Universidad Autónoma del Estado de México

Facultad de Ciencias


# Propiedades de la función $T$ de Jones y algunas relaciones con la función $S$

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**MATEMÁTICO**

PRESENTA:

**Andrés Téllez Núñez**

ASESORES:
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI
DR. JOSÉ GUADALUPE ANAYA ORTEGA

TOLUCA, MÉXICO 2019

# Introducción

Acerca de la función $T$ de Jones se encuentra mucho trabajo en la literatura, así que es de nuestro interés estudiar algunas propiedades que aparecen en [1], además deseamos analizar algunas propiedades de la función $S$, la cual aparece en [3], y estudiar algunas relaciones con la función $T$. En [7] aparece un estudio de la función $T$ en la clase de los continuos métricos, y en [1] da un estudio de la función $T$ sin considerar espacios métricos. Cabe mencionar que durante la lectura de este trabajo se encontrarán algunos resultados conocidos en los cuales se debilitaron algunas hipótesis, sin perder la veracidad de los mismos.

En el Capítulo 1, se describen hechos básicos que serán de utilidad durante este trabajo, por ejemplo: presentamos definiciones de: espacios Hausdorff, regular, normal entre otras. También en este capítulo escriben resultados acerca de un espacio $X$ y sus componentes, los cuales nos van ser de utilidad para poder estudiar algunas propiedades de la función $T$ de Jones, además se describen a los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$ sobre los cuales las funciones $T$, $K$ y $S$ van a ser definidas.

En el Capítulo 2, se muestra la definición de la función $T$ de Jones y se define a la función $T^n$ de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$, donde $X$ es un espacio topológico y se hace un estudio de la función $T^n$ en espacios topológicos de manera general, algunas propiedades importantes que se estudian sobre la función $T^n$ son los siguientes:

- Sean $X$ un espacio topológico y $x \in X$. Si $T^{n+1}(x) = T^n(x)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $T^{n+m}(x) = T^n(x)$ para toda $m > 1$.
- Sean $X$ un espacio regular, localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $C \in 2^X$, se tiene que $T^n(C) = C$. En particular $T^n : \mathcal{P}(X) \to 2^X$ es

una función suprayectiva.

- Sea $X$ un espacio compacto. Entonces $T(\emptyset) = \emptyset$ si y sólo si $X$ tiene una cantidad finita de componentes.

- Sean $X$ un espacio compacto, conexo y de Hausdorff y $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $X_i \cap X_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Si cada $X_i$ es conexo, entonces existen subconjuntos no vacíos cerrados y conexos $Y_1, \ldots, Y_m$, con $m \leq n$, de $X$ tales que $T(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i) = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Y_j$, cada $Y_j$ contiene algún $X_i$ y $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, si $i \neq j$.

En la segunda parte del Capítulo 2, se estudian definiciones como aposindesis, irreducibilidad, simetría e indescomponibilidad del espacio y algunas relaciones que se tienen con la función $T$ de Jones, por ejemplo tenemos los siguientes resultados interesantes:

- Si $X$ es un espacio conexo, regular, localmente conexo y $T_1$, entonces $X$ es aposindético.

- Sean $X$ un espacio conexo y $p, q \in X$. Entonces $X$ es aposindético en $p$ con respecto a $q$ si y sólo si $p \in X \setminus T(q)$.

- Un espacio $X$ es aposindético si y sólo si $T(p) = \{p\}$ para cada $p \in X$.

- Si $X$ es un espacio compacto, conexo, irreducible y de Hausdorff, entonces $X$ es $n$-simétrico.

- Un espacio $X$ es indescomponible si y sólo si $T(p) = X$ para cada $p \in X$.

En el Capítulo 3, se introducen las funciones $S$ y $K$ utilizando la definición de la función $T$ y se estudian relaciones entre estas funciones con los conceptos de aposindesis, indescomponibilidad, unicoherencia, conexidad, simetría, aditividad, idempotencia y continuidad de $S$, algunas propiedades respecto a lo anterior son las siguientes:

- Para un espacio $X$ se tienen las siguientes condiciones:

    1. Si $X$ es $T_1$, entonces $X$ es indescomponible si y sólo si $S(A) = X$ para cada $A \in 2^X$,

2. Si $X$ es aposindético, entonces $S(A) = A$ para cada $A \in 2^X$,
3. Si $X$ es continuo hereditariamente unicoherente y $S(A) = A$ para cada $A \in 2^X$, entonces $X$ es aposindético.

- Sean $X$ un espacio topológico y $A \subset X$ cerrado no vacío. Si $T$ es idempotente en $X$, entonces $S(A) = \bigcup\limits_{p \in S(A)} S(p)$.

- Sea $X$ un espacio topológico conexo. Si $X$ satisface una de la siguiente condiciones:

  1. Indescomponible,
  2. Aposindético y $T_1$,
  3. Localmente conexo, regular y $T_1$

  entonces $S|_{2^X}$ es continua.

En este Capítulo también se analizará la relación existente entre las funciones $T$, $S$ y $K$, por ejemplo, se tiene este resultado:

- Sea $X$ un continuo. Entonces se tienen las siguientes condiciones:
  1. Si $A \subset B \subset X$, entonces $K(A) \subset K(B)$,
  2. $S(p) = T(p) \cap K(p)$ para cada $p \in X$,
  3. $S(A) \subset T(A) \cap K(A)$ para cada $A \in 2^X$,
  4. $S(A) = T(A) \cap K(A)$ para cada $A \in C(X)$.

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Resultados básicos

Sea $A$ un conjunto. El **conjunto potencia** de $A$ es denotado por $\mathcal{P}(A)$. Sea $A$ un subconjunto de un espacio topológico $X$, el **interior** de $A$ se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en $A$ y se denota como $\text{int}(A)$, la **cerradura** de $A$ se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $A$ y se denota como $\text{cl}(A)$, la **frontera** de $A$ se define mediante la ecuación: $\text{fr}(A) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(X \setminus A)$. Los símbolos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ detonarán a los números reales y a el espacio Euclideano, respectivamente. El símbolo $\mathbb{N}$ dentorará al conjunto de los números naturales.

**Definición 1.1.** *Se dice que un espacio topológico $X$ es de **Hausdorff** si para cada par de puntos $x$, $y$ de $X$ distintos, existen abiertos disjuntos que contienen a $x$ e $y$, respectivamente.*

**Definición 1.2.** *Sea $X$ un espacio topológico tal que los conjuntos unipuntuales son cerrados en $X$.*

1. *Se dice que $X$ es **regular** si para cada $x \in X$ y cada cerrado $B$ de $X$ tal que $x \notin B$, existen dos conjuntos abiertos ajenos que contienen a $x$ y $B$, respectivamente.*

2. *Se dice que $X$ es **normal** si para cualesquiera dos cerrados ajenos $A$ y $B$ de $X$, existen dos conjuntos abiertos ajenos que contienen a $A$ y $B$, respectivamente.*

**Observación 1.3.** *En un espacio topológico $X$ tal que los conjuntos unipuntuales son cerrados, se tiene que la normalidad de $X$ implica la regularidad de éste.*

**Proposición 1.4.** *Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

*Demostración.* Sea $Y$ un subespacio compacto del espacio de Hausdorff $X$. Probaremos que $X \setminus Y$ es abierto, luego $Y$ será cerrado.
Sea $x_0$ un punto de $X \setminus Y$. Vamos a demostrar que existe un entorno de $x_0$ que no intersecta a $Y$. Para cada punto $y \in Y$, elijamos entornos disjuntos $U_y$ y $V_y$ de los puntos $x_0$ e $y$, respectivamente (utilizando la condición de Hausdorff). La colección $\{V_y : y \in Y\}$ es un cubrimiento de $Y$ por abiertos de $X$; por tanto podemos cubrir a $Y$ con un número finito de estos conjuntos, por ejemplo $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$.El conjunto abierto

$$V = V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$$

contiene a $Y$, y es ajeno al abierto

$$U = U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$$

que se forma al tomar la intersección de los correspondientes entornos de $x_0$, ya que si $z$ es un punto de $V$, entonces $z \in V_{y_i}$ para algún $i$, por tanto, $z \notin U_{y_i}$ y así $z \notin U$. Por tanto, $U$ es un entorno de $x_0$ que no intersecta a $Y$. $\square$

El resultado que hemos establecido a lo largo de la demostración anterior nos será útil más tarde, así que vamos a enunciarlo de un modo explícito para referirnos a él de una manera mas fácil con el siguiente Lema (ver [8, Lema 26.4, p. 188].

**Lema 1.5.** *Si $Y$ es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff $X$ y $x_0 \notin Y$, entonces existen abiertos disjuntos $U$ y $V$ de $X$ conteniendo a $x_0$ y a $Y$ respectivamente.*

**Proposición 1.6.** *Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.*

*Demostración.* Primero veamos que $X$ es regular. Sean $X$ un espacio de Hausdorff compacto, $x \in X$ y $B$ un conjunto cerrado en $X$ tal que $x \notin B$, aplicando el Lema 1.5 se prueba que existen conjuntos abiertos disjuntos alrededor de $x$ y $B$ respectivamente.

Utilizando el mismo argumento que se dio en la Proposición 1.4 se puede probar que $X$ es normal: dados conjuntos cerrados disjuntos $A$ y $B$ en $X$, elijamos para cada punto $a \in A$ , conjuntos abiertos disjuntos $U_a$ y $V_a$ que contengan a $a$ y $B$ respectivamente (aquí usamos la regularidad de $X$). La colección $\{U_a\}$ es una cubierta abierta de $A$; como $A$ es compacto se puede recubrir por un número finito de conjuntos $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_m}\}$. Así,

$$U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$$

y

$$V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$$

son los conjuntos abiertos disjuntos que contienen a $A$ y $B$ respectivamente.

□

**Lema 1.7.** *Sean $X$ un espacio topológico y $A$ un subconjuto cerrado de $X$ con un número finito de componentes. Si $x \in \operatorname{int}(A)$ y $C$ es la componente de $A$ que contiene a $x$, entonces $x \in \operatorname{int}(C)$.*

*Demostración.* Sean $C, C_1, \ldots, C_n$ las componentes de $A$. Supongamos que $x \in C$ y $x \in \operatorname{int}(A)$. Entonces existe un subconjunto abierto $U$ de $X$ tal que $x \in U \subset A$.
Por otra parte, como $A$ es cerrado en $X$ y sus componentes son cerradas en $A$, $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ es cerrado en $X$. De donde $U \cap \left( X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} C_j \right)$ es un abierto $X$. Sea $V = U \cap \left( X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} C_j \right)$. Probaremos que $x \in V \subset C$. Dado que $x \in C \cap U$ y $C$ es una componente de $A$, $x \in V$. Para probar la contención, sea $z \in V$. Dado que $V \subset U$, $z \in A$. Así, como $z \in X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} C_j$, $z \in C$. Esto prueba que $V \subset C$. Por lo que $x \in \operatorname{int}(C)$. □

Sean $X$ un espacio topológico y $Y \subset X$. La notación $Y = P|Q$ significa que $Y = P \cup Q$ donde $P$ y $Q$ son abiertos de $Y$ tales que $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$, $\operatorname{cl}(P) \cap Q = \emptyset$ y $\operatorname{cl}(Q) \cap P = \emptyset$.

**Proposición 1.8.** *Sean $X$ un espacio conexo y $C$ un subconjunto conexo de $X$ tal que $X \setminus C = A|B$. Entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos. Más aún, si $C$ es cerrado, entonces $A \cup C$ y $B \cup C$ son cerrados y conexos.*

*Demostración.* Para probar la conexidad $A \cup C$ supongamos lo contrario. Entonces existen $K, L \subset X$ tales que $A \cup C = K|L$. Como $C$ es conexo, $C \subset K$ o $C \subset L$. Sin pérdidad de generalidad, supongamos que $C \subset K$. Probaremos que $X = L|(B \cup K)$. Claramente $L$ y $B \cup K$ son no vacíos y $X = L \cup (B \cup K)$. Necesitamos probar que $L \subset A$. Sea $x \in L$. Como $A \cup C = K|L$, $x \in A$ o $x \in C$. En el caso de que $x \in C$, se tiene que $x \in K$, esto es una contradicción. Por lo que $L \subset A$.
Finalmente, veamos que $\mathrm{cl}(L) \cap (B \cup K) = \emptyset$ y $L \cap \mathrm{cl}(B \cup K) = \emptyset$. Notemos que $\mathrm{cl}(L) \cap K = \emptyset$. Como $\mathrm{cl}(L) \subset \mathrm{cl}(A)$, $\mathrm{cl}(L) \cap B = \emptyset$. Así, $\mathrm{cl}(L) \cap (B \cup K) = \emptyset$. Ahora, como $L \subset A$, $\mathrm{cl}(B) \cap L = \emptyset$. Así, dado que $\mathrm{cl}(K) \cap L = \emptyset$, $L \cap \mathrm{cl}(B \cup K) = \emptyset$. De donde $X = L|(B \cup K)$, lo que implica que $X$ no es conexo, una contradicción.
Por lo que $A \cup C$ es conexo.
De la misma manera, podemos probar que $B \cup C$ es conexo.
Finalmente, veamos que $A \cup C$ y $B \cup C$ son cerrados. Como $C$ es cerrado, $X \setminus C = A|B$ y $\mathrm{cl}(A) \cap B = \emptyset$, entonces:

$$B = X \setminus (\mathrm{cl}(A) \cup C) = X \setminus (A \cup C).$$

Por lo que $B$ es abierto y $A \cup C$ es cerrado. De manera análoga se prueba que $B \cup C$ es cerrado. □

Antes de continuar, recordemos el concepto de relación.

