Aplicaciones en biología utilizando ecuaciones diferenciales

Dr. en C. A. Pedro Del Aguila Juárez

PROPÓSITO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

El discente

- Identificará en clase y vinculara los conceptos del cálculo diferencial integral y de ecuaciones diferenciales con problemas biológicos.
- Se planteará series de ejercicios que refuercen lo visto en clase, así como prácticas de campo que enseñen al discente el uso de la herramienta matemática.

COMPETENCIAS GENÉRICAS

El discente será capaz de :

- Conocer y utilizar los conceptos del cálculo diferencial e integral y de las ecuaciones diferenciales para utilizarlos en problemas biológicos.
- Disposición del discente en realizar actividades en equipo y el reconocimiento de liderazgo

Unidad II: LA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE PRIMER ORDEN

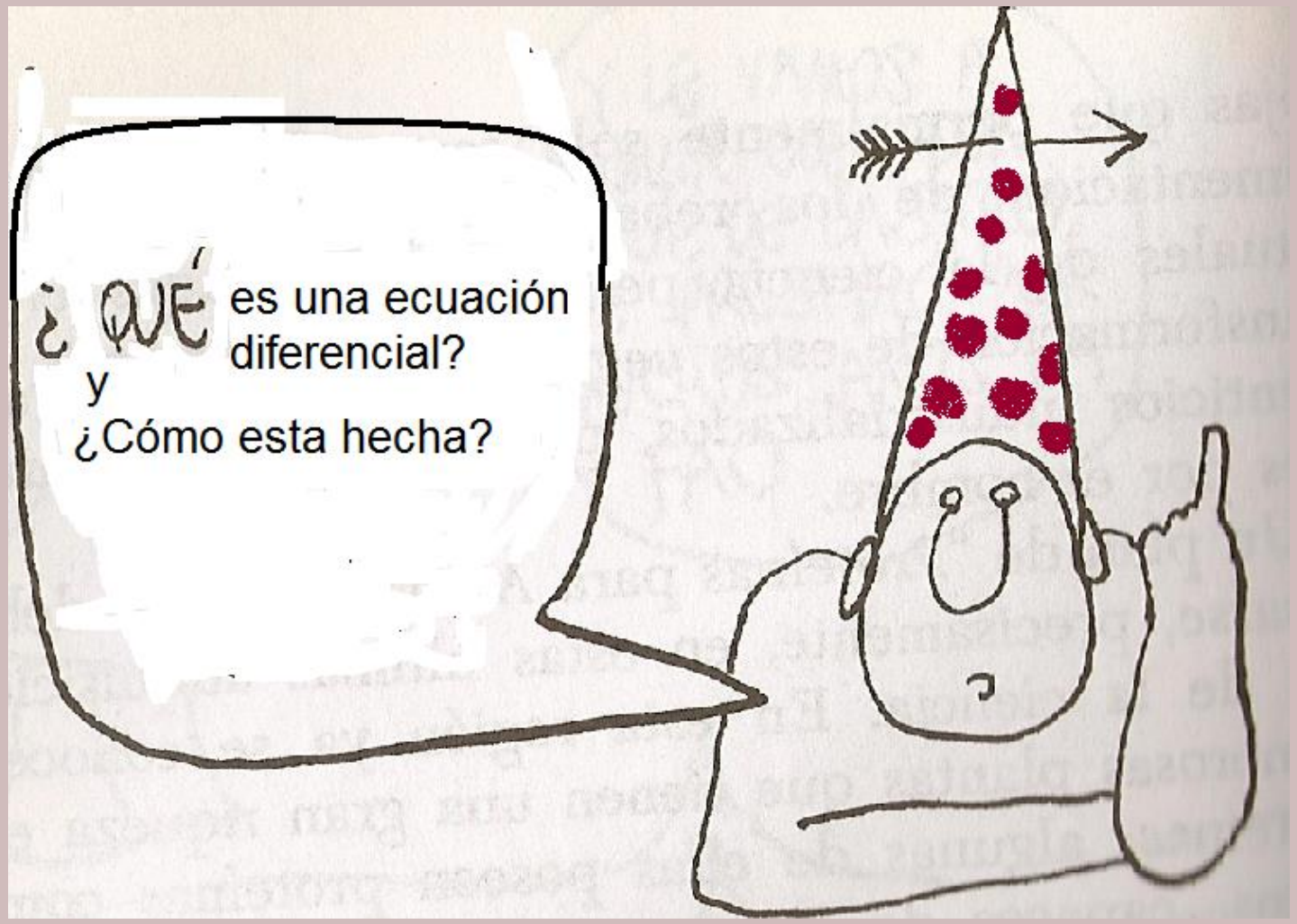
- 2.1 Definición de ecuación diferencial.
- 2.2 Métodos para solución de una ecuaciones de primer orden: separación de variables, factor integrador, homogénea, exactas.
- 2.3 Ejercicios y su aplicación biológica.

Donde se aplican las ecuaciones diferenciales

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

- Modelos de ecología
- Modelos en bioquímica: cinética de reacciones
- Modelos en contaminación ambiental
- Modelo alométricos

¿Qué es una ecuación diferencial?



La ecuación diferencial esta compuesta de lo siguiente

Una escuación diferencial está conformada por:

$$Y' = f(x, y)$$

i) Es una función de dos variables "x" y "y"

ii) Contiene derivadas

¿Qué significa resolver una ecuación diferencial

Encontrar la relación que existe de y en función de "x" o viceversa

$$y \rightleftarrows x$$

Cuantos tipos de ecuación diferencial existen

Una ecuación diferencial puede ser de dos tipos:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x\frac{du}{dx} + u = 0.$$

Ecuación diferencial ordinaria

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$$

Ecuacion diferencial parcial

¿Cuál es el orden de una ecuación diferencial?

El orden de una ecuación diferencial

Sea y = f(t) es una función diferenciable de la variable independiente "t" y de y´, y", ..., $y^{(n)}$ que denota las derivadas de y con respecto a t , el orden "n" denota la derivada mayor de una ecuación diferencial

EJEMPLOS

(i) $(dy/dt) + 2y = 0$ Es una ecuación diferencial de primer orden

(ii) $(d^2y/dt^2) - \sin(ty) = 0$ Es una ecuación de segundo orden

(iii) $(d^4y/dt^4) - t^2(d^3y/dt^3) = \cos t$ Es una ecuación de cuarto orden

Existe linealidad en una ecuación diferencial

Linealidad de una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial
¿Es lineal o no lineal?

Se dice que una ecuación diferencial es lineal cuando la función F es una función lineal de:

variables $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Representación de una ecuación diferencial lineal

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = R(x)$$

i) $a_0(x)$, $a_1(x)$ y a_n son funciones de x

ii) R(x) es función de x

iii) a(x) puede estar representada por y=x o y=k

De la lista siguiente cuales son lineales y cuales no

$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x$ _____

$(1+y^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = e^x$ _____

$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$ _____

$\frac{d^4y}{dx^4} + x y^2 = 0$ _____

$\frac{d^2y}{dx^2} + \text{sen}(x + y) = \text{sen}x$ _____

$\frac{d^3y}{dx^3} + x \frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)\, y = x^3$ _____

x

Hay coeficientes constante en una ecuación diferencial ordinaria

Coeficientes constantes presentes en una ecuación diferencial

- Una ecuación diferencial presenta coeficientes constantes , si el coeficiente que multiplica a “y” y a las derivadas son independientes de x

Ejemplo

(i) $2(dy/dt) + 5y = \sin t$ Es una ecuación diferencial de 1er orden con coeficientes constantes

(ii) $(d^4y/dt^2) - 2(d^2y/dt^2) + 2y = e^t$ Es una ecuación lineal de 4to. orden con coeficientes constantes

(iii) $(d^2y/dt^2) + t^2y = 1$ Es una edcuación diferencial de 2do. orden pero no presenta coeficientes constantes

¿Qué métodos utilizo para resolver una ecuación diferencial ordinaria?

Un método para resolver una ecuación diferencial es el de separación de variables

Método de separación de variables

El método de Separación de Varibles consiste en que:

La ecuación toma la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad (1)$$

Donde f(x) es una función de la variable independiante "x" unicamente, porque la función g(y) es una función de la variable dependiente unicamente.

$$f(x) = \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} ,$$

Integrando con respecto a x se obtiene:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{g(y)} dy ,$$

Se comienza con la ecuación diferencial y´=ay

- Una de las ecuaciones diferenciales más sencillas es:

- Donde la solución general es:

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

Pasos del método de separación de variables

La ecuación se separa dx y se tiene

$$dy = a\,y \cdot dx$$

Después, dividiendo por y, la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{y} = a.dx \qquad (y \neq 0).$$

Aparece la variable y sólo en el lado izquierdo y x solo en el lado derecho. Se dice que se tienen variables separadas.

