional Y_t es igual al consumo C_t mas la inversión I_t: $Y_t = C_t + I_t$.

2.- La inversión en el tiempo t corresponde a todo el capital disponible producido en el tiempo $t + 1$: $I_t = K_{t+1}$.

3.- El ahorro es igual a la inversión y Los agentes económicos ahorran una fracción constante del ingreso: $S_t = I_t = sY_t$, $(0 < s < 1)$

4.- Para el tiempo t el ingreso que se genera se debe a la combinación de dos factores o insumos productivos: el capital y la mano de obra: $Y_t = F(K_t, L_t)$

5.- La mano de obra crece como una progresión geométrica en la razón n:

$$L_t = (1+n)^t L_0$$

De los supuestos 1 y 3 se tiene: $Y_t = C_t + S_t$, o $I_t = S_t$. Por lo que, aplicando los supuestos 2 y 3 se obtiene $K_{t+1} = sY_t$. Finalmente aplicando el supuesto 4 se obtiene $K_{t+1} = sF(K_t, L_t)$. A partir de esta expresión se obtiene $K_{t+1}/L_{t+1} = sF(K_t, L_t)/L_{t+1}$. Si F es lineal y homogénea (esto es F muestra retornos a escala constante), $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ para toda $\lambda > 0$. Con lo cual se tiene:

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = sL_t F(\frac{K_t}{L_t}, 1)/L_t(1+n). \qquad (5)$$

Si se define $k_t = K_t/L_t$ como la razón de capital-labor o capital por trabajador y $y_t = Y_t/L_t$ como la razón de ingreso-labor o ingreso por trabajador, entonces se puede obtener la función de producción en la forma intensiva: $y_t = f(k_t) = f(\frac{K_t}{L_t}, 1)$, por lo tanto se obtiene la función de acumulación para el modelo de Solow en tiempo discreto:

$$k_{t+1} = sf(k_t)/(1+n) \qquad (6)$$

Donde como antes s es la función de propensión al ahorro, $f(k_t)$ es la función de producción, n>0 es la razón de crecimiento de la fuerza de trabajo, la cual es un parámetro exógeno.

Ejemplo 1. Si se escoge una tasa de ahorro constante σ y una forma del tipo de Cobb-Douglas modificada para la función de producción $f(k_t) = Bk_t^{\beta}(m-k_t)^{\gamma},\ k_t < m$, entonces la función de acumulación para el Modelo de Solow, en tiempo discreto es:

$$k_{t+1} = \frac{\sigma B k_t^{\beta}(m-k_t)^{\gamma}}{1+n} \qquad (7)$$

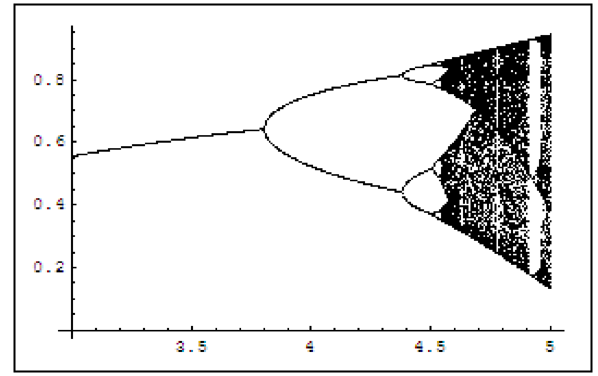
Donde m es una constante positiva y $0 < \beta \leq 1.2,\ 0 < \gamma \leq 1.2$ y $B > 0$. Si en esta ecuación escogemos $R = \frac{B}{1+n}$; σ=1; m=1; β=1.2 y γ=1.2, se obtiene que *k* converge al valor de 0.5589, cuando *R=3.0*.

Cuando cambiamos el valor de *R,* a *R=4.0*, se presenta un ciclo estable de periodo dos; los valores correspondientes de *k* son: 0.5279 y 0.7550. Cuando *R=4.5*, tenemos un ciclo estable de periodo cuatro, con los correspondientes valores de *k* siguientes: 0.8512, 0.7912, 0.5187 y 0.3771. Finalmente, para *R>4.8*, el comportamiento del sistema es caótico. Se puede mostrar que si *R=4.4* y *γ=1.05*, el sistema también tiene un comportamiento caótico. En la gráfica 1 se muestra el diagrama de bifurcación para este

sistema, este diagrama muestra el comportamiento caótico del modelo para *R>4.8* como se menciono anteriormente.