**Definición 1.9.** *Sea $A$ un conjunto no vacío. Si $R$ es un subconjunto de $A \times A$, entonces a $R$ le llamaremos una relación.*

**Definición 1.10.** *Sea $X$ un espacio topológico. Definimos una relación $R$ en $X$ de la siguiente manera: dados $x, y \in X$, entonces $(x, y) \in R$ si y sólo si todo abierto-cerrado en $X$ que contiene a $x$ también contiene a $y$. Es fácil probar que $R$ es una relación de equivalencia en $X$. Las clases de equivalencia reciben el nombre de **cuasi-componentes** de $X$.*

**Teorema 1.11.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces se tienen las siguientes condiciones:*

1. *Cada componente de $X$ es un subconjunto de una cuasi-componente.*

2. *La cuasi-componente de $x$ en $X$ es la intersección de todos los abiertos y cerrados que contienen a $x$.*

3. *Si $X$ es compacto y de Hausdorff, entonces cuasi-componentes y componentes coinciden.*

*Demostración.* Para probar 1, sean $C$ una componente de $X$ y $x, y \in C$. Supongamos que $x$ y $y$ están en distintas cuasi-componentes de $X$. Entonces existe un abierto-cerrado $A$ en $X$ tal que $x \in A$ pero $y \notin A$. Notemos, $x \in C \cap A$, $y \in C \setminus A$, $C = (C \cap A) \cup (C \setminus A)$. Dado que $A$ y $C$ son cerrados $X$, $C \cap A$ es cerrado en $X$. Ahora, como $A$ es abieto, $C$ es cerrado en $X$ y $C \setminus A = C \cap (X \setminus A)$, $C \setminus A$ es cerrado en $X$. Así, $(C \cap A)|(C \setminus A)$ es una separación de $C$, esto es una contradicción. De donde $x$ y $y$ están en una cuasi-componente de $X$. Por lo tanto $C$ está contenida en una cuasi-componente.

Para demostrar 2, sean $Q$ una cuasi-componente de $X$, $x \in Q$ y

$$\mathcal{Q} = \{F \subset X : F \text{ es abierto y cerrado y } x \in F\}.$$

Probaremos que $Q = \bigcap \mathcal{Q}$. Sea $y \in Q$. Entonces $(x, y) \in R$. Así, dado que $x \in \bigcap \mathcal{Q}$, $y \in \bigcap \mathcal{Q}$.
Ahora, sea $z \in \bigcap \mathcal{Q}$. Veamos que $(x, z) \in R$. Sea $F$ un abierto y cerrado tal que $x \in F$. De donde $F \in \mathcal{Q}$. Así, como $z \in \bigcap \mathcal{Q}$, $x, z \in F$. Por lo que $z \in Q$. Esto prueba que $Q = \bigcap \mathcal{Q}$.

Para probar 3, sean $C$ una componente de $X$, $x \in C$ y $Q$ la cuasi-componente de $X$ la cual contiene a $x$. Probaremos que $C = Q$. Por 1, $C \subset Q$.

Para probar la otra contención, es suficiente mostrar que $Q$ es conexa. Supongamos que existen dos conjuntos cerrados y ajenos $A$ y $B$ distintos del vacío tales que $Q = A \cup B$. Sin pérdidad de generalidad, supongamos que $x \in A$. Por la normalidad del espacio $X$, existen conjuntos abiertos $V, W \subset X$ tales que $A \subset V$, $B \subset W$ y $V \cap W = \emptyset$. Denotamos por $\mathcal{U}$ a la familia de todos los abiertos y cerrados tal que $\bigcap \mathcal{U} = Q$ y sea $\mathcal{F} = \{U \setminus (V \cup W) : U \in \mathcal{U}\}$. Notemos que los elementos de $\mathcal{F}$ son subconjuntos cerrados de $X$. Veamos que $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$. Tomemos $y \in \bigcap \mathcal{F}$. En particular $y \notin V \cup W$. Por otra parte, $y \in \bigcap \mathcal{U}$. Así, dado que $\bigcap \mathcal{U} \subset V \cup W$, $y \in V \cup W$, esto es una contradicción.

Ahora, como $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
X &= X \setminus \bigcap \mathcal{F} \\
&= X \setminus (\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \setminus (V \cup W)) \\
&= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} X \setminus (U \setminus (V \cup W)) \\
&= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} X \setminus (U \cap (X \setminus (V \cup W))) \\
&= \bigcup_{U \in \mathcal{U}} ((X \setminus U) \cup (V \cup W)).
\end{aligned}$$

Como cada $(X \setminus U) \cup (V \cup W)$ es abierto, por la compacidad de $X$, existen $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ tales que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} ((X \setminus U_i) \cup (V \cup W)).$$

De donde:

$$\begin{aligned}
\emptyset &= X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} ((X \setminus U_i) \cup (V \cup W)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{k} X \setminus ((X \setminus U_i) \cup (V \cup W)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{k} (U_i \cap (X \setminus (V \cup W))) \\
&= (\bigcap_{i=1}^{k} U_i) \cap (X \setminus (V \cup W)).
\end{aligned}$$

Por lo que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subset V \cup W$. Notemos que $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ es un abierto y cerrado en $X$. Así, $Q \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$.

Como $\mathrm{cl}(V) \cap (V \cup W) = (\mathrm{cl}(V) \cap V) \cup (\mathrm{cl}(V) \cap W) = V$,

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(V \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i) &\subset \mathrm{cl}(V) \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i \\ &= \mathrm{cl}(V) \cap (V \cup W) \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i \\ &= V \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i.\end{aligned}$$

De donde, $V \cap \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ es un abierto y cerrado. Así, dado que $x \in A \subset V \cap \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, se tiene que $Q \subset V \cap \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$. Por lo que:
$B \subset Q \cap W \subset V \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i) \cap W = \emptyset$, esto es una contradicción.
Lo cual prueba que la cuasi-componente $Q$ es conexa. Por lo tanto $Q = C$. $\square$

**Teorema 1.12.** *Sean $X$ un espacio topológico conexo, compacto y de Hausdorff. Si $A$ es un subconjunto propio, cerrado y no vacío de $X$ y $C$ es una componente de $A$, entonces $C\cap$ $\mathrm{fr}(A) \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Supongamos que $C \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$. Denotamos por $\mathcal{U}$ a la familia de todos los abiertos y cerrados de $A$ que contienen a la componente $C$. Por el Teorema 1.11, $\bigcap \mathcal{U} = C$. Necesitamos probar que la familia $\mathcal{F} = \{\mathrm{fr}(A) \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{fr}(A)$. Notemos que, por cada $U \in \mathcal{U}$, $A \setminus U$ es abierto y cerrado en $A$. Así, por cada $U \in \mathcal{U}, \mathrm{fr}(A) \setminus U = \mathrm{fr}(A) \cap (A \setminus U)$ es abierto en $\mathrm{fr}(A)$. Notemos que $\mathrm{fr}(A) \neq \emptyset$. Para ver que $\mathcal{F}$ es una cubierta de $\mathrm{fr}(A)$, sea $y \in \mathrm{fr}(A)$. Dado que $\bigcap \mathcal{U} = C$ y $C \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in \mathrm{fr}(A) \setminus U$. Esto demuestra que $\mathcal{F} = \{\mathrm{fr}(A) \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de $\mathrm{fr}(A)$.
Ahora, dado que $\mathrm{fr}(A)$ es compacto (pues es cerrada en el compacto $X$), existen $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ tales que $\mathrm{fr}(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} (\mathrm{fr}(A) \setminus U_i) = \mathrm{fr}(A) \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$. Por lo que $\mathrm{fr}(A) = \mathrm{fr}(A) \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$. Así, $\mathrm{fr}(A) \cap \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i = \emptyset$. Concluimos que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \subset \mathrm{int}(A)$.

Hagamos $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Claramente $\emptyset \neq C \subset U$. Como $\mathrm{fr}(A) \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i = \emptyset$, $U$ es un subconjunto propio de $X$. Ahora, probaremos que $U$ es abierto y cerrado en $X$. Dado que $A$ es cerrado en $X$ y cada $U_i$ es cerrado en $A$, $U$ es cerrado en $X$. Primero, veremos que $U$ es abierto en $X$. Sea $x \in U$. Probaremos que existe un abierto $V$ en $X$ tal que $x \in V \subset U$. Como cada $U_i$ es abierto en $A$, existen abiertos $V_1, \ldots, V_k$ en $X$ tales $U_i = V_i \cap A$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{k} (V_i \cap \mathrm{int}(A))$. Dado que $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \subset \mathrm{int}(A)$, $x \in V$.
Finalmente, veamos que $V \subset U$. Sea $z \in V$. Por lo que $z \in (V_i \cap \mathrm{int}(A)) \subset V_i \cap A = U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. De donde $z \in U$. Esto prueba que $U$ es abierto en $X$.
De lo anterior, tenemos que $U$ es un abierto y cerrado en $X$ tal que $\emptyset \neq U \neq X$, esto contradice la conexidad de $X$.
Por lo tanto cada componente $C$ de $A$, cumple que $C \cap \mathrm{fr}(A) \neq \emptyset$. □

**Lema 1.13.** *Sean $X$ un espacio topológico, $V \subset X$ y $U$ un abierto no vacío de $X$. Si $\mathrm{cl}(U) \cap \mathrm{cl}(V) = \emptyset$, entonces $\mathrm{fr}(U) \cap (U \cup V) = \emptyset$.*

*Demostración.* Si $x \in \mathrm{fr(U)}$, entonces probaremos que $x \notin U \cup V$. Sea $x \in \mathrm{fr(U)}$. Si $x \in U$, entonces $x \in U \cap \mathrm{cl}(X \setminus U)$. Así, dado que $U$ es abierto y $x \in \mathrm{cl}(X \setminus U)$, $U \cap X \setminus U \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. En el caso de que $x \in V \subset \mathrm{cl}(V)$, entonces $x \in \mathrm{cl}(U) \cap \mathrm{cl}(V)$, lo cual es una contradicción. Por lo que $x \notin U \cup V$. Esto prueba que $\mathrm{fr(U)} \cap (\mathrm{U} \cup \mathrm{V}) = \emptyset$. □

### 1.1.1. Compacidad y redes

**Definición 1.14.** *Sean $A$ un conjunto no vacío y $R$ una relación en $A$. Decimos que $R$ es:*

*a)* ***reflexiva****, si para cada $a \in A$, $(a, a) \in R$;*

*b)* ***simétrica****, si para cada $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$;*

*c)* ***transitiva****, si para cada par $(a, b), (b, c) \in R$, $(a, c) \in R$;*

*d)* ***antisimétrica****, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$;*

*e)* ***comparativa****, si para cada $(a, b) \in R$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.*

**Definición 1.15.** *Sean $A$ un conjunto no vacío y $\leq$ una relación en $A$. Decimos que $\leq$ es un:*

- ***orden parcial*** *en $A$, si $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*
- ***orden total*** *en $A$, si $\leq$ es un orden parcial y es comparativa.*

**Definición 1.16.** *Un* ***conjunto parcialmente ordenado*** *(resp.* ***conjunto totalmente ordenado****) es una pareja $(A, R)$, en donde $A$ es un conjunto y $R$ es un orden parcial (resp. es un orden total).*

**Definición 1.17.** *Sea $A$ un conjunto no vacío y $\leq$ un orden parcial en $A$ y $B \subset A$. Decimos que $B$ es una* ***cadena*** *en $A$, si $\leq$ es un orden total en $B$.*

**Definición 1.18.** *Sean $\leq$ un orden parcial en $A$ y $B \subset A$. Decimos que $b \in B$ es un* ***elemento maximal*** *de $B$ en el orden $\leq$, si no existe $x \in B$ tal que $b \leq x$ y $x \neq b$.*

**Definición 1.19.** *Sean $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subset A$. Decimos que $x_0 \in A$ es una* ***cota superior*** *de $B$, si $x \leq x_0$ para cada $x \in B$.*

**Lema 1.20. (Lema de Zorn)** *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si toda cadena en $A$ tiene una cota superior, entonces existe un elemento maximal en $A$.*

**Definición 1.21.** *Un conjunto no vacío parcialmente ordenado $(J, \leq)$ es un* ***conjunto dirigido****, si para cada par de elementos $\alpha, \beta \in J$, existe un elemento $\gamma \in J$ con la propiedad de que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.*

**Definición 1.22.** *Sean $(J, \leq)$ un conjunto dirigido y $K$ un subconjunto no vacío de $J$. Se dice que $K$ es* ***cofinal*** *en $J$, si para cada $\alpha \in J$, existe $\beta \in K$ tal que $\alpha \leq \beta$. En el caso de que $K = J$ usaremos que $J$ es cofinal, en vez de cofinal en $J$.*

**Definición 1.23.** *Sea $A$ un conjunto no vacío. Una* ***red*** *en $A$ es una función $f : J \longrightarrow A$, donde $J$ es un conjunto dirigido. El punto $f(\alpha)$ lo denotaremos por $x_\alpha$. Denotaremos a la red por $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$.*

**Definición 1.24.** *Sean $X$ un espacio topológico, $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ una red en $X$ y $z \in X$. Se dice que la red* ***converge*** *a $z$, si para cada abierto $U$ que contiene a $z$, existe $\alpha \in J$ tal que $x_\beta \in U$, para todo $\beta \geq \alpha$.*

**Definición 1.25.** *Sean $A$ un conjunto no vacío; $(J, \leq)$, $(K, \preceq)$ conjuntos dirigidos y $f : J \longrightarrow A$ una red en $A$. Si $g : K \longrightarrow J$ es una función que satisface las siguientes condiciones*

- *si $\alpha \preceq \beta$, entonces $g(\alpha) \leq g(\beta)$*
- *g(K) es cofinal en $J$*

*entonces decimos que la función $f \circ g : K \longrightarrow A$ es una* ***subred*** *de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$.*

**Definición 1.26.** *Sean $X$ un espacio topológico, $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ una red en $X$ y $z \in X$. Decimos que $z$ es un* ***punto de acumulación*** *de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$, si para cada abierto $U$ que contiene a $z$, $J(U) = \{\alpha \in J : x_\alpha \in U\}$ es cofinal en $J$.*

Ahora veremos algunos resultados sobre redes.