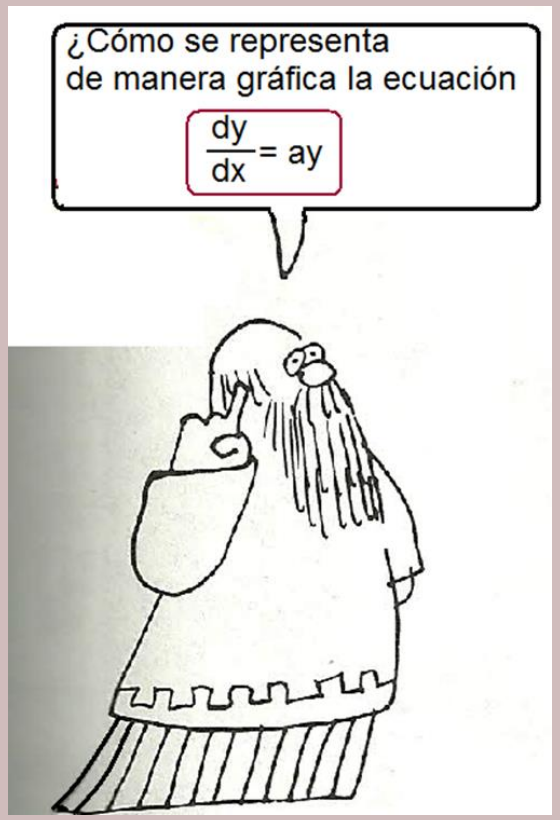
$$\int \frac{dy}{y} = \int a.dx$$

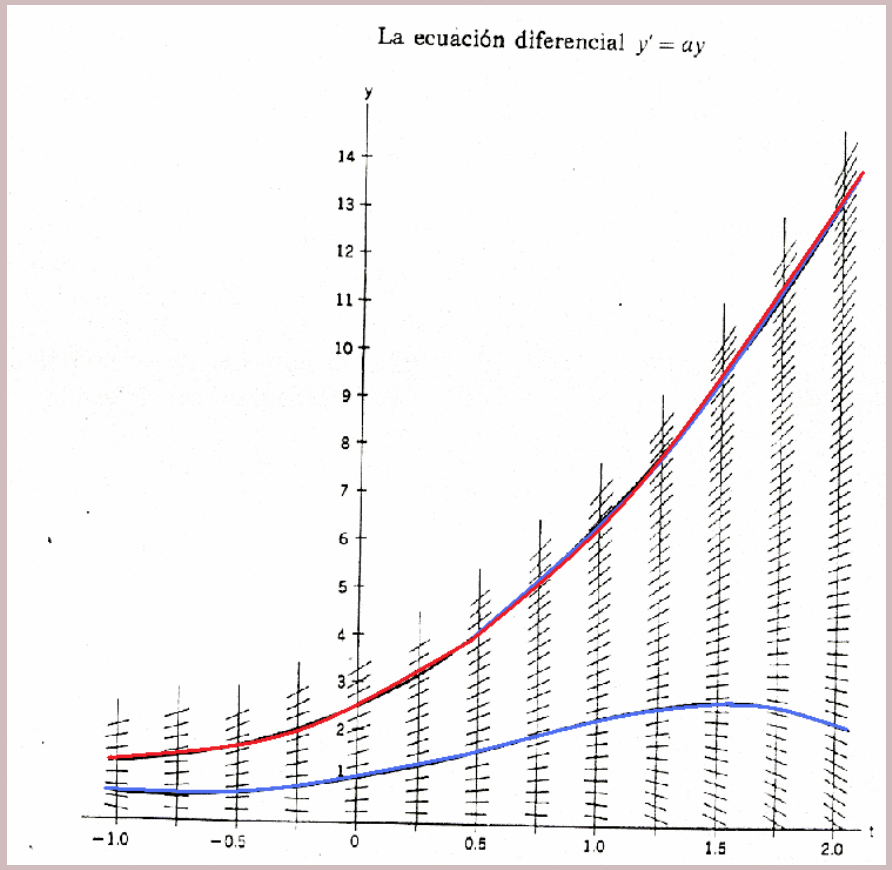
La integración queda como:

$$\ln |y = ax + C \qquad (y \neq 0)$$

Donde C es una constante arbitraria. Podemos eliminar el logaritmno natural aplicando la función inversa. Por lo tanto, la solución queda como.

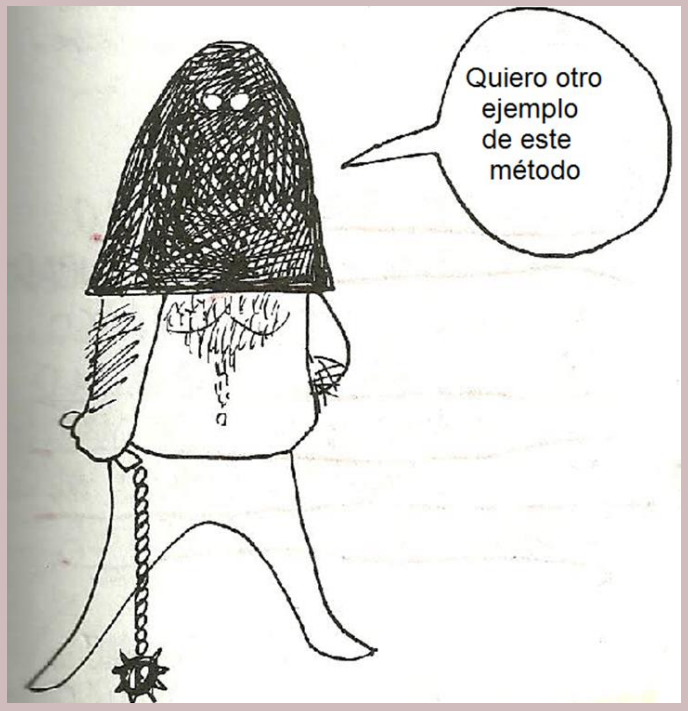
Representación gráfica de una ecuación diferencial





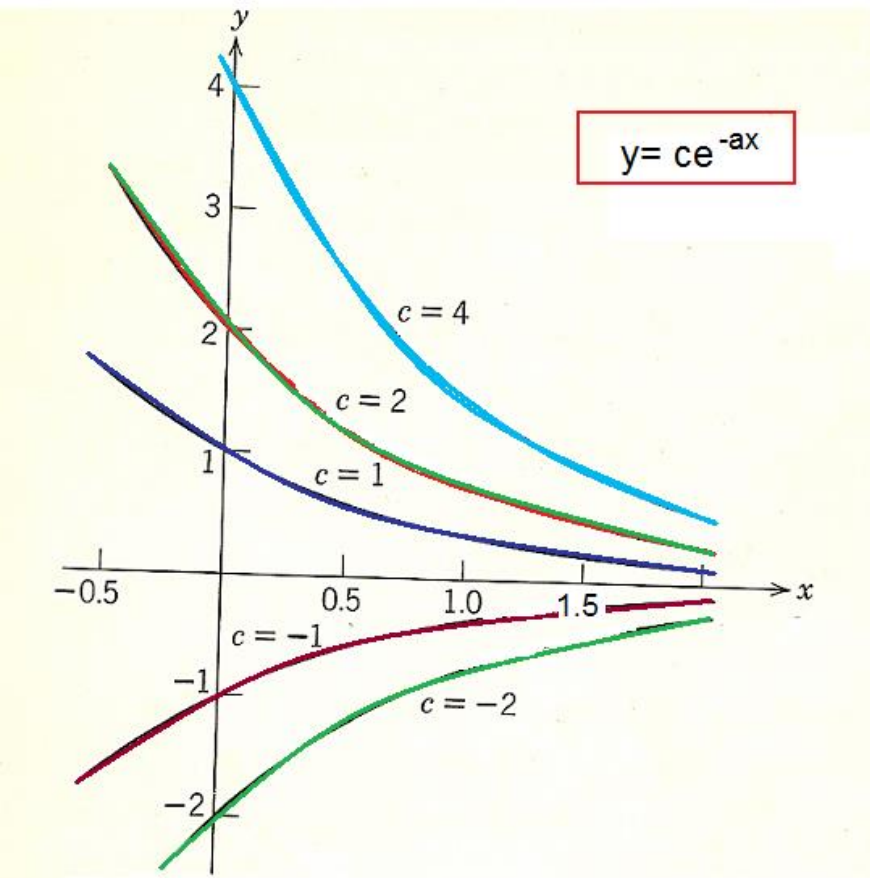
La ecuación diferencial y´= -ay

- Donde la solución general es



$$y = ce^{-ax}$$

Grafica de una ecuación diferencial: y´= -ay



Representación gráfica de la ecuación y´+ ay =0

Un ejemplo biológico: Rutas migratorias

Branda negra (sp de ganso), migra del ártico a BC México.

Pato golondrino migra de Alaska a Guatemala.

Aves terrestres tienen una
Una autonomía de vuelo de 2500 km.
Aves linícolas de 4000 km.