Gráfica 1. Diagrama de bifurcación del modelo de Solow1:

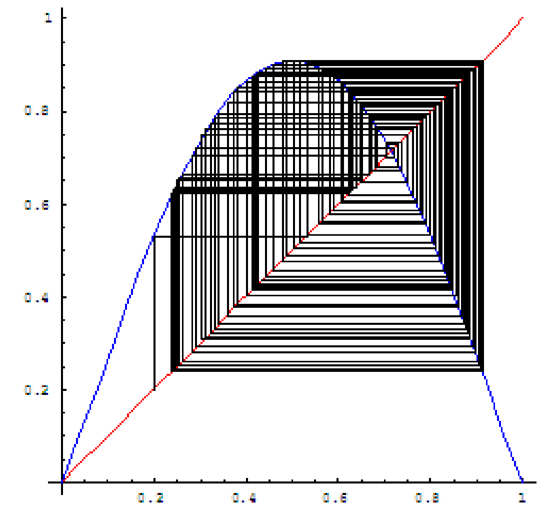
$$k_{t+1} = Rk_t^{1.2}(1-k_t)^{1.2}$$



Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfica 2. Solución caótica del modelo de Solow1:

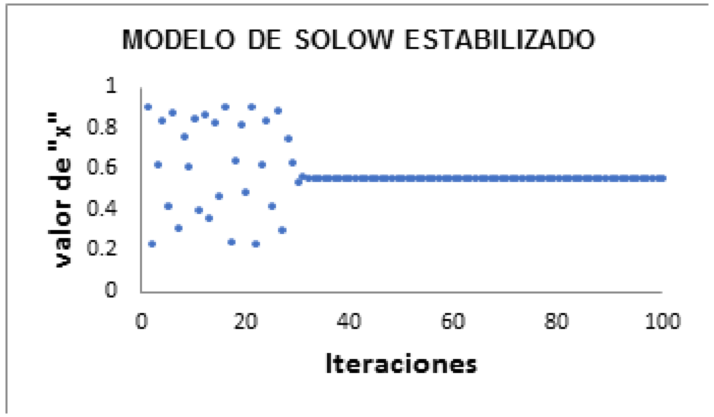
$$k_{t+1} = Rk_t^{1.2}(1-k_t)^{1.2}$$



Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfica 3. Trayectoria caótica del modelo de Solow1 estabilizada

En la órbita de periodo uno $k^* = 0.5589;\ R = 4.8;\ \alpha = -0.322;\ \beta = 0.186;\ \gamma = 0.25$



Fuente: Elaboración de los autores.

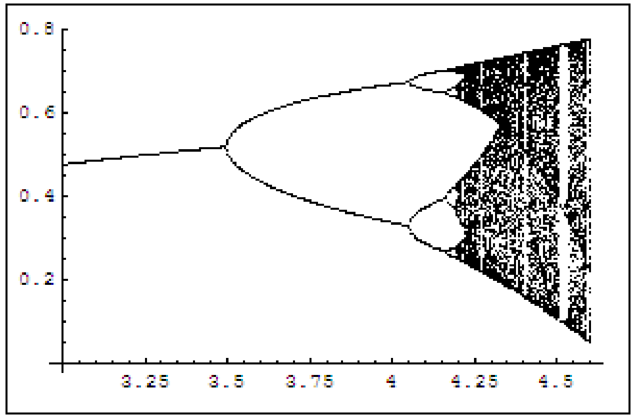
Ejemplo 2. Si se generaliza la propensión al ahorro como $s = s(k_t)$, (Day, R. H., 1982), entonces es posible generalizar el Modelo de Solow en tiempo discreto. Con una función de producción tipo Cobb-Douglas $f(k_t) = Bk_t^{\beta}$ $(B \geq 2, 0 < \beta < 1)$ y con una función de ahorro $s(k) = a(1 - b/r)k$, propuesto por Day, (Day, R. H., 1982), donde: $r = f'(k_t) = \beta \frac{y_t}{k_t},\ \ a > 0, b > 0.$ Con estos resultados la función de acumulación para el Modelo de Solow es:

$$k_{t+1} = \left[\frac{a}{1+\lambda}\right] k_t \left[1 - \frac{b}{\beta B} k_t^{1-\beta}\right] \tag{8}$$

Si definimos $R = \frac{a}{1+\lambda}$, y escogemos β=0.2, b/βB=1.2, encontramos que cuando *R=3.0*, el valor de *k* converge a 0.5204. Pero si *R=3.5*, el sistema presenta un ciclo estable de periodo dos, con los valores de *k* iguales a 0.6634 y 0.3960, con un valor inicial de k_0*=0.5,* y cuando *R>3.9*, el sistema muestra trayectorias caóticas, el diagrama de bifurcación correspondiente se muestra en la gráfica (4).