**Proposición 1.27.** *Si $(J, \leq)$ es un conjunto dirigido y $K$ es cofinal en $J$, entonces $(K, \leq)$ es un conjunto dirigido.*

*Demostración.* Sean $\alpha, \beta \in K$. Como $(J, \leq)$ es un conjunto dirigido, existe $\delta \in J$ tal que $\alpha \leq \delta$ y $\beta \leq \delta$. Dado que $K$ es cofinal en $J$, existe $\gamma \in K$ tal que $\delta \leq \gamma$. Así, usando que $\leq$ es un orden parcial, $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$. $\square$

**Lema 1.28.** *Sean $X$ un espacio topológico, $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ una red en $X$ y $z \in X$. Entonces $z$ es un punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ si y sólo si alguna subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ converge a $z$.*

*Demostración.* Primero supongamos que $z$ es un punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$. Sea $\leq$ el orden del conjunto $J$. Tomemos

$$K = \{(\alpha, U) : \alpha \in J \text{ y } U \text{ es un abierto tal que } z, x_\alpha \in U\}.$$

Definimos un orden en $K$ como sigue: dados $(\alpha, U), (\beta, V) \in K$, $(\alpha, U) \leqslant (\beta, V)$ si y sólo si $\alpha \leq \beta$ y $V \subset U$. Claramente $(K, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Veamos que $(K, \leqslant)$ es un conjunto dirigido. Tomemos $(\alpha, U), (\beta, V) \in K$. Como $J$ es un conjunto dirigido, existe $\delta \in J$ tal que $\alpha \leq \delta$ y $\beta \leq \delta$. Dado que $U \cap V$ es un abierto que contiene a $z$, $J(U \cap V)$ es cofinal en $J$, por lo que, para $\delta$, existe $\gamma \in J(U\cap V)$ tal que $\delta \leq \gamma$. De la cofinalidad de $J(U\cap V)$, $x_\gamma \in U \cap V$. Así $(\gamma, U \cap V) \in K$ y cumple lo requerido. Esto prueba que $(K, \leqslant)$ es un conjunto dirigido.

Definamos $g : K \longrightarrow J$ como $g(\alpha, U) = \alpha$. Claramente, si $(\alpha, U) \leqslant (\beta, V)$, entonces $g(\alpha, U) = \alpha \leq \beta = g(\beta, V)$. Ahora, dado que para cada $\alpha \in J$, $(\alpha, X) \in K$ y $g(\alpha, X) = \alpha$, se tiene que $g(K) = J$. Así, de que $J$ es dirigido, $g(K)$ cofinal en $J$.

De esta manera, $(x_{g(\alpha,U)})$ es una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$. Finalmente, veamos que $x_{g(\alpha,U)} \longrightarrow z$. Tomemos $U$ un abierto que contiene a $z$; por hipótesis, $J(U)$ es cofinal en $J$. Sea $\alpha \in J(U)$, $x_\alpha \in U$. Ahora, consideremos $(\beta, V) \in K$ tal que $(\beta, V) \geqslant (\alpha, U)$. Veamos que $x_{g(\beta,V)} \in U$. Esto se sigue de que $x_\beta \in V$, $V \subset U$ y $x_{g(\beta,V)} = x_\beta$.

Para probar la suficiencia, sean $(S, \ll)$ un conjunto dirigido y $g : S \longrightarrow J$ una función tal que $f \circ g$ es la subred que converge a $z$. Tomemos un abierto $U$ de $X$ que contenga a $z$. Veamos que $J(U)$ es cofinal en $J$. Sea $\alpha \in J$. Puesto que $x_{g(s)}$ converge a $z$, existe $s_0 \in S$ tal que $x_{g(s)} \in U$ para toda $s \gg s_0$. Dado que $g(S)$ es cofinal en $J$, existe $s_1 \in S$ tal que $\alpha \leq g(s_1)$. Para $s_0, s_1$, existe $s_2 \in S$ tal que $s_0 \ll s_2$ y $s_1 \ll s_2$. De donde $g(s_0) \leq g(s_2)$ y $g(s_1) \leq g(s_2)$, en consecuencia $\alpha \leq g(s_2)$ y $x_{g(s_2)} \in U$. De esta manera, $g(s_2)$ es un elemento de $J(U)$ que cumple lo requerido. De lo anterior, se sigue que $z$ es un punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$. □

La prueba del siguiente teorema la encontramos en [8, Teorema 26.9, p. 193], la cual nos ayudará para algunos resultados.

**Teorema 1.29.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es compacto si y sólo si, para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en $X$ con la propiedad de la intersección finita, la intersección de todos los elementos de la colección*

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$$

*es no vacía.*

**Teorema 1.30.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es compacto si y sólo si toda red de $X$ tiene una subred convergente.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es compacto. Sean $(J, \leq)$ un conjunto dirigido y $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ una red en $X$. Para cada $\alpha \in J$, definimos $B_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$. Notemos que $x_\alpha \in B_\alpha$. Veamos que $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sea $\{B_\alpha\}_{i=1}^n$ una subcolección finita de $\{b_\alpha\}_{\alpha\in J}$. Así, dado que $(J, \leq)$ es dirigido, usando inducción, existe un elemento $\beta \in J$ tal que $\alpha_i \leq \beta$ para todo $i \in \{i, 2, \ldots, n\}$. De esta manera $x_\beta \in \bigcap_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$. Por tanto $\{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Notemos que $\{\mathrm{cl}(B_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ también tiene la propiedad de la intersección finita. Así, como $X$ es compacto, por el Teorema 1.29, $\bigcap_{\alpha \in J} \mathrm{cl}(B_\alpha) \neq \emptyset$. Sea $z \in \bigcap_{\alpha \in J} \mathrm{cl}(B_\alpha)$.

Afirmamos que $z$ es un punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, para lo cual es suficiente mostrar que, dado $U$ un abierto que contiene a $z$, $J(U)$ es cofinal en $J$.

Sea $\alpha \in J$, como $z \in \mathrm{cl}(B_\alpha)$, $U \cap B_\alpha \neq \emptyset$. Tomemos $y \in U \cap B_\alpha$, entonces existe $\beta \geq \alpha$ tal que $y = x_\beta \in U \cap B_\alpha$. Por tanto, $J(U)$ es cofinal en $J$. De esta manera, $z$ es un punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ y por el Lema 1.28 existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ que converge a $z$.

Para probar la implicación inversa, supongamos que toda red en $X$ tiene una subred convergente. Consideremos una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de $X$ con la propiedad de la intersección finita y tomamos $J = \{\bigcap \mathcal{E} : \mathcal{E} \subset \mathcal{F} \ y \ 0 < |\mathcal{E}| < \aleph_0\}$. Definamos un orden $\leq$ en $J$ como sigue: dados $\sigma, \sigma' \in J$, $\sigma \leq \sigma'$ si y sólo si $\sigma' \subset \sigma$. Claramente $(J \leq)$ es un conjunto dirigido. Por el Axioma de Elección, existe una red $(x_\sigma)_{\sigma \in J}$ en $X$ tal que $x_\sigma \in \sigma$. Por hipótesis, existe una subred de $(x_\sigma)_{\sigma \in J}$ que converge a un punto $z$, luego usando el Lema 1.28, $z$ es un punto de acumulación de $(x_\sigma)_{\sigma \in J}$. Ahora, mostremos que $z \in C$ para todo $C \in \mathcal{F}$. Sean $C \in \mathcal{F}$ y $U$ una abierto que contenga a $z$. Dado que $J(U)$ es cofinal en $J$, existe $\sigma' \in J(U)$ tal que $\{C\} \leq \sigma'$ y $x_{\sigma'} \in U$. Como $C = \bigcap\{C\} \supset \sigma'$ y $x_{\sigma'} \in \sigma'$, se tiene que $x_{\sigma'} \in C$. Así, $U \cap C \neq \emptyset$. Por lo que $z \in Cl(C) = C$. Por tanto, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ y se concluye que $X$ es compacto. □

**Corolario 1.31.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es compacto si y sólo si toda red en $X$ tiene un punto de acumulación.*

*Demostración.* Es inmediato del Lema 1.28 y Teorema 1.30 □

## 1.2. El hiperespacio $2^X$

Un **hiperespacio** de $X$ es una colección específica de subconjuntos de un espacio topológico $X$.

**Definición 1.32.** *Dado un espacio topológico $X$, definimos al hiperespacio de subconjuntos cerrados y no vacíos de $X$ como el conjunto:*

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío } \}$$

Sea $X$ un espacio topológico. A $2^X$ lo consideramos con la topología de Vietoris, la cual describimos a continuación. Sean $E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{P}(X)$, definimos:

$$\langle E_1, \ldots, E_k \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{k} E_i \text{ y } A \cap E_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

El siguiente lema enlista algunas propiedades de los conjuntos definidos anteriormente $\langle \cdots \rangle$ para $2^X$.

**Lema 1.33.** *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k \in P(X)$. Se tienen las siguientes propiedades.*

*a)* $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \langle \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$.

*b)* $\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle$.

*c)* $\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$.

*d)* $\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$.

*e) Si* $\Theta : 2^X \to 2^X$ *una función, entonces* $\{A \in 2^X : \Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset\} = \Theta^{-1}(\langle U_1, X \rangle)$.

*f) Si* $\Theta : 2^X \to 2^X$ *una función, entonces* $\{A \in 2^X : \Theta(A) \subseteq U_1\} = \Theta^{-1}(\langle U_1 \rangle)$.

*Demostración.* A continuación probaremos a).

$\subset\rfloor$ Sea $A \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$. Claramente $A \in \langle \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \rangle$. Notemos que como $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, $A \in \langle X, U_i \rangle$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo que $A \in \langle \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$.

$\supset]$ Sea $A \in \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$. Entonces $A \in \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle$ y $A \in \bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle$. Así $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. De donde $A \in \langle U_1, \ldots, U_k \rangle$.

Por lo que $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{k} U_i \rangle \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \langle X, U_i \rangle)$.

Ahora demostraremos la parte b).

$\subset]$ Sea $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$. Entonces $A \in \langle U_1 \rangle$ y $A \in \langle U_2 \rangle$. De lo anterior, se tiene que $A \subset U_1 \cap U_2$. Por lo que $A \in \langle U_1 \cap U_2 \rangle$.

$\supset]$ Sea $A \in \langle U_1 \cap U_2 \rangle$. Entonces $A \subset U_1 \cap U_2$. Así, $A \subset U_i$ para $i \in \{1, 2\}$. De donde, $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$.

Concluimos $\langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle = \langle U_1 \cap U_2 \rangle$.

En seguida probaremos c).

$\subset]$ Sea $A \in \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Entonces $A \subset X \cup U_1 \cup U_2$, $A \cap U_1 \neq \emptyset$ y $A \cap U_2 \neq \emptyset$. Por lo que $A \in \langle X, U_1, U_2 \rangle$.

$\supset]$ Sea $A \in \langle X, U_1, U_2 \rangle$. Entonces $A \cap U_1 \neq \emptyset \neq A \cap U_2$ y $A \cap X \neq \emptyset$. Notemos que $X \cup U_1 = X = X \cup U_2$, así $A \in \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$.

Por tanto $\langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle$.

Finalmente justificaremos d).

$\subset]$ Sea $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$. Entonces, dado que $A \in \langle U_1 \rangle$ y $U_1 = U_1 \cup (U_1 \cap U_2)$, se tiene que $A \subset U_1 \cup (U_1 \cap U_2)$.
Ahora, dado que $A \subset U_1$, se tiene que $(A \cap U_1) \cap U_2 = A \cap U_2 \neq \emptyset$. Así, $A \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$. Por lo que $A \in \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$.

$\supset]$ Sea $A \in \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$. Dado que $A \subset U_1 \cup (U_1 \cap U_2) = U_1$ y $A \cap U_1 \neq \emptyset$, $A \in \langle U_1 \rangle$.
Por otro lado, como $A \cap (U_1 \cap U_2) \neq \emptyset$, $A \in \langle X, U_2 \rangle$. Por lo que $A \in \langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle$.

Concluimos $\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle U_1, U_1 \cap U_2 \rangle$.

Para probar e), sea $A \in \{A \in 2^X : \Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset\}$. Entonces $\Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset$. Así, $\Theta(A) \in \langle U_1, X \rangle$. De donde, $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1, X \rangle)$.
Para ver la otra contención, sea $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1, X \rangle)$. Entonces $\Theta(A) \in \langle U_1, X \rangle$

y $\Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset$. Así, $A \in \{A \in 2^X : \Theta(A) \cap U_1 \neq \emptyset\}$. Esto prueba e).

Ahora, para probar f), sea $A \in \{A \in 2^X : \Theta(A) \subset U_1\}$. Entonces $\Theta(A) \subset U_1$. Así, $\Theta(A) \in \langle U_1 \rangle$. De donde, $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1 \rangle)$.
Para ver la otra contención, sea $A \in \Theta^{-1}(\langle U_1 \rangle)$. Entonces $\Theta(A) \in \langle U_1 \rangle$ y $\Theta(A) \subset U_1$. Así, $A \in \{A \in 2^X : \Theta(A) \subset U_1\}$. Esto demuestra f).

□

Ahora, necesitamos dotar a $2^X$ de una topología, ésta es la topología de Vietoris la cual definiremos de la siguiente forma: sea $\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \tau_{\mathrm{X}}\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau_{\mathrm{X}}\}$, entonces existe una única y mínima topología, la cual denotaremos por $\tau_{\mathrm{V}}$, para $2^X$ tal que $\mathcal{S} \subset \tau_{\mathrm{V}}$ (ver [2, Teorema 3.1, p. 65]). Obsevemos que $\mathcal{S}$ es una subbase para $\tau_V$.

El siguiente resultado permite obtener una base para la topología $\tau_{\mathrm{V}}$.