La ecuación diferencial se resuelve por el método de separación de variables

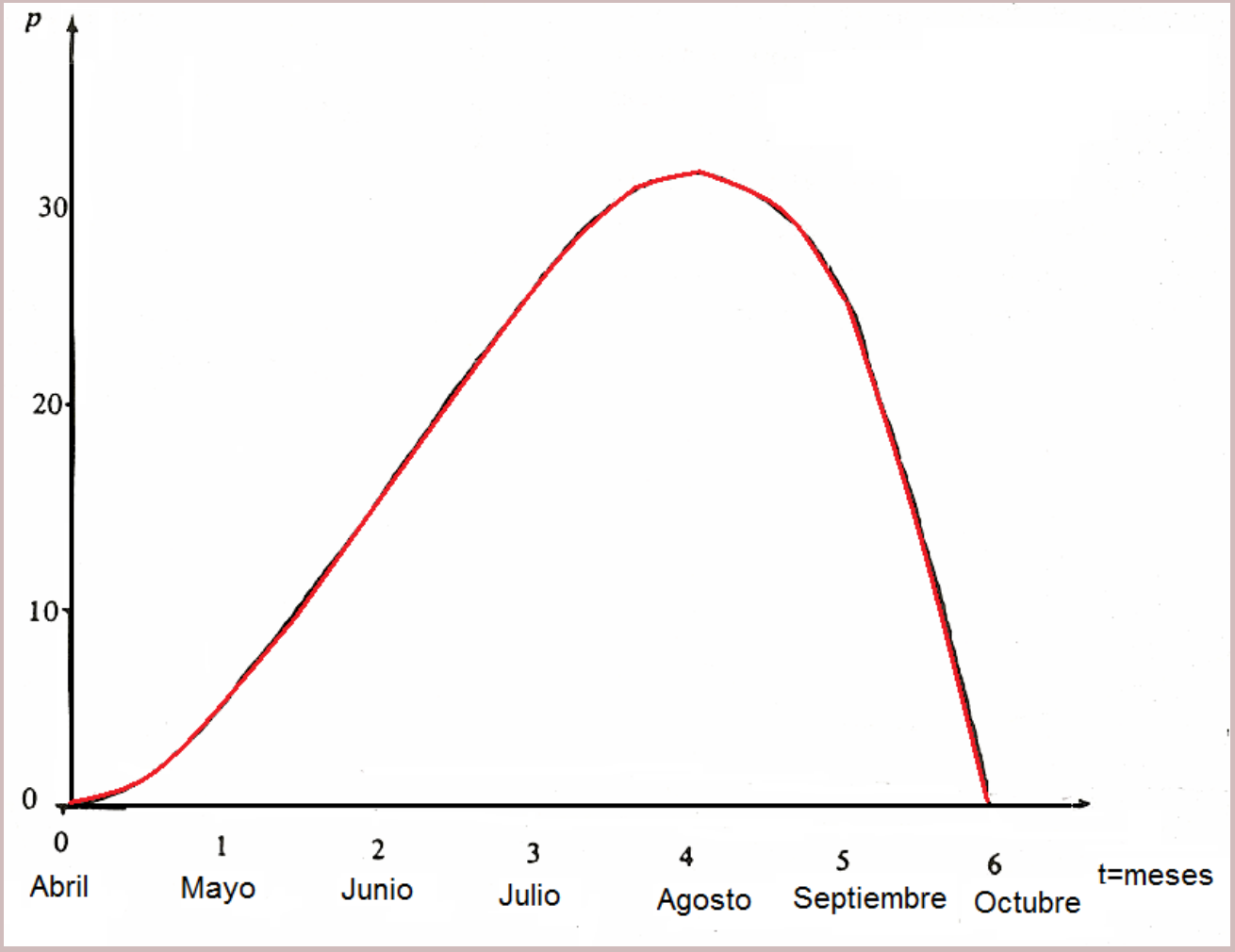
$$\frac{dp}{dt} = 12t - 3t^2$$

La velocidad de la población es una función del tiempo

$$p(t) = \int \frac{dp}{dt}\, dt = \int (12t - 3t^2)\, dt = 6t^2 - t^3 + C$$

Sea p(t) denota a la población madura

La grafica del ave migratoria



Crecimiento de un cultivo bacteriano

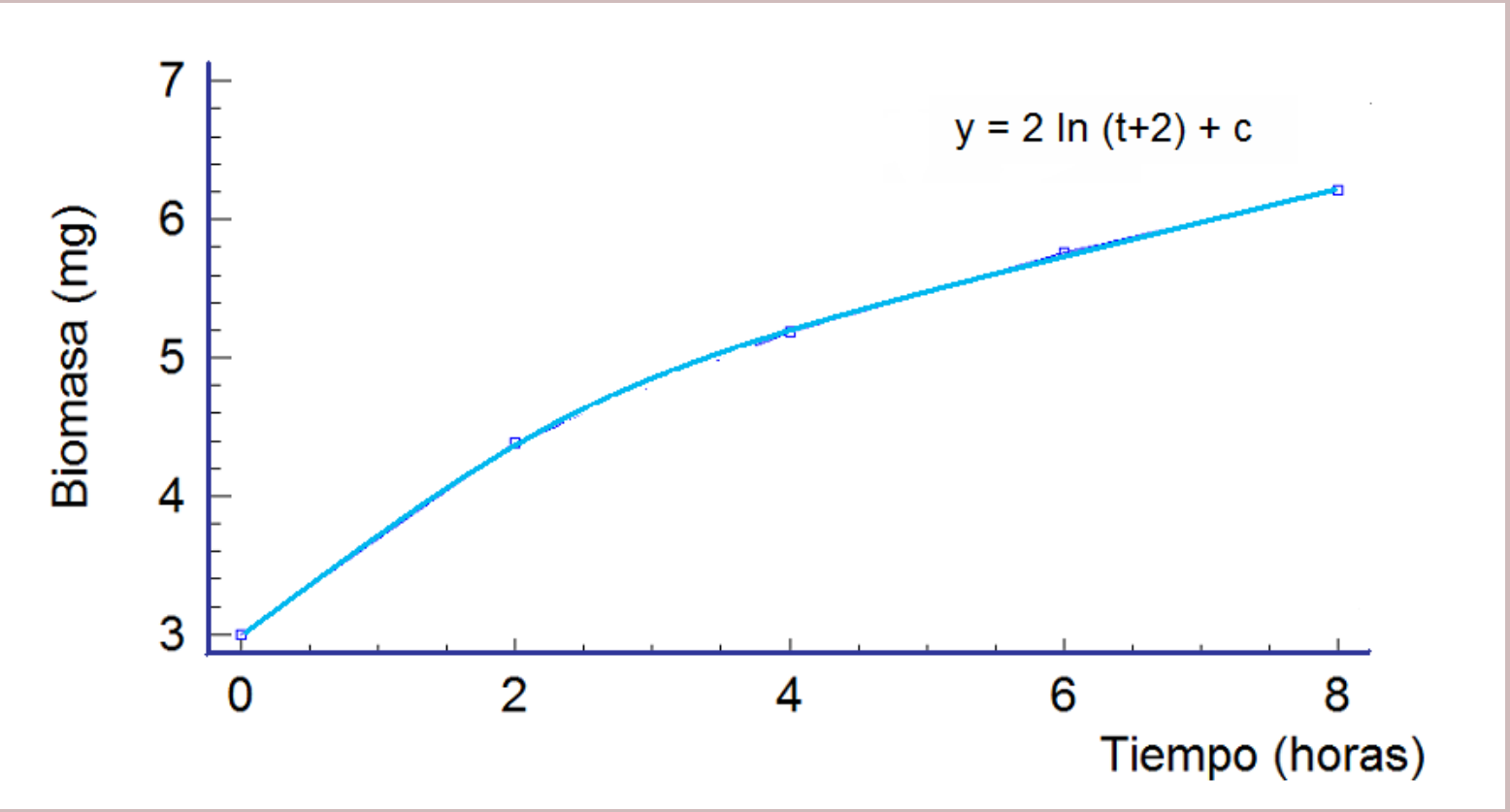
- El modelo del cultivo bacteriano
- Tiene una velocidad de crecimiento
- Que obedece al siguiente
- Modelo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t+2}$$

- La solución es:

$$y = 2 \ln (t+2) + c$$

Grafica del crecimiento celular



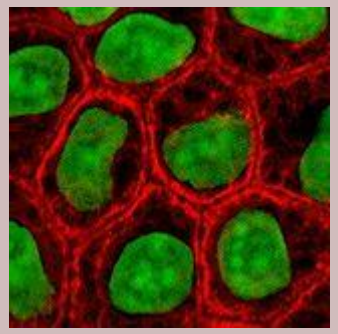
El crecimiento de una célula

- Una célula con masa m_o=0.5 (microgramos) en un medio de cultivo crece.
- Se escribe m=m(t)
- La razón de velocidad de crecimiento es proporcional a la masa en cada instante es decir:

$$\frac{dm}{dt} = am$$

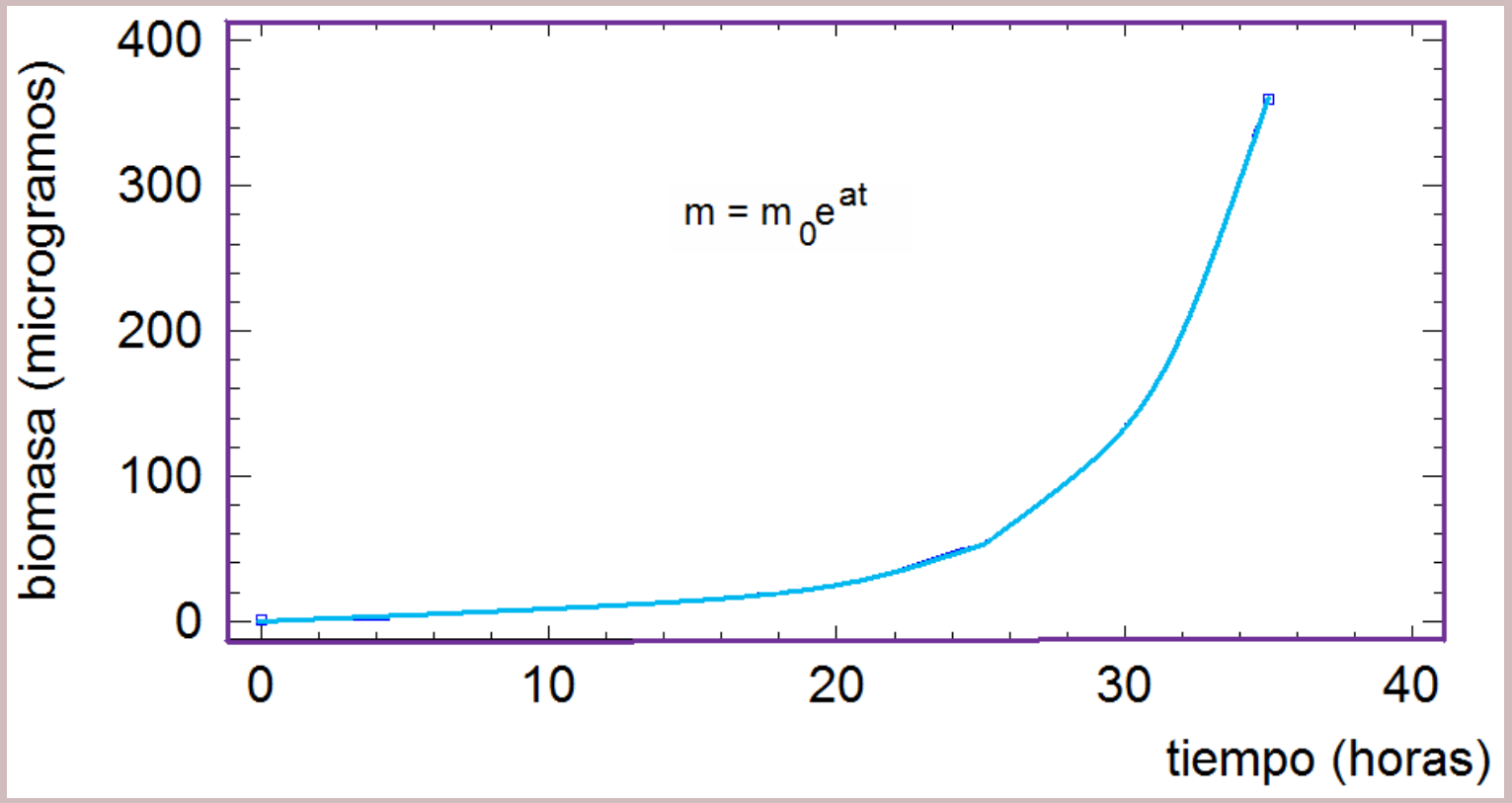
Donde la solución es:

$$m = m_0 e^{at}$$



Células epiteliales en cultivo, en tinción roja para la queratina y verde el ADN

Grafico del crecimiento de una célula



Modelo de un crecimiento exponencial ilimitado

Crecimiento exponencial y desarrollo en un ambiente no limitado

El estado del crecimiento de una poblacion de tipo exponencial se representa mediante la siguiente ecuación diferecial

$$\frac{dN}{dt} = kN, \qquad [1]$$

Se denota a dN/dt como la razón de cambio y es proporcional a la poblacion N , donde k es una constante positiva.

La ecuación [1] se resuelve y la relación entre N y el tiempo se representa como $N = N_0 e^{kt}$, donde N_0 denota la población inicial a un tiempo t=0. La ecuación es denominado modelo matemático que describe el crecimiento de una población.