Gráfica (4). Diagrama de bifurcación del modelo de Solow2:

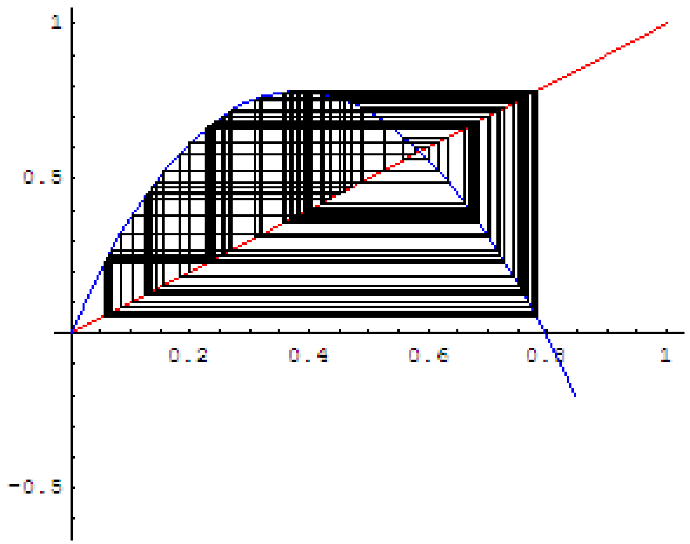
$$k_{t+1} = Rk_t(1 - 1.2k_t^{0.8})$$



Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfica (5). Solución caótica del modelo de Solow2:

$$k_{t+1} = Rk_t(1 - 1.2k_t^{0.8})$$

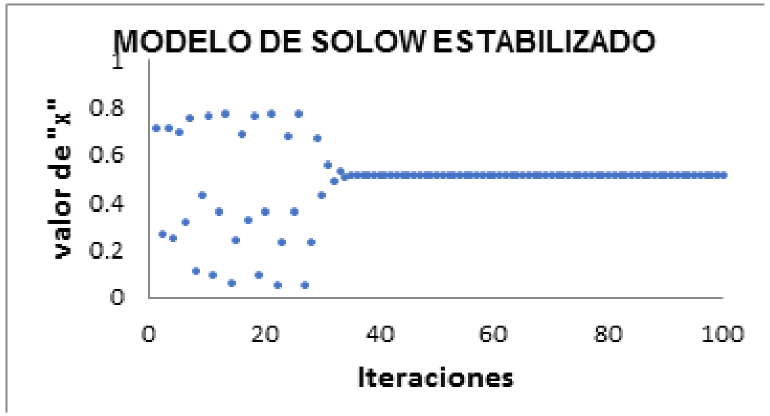


Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfica (6). Trayectoria caótica del modelo de Solow2 estabilizada

En la órbita de periodo uno $k^* = 0.5204$: $R = 4.6$; $\alpha = -1.2923$; $\beta = 0.15$; $\gamma = 5.0$

$$k_{t+1} = Rk_t(1 - 1.2k_t^{0.8})$$

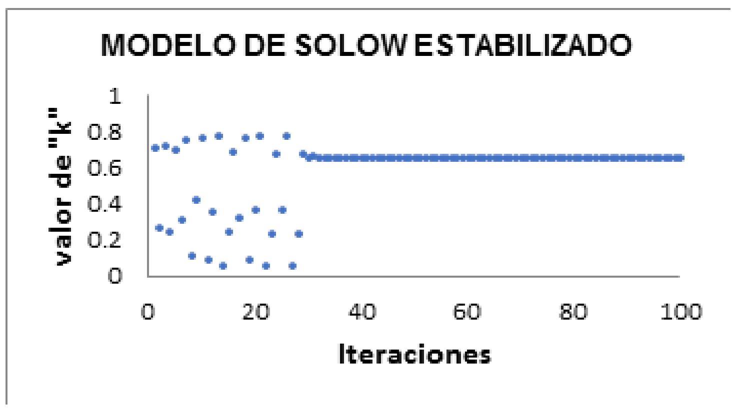


Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfica (7). Trayectoria caótica del modelo de Solow2 estabilizada