**Teorema 1.34.** *Sea $(X, \tau_{\mathrm{X}})$ un espacio topológico. La familia*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} = \{\langle U_1, \ldots, U_k \rangle : U_1, \ldots, U_k \text{ son abiertos en } X, k \in \mathbb{N}\}$$

*es una base para $\tau_V$.*

*Demostración.* Sean $\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \tau_{\mathrm{X}}\} \cup \{\langle X, U \rangle : U \in \tau_{\mathrm{X}}\}$ y $\mathcal{S}^*$ la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Dado que la familia $\mathcal{S}$ es una subbase para $\tau_V$, es suficiente probar que $\mathcal{S}^* = \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$.

Primero probaremos que:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{V}} \subset \mathcal{S}^*.$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k \in \tau_X$ tales que $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \in \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$. Probaremos que $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \in \mathcal{S}^*$.

Por Lema 1.1.1. a), $\langle U_1, \ldots, U_k \rangle \in \mathcal{S}^*$.

Finalmente veamos que:

$$\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}.$$

Sean $U_1, U_2 \in \tau_X$ tales que $\langle U_1 \rangle, \langle U_2 \rangle, \langle X, U_1 \rangle, \langle X, U_2 \rangle \in \mathcal{S}$. Por lo obtenido en b), c) y d) del Lema 1.1.1, se concluye que $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{B}_{\mathrm{V}}$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\mathrm{V}}$ es base para la topología de Vietoris. □

## 1.3. La métrica de Hausdorff

A continuación vamos a introducir la métrica de Hausdorff.

**Definición 1.35.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Para cualesquiera $A, B \in 2^X$ definimos $d(A, B)$ como*

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

*En el caso de que $A = \{x\}$ y $B$ contenga más de un punto, escribiremos $d(x, B)$ en lugar de $d(\{x\}, B)$.*
*Sean $r > 0$ y $A \in 2^X$ definimos la nube de radio $r$ con centro en $A$ como:*

$$N(r, A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}.$$

*Y para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, definimos la bola abierta de radio $\varepsilon$ y centro en $x$ como:*

$$B(\varepsilon, x) = \{p \in X : d(x, p) < \varepsilon\}.$$

Ahora probaremos el siguiente lema.

**Lema 1.36.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y acotado. Si $\alpha = \inf A$, entonces existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $\varepsilon_n \to \alpha$.*

*Demostración.* Usando la definición de ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\varepsilon_n \in A$ tal que $\alpha \leq \varepsilon_n < \alpha + \frac{1}{n}$. Dado que $\alpha + \frac{1}{n} \longrightarrow \alpha$, entonces $\alpha \leq \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n \leq \alpha$. Por lo tanto $\varepsilon_n \longrightarrow \alpha$. $\square$

El siguiente lema será de ayuda posteriormente.

**Lema 1.37.** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $v \in X$. Entonces la función $f : X \to [0, \infty)$ definida por $f(x) = d(x, v)$ es continua.*

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \varepsilon$. Mostraremos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
Notemos que:

$$d(x, v) < d(x, y) + d(y, v) < \varepsilon + d(y, v)$$

y

$$d(y, v) < d(y, x) + d(x, v) < \varepsilon + d(x, v).$$

De donde $|f(x) - f(y)| = |d(x, v) - d(y, v)| < \varepsilon$.
Por lo que $f$ es continua. $\square$

**Definición 1.38.** *Sea $(X,d)$ un espacio métrico compacto. La métrica de Hausdorff inducida por d, la cual se define de la siguiente manera: $H : 2^X \times 2^X \longrightarrow [0,\infty)$ dada por*

$$H(A,B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r,B) \text{ y } B \subset N(r,A)\}$$

*para todo $A, B \in 2^X$.*

Antes de demostrar que $H$ es en efecto una métrica, veamos el siguiente resultado.

**Lema 1.39.** *Sean $(X,d)$ un espacio métrico compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces se tienen la siguientes condiciones:*

1. *$H$ está bien definida.*
2. *$A \subset N(H(A,B) + \varepsilon, B)$.*

*Demostración.* Para probar 1, sean $A, B \in 2^X$. Probaremos que existe $r \in (0,\infty)$ tal que $B \subset N(r,A)$ y $A \subset N(r,B)$. Como$X$ es compacto, el conjunto $D = \{d(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$ está acotado en $[0,\infty)$, por lo que el supremo de $D$ existe. Sea $r = \sup D$. Entonces $r + 1$ cumple con lo requerido. Por lo que $H$ está bien definida.
Para demostar 2, sea $a \in A$. Como $H(A,B) < H(A,B) + \varepsilon$, entonces $H(A,B) + \varepsilon$ no es cota inferior de $\{r > 0 : A \subset N(r,B) \text{ y } B \subset N(r,A)\}$, es decir, existe $r > 0$ tal que $A \subset N(r,B,\ B \subset N(r,A)$ y $H(A,B) \leq r < H(A,B) + \varepsilon$. Dado que $a \in A \subset N(r,B)$, entonces $d(a,B) < r$, así $d(a,B) < H(A,B) + \varepsilon$. Por lo tanto $A \subset N(H(A,B) + \varepsilon, B)$. □

Ahora, consideramos la distancia entre dos conjuntos $A$ y $B$ para el menor real $r$ tal que $A$ y $B$ satisfacen las siguientes condiciones:

(1) Para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < r$.

(2) Para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $d(b,a) < r$.

De lo anterior podemos tener el siguiente resultado.

**Lema 1.40. (a)** *Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < r$ si y sólo si $A \subset N(r,B)$.*

**(b)** *Para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $d(b,a) < r$ si y sólo si $B \subset N(r,A)$.*

*Demostración.* **(a)** Veamos primero que $A \subset N(r,B)$. Sea $a \in A$, entonces por hipótesis existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < r$, y como $d(a,B) = \inf\{d(a,c) : c \in B\} \leq d(a,b)$, entonces $d(a,B) < r$, es decir, $a \in N(r,B)$. Por lo tanto $A \subset N(r,B)$.

Recíprocamente, sea $a \in A$, como $A \subset N(r,B)$ entonces $a \in N(r,B)$, es decir, $d(a,B) < r$. Si $d(a,b) \geq r$ para todo $b \in B$, entonces $d(a,B) \geq r$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto para $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < r$.

**(b)** La demostración es análoga a la de **(a)**.

□

**Teorema 1.41.** *Si $(X,d)$ es un espacio métrico compacto, entonces $H$ es una métrica.*

*Demostración.* Sean $A, B \in 2^X$. Como $\{r > 0 : A \subset N(r,B)$ y $B \subset N(r,A)\} \subseteq [0,\infty)$, entonces $H(A,B) \geq 0$.

Veamos que $H(A,B) = 0$ si y sólo si $A = B$. Primero, supongamos que $H(A,B) = 0$, entonces $\inf\{r > 0 : A \subset N(r,B)$ y $B \subset N(r,A)\} = 0$, por el Lema 1.36, existe $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{r > 0 : A \subset N(r,B)$ y $B \subset N(r,A)\}$ tal que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$. Probaremos que $A = B$. Sea $a \in A$. Veamos que $b \in B$. Como $A \subset N(\varepsilon_n, B)$, existe $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ tal que $d(a,b_n) < \varepsilon_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a $a$. Así, como $B$ es cerrado en $X$, $a \in B$. Por lo que $A \subset B$.
De forma similar, se prueba que $B \subset A$. Y por lo cual se obtiene que $A = B$. Ahora, supongamos que $A = B$. Entonces $H(A,A) = \inf\{r > 0 : A \subset N(r,A)\} = \inf(0,\infty) = 0$. Así, $H(A,B) = 0$.

Claramente $H(A,B) = H(B,A)$.

Finalmente, para ver que $H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C)$, sean $A, B, C \in 2^X$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Necesitamos probar que $A \subset N(H(A,B) + H(B,C) + \varepsilon, C)$ y $C \subset N(H(A,B) + H(B,C) + \varepsilon, A)$. Para la primera contensión, sea $a \in A$. Por Lema 1.40 existe $b \in B$ tal que

$$d(a,b) < H(A,B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, por Lema 1.40, existe $c \in C$ tal que

$$d(b,c) < H(B,C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} d(a,c) &\leq d(a,b)+d(b,c) \\ &< [H(A,B)+\frac{\varepsilon}{2}]+[H(B,C)+\frac{\varepsilon}{2}] \\ &= H(A,B)+H(B,C)+\varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $A \subset N(H(A,B)+H(B,C)+\varepsilon, C)$.

De forma similar, obtenemos que $C \subset N(H(B,A)+H(C,B)+\varepsilon, A)$. Dado que $H(A,B)=H(B,A)$, entonces $C \subset N(H(A,B)+H(B,C)+\varepsilon, A)$.

De lo anterior, se tiene que $H(A,C) \leq H(A,B)+H(B,C)+\varepsilon$.

Además, como e'sta desigualdad es para cualquier número positivo, en particular para la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} H(A,C) \leq \lim_{n\to\infty} H(A,B) + \lim_{n\to\infty} H(B,C) + 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

Por lo tanto $H(A,C) \leq H(A,B)+H(B,C)$ y así, $H$ es una métrica. □

**Lema 1.42.** *Sean $X$ un espacio métrico compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

*Demostración.* Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$. Veamos que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$. Sea $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ tal que $H(A,B) < \varepsilon' < \varepsilon$. Por definición de ínfimo, existe $0 < r < \varepsilon'$ tal que $A \subset N(r,B)$ y $B \subset N(r,A)$. Entonces $B \subset N(r,A) \subset N(\varepsilon',A) \subset N(\varepsilon,A)$ y $A \subset N(r,B) \subset N(\varepsilon',B) \subset N(\varepsilon,B)$. Así, $A \subset N(\varepsilon,B)$ y $B \subset N(\varepsilon,A)$.

Recíprocamente, supongamos que $A \subset N(\varepsilon,B)$ y $B \subset N(\varepsilon,A)$. Probaremos que existe $\eta \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \eta < \varepsilon$ y $A \subset N(\eta,B)$ y $B \subset N(\eta,A)$. Antes, necesitamos probar que $A \subseteq \bigcup_{\delta<\varepsilon} N(\delta,B)$. Para esto, sea $a \in A$. Como $A \subset N(\varepsilon,B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \varepsilon$. Tomemos $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $d(a,b) < \delta < \varepsilon$. Entonces $a \in B(\delta,b) \subset N(\delta,B)$, por lo que $A \subseteq \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta,B)$.

Ahora, por la compacidad de $A$, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n < \varepsilon$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Definamos $\eta_1 = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Entonces $0 < \eta_1 < \varepsilon$ y

$A \subset N(\eta_1, B)$.
De forma análoga, podemos encontrar $\eta_2 \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \eta_2 < \varepsilon$ y $B \subset N(\eta_2, A)$.
Tomemos $\eta = \text{máx}\{\eta_1, \eta_2\}$. Entonces $0 < \eta < \varepsilon$ y $A \subset N(\eta, B)$ y $B \subset N(\eta, A)$.
Por tanto $H(A, B) \leq \eta < \varepsilon$. □

Finalmente, enunciaremos las siguientes proposiciones, las cuales son muy conocidas en la literatura de Hiperespacios.

**Proposición 1.43.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto. Sean $A, B \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ tales que $\lim A_n = A$ y $\lim B_n = B$. Si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.*

**Proposición 1.44.** *Sea $X$ un espacio métrico compacto. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^X$ tal que $\lim A_n = A$ para algún $A \in 2^X$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim a_n = a$ para algún $a \in X$. Si $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \in A$.*

# Capítulo 2

# La función $T$ de Jones

En [6] F. Burton Jones define las funciones de tipo conjunto $T$ y $K$, las cuales están relacionadas con el concepto de aposindesis, conexidad local, indescomponibilidad, unicoherencia, simetría, entre otras. Ésta función es conocida en la literatura como la función $T$ de Jones y ha sido motivo de diversos estudios al respecto, con los cuales se ha desarrollado un gran acervo de resultados y aplicaciones sobre esta función. En el caso de la función $K$ aún hace falta tener un estudio más profundo para obtener resultados amplios, la cual se presenta en la Sección 3.1.5.

## 2.1. Propiedades básicas de la función $T$ de Jones

A continuación iniciamos introduciendo algunos hiperespacios de un espacio topológico.

**Definición 2.1.** *Dado $X$ un espacio topológico no degenerado. Consideramos las siguientes familias de subconjuntos de $X$:*

$$C^*(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} : A \text{ es conexo}\}.$$

$$C(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} : A \text{ es cerrado y conexo}\}.$$

En este Capítulo las anteriores familias no son consideradas con la métrica de Hausdorff o con la topología de Vietorís. En el caso de que halla alguna confusión, se especificarán estas estructuras. Ahora, introducimos el concepto de función $T$ de Jones.

**Definición 2.2.** *Sean $X$ un espacio topológico. Definimos la función $T : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como:*

$$T(A) = \{x \in X : \text{ para cada } W \in C(X) \text{ tal que } x \in \mathrm{int}(W) \text{ y } W \cap A \neq \emptyset\}.$$

*De esta manera, definimos a $T^2 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como:*

$$T^2(A) = T(T(A)).$$

*Así, de manera inductiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $T^n : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ como:*

$$T^n(A) = T(T^{n-1}(A)).$$

*Vamos a considerar a $T^0$ como la función identidad de $\mathcal{P}(X)$. En el caso de que $A = \{x\}$, escribiremos $T^n(x)$ en lugar de $T^n(\{x\})$.*

A continuación veremos unos ejemplos que nos ayudarán a visualizar a la función $T$ de Jones.

**Ejemplo 2.3.** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Consideremos el intervalo cerrado $[a, b]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $T(p) = \{p\}$ para cada $p \in [a, b]$.*

Primero, probaremos que $T(a) = \{a\}$. Sea $x \in (a, b)$. Entonces $x \in (\frac{a+x}{2}, b) \subset [\frac{a+x}{2}, b] \subset (a, b]$ (ver Figura 2.1). Así, $x \notin T(a)$.