Dinámica de la Población como ejemplo de curvas tipo J y S

Dinámica	Curva de crecimiento Indice de crecimiento Tasa de natalidad Tasa de mortalidad Migraciones Superviviencia

Curva J o crecimiento exponencial

Curca "S" o crecimiento sigmoidal o logístico

Índice de crecimiento: se refiere al número de individuos añadidos en una población en un tiempo determinado

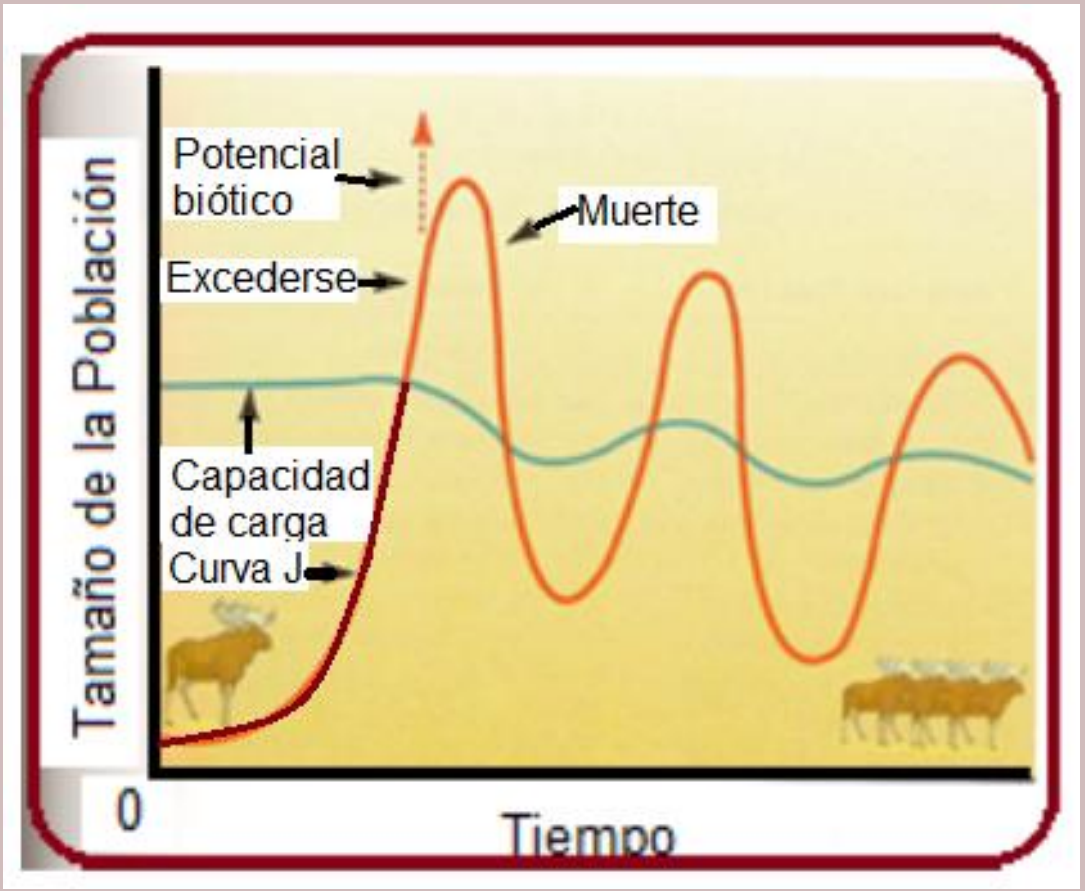
Tasa de natalidad: aumento de la población por efecto exclusivo del efecto de la reproducción

Tasa de mortalidad: número de individuos que mueren por unidad de tiempo

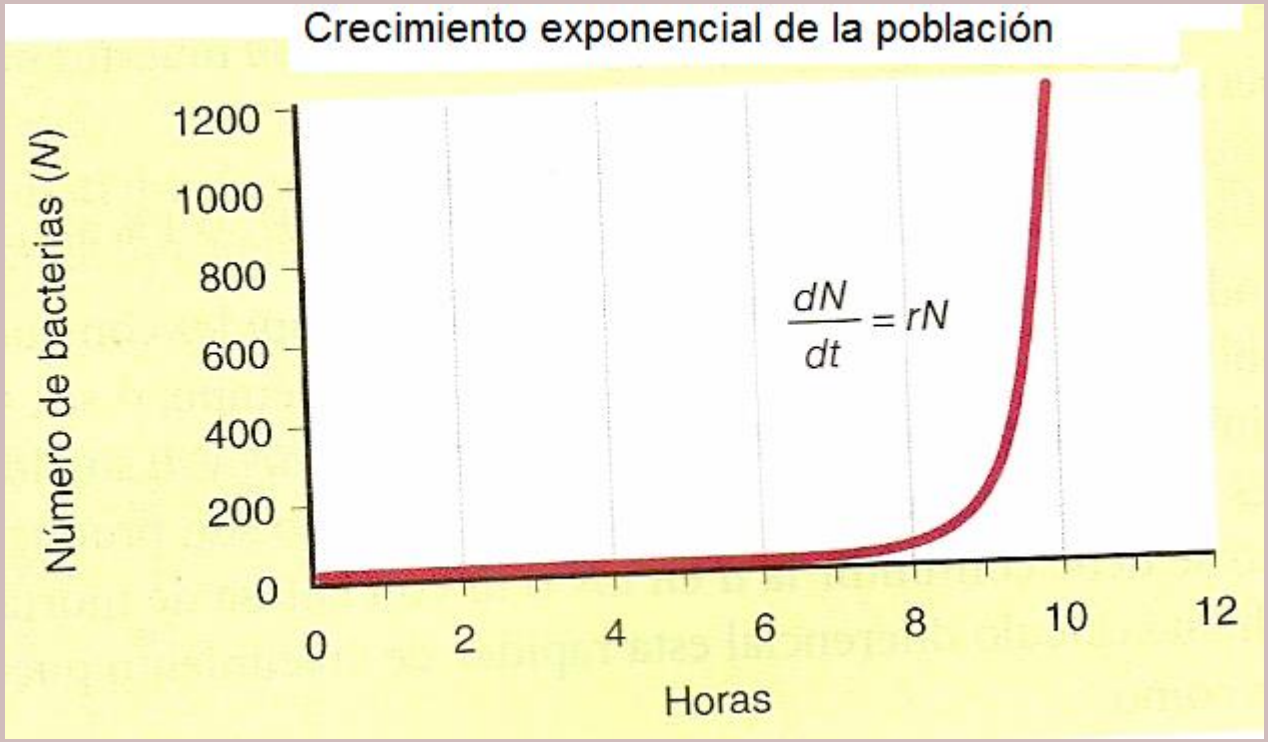
Crecimiento exponencial ilimitado: Curva J

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

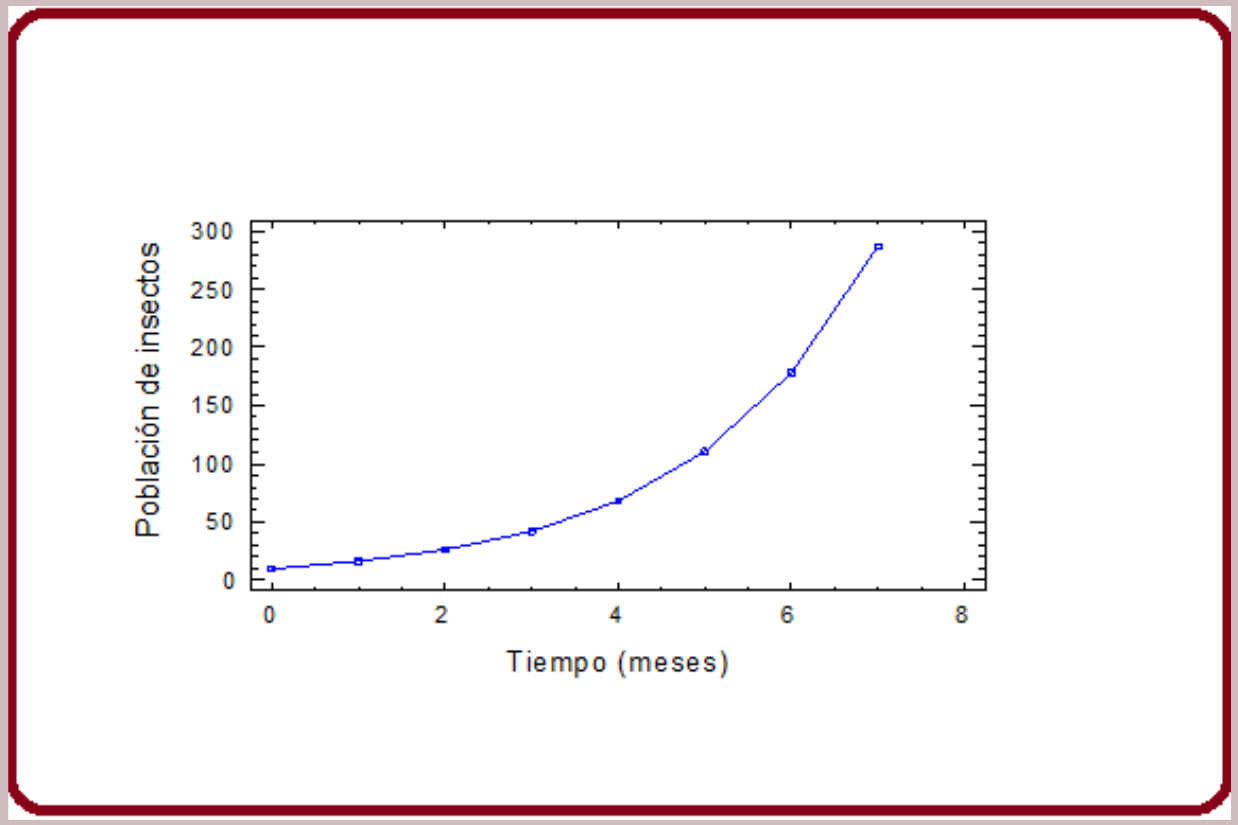
El cambio de la población (*dN*) con respecto al cambio del tiempo (*dt*) es igual a la tasa de crecimiento (*r*) por el numero de organismos de la población (*N*) presente.



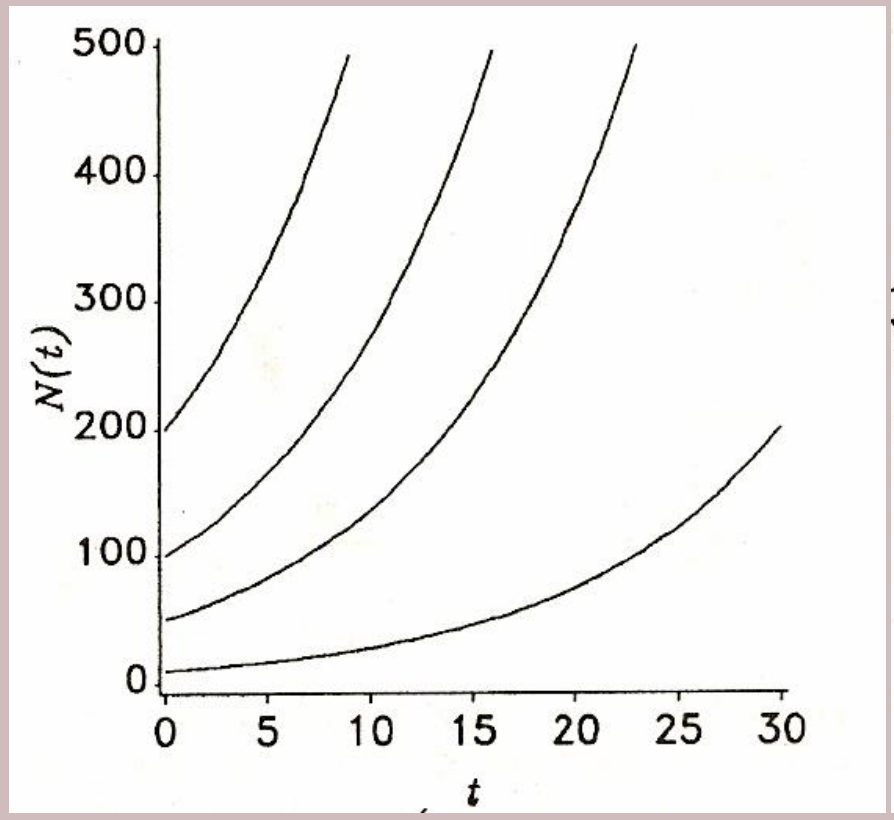
Dinámica de Población; curva "J"