En la órbita de periodo dos $k^* = 0.6634$: $R = 4.6$; $\alpha = -2.5553$; $\beta = 0.0901$; $\gamma = 25$

$$k_{t+1} = Rk_t(1 - 1.2k_t^{0.8})$$

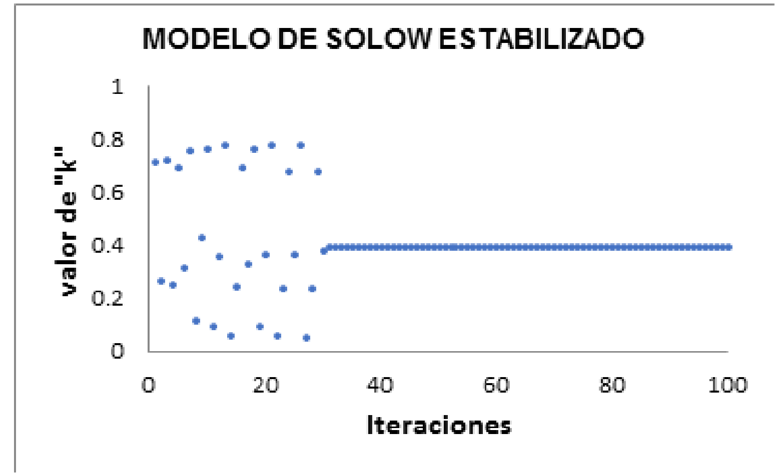


Fuente: Elaboración de los autores.

Gráfica (8). Trayectoria caótica del modelo de Solow2 estabilizada

En la órbita de periodo uno $k^* = 0.396$: $R = 4.6$; $\alpha = -0.1355$; $\beta = 0.1695$; $\gamma = 0.5$

$$k_{t+1} = Rk_t(1 - 1.2k_t^{0.8})$$



Fuente: Elaboración de los autores.

CONCLUSIONES

En este trabajo se analizaron dos modelos económicos en tiempo discreto del tipo de Solow para el control de caos clásico. Para este control de caos se uso el método de OGY. Se mostró el control de caos para órbitas periódicas inestables de periodo uno y dos para cada uno de los modelos económicos analizados, se enciende el control después de 30 iteraciones. Se elaboraron las gráficas de bifurcación, de trayectoria y de control para cada uno de los modelos económicos.

LITERATURA CITADA

Arrow, K. y M. Intriligator (eds.) (1991), "Historical introduction", Handbo ok of Mathematical Economics, 1, North Holland, Nueva York, pp. 1-14.

Boldrin, M. y M. Woodford (1992), "Equilibrium Models Displaying Endo- genous Fluctuations and Chaos: A Survey", en J. Benhabib (ed.), Cycles and Chaos in Economic Equilibrium, Nueva Jersey, Princeton Univer- sity Press, pp. 44-63.

Day, R. (1982), Irregular Growth Cycles. American Economic Review 72(3), 406-414.
Debreu, G. (1984), “Economic Theory in the Mathematical Mode“, The American Economic Review, 74, pp. 267-278.

(1991). “The Matematization of Economic theory”, The American Economic Review, 81: 1-7.

Grandmont, J. (1992), “Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-dimensional Dynamical Systems”, en J. Benhabib (ed.), Cycles and Chaos in Economic Equilibrium, Nueva Jersey, Princeton University Press, pp. 44-63.

Mirowski, P. (1989), More Heat than Light, Nueva York, Cambridge Uni- versity Press.
Moseklide, E. y Larsen E.R., (1988), Deterministic chaos in the beer production-distribution model.Syst Dynam Rev 4, 131-147.

Ott,E.C.,Grebogi, C. y Yorke, J. A., (1990), Controlling Chaos. Phys. Rev. Lett. 64,1196-1199.

Palmisiani, C., (2008), A short survey on chaotic dynamics in Solow-Type growth models. In Journal of applied Economic Sciences, 270-280.

Ramírez José Carlos y Juárez David, (2009), La nueva escalada matemática, El impacto reciente de la teoría de sistemas dinámicos en Economía, Economía mexicana nueva época, vol. XVIII, num 1.

Solow, R. M., (1956), A contribution to the Theory of Economic Growth. In Quaterly Journal of Economics, 65-94.

Weintraub, R. (1991), Stabilizing Dynamics: Constructing Economic Knowledge, Cambridge University Press, Cambridge.

(2002), How Economic Became a Mathematical Science, Durham, Duke University Press.