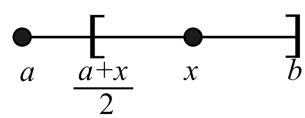


Figura 2.1:

Para $x = b$, tenemos que $b \in (\frac{a+b}{2}, b] \subset [\frac{a+b}{2}, b] \subset (a, b]$ (ver Figura 2.2). Por lo que $T(a) = \{a\}$. De manera similar se prueba que $T(b) = \{b\}$.

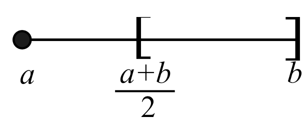


Figura 2.2:

Ahora, sea $p \in (a,b)$. Veamos que $T(p) = \{p\}$. Consideremos $x \in (p,b)$. Entonces $x \in (\frac{p+x}{2}, b) \subset [\frac{p+x}{2}, b] \subset [a,b] \setminus \{p\}$ (ver la Figura 2.3). De donde, $x \notin T(p)$.

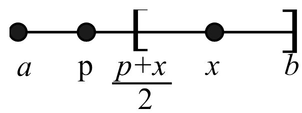


Figura 2.3:

Para $x = b$, tenemos que $b \in (\frac{p+b}{2}, b] \subset [\frac{p+b}{2}, b] \subset [a,b] \setminus \{p\}$ (ver la Figura 2.4. Por lo que, $x \notin T(p)$. De manera similar se puede probar que $x \notin T(p)$ cuando $x \in [a,p)$. Concluimos que $T(p) = \{p\}$.

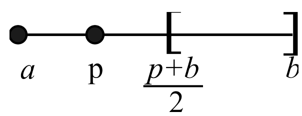


Figura 2.4:

**Ejemplo 2.4.** *Sea* $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. *Consideremos a* $S^1$ *como subespacio de* $\mathbb{R}^2$ *con la topología usual. Entonces* $T(p) = \{p\}$ *para cada* $p \in S^1$.

Para mostrar lo anterior, sea $p \in S^1$ como en la Figura 2.5. Veamos que $T(p) = \{p\}$. Sea $x \in S^1 \setminus \{p\}$, ver la Figura 2.5.

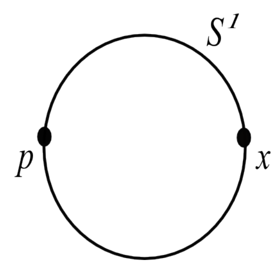


Figura 2.5: El espacio $S^1$.

Entonces existe un subarco $\alpha$ de $S^1$ tal que $x \in \text{int}(\alpha) \subset \alpha \subset S^1 \setminus \{p\}$, ver la Figura 2.6. De donde $x \notin T(p)$. Por lo que, $T(p) = \{p\}$.

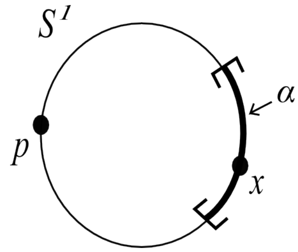


Figura 2.6: Subarco $\alpha$ de $S^1$.

A continuación vamos a definir el abanico armónico, que posteriormente utilizaremos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $L_n$ el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que inicia en el punto $(0,0)$ y termina en el punto $(1, \frac{1}{n})$. Considerando a $L_0 = [0,1] \times \{0\}$ el segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ que inicia en el punto $(0,0)$ y termina en el punto $(1,0)$. Hagamos $\mathbb{A} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} L_n$, ver Figura 2.7. El conjunto $\mathbb{A}$ es considerado como subespacio de $\mathbb{R}^2$ y se le conoce como el abanico armónico.

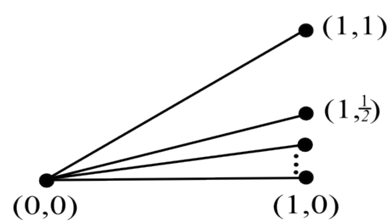


Figura 2.7: Abanico armónico.

Por conveniencia, es necesario introducir la siguiente notación: para cada $a \in \mathbb{R}$, $[a,a] = \{a\}$.

**Ejemplo 2.5.** *Sea $\mathbb{A}$ el abanico armónico definido anteriormente. Tomemos $p \in \mathbb{A}$. Probaremos que:*

$$T(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } p \in \mathbb{A} \setminus \{L_0\}, \\ [x,1] \times \{0\} & \text{si } p = (x,0) \text{ y } x \in [0,1). \end{cases}$$

Sea $p \in \mathbb{A} \setminus \{L_0\}$. Supongamos que $p \in L_n \setminus \{(0,0)\}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, ver la Figura 2.8. Sea $x \in \mathbb{A} \setminus \{p\}$.

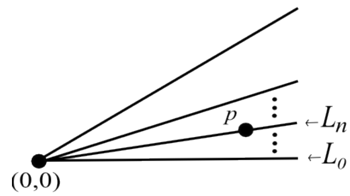


Figura 2.8: $p \in L_n$.

Consideremos los siguientes casos.

**Caso I.** Supongamos que $x \in \mathbb{A} \setminus \{L_0\}$.
Entonces existe un segenemto $\alpha \subset \mathbb{A} \setminus (\{L_0\} \cup \{p\})$ tal que $x \in \text{int}(\alpha)$, ver Figura 2.9. Por lo que $x \notin T(p)$.

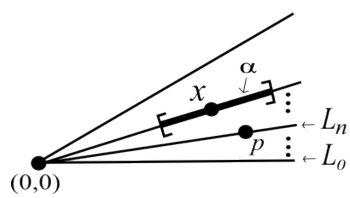


Figura 2.9: $x \in \text{int}(\alpha)$.

**Caso II.** Supongamos que $x \in L_0$.
Notemos que $\mathcal{A} = L_0 \cup \alpha_1 \ldots \cup \alpha_n \cup \bigcup_{i=n+1}^{\infty} L_i$, donde $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ son como en la Figura 2.10, es un subconjunto cerrado y conexo de $\mathbb{A}$ tal que $x \in \text{int}(\mathcal{A})$. Por lo que $x \notin T(p)$. Por lo anterior, $T(p) = \{p\}$.

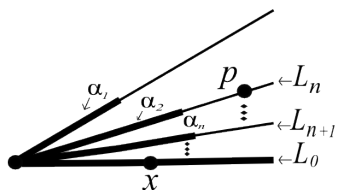


Figura 2.10: $x \in \operatorname{int}(\mathcal{A})$.

Finalmente, sean $x \in [0,1]$ y $p = (x,0)$. Si $x = 1$, entonces $T((1,0)) = \{(1,0)\}$. Primero consideremos que $x = 0$. Por la forma en que se definió el abanico armónico, los subconjuntos cerrados y conexos que contienen en su interior a un punto de $L_0$ son copias del abanico, algunas de estas copias están representadas en las Figuras 2.11 y 2.12, los cuales contienen al punto $(0,0)$. Por lo que $T(p) = T((0,0)) = L_0$.

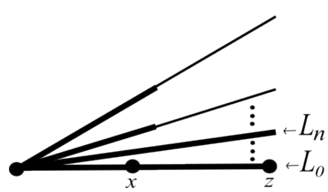


Figura 2.11: Una copia del Abanico armónico.

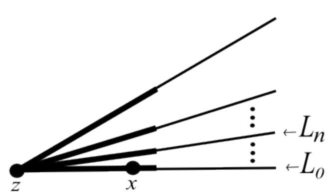


Figura 2.12: Una copia del Abanico armónico.

Ahora, supongamos que $x \in (0,1)$. Por la forma en que se definió el abanico armónico, los subconjuntos cerrados y conexos que contienen en su interior a un punto de $[x,1] \times \{0\}$ son copias del abanico, ver Figura 2.11 y

Figura 2.12, los cuales contienen al punto $(x, 0)$.
Por lo que $T(p) = T((x, 0)) = [x, 1] \times \{0\}$.

**Teorema 2.6.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces se tienen las siguientes consideraciones:*

1. *Para cada $A \subset X$, $A \subset T(A)$.*
2. *Si $A \subset B \subset X$, entonces $T^n(A) \subset T^n(B)$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

*Demostración.* La prueba de 1, se sigue directamente de la definición de la función $T$.
Para la demostración de 2, será por inducción sobre $n$.
Para $n = 0$, $A = T^0(A) \subset T^0(B) = B$.
Supongamos que el resultado se cumple para $n$. Probaremos que $T^{n+1}(A) \subset T^{n+1}(B)$. Si $x \in T^{n+1}(A) \setminus T^{n+1}(B)$, entonces existe $W \in C(X)$ tal que $x \in \text{int}(W) \subset W \subset X \setminus T^n(B)$. Ahora, dado que $X \setminus T^n(B) \subset X \setminus T^n(A)$, $x \notin T^{n+1}(A)$, lo cual es una contradicción. □

**Teorema 2.7.** *Sean $X$ un espacio topológico, $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces*

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} T^n(A_\alpha) \subset T^n(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$$

*y*

$$T^n(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T^n(A_\alpha).$$

*Demostración.* Sea $\alpha \in \Lambda$. Como $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, por el Teorema 2.20, $T^n(A_\alpha) \subset T^n(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$, así

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} T^n(A_\alpha) \subset T^n(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha).$$

Por otro lado, como $A_\alpha \supset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, por el Teorema 2.20, $T^n(A_\alpha) \supset T^n(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$, así

$$T^n(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T^n(A_\alpha).$$

□

El siguiente resultado se puede enunciar para cualquier función conjunto y usar una prueba similar al mismo.

**Teorema 2.8.** *Sean $X$ un espacio topológico y $x \in X$. Si $T^{n+1}(x) = T^n(x)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $T^{n+m}(x) = T^n(x)$ para toda $m > 1$.*

*Demostración.* Vamos a hacer la demostración por inducción sobre $m$. Probaremos el resultado para $m = 2$. Como $T^{n+1}(x) = T^n(x)$, se tiene que:

$$T(T^{n+1}(x)) = T(T^n(x)) = T^{n+1}(x) = T^n(x).$$

Por lo que $T^{n+2}(x) = T^n(x)$.
Ahora, supongamos cierto el resultado para $m$. Demostraremos que $T^{n+m+1}(x) = T^n(x)$. Como $T^{n+m}(x) = T^n(x)$, se tiene que:

$$T(T^{n+m}(x)) = T(T^n(x)) = T^{n+1}(x) = T^n(x).$$

Por lo que $T^{n+m+1}(x) = T^n(x)$. □

**Teorema 2.9.** *Sean $X$ un espacio topológico y $x, p \in X$. Si $T^{n+1}(p) = T^n(p)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y $x \in T^n(p)$, entonces $T^n(x) \subset T^n(p)$.*

*Demostración.* Sea $x \in T^n(p)$. Por el Teorema 2.6, $T^n(x) \subset T^n(T^n(p)) = T^{2n}(p)$. Así, por el Teorema 2.8, $T^n(x) \subset T^{n+n}(p) = T^n(p)$. De donde $T^n(x) \subset T^n(p)$.

□

**Lema 2.10.** *Sean $X$ un espacio topológico y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces $T^n(\mathcal{P}(X)) \subset 2^X$, es decir $T^n(A)$ es cerrado para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.*

*Demostración.* Sólo probaremos que $\mathrm{cl}(T^{n+1}(A)) \subseteq T^{n+1}(A)$, ya que $T^{n+1}(A) \subseteq \mathrm{cl}(T^{n+1}(A))$. Necesitamos probar la siguiente afirmación.

**Afirmación.** Si $x \in X \setminus T^{n+1}(A)$, entonces $x \notin \mathrm{cl}(T^{n+1}(A))$.

Sea $x \in X \setminus T^{n+1}(A)$. Entonces existe $W \in C(X)$ tal que $x \in \mathrm{int}(W) \subseteq W \subseteq X \setminus T^n(A)$. Así, dado que $T^n(A) \subseteq T^{n+1}(A)$, $\mathrm{int}(W) \cap T^{n+1}(A) = \emptyset$. Esto prueba que $x \notin \mathrm{cl}(T^{n+1}(A))$.
Usando la Afirmación, se sigue que $\mathrm{cl}(T^{n+1}(A)) \subseteq T^{n+1}(A)$. □

Antes de probar el siguiente resultado, recordemos el concepto de conexidad local. Un espacio topológico $X$ es **localmente conexo** si para cada $x \in X$ y cada abierto $U$ el cual contiene a $x$, existe un abieto conexo $V$ en $X$ tal que $x \in V \subset U$.

**Lema 2.11.** *Sean $X$ un espacio regular, localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $C \in 2^X$, se tiene que $T^n(C) = C$. En particular $T^n : \mathcal{P}(X) \to 2^X$ es una función suprayectiva.*

*Demostración.* Dado que $X \subset T^n(X)$, $T^n(X) = X$. Ahora, sea $C \in 2^X \setminus \{X\}$. Vamos a probar que $T^n(C) = C$.
Primero vamos a comenzar tomando a $n = 1$, es decir, vamos a probar que $T(C) = C$. Por el Teorema 2.6, $C \subset T(C)$. Supongamos que existe $x \in T(C)$ tal que $x \notin C$. Como $X \setminus C$ es una abierto que contiene a $x$, por la regularidad de $X$, existe un abierto $U$ en $X$ tal que $x \in U$ y $\mathrm{cl}(U) \subset X \setminus C$. Por la conexidad local de $X$, existe un abierto conexo en $X$ tal que $x \in V \subset U \subset X \setminus C$. Así, $x \in V \subset \mathrm{cl}(V) \in C(X)$ y $\mathrm{cl}(V) \cap C = \emptyset$. Por lo que $x \notin T(C)$, esto es una contradicción. Esto prueba que $T(C) = C$.
Ahora supongamos que el resultado es cierto para $n-1$. Sea $C \in 2^X \setminus \{X\}$. Por hipótesis de inducción, $T^{n-1}(C) = C$. Como $T^{n-1}(C) \in 2^X$, $T(T^{n-1}(C)) = T^{n-1}(C)$. Así, $T^n(C) = T(T^{n-1}(C)) = C$. □

Es conocido que la conexidad local y la conexidad en pequeño son equivalentes, ver [10, Teorema 27.16, p. 201], esta equivalencia la usaremos en la prueba del siguiente resultado.