Para N_1 se trata de una curva de crecimiento de tipo J o exponencial



Gráficos de Crecimiento exponencial



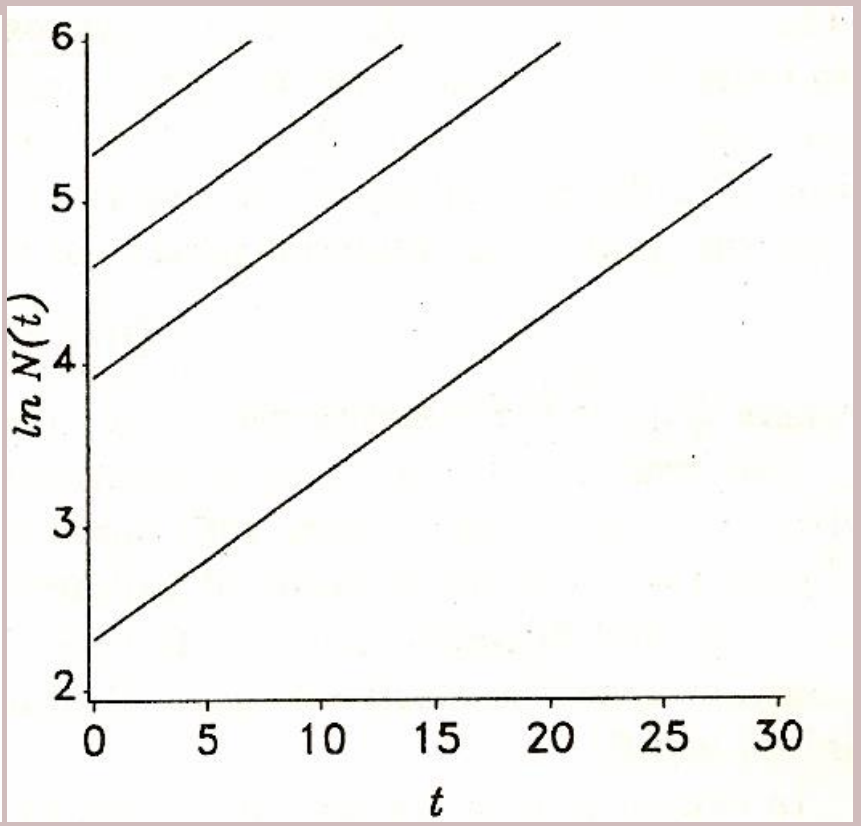
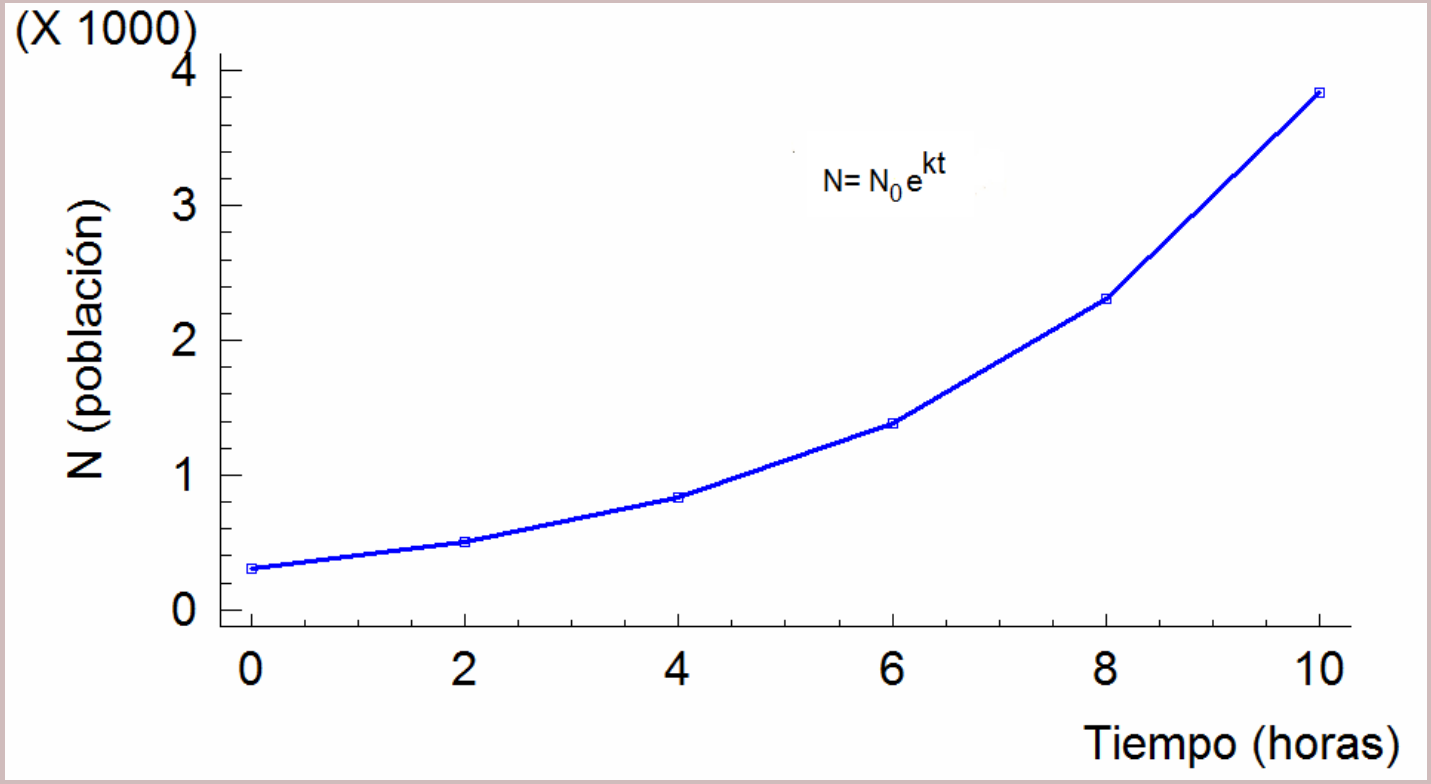


Gráfico de un crecimiento de una población exponencial ilimitado



Población Humana obedece a un crecimiento ilimitado

Crecimiento de una población restringido

Donde N=N(t), que denota el tamaño de la población en función del tiempo.

Se supone que existe un límite superior de la población que se denomina K (capacidad de carga) y es una constante positiva.

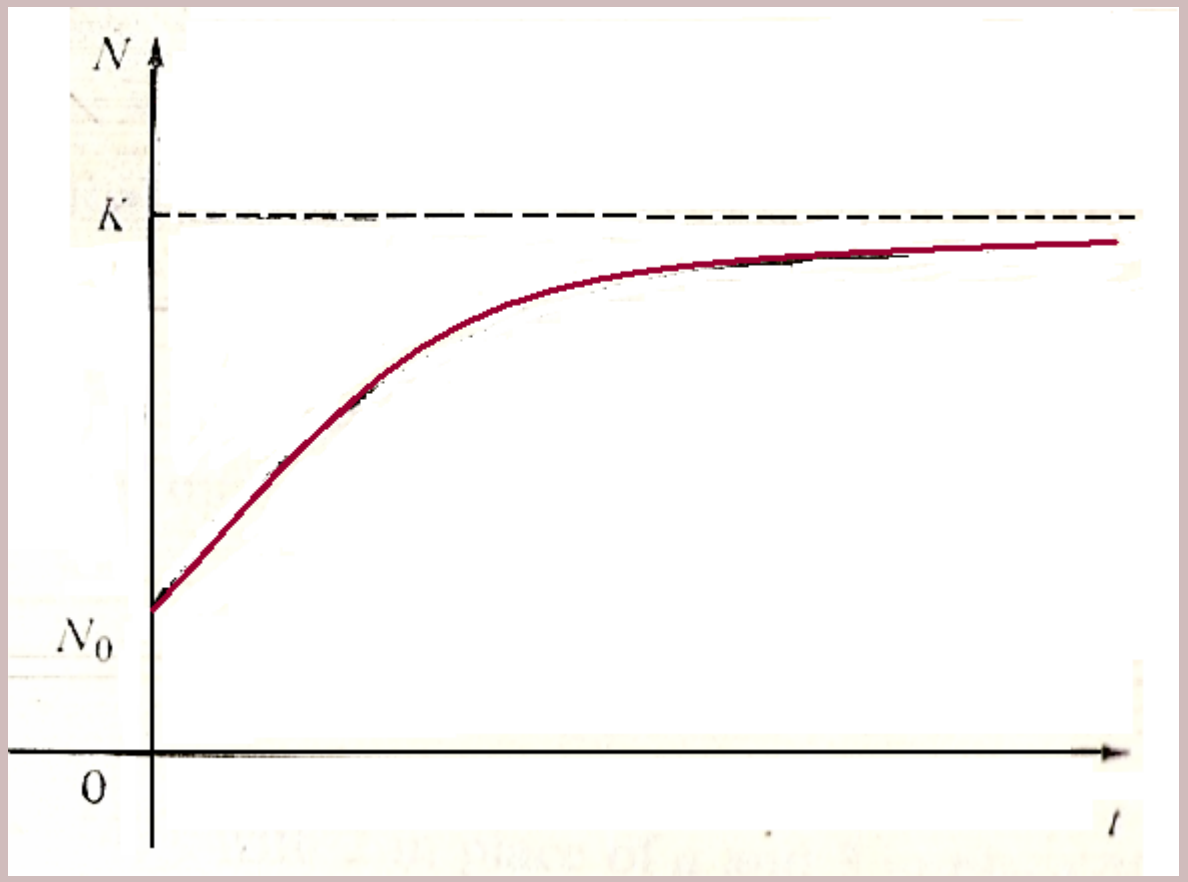
Tambien k es una constante positiva. La $\frac{dN}{dt}$ es proporcional a la población cuando se incrementa a K-N, donde la población tiende a un máximo cuando alcanza el valor de K.

$$\frac{dN}{dt} = k(K - N)$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$K - N = C\, e^{-kt}$$