**Lema 2.12.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si para cada $A \in 2^X$, $T(A) = A$, entonces $X$ es localmente conexo.*

*Demostración.* Sean $p \in X$ y $U$ un subconjunto abierto de $X$ tales que $p \in U$. Notemos que $X \setminus U$ es cerrado en $X$ y $p \notin X \setminus U$. Como $X \setminus U = T(X \setminus U)$, existe $W \in C(X)$ tal que $p \in \mathrm{int}(W) \subset W \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Así, $X$ es conexo en pequeño en $p$. De donde, $X$ es localmente conexo. □

**Teorema 2.13.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $X$ tiene una cantidad finita de componentes, entonces $T(\emptyset) = \emptyset$. En particular, si $X$ es conexo, $T(\emptyset) = \emptyset$.*

*Demostración.* Consideremos los siguientes casos.
**Caso I.** Supogamos que $X$ no es conexo y tiene una cantidad finita de componentes.

Para probar que $X \setminus T(\emptyset) = X$, sea $x \in X$. Es suficiente probar que existe un subconjunto conexo y cerrado $W$ de $X$ tal que $x \in \text{int}(W) \subset X \setminus \emptyset$. Tomemos $C$ la componente de $X$ tal que $x \in C$. Como $x \in \text{int}(X)$, por el Lema 1.7, $x \in \text{int}(C)$. Notemos que $W = C$ cumple con las condiciones requeridas. Por lo tanto $T(\emptyset) = \emptyset$.
**Caso II.** Supogamos que $X$ es conexo.
Nuevamente para probar que $X \setminus T(\emptyset) = X$, sea $x \in X$. Observemos que es suficiente probar que existe un subconjunto conexo y cerrado $W$ de $X$ tal que $x \in \text{int}(W) \subset X \setminus \emptyset$. Claramente $W = X$ cumple con las condiciones requeridas. De donde, $T(\emptyset) = \emptyset$. □

**Teorema 2.14.** *Sea $X$ un espacio compacto. Si $T(\emptyset) = \emptyset$, entonces $X$ tiene una cantidad finita de componentes.*

*Demostración.* Supongamos que $T(\emptyset) = \emptyset$. Entonces para cada punto $x \in X$ existe un cerrado y conexo $W_x$ de $X$ tal que $x \in \text{int}(W_x) \subset W_x \subset X \setminus \emptyset$. Por lo que la familia $\{\text{int}(W_x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de $X$. Como $X$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^{n} \text{int}(W_{x_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{n} (W_{x_j}) \subset X$. Por lo que $\bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j} = X$. Así, $X$ es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos. Por lo tanto $X$ tiene una cantidad finita de componentes. □

**Corolario 2.15.** *Sea $X$ un espacio compacto. Entonces $T(\emptyset) = \emptyset$ si y sólo si $X$ tiene una cantidad finita de componentes.*

**Lema 2.16.** *Sean $X$ un espacio compacto, conexo y de Hausdorff y $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Si $T(A) = E \cup F$, donde $E$ y $F$ son cerrados, no vacíos y ajenos, entonces $A \cap E \neq \emptyset \neq A \cap F$.*

*Demostración.* Supongamos que $A \subset E$. Por la normalidad de $X$, existen dos abiertos $D$ y $D'$ en $X$ tales que $A \subset E \subset D$, $F \subset D'$ y $\text{cl}(D) \cap \text{cl}(D') = \emptyset$. Por otra parte, por el Lema 1.13, $\text{fr}(D') \cap (D \cup D') = \emptyset$, en particular $\text{fr}(D') \cap T(A) = \emptyset$. Por la conexidad de $X$, $\text{fr}(D') \neq \emptyset$. Ahora, por cada $b \in \text{fr}(D')$, existe un subconjunto cerrado y conexo $W_b$ de $X$ tal que $b \in \text{int}(W_b) \subset W_b \subset X \setminus A$. Entonces la colección $\{\text{int}(W_b) : b \in \text{fr}(D')\}$ es una cubierta abierta de $\text{fr}(D')$. Por la compacidad de $\text{fr}(D')$, existen $b_1, \ldots, b_n \in \text{fr}(D')$ tales que $\text{fr}(D') \subset \bigcup_{j=1}^{n} \text{int}(W_{b_j})$. Necesitamos probar la siguiente afirmación.

**Afirmación.** Si $C$ es una componente de $\mathrm{cl}(D')$, entonces $C \cap \mathrm{fr}(D') \neq \emptyset$.

Por la Teorema 1.12, $C \cap \mathrm{fr}(\mathrm{cl}(D')) \neq \emptyset$. Así, dado que:

$$\begin{aligned} C \cap \mathrm{fr}(\mathrm{cl}(D')) &= C \cap (\mathrm{cl}(D') \cap \mathrm{cl}(X \setminus \mathrm{cl}(D'))) \\ &\subset C \cap (\mathrm{cl}(D') \cap \mathrm{cl}(X \setminus D')) \\ &= C \cap \mathrm{fr}(D'), \end{aligned}$$

tenemos que $C \cap \mathrm{fr}(D') \neq \emptyset$. Esto prueba la afirmación.

Sea $K = \bigcup_{j=1}^{n} W_{b_j} \cup \mathrm{cl}(D')$. Probaremos que $K$ tiene un número finito de componentes. Supongamos que existe una componente $W$ de $K$ tal que $W \cap \bigcup_{j=1}^{n} W_{b_j} = \emptyset$. Entonces $W \subset \mathrm{cl}(D')$. Sea $L$ la componente de $\mathrm{cl}(D')$ tal que $W \subset L$. Por la Afirmación, $L \cap \mathrm{fr}(D') \neq \emptyset$. De donde $L \cap W_{b_j} \neq \emptyset$ para alguna $j \in \{1, \dots, n\}$. Así, como $L \cup W_{b_j}$ es un conexo contenido en $K$ y $W$ es una componente de $K$, $L \cup W_{b_j} = W$, esto es una contradicción. Por lo que toda componente de $K$ intersecta al conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} W_{b_j}$. Así, dado que $\bigcup_{j=1}^{n} W_{b_j}$ tiene un número finito de componentes, $K$ tiene un número finito de componentes.
Notemos que $K \cap A = \emptyset$ y $K$ es cerrado en $X$. Sea $y \in F \subset D' \subset K$. Entonces $y \in \mathrm{int}(K)$. Sea $C$ la componente de $K$ que contiene a $y$. Por el Lema 1.7, $y \in \mathrm{int}(C)$. Así, dado que $C \subset X \setminus A$ y $C$ es cerrado en $X$, se tiene que $y \notin T(A)$, una contradicción.
Por lo tanto $A \cap E \neq \emptyset \neq A \cap F$. □

Para la prueba del siguiente resultado ver [4, 2.41, p. 104].

**Proposición 2.17.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de compactos cerrados en un espacio topológico $X$. Si $U \subset X$ es un abierto tal que $\bigcap \mathcal{A} \subset U$, entonces existe una subfamilia finita $\mathcal{T}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcap \mathcal{T} \subset U$.*

**Proposición 2.18.** *Sea $X$ un espacio compacto y de Hausdorff. Si $A$ y $B$ son dos cerrados no vacíos en $X$ y ninguna componente de $X$ intersecta a $A$*

*y a $B$, entonces existen cerrados no vacíos y ajenos $X_A$, $X_B$ de $X$ tales que $X = X_A \cup X_B$, $A \subset X_A$ y $B \subset X_B$.*

*Demostración.* Fijemos $a \in A$. Probaremos que existe un abierto y cerrado $V_a$ en $X$ tal que $a \in V_a \subset X \setminus B$. Sea $\mathcal{H}_a$ la familia de los conjuntos abiertos y cerrados en $X$ que contienen al punto $a$. Notemos que $X \in \mathcal{H}_a$. Por la Proposición 1.11 2) y 3), $\bigcap H_a$ es una componente de $X$. Así, por hipótesis, $\bigcap H_a \cap B = \emptyset$. De donde $\bigcap H_a \subset X \setminus B$. Según la Proposición 2.17, existen $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{H}_a$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i \subset X \setminus B$. Hagamos $V_a = \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i$. Claramente $V_a \in \mathcal{H}_a$.
Por otra parte, tenemos que la familia $\{V_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de $A$. Dado que $A$ es compacto, existen $V_{a_1}, \dots, V_{a_k} \in \{V_a : a \in A\}$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{a_i}$. Ahora, hagamos:

$$X_A = \bigcup_{i=1}^{k} V_{a_i}$$

y

$$X_B = X \setminus X_A.$$

Notemos que los conjuntos $X_A$ y $X_B$ cumplen con las condiciones requeridas. □

**Teorema 2.19.** *Sean $X$ un espacio compacto, conexo y de Hausdorff y $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ tal que $X_i \cap X_j = \emptyset$, si $i \neq j$. Si cada $X_i$ es conexo, entonces existen subconjuntos no vacíos cerrados y conexos $Y_1, \dots, Y_m$, con $m \leq n$, de $X$ tales que $T(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i) = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Y_j$, cada $Y_j$ contiene algún $X_i$ y $Y_i \cap Y_j = \emptyset$, si $i \neq j$.*

*Demostración.* Sea $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$. Por el Lema 2.7, $T(A)$ es cerrado. Así, $T(A)$ es compacto. Dado que $A \subset T(A)$, elegimos $Y_1, \dots, Y_m$ las componentes de $T(A)$ tales que cada $Y_j$ contiene algún $X_i$. Notemos que $m \leq n$. Probaremos que $T(A) = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Y_j$. Sea $x \in T(A)$. Supongamos que $x \notin \bigcup\limits_{j=1}^{m} Y_j$. Entonces ninguna componente de $T(A)$ intersecta tanto a $A$ como a $\{x\}$. Así, dado que $T(A)$ es de Hausdorff, por la Proposición 2.18, existen $E$ y $F$ subconjuntos cerrados no vacíos y ajenos de $T(A)$ tales que $A \subset E$, $x \in F$ y $T(A) = E \cup F$. Por el Lema 2.16, $A \cap E \neq \emptyset \neq A \cap F$, una contradicción. Por lo que $x \in \bigcup_{j=1}^{m} Y_j$. Por lo tanto $T(A) = \bigcup_{j=1}^{m} Y_j$. □

**Corolario 2.20.** *Sean $X$ un espacio conexo, compacto y de Hausdorff y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $T^n(C^*(X)) \subseteq C(X)$.*

*Demostración.* Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in C^*(X)$. Por el Lema 2.10 y el Teorema 2.19, $T(A)$ es cerrado y conexo.
Supongamos que $T^n(A)$ es cerrado y conexo. Probaremos que $T^{n+1}(A)$ es cerrado y conexo. Dado que $T^{n+1}(A) = T(T^n(A))$ es cerrado y $T^n(A)$ es conexo, $T^{n+1}(A)$ es cerrado y conexo. □

**Corolario 2.21.** *Sean $X$ un espacio compacto, de Hausdorff y localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $T^n|_{C^*(X)} : C^*(X) \to C(X)$ es suprayectiva, es decir, $T^n(C^*(X)) = C(X)$.*

*Demostración.* Por el Corolario 2.20, $T^n(C^*(X)) \subseteq C(X)$. Para probar la otra contención, sea $C \in C(X)$. Como C es cerrado, por el Lema 2.11, $T^n(C) = C$. Así, dado que C es conexo, $T^n(C) \in C^*(X)$. De lo anterior, $T^n(C(X)) \subseteq C^*(X)$. Por lo tanto, $T^n(C^*(X)) = C(X)$. □

Finalmente terminamos esta sección introduciendo los siguientes conceptos.

**Definición 2.22.** *Sean $X$ un espacio topologico y $\Phi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ un función. Decimos que $X$ es*

1. *$n$-**simétrico** si para cualesquiera dos elementos $x, y \in X$ tales que $y \in \Phi^n(x)$, entonces $x \in \Phi^n(y)$.*

2. *$\Phi$-**simétrico** si para cada $A, B \subset X$ cerrados no vacíos, entonces $\Phi(A) \cap B \neq \emptyset$ si y sólo si $A \cap \Phi(B) \neq \emptyset$.*

3. ***puntualmente** $\Phi$-**simétrico** si para cada $p, q \in X$, se tiene que $p \in \Phi(q)$ si y sólo si $q \in \Phi(p)$.*

4. *$\Phi$-**aditivo** si para cada $A, B \subset X$ cerrados no vacíos, se cumple que $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$.*

5. *Decimos que $\Phi$ es **idempotente** si para cada $A \subset X$ cerrado no vacío, $\Phi^2(A) = \Phi(A)$.*

Vamos a considerar a $\Phi^0$ como la función identidad de $\mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{P}(X)$. Para $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$, escribiremos $\Phi^n(x)$ en lugar de $\Phi^n(\{x\})$.