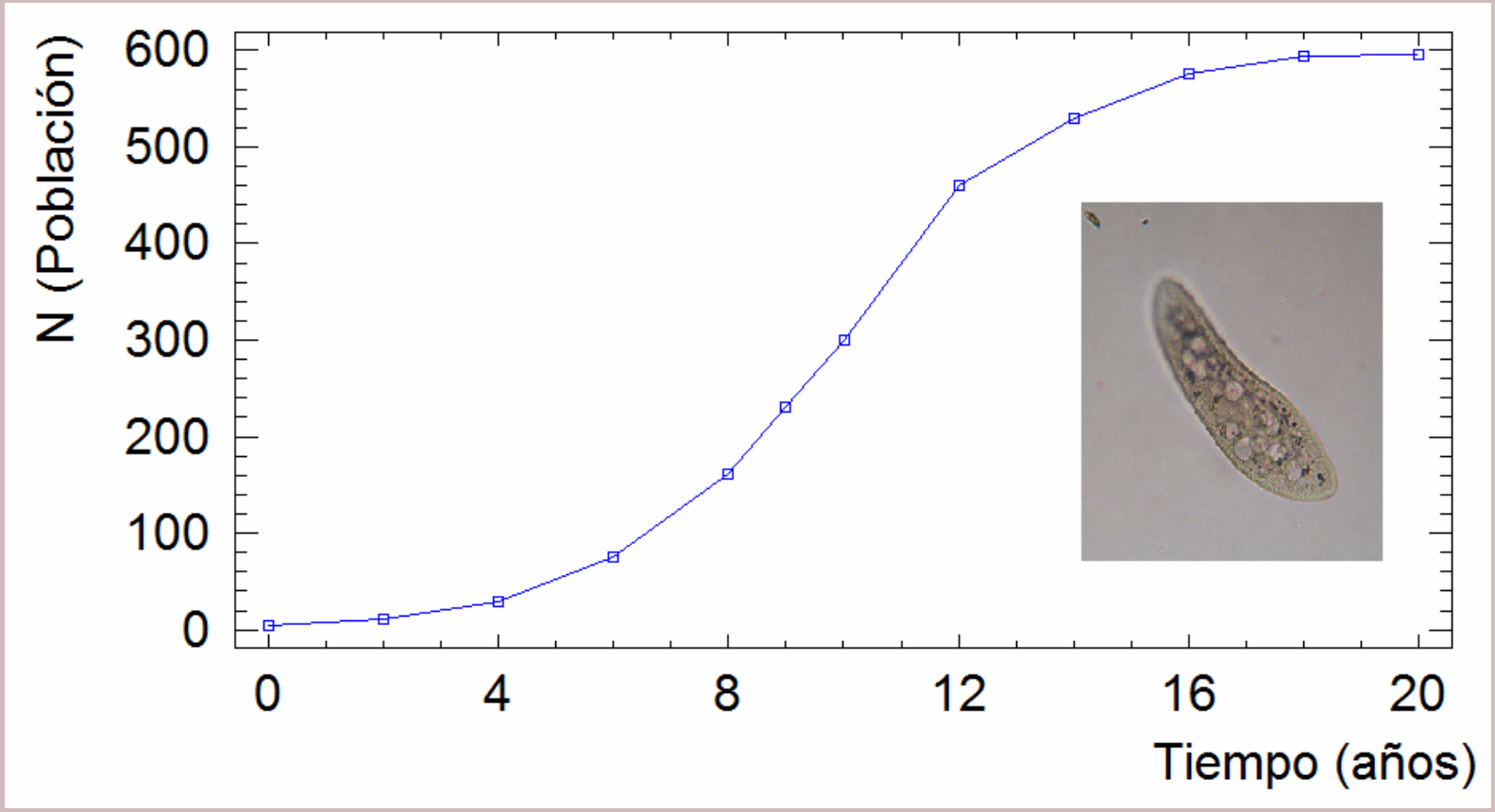
Gráfico de una población con crecimiento restringido



Los Protozoos y su comportamiento logístico

- Los paramecios del género *Paramecium* son protozoos ciliados, habituales en aguas dulces estancadas con abundante materia orgánica, como charcos y estanques.

Grafica de un Modelo logístico del *Paramecium*

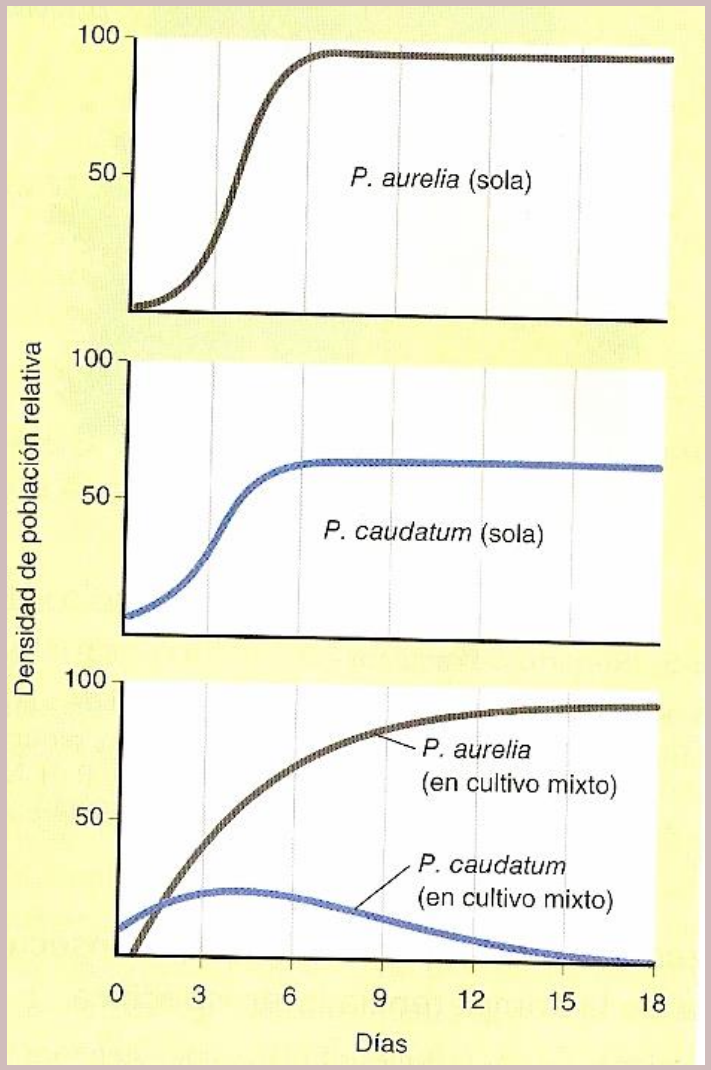


La competencia entre especies con nichos superpuestos puede causar exclusión competitiva

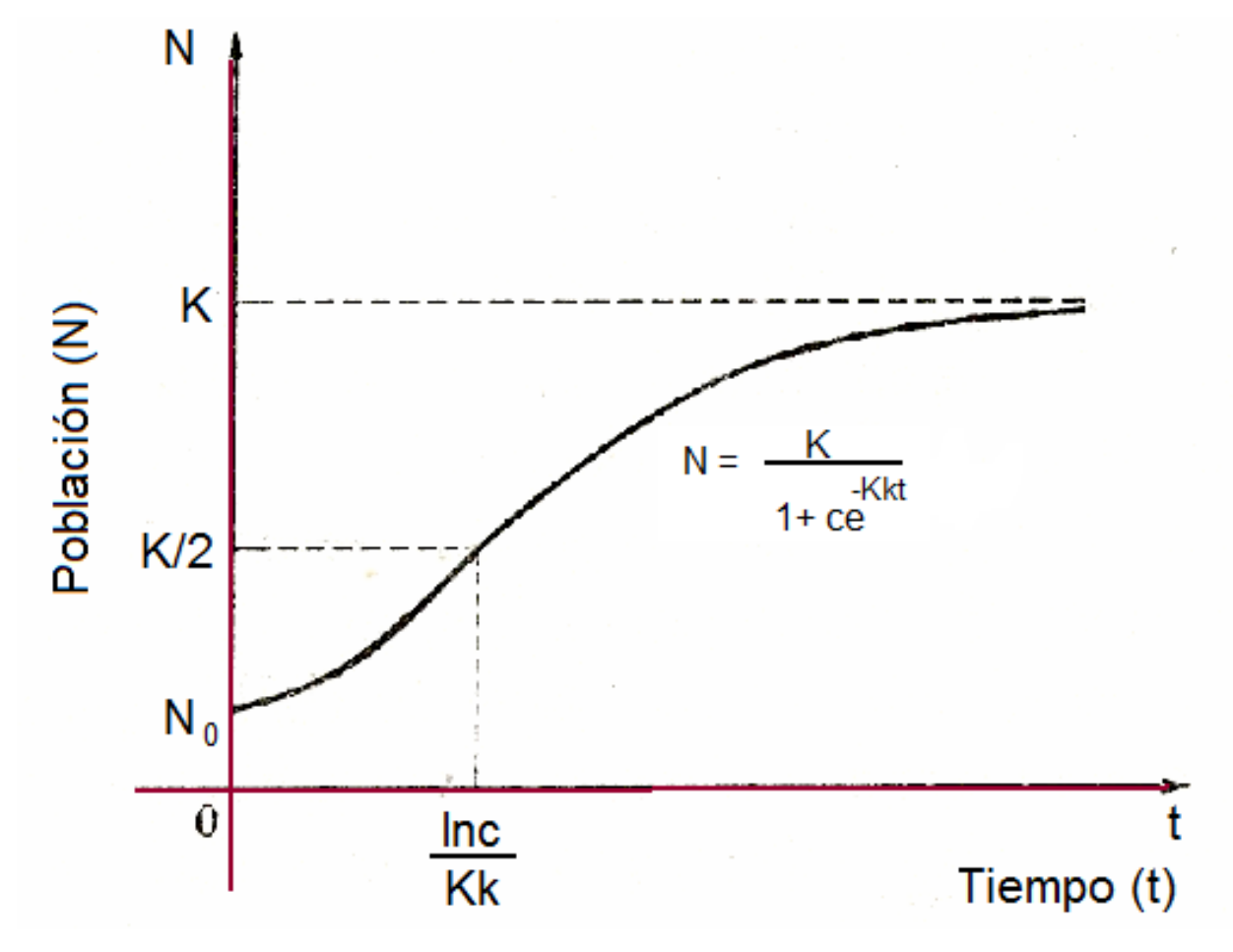
No es posible que dos especies ocupen el mismo nicho en la misma comunidad indefinidamente. El principio de exclusión competitiva propone que una especie excluye a la otra de su nicho como resultado de competencia interespecífica.

Experimento de Gause, sobre competencia interespecífica

Dos especies en competencia biológica por los mismos recursos no pueden coexistir en forma estable si los demás factores ecológicos permanecen constantes.