## 2.2. Aposindesis, irreducibilidad, indescomponibilidad y la función $T$

### 2.2.1. Aposindesis y la función $T$

**Definición 2.23.** *Sean $X$ un espacio conexo y $p, q \in X$. Decimos que $X$ es **aposindético en $p$ con respecto a $q$** si existe un subconjunto cerrado y conexo $H$ de $X$ tal que $p \in \operatorname{int}(H)$ y $q \notin H$. Decimos que $X$ es **aposindético en $p$** si $X$ es aposindético en $p$ con respecto a cada punto de $X$ distinto de $p$. Decimos que $X$ es **aposindético** si $X$ es aposindético en cada uno de sus puntos.*

**Proposición 2.24.** *Si $X$ es un espacio conexo, regular, localmente conexo y $T_1$, entonces $X$ es aposindético.*

*Demostración.* Sean $p \neq q \in X$. Como $X$ es $T_1$, $X \setminus \{q\}$ es abierto en $X$. Dado que $p \in X \setminus \{q\}$ y $X$ es regular, existe un abierto $U$ tal que $p \in U \subset \operatorname{cl}(U) \subset X \setminus \{q\}$. Como $X$ es localmente conexo en $p$, existe un abierto conexo $V$ tal que $p \in V \subset U \subset X \setminus \{q\}$. De tal manera que $\operatorname{cl}(V)$ es un cerrado y conexo y $p \in \operatorname{cl}(V) \subset \operatorname{cl}(U) \subset X \setminus \{q\}$. Por lo tanto $X$ es aposindético. □

**Teorema 2.25.** *Sean $X$ un espacio conexo y $p, q \in X$. Entonces $X$ es aposindético en $p$ con respecto a $q$ si y sólo si $p \in X \setminus T(q)$.*

*Demostración.* La prueba se sigue de la definición de aposindesis y de que:

$$X \setminus T(q) = \{x \in X : \text{ existe } W \in C(X) \text{ tal que } x \in \operatorname{int}(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}\}.$$

□

**Teorema 2.26.** *Un espacio $X$ es aposindético si y sólo si $T(p) = \{p\}$ para cada $p \in X$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es aposindético. Sea $p \in X$. Necesitamos probar que: si $q \in X \setminus \{p\}$, entonces $q \in X \setminus T(p)$. Sea $q \in X \setminus \{p\}$. Como $X$ es aposindético en $q$ con respecto a $p$, por el Teorema 2.25, $q \in X \setminus T(p)$.
Por lo que $T(p) = \{p\}$.
Ahora, sean $p, q \in X$, con $p \neq q$. Como $T(q) = \{q\}$, $p \in X \setminus T(q)$. Así, por Teorema 2.25, $X$ es aposindético en $p$ con respecto a $q$. Por lo que $X$ es aposindético. $\square$

**Teorema 2.27.** *Sea $X$ un espacio conexo. Si $T^n : \mathcal{P}(X) \to 2^X$ es una función suprayectiva, entonces $X$ es aposindético.*

*Demostración.* Sea $p \in X$. Como $T^n$ es suprayectiva, existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $T^n(A) = \{p\}$. Así, dado que $A \subset T^n(A)$, $A = \{p\}$. Por lo que $T(p) = \{p\}$. Por el Teorema 2.26, $X$ es aposindético. $\square$

A continuación mostraremos un espacio métrico, compacto, conexo y aposindético $X$ tal que $T^n : \mathcal{P}(X) \to 2^X$ no es suprayectiva.

**Ejemplo 2.28.** *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Definamos una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{C} \times [-1, 1]$, de la siguiente manera, $(x, a) \sim (y, b)$ si y sólo si $(x, a) = (y, b)$ o $a = b = 1$ o $a = b = -1$. Sea $X$ el espacio cociente $\mathcal{C} \times [-1, 1]/\sim$, ver Figura 2.13. Hagamos $p = X \times \{1\}$ y $q = X \times \{-1\}$.*

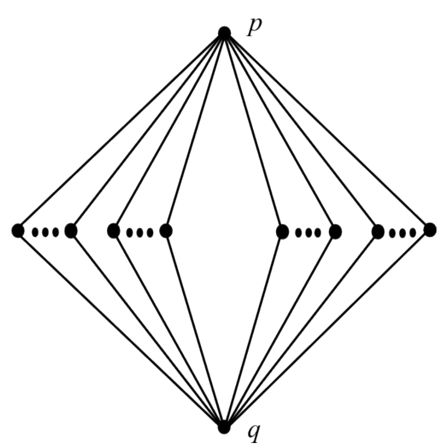


Figura 2.13: El espacio $X$.

Claramente, $X$ es aposindético. Probaremos que $\{p, q\} \notin T^n(\mathcal{P}(X))$. Primero, necesitamos probar $T(\{p, q\}) = X$. Supongamos que existe $x \in X \setminus$

$T(\{p, q\})$. Entonces existe $W \in C(X)$ tal que $x \in \text{int}(W) \subseteq W \subseteq X \setminus \{p, q\}$. Así, dado que $X \setminus \{p, q\}$ es homemorfo $\mathcal{C} \times (0, 1)$, $W$ es homemorfo a un arco con interior vacío, lo cual es una contradicción. Por lo que $T(\{p, q\}) = X$.
Por otra parte, supongamos que existe $A \in \mathcal{P}(X)$ tal que $T(A) = \{p, q\}$. Dado que $A \subset T(A)$, $A \in \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$, esto es una contradicción, ya que $T(\emptyset) = \emptyset$, $T(p) = p$, $T(q) = q$, $T(\{p, q\}) = X$. Por lo que $\{p, q\} \notin T(\mathcal{P}(X))$ y $T^n$ no es suprayectiva.

### 2.2.2. Irreducibilidad y la función $T$

A continuación veremos el concepto de irreducibilidad que más adelante nos ayudará a estudiar algunas propiedades la función $T$ de Jones.

**Definición 2.29.** *Sean $X$ un espacio conexo y $A \subset X$. Decimos que $X$ es:*

1. ***Irreducible en** $A$, si ningún cerrado y conexo propio de $X$ contiene a $A$.*
2. ***Irreducible**, si existen $p \neq q \in X$ tales que $X$ es irreducible sobre $\{p, q\}$. En el caso de que $A = \{p, q\}$, escribiremos que $X$ es irreducible entre $p$ y $q$.*

**Definición 2.30.** *Sean $X$ un espacio conexo y $p \in X$. Decimos que $p$ es un **punto de irreducibilidad** de $X$, si existe $z \in X$ tal que $X$ es irreducible entre $p$ y $z$.*

Observemos que si un espacio conexo tiene un punto de irreducibilidad, entonces éste es irreducible.

**Proposición 2.31.** *Sea $X$ un espacio conexo. Si $p$ es un punto de irreducibilidad de $X$, entonces $X$ no es la unión de dos subconjuntos propios cerrados y conexos tales que ambos contengan a $p$.*

*Demostración.* Sea $q \in X$ tal que $X$ es irreducible entre $p$ y $q$. Supongamos lo contrario, es decir, existen dos subconjuntos propios cerrados y conexos $A$ y $B$ de $X$ tales que $X = A \cup B$ y $p \in A \cap B$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $q \in A$. Así, $A$ es un subconjunto propio cerrado y conexo de $X$ que contiene a $p$ y $q$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $X$ no es la unión de dos subconjuntos propios cerrados y conexos tales que ambos contengan a $p$. □

**Proposición 2.32.** *Sean $X$ un espacio conexo y $p$ un punto de irreducibilidad de $X$. Si $A \subset X$ es cerrado y conexo tal que $p \in A$, entonces $X \setminus A$ es conexo.*

*Demostración.* Sea $A$ un subconjunto cerrado y conexo de $X$ tal que tal que $p \in A$. Supongamos que $X \setminus A$ no es conexo. Entonces existen $P, Q \subset X$ tales que $X \setminus A = P|Q$. Sean $Y = P \cup A$ y $Z = Q \cup A$. Por la Proposición 1.8, $Y$ y $Z$ son cerrados y conexos. Notemos que $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = A$ y $Y \neq X \neq Z$. Así, utilizando la Proposición 2.31, $p \notin A$, esto es una contradicción. Por lo tanto $X \setminus A$ es conexo. □

**Proposición 2.33.** *Sea $X$ un espacio irreducible entre $p$ y $q$. Si $C$ es un subconjunto cerrado y conexo de $X$ tal que $X \setminus C$ no es conexo, entonces $X \setminus C$ tiene exactamente dos componentes tales que cada una de ellas es abierta en $X$ y una contiene a $p$ y la otra contiene a $q$.*

*Demostración.* Sean $P, Q \subset X$ tales que $X \setminus C = P|Q$. Probaremos que $P$ y $Q$ son conexos. Hagamos $Y = P \cup C$ y $Z = Q \cup C$. Por la Proposición 1.8, $Y$ y $Z$ son subconjuntos cerrados y conexos de $X$. Notemos $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = C$ y $Y \neq X \neq Z$. Así, como $p$ y $q$ son puntos de irreducibilidad de $X$, por la Proposición 2.31, $p, q \notin Y \cap Z = C$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p \in P = X \setminus Z$ y $q \in Q = X \setminus Y$.
Como $p$ y $q$ son puntos de irreducibilidad de $X$ y dado que $Y$ y $Z$ son subconjuntos propios cerrados y conexos de $X$ tales que $p \in Y$ y $q \in Z$, por el Teorema 2.32, $X \setminus Y$ y $X \setminus Z$ son conexos. Por lo que $P$ y $Q$ son conexos. Por lo tanto, $P$ y $Q$ son las componentes requeridas.

□

**Proposición 2.34.** *Sean $X$ un espacio compacto, conexo y de Hausdorff y $A \subset X$ no vacío. Entonces existe un subespacio compacto y conexo e irreducible $M$ de $X$ sobre $A$.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{D} = \{C \subset X : C$ es un cerrado, conexo y $A \subset C\}$. Claramente $X \in \mathfrak{D}$. Definamos un orden $\leqslant$ en $\mathfrak{D}$ como sigue: dados $C_1, C_2 \in \mathfrak{D}$, $C_1 \leqslant C_2$ si y sólo si $C_2 \subset C_1$. Notemos que $(\mathfrak{D}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Consideremos una cadena $(\mathfrak{C}, \leqslant)$ en $\mathfrak{D}$. Claramente $(\mathfrak{C}, \leqslant)$ es un conjunto dirigido. Más aún, la función inclusión $i$ de $(\mathfrak{C}, \leqslant)$ en $\mathfrak{D}$ es una red en $\mathfrak{D}$. Sea $i(\alpha) = C_\alpha$, para cada $\alpha \in (\mathfrak{C}, \leqslant)$. Así $\mathfrak{C} = \{C_\alpha : \alpha \in (\mathfrak{C}, \leqslant)\}$. Hagamos $J = (\mathfrak{C}, \leqslant)$ y definamos $C = \bigcap_{\alpha \in J} C_{\alpha_i}$; mostremos que $C \in \mathfrak{D}$. Es claro que

$A \subset C$ y $C$ es cerrado en $X$, por lo que es suficiente ver que $C$ es conexo. Para esto, supongamos que existen $H, K \subset C$ cerrados ajenos no vacíos de $X$ tales que $C = H \cup K$, $C \cap H \neq \emptyset$ y $C \cap J \neq \emptyset$. Como $X$ es normal, existen $U, V$ abiertos ajenos de $X$ tales que $H \subset U$ y $K \subset V$, así $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \cap V \neq \emptyset$. Además $X \setminus (U \cup V) \neq \emptyset$, de no ser así, $U$ y $V$ formarían una separación de $X$, lo cual es una contradicción; de esta manera $X \setminus (U \cup V)$ es un subconjunto compacto no vacío de $X$.

Para cada $\alpha \in J$, $C_\alpha \nsubseteq U \cup V$, en caso contrario, existiría $\beta \in J$ tal que $C_\beta \subset U \cup V$. De la conexidad de $C_\beta$, $C_\beta \subset U$ o $C_\beta \subset V$. Si $C_\beta \subset U$, entonces $C \subset U$ y $C \cap V = \emptyset$; si $C_\beta \subset V$, $C \subset V$ y $C \cap U = \emptyset$, lo cual no es posible.

Por cada $\alpha \in J$, tomemos $x_\alpha \in C_\alpha \setminus (U \cup V)$, entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ es una red en $X \setminus (U \cup V)$, por el Corolario 1.31, $(x_\alpha)$ tiene un punto de acumulación $z \in X \setminus (U \cup V)$.

Tomemos $W$ un abierto en $X$ tal que $z \in W$. Veamos que $W \cap C_\alpha \neq \emptyset$ para toda $\alpha \in J$. Sea $\alpha \in J$, como $J(W)$ es cofinal en $J$, existe $\beta \in J(W)$ tal que $\beta \geqslant \alpha$ y $x_\beta \in W$. Dado que $x_\beta \in C_\beta$, $W \cap C_\beta \neq \emptyset$ y como $C_\beta \subset C_\alpha$, $W \cap C_\alpha \neq \emptyset$, por lo que $z \in \mathrm{cl(C_\alpha)} = \mathrm{C_\alpha}$. Así $z \in C \subset U \cup V$, esto es una contradicción. En consecuencia $C \in \mathfrak{D}$. Así, $\mathfrak{C}$ tiene una cota superior, a saber, la intersección de sus elementos. Por el Lema de Zorn 1.20, $\mathfrak{D}$ tiene un elemento maximal $M$.

Finalmente, probaremos que $M$ es irreducible sobre $A$. Sea $C$ un subconjunto cerrado, conexo y propio de $M$ tal que $A \subset C$. Claramente $C \in \mathfrak{D}$. Entonces $C \leqslant M$. Así, $M \subset C$. Por lo que $M = C$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M$ es irreducible sobre $A$. $\square$

Ahora veremos algunos resultados relacionados entre la función $T$ de Jones y el concepto de irreducibilidad.