Otro ejemplo de un Modelo Logístico



Modelo logístico

La ecuación logística describe el crecimiento y regula la población

El crecimiento de la población N=N(t), obedece a la ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = kN(K - N);$$

La solución de la ecuación logística es:

$$N = \frac{K}{1 + ce^{-Kkt}}$$

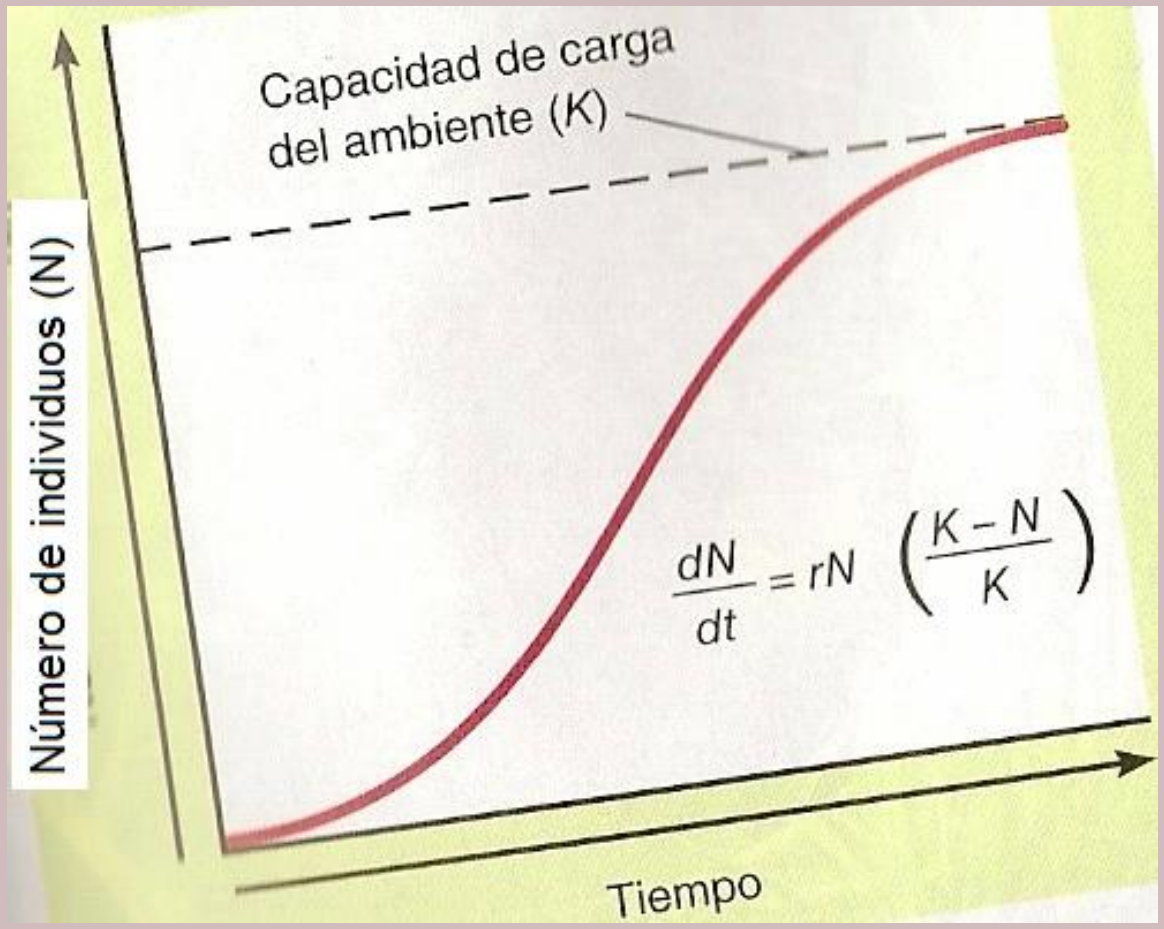
Crecimiento logístico; curva “S”

r_{max}: tasa intrínseca de crecimiento es la tasa máxima que puede crecer una población en condiciones ideales.

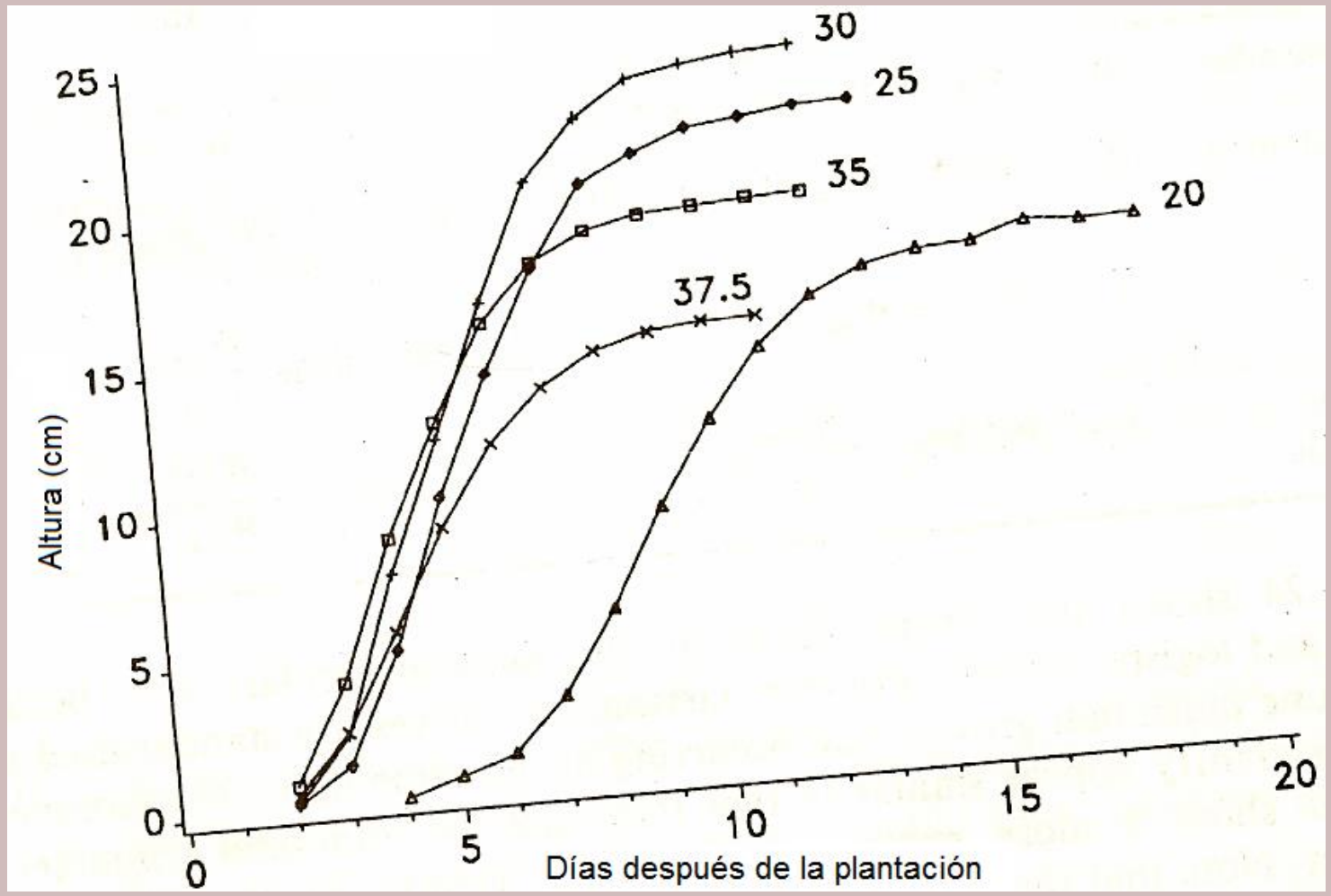
K: capacidad de carga del ambiente es la máxima población que puede mantenerse durante un tiempo indefinido por un ambiente dado.

(K-N/K) este factor disminuye a medida que se aproxima a K

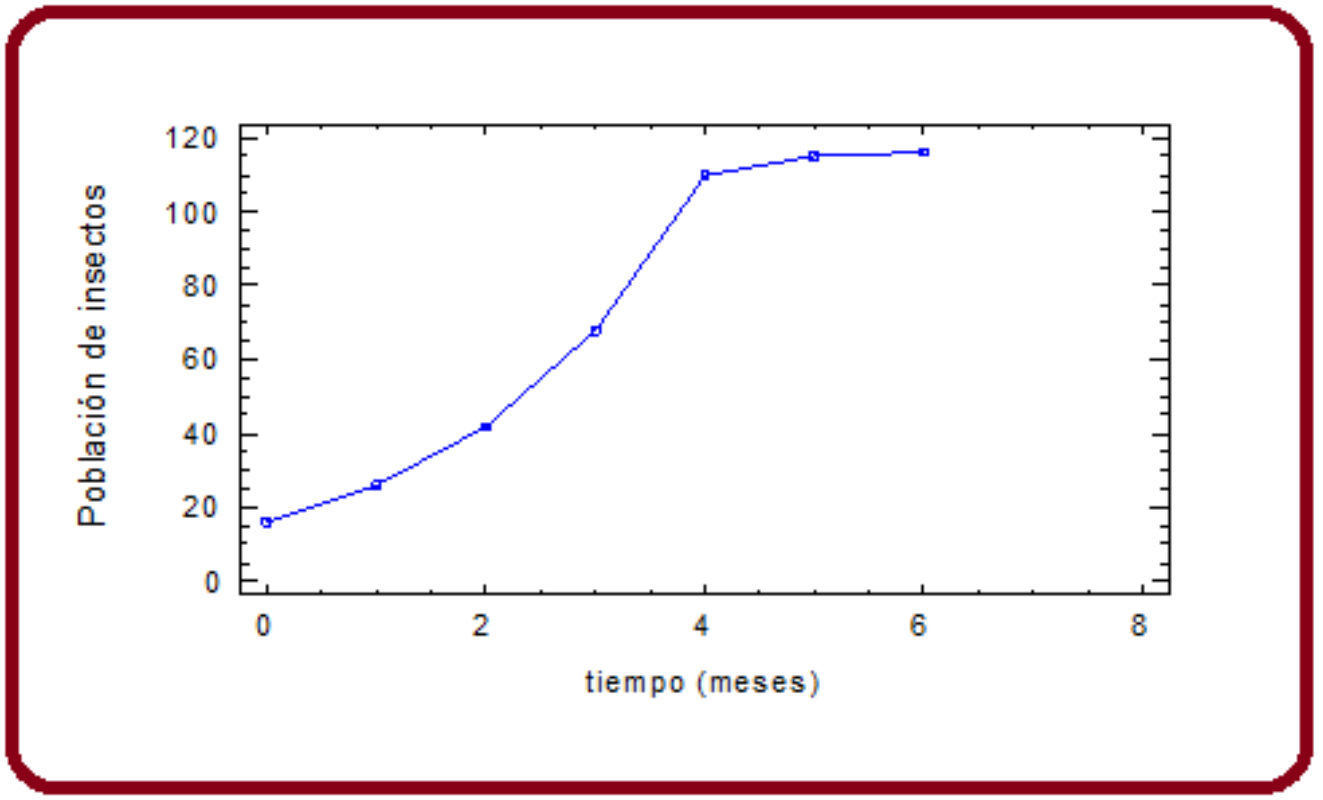
Gráfico de un crecimiento logístico



Otro grafico de un crecimiento logístico



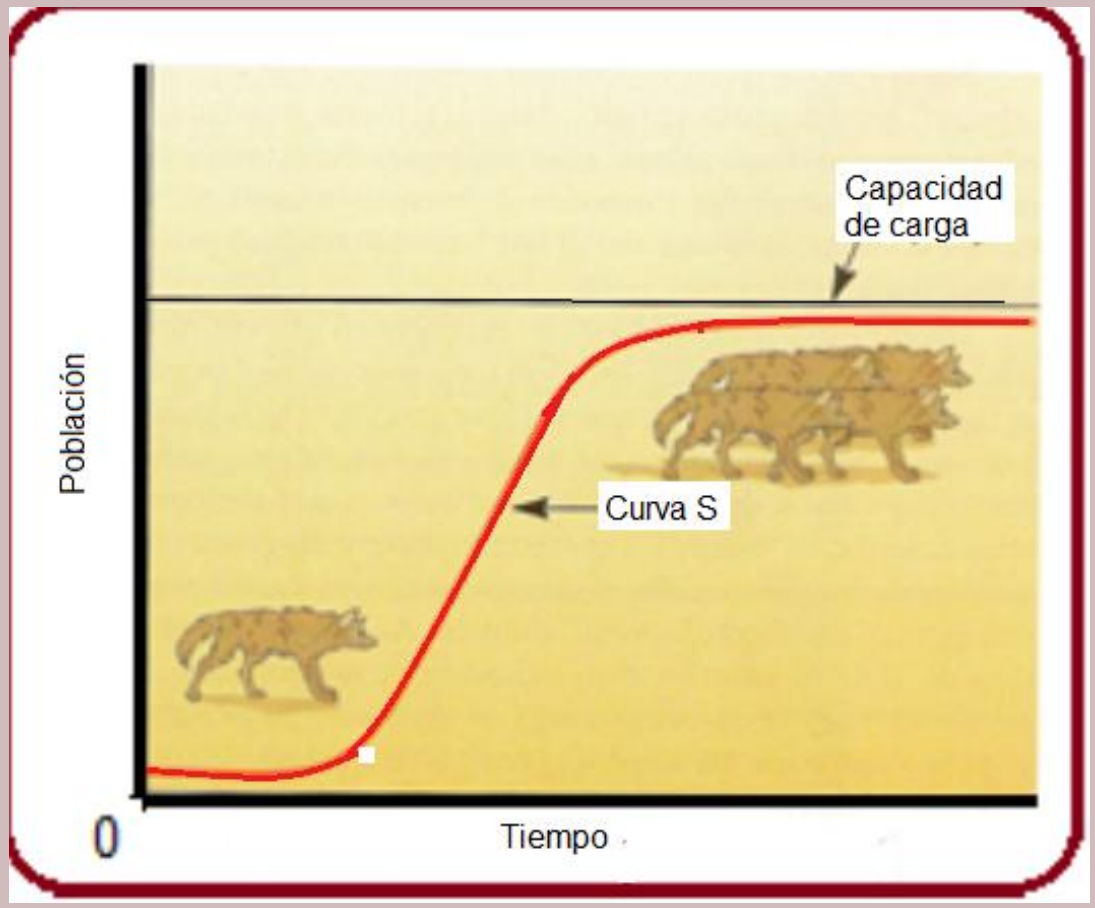
Para N_2 el crecimiento de la curva es de tipo sigmoidal o logística



La curva s o curva logística

$$\frac{dN}{dt} = rN[1 - \frac{N}{K}]$$

Le ecuación logística informa del cambio de la población con respecto al tiempo es igual al producto de la tasa de crecimiento por la población presente y esta es afectada por la capacidad de carga en un tiempo determinado.



Bibliografía

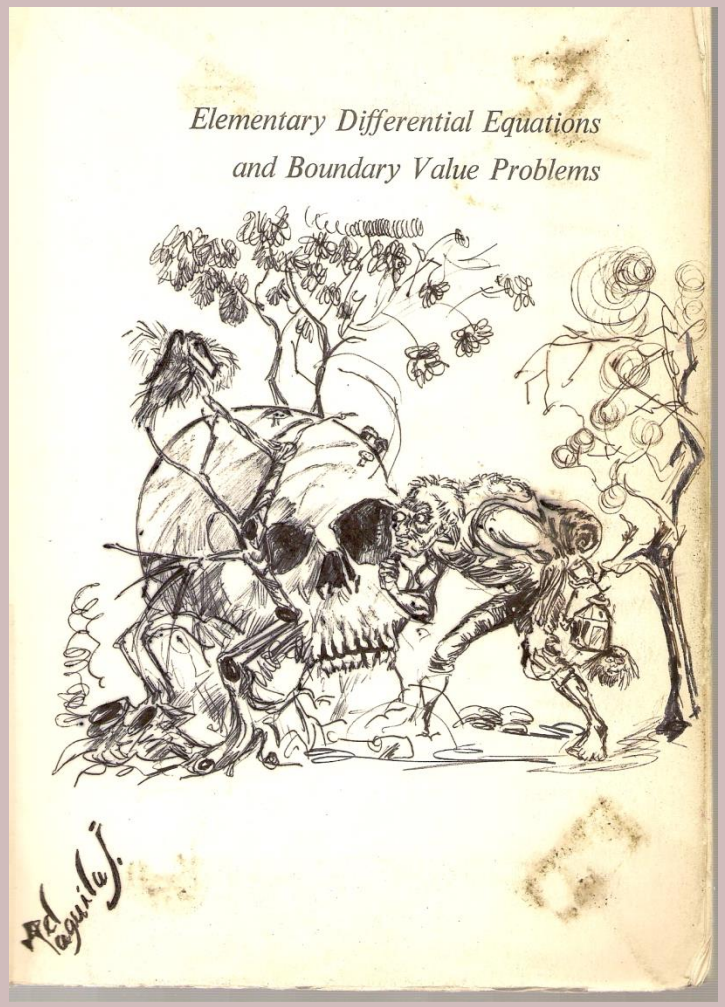
Edward Batschelet

Introduction to Mathematics for Life Scientists

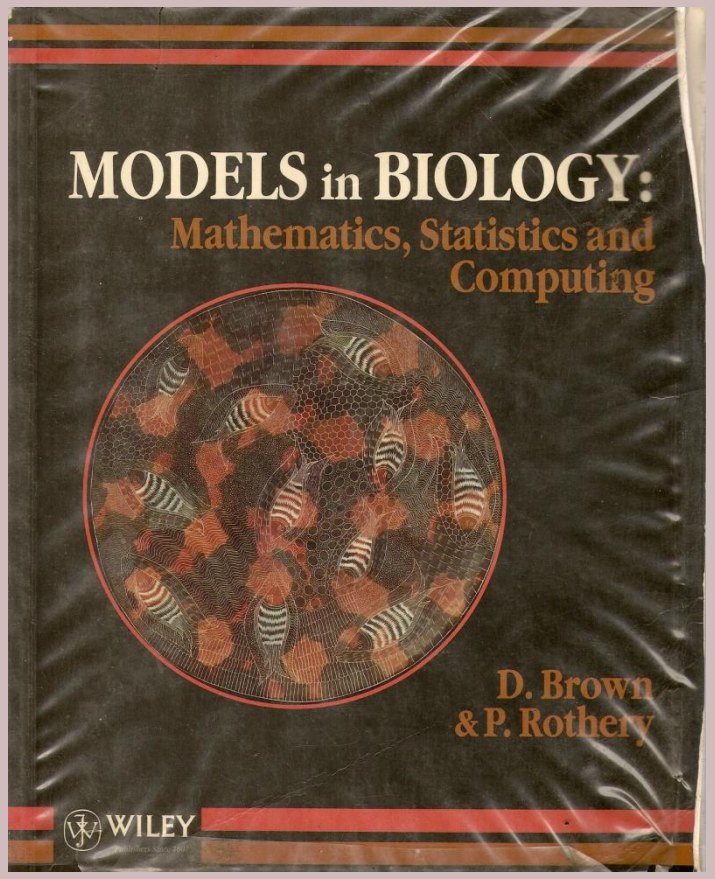
Third Edition

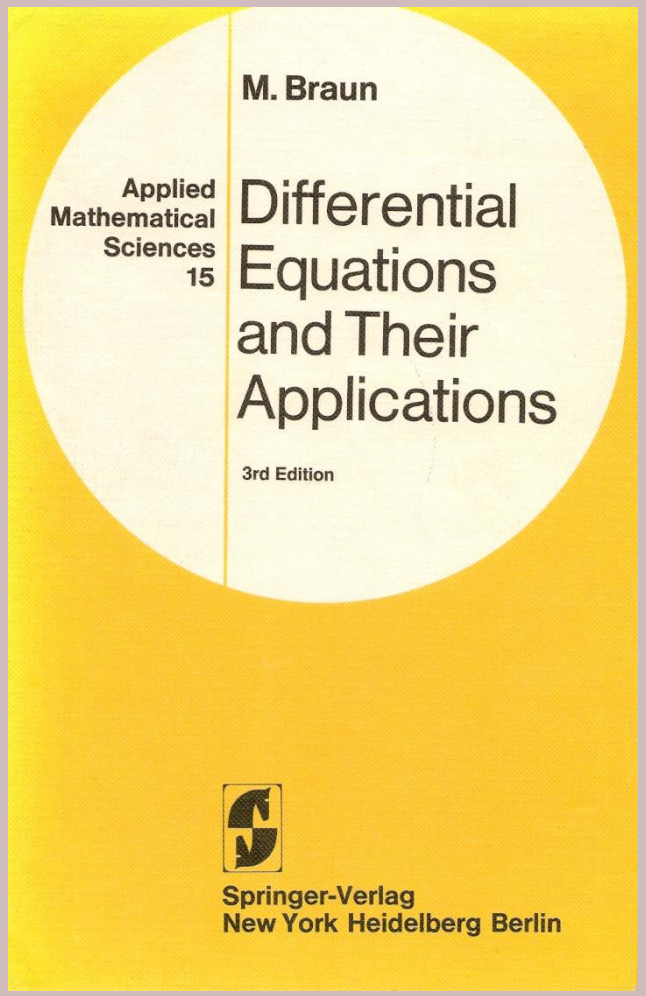
With 227 Figures

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1979



Bibliografía





BIBLIOGRAFÍA

- 1. Batschelet, E. 1978. Matemáticas básicas para biocientíficos. Ed. DOSSAT, S.A. España. 645 p.
- 2. Boy,W.E., DiPrima, R.C. 1977. Elementary differential equations and boundary value problems. 3er. Edition. United State of America.574 p.
- 3. Brow, D., Rothery, P. 1993. Models in Biology: Mathematics, Statistics and Computing. John Wiley &Sons. Great Britain.669 p.
- 4. Dudley B. A.C. 1977. Mathematical and biological interrelations. John Wiley & Sons. 401p