**Lema 2.35.** *Sean $X$ un espacio compacto, conexo, de Hausdorff e irreducible entre, $x, y \in X$ y $j, k \in \mathbb{N}$. Si $0 \leqslant j < k$ y si $T^j(x) \cap T^{k-j}(y) = \emptyset$, entonces $T^{j+1}(x) \cap T^{k-j-1}(y) = \emptyset$.*

*Demostración.* Sea $z' \in T^{k-j-1}(y)$. Probaremos que $z' \notin T^{j+1}(x)$. Primero, necesitamos probar que existe $W \in C(X)$ tal que $T^{k-j-1}(y) \subset X \setminus W \subset X \setminus \mathrm{int}(W) \subset X \setminus T^j(x)$. Sea $z \in T^j(x)$. Entonces $z \notin T^{k-j}(y)$. Así, existe un subconjunto cerrado y conexo $W_z$ tal que $z \in \mathrm{int}(W_z) \subseteq W_z \subseteq X \setminus T^{k-j-1}(y)$. Entonces $\{\mathrm{int}(W_z) : z \in T^j(x)\}$ es una cubierta de $T^j(x)$. Dado que $T^j(x)$ es compacto (Teorema 2.10), existe $\{z_1, \ldots, z_r\} \subset T^j(x)$ tal que

$\{\mathrm{int}(W_{z_1}), \ldots, \mathrm{int}(W_{z_r})\}$ es una cubierta de $T^j(x)$. Hagamos $W = \bigcup_{i=1}^{r} W_{z_i}$. Dado que $T^j(x)$ es conexo (Corolario 2.20), $W$ es conexo. Notemos que $T^j(x) \subset \mathrm{int}(W) \subset W \subset X \setminus T^{k-j-1}(y)$ y $W$ es compacto. Por lo anterior, $z' \in T^{k-j-1}(y) \subset X \setminus W \subset X \setminus \mathrm{int}(W) \subset X \setminus T^j(x)$. Por las Proposiciones 2.32 y 2.33, $X \setminus W$ tiene a lo más dos componentes abiertas en $X$. Sea $A$ la componente de $X \setminus W$ que contiene a $z'$. De esta manera $z' \in A \subset \mathrm{cl}(A) \subset X \setminus \mathrm{int}(W) \subset X \setminus T^j(x)$. Por lo que $z' \notin T^{j+1}$. Por lo tanto $T^{j+1}(x) \cap T^{k-j-1}(y) = \emptyset$. $\square$

**Teorema 2.36.** *Si $X$ es un espacio compacto, conexo, irreducible y de Hausdorff, entonces $X$ es $n$-simétrico.*

*Demostración.* Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in X$ tales que $y \in T^n(x)$. Probaremos que $x \in T^n(y)$. Supongamos que $x \notin T^n(y)$. Entonces $T^0(x) \cap T^n(y) = \emptyset$. Aplicando el Lema 2.35, obtenemos que $T(x) \cap T^{n-1}(y) = \emptyset$. Nuevamente por el Lema 2.35, se tiene que $T^2(x) \cap T^{n-2}(y) = \emptyset$. Así, aplicando $n-2$ veces el Lema 2.35, tenemos que $T^n(x) \cap T^0(y) = \emptyset$. Por lo que, $y \notin T^n(x)$, esto es una contradicción. $\square$

**Teorema 2.37.** *Sea $X$ un espacio compacto, conexo, de Hausdorff e irreducible. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n+1}(p) = T^n(p)$ para todo $p \in X$, entonces $\{T^n(p) : p \in X\}$ es una partición de $X$.*

*Demostración.* Claramente, cada $T^n(p)$ es no vacío y la unión de los elementos de $\{T^n(p) : p \in X\}$ es $X$. Finalmente, veamos que si $T^n(p) \cap T^n(q) \neq \emptyset$, entonces $T^n(p) = T^n(q)$. Sea $x \in T^n(p) \cap T^n(q)$. Por el Corolario 2.9, $T^n(x) \subset T^n(p)$. De la irreducibilidad de $X$, de que $x \in T^n(p)$ y por el Teorema 2.36, $p \in T^n(x)$. Nuevamente, por el Corolario 2.9, $T^n(p) \subset T^n(x)$. De donde $T^n(x) = T^n(p)$. De la misma manera, se demuestra que $T^n(x) = T^n(q)$. Por lo tanto $T^n(p) = T^n(q)$. $\square$

### 2.2.3. Indescomponibilidad y la función $T$

En lo siguiente estudiaremos el concepto de indescomponibilidad y algunas relaciones que hay entre éste y la función $T$ de Jones.

**Definición 2.38.** *Sea $X$ un espacio conexo. Decimos que $X$ es* ***descomponible*** *si existen $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$ tales que $X = A \cup B$. En el caso de que el espacio no sea descomponible, entonces lo llamaremos* ***indescomponible***.

**Proposición 2.39.** *Un espacio $X$ es descomponible si y sólo si $X$ contiene un subconjunto propio cerrado y conexo con interior no vacío.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es descomponible. Entonces existen dos subconjuntos propios cerrados y conexo $A$ y $B$ en $X$ tales que $X = A \cup B$. Notamos que $X \setminus B$ es un conjunto abierto contenido en $A$. Por lo que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$. Por lo que $A$ es un subconjunto propio cerrado y conexo de $X$ con interior no vacío.

Para la suficiencia, sea $A$ es un subconjunto propio cerrado y conexo de $X$ con interior no vacío. Consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** $X \setminus A$ es conexo.
Entonces $\operatorname{cl}(X \setminus A)$ es un subconjunto cerrado y conexo de $X$. Necesitamos probar que $\operatorname{cl}(X \setminus A) \neq X$. Sea $p \in \operatorname{int}(A)$. Veamos que $p \notin \operatorname{cl}(X \setminus A)$. En el caso de que $p \in \operatorname{cl}(X \setminus A)$, entonces $\operatorname{int}(A) \cap X \setminus A \neq \emptyset$, esto es una contradicción. De donde, $\operatorname{cl}(X \setminus A) \neq X$. Así, dado que $X = A \cup \operatorname{cl}(X \setminus A)$, $X$ es descomponible.

**Caso II.** $X \setminus A$ no es conexo.
Entonces existen subconjuntos abiertos $U, V \in X$ tales que $X \setminus A = U \cup V$. Por la Proposición 1.8, $A \cup U$ y $A \cup V$ son subconjuntos propios, cerrados y conexos de $X$ y $X = (A \cup U) \cup (A \cup V)$. De donde $X$ es descomponible. □

**Corolario 2.40.** *Un espacio $X$ es indescomponible si y sólo si para cada $A \in C(X) \setminus \{X\}$, se tiene que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$.*

**Teorema 2.41.** *Un espacio $X$ es indescomponible si y sólo si $T(p) = X$ para cada $p \in X$.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es indescomponible. Sea $p \in X$ y $x \in X$. Probaremos que $x \in T(p)$. Sea $W \in C(X)$ tal que $x \in \operatorname{int}(W)$. Veamos $p \in W$. Por en Corolario 2.40, $W = X$. De donde $p \in W$. Por lo que, $x \in T(p)$. Así, $T(p) = X$.
Ahora, supongamos que $X$ es descomponible. Entonces existen $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$ tales que $X = A \cup B$. Sean $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Entonces $b \in \operatorname{int}(B) \subset B \subset X \setminus \{a\}$. De esta manera $b \in X \setminus T(a)$. Por lo que $T(a) \neq X$. □

## 2.3. El conjunto $\mathcal{L}$

**Definición 2.42.** *Un* **continuo** *es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subconjunto $Y$ de un continuo $X$ es un* **subcontinuo** *de $X$ si es un continuo como subespacio de $X$.*

Sea $X$ un continuo. Consideremos a $2^X$ con la topología de Vietoris. Sean $A, B \in 2^X$. Definimos el conjunto $\mathcal{L}$ como sigue:

$$\mathcal{L} = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \subset T(B) \text{ y } B \subset T(A)\}.$$

Directamente de la definición del conjunto $\mathcal{L}$ tenemos lo siguiente.

**Proposición 2.43.** *Sea $X$ un continuo. Se tienen las siguientes condiciones:*

1. $\{(A, A) : A \in 2^X\} \subset \mathcal{L}$,
2. $(A, B) \in \mathcal{L}$ *si y sólo si* $(B, A) \in \mathcal{L}$,
3. *Para cada* $A \in 2^X$, $(A, T(A)) \in \mathcal{L}$.

*Demostración.* La prueba de 1, se sigue del Teorema 2.6 y de que $\{(A, A) : A \in 2^X\} = \{(A, A) \in 2^X \times 2^X : A \subset T(A) \text{ y } A \subset T(A)\}$. Para la prueba de 2, se sigue de que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \subset T(B) \text{ y } B \subset T(A)\}\\ &= \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : B \subset T(A) \text{ y } A \subset T(B)\}\\ &= \{(B, A) \in 2^X \times 2^X : B \subset T(A) \text{ y } A \subset T(B)\}.\end{aligned}$$

La demostración de 3, se sigue de que $A \subset T(A) \subset T(T(A))$ y $T(A) \subset T(A)$. □

**Teorema 2.44.** *Sea $X$ un continuo. Entonces*

1. *Si* $(A, B) \in \mathcal{L}$ *y* $A \subset C \subset B$, *entonces* $(A, C) \in \mathcal{L}$ *y* $(C, B) \in \mathcal{L}$.
2. *Si* $(A, D), (C, D) \in \mathcal{L}$ *y* $A \subset B \subset C$, *entonces* $(B, D) \in \mathcal{L}$.
3. *Si* $(A, B) \in \mathcal{L}$, *entonces* $(T(A), T(B)) \in \mathcal{L}$.
4. *Si* $(A, B) \in \mathcal{L}$, *entonces* $(A, A \cup B) \in \mathcal{L}$.

*Demostración.* Para probar 1, sean $(A, B) \in \mathcal{L}$ y $A \subset C \subset B$. Primero veamos que $(A, C) \in \mathcal{L}$. Como $A \subset C$ tenemos que $A \subset C \subset T(C)$. Veamos que $C \subset T(A)$. Dado que $C \subset B$ y $B \subset T(A)$, $C \subset B \subset T(A)$. Así, $C \subset T(A)$. Por lo que $(A, C) \in \mathcal{L}$.
Finalmente, veamos que $(C, B) \in \mathcal{L}$. Como $C \subset B$, $C \subset T(C) \subset T(B)$. Falta ver que $B \subset T(C)$. Como $A \subset C$ y $B \subset T(A)$, $B \subset T(A) \subset T(C)$. De donde, $(C, B) \in \mathcal{L}$.

Para probar 2, sean $(A, D), (C, D) \in \mathcal{L}$ y $A \subset B \subset C$. Probaremos que $(B, D) \in \mathcal{L}$. Como $C \subset T(D)$ y $B \subset C$, $B \subset T(D)$. Ahora, veamos que $D \subset T(B)$. Dado que $D \subset T(A)$ y $A \subset B$, $D \subset T(A) \subset T(B)$ y $D \subset T(B)$. Por lo que $(B, D) \in \mathcal{L}$.

La prueba de 3, se sigue de la siguiente afirmación: si $A \subset T(B)$ y $B \subset T(A)$, entonces $T(A) \subset T(T(B))$ y $T(B) \subset T(T(A))$.

Finalmente probaremos 4. Sea$(A, B) \in \mathcal{L}$. Probaremos que $(A, A \cup B) \in \mathcal{L}$. Como $A \subset A \cup B$, $A \subset T(A \cup B)$. Ahora bien, como $B \subset T(A)$ y $A \subset T(A)$, $A \cup B \subset T(A)$. Así, $(A, A \cup B) \in \mathcal{L}$. □

**Teorema 2.45.** *El conjunto* $\mathcal{L}$ *es cerrado en* $2^X \times 2^X$*.*

*Demostración.* Sea $(A, B) \in 2^X \times 2^X \setminus \mathcal{L}$. Sin pérdidad de generalidad, podemos suponer que $A \nsubseteq T(B)$. Sean $a \in A \setminus T(B)$ y un subcontinuo $W$ de $X$ tal que $a \in \operatorname{int}(W)$ y $W \cap B = \emptyset$. Sea $V = X \setminus W$. Notemos que $V$ es un abierto en $X$ tal que $B \subseteq V$ y $V \cap W = \emptyset$. Sea $\mathcal{U} = \langle \operatorname{int}(W), X \rangle \times \langle V \rangle$. Claramente, $(A, B) \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es un abierto en $2^X$. Para probar que $\mathcal{U} \subset 2^X \times 2^X \setminus \mathcal{L}$, sea $(C, D) \in \mathcal{U}$. Entonces $C \cap \operatorname{int}(W) \neq \emptyset$ y $D \subseteq V$. Ahora, sea $c \in C \cap \operatorname{int}(W)$. Veamos que $c \notin T(D)$. En el caso de que $c \in T(D)$, $W \cap D \neq \emptyset$, esto es una contradicción. De donde $c \notin T(D)$. Así, $(C, D) \in 2^X \times 2^X \setminus \mathcal{L}$. Lo cual prueba que $2^X \times 2^X \setminus \mathcal{L}$ es abierto.
Por lo tanto $\mathcal{L}$ es cerrado en $2^X \times 2^X$. □

**Definición 2.46.** *Un* ***arco*** *es cualquier espacio topológico que sea homeomorfo al intervalo cerrado* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *con la topología usual. Decimos que un espacio topológico* $X$ *es* ***arco conexo*** *si para cada par de puntos* $x, y \in X$ *existe un arco en* $X$ *que une a* $x$ *con* $y$*.*

**Definición 2.47.** *Sean* $X$ *un continuo y* $A, B \in 2^X$*. Un* ***arco ordenado*** *de* $A$ *en* $B$ *es una función uno a uno, definida de la siguiente manera,* $\alpha$ :

$[0,1] \to 2^X$ *tal que* $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ *y para cada* $s, t \in [0,1]$ *tales que* $s < t$, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

Los siguientes teoremas serán utilizados posteriormente, sin embrago no escribiremos su prueba, la cual se encuentra en [5, Teorema 14.9, p. 113] y [5, Teorema 15.3, p. 120].

**Teorema 2.48.** *Si $X$ es un continuo, entonces $2^X$ y $C(X)$ son arco conexos.*

**Teorema 2.49.** *Sean $X$ un continuo y $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Entonces:*
*existe un arco ordenado en $2^X$ de $A_0$ a $A_1$ si y sólo si $A_0 \subset A_1$ y cada componente de $A_1$ intersecta a $A_0$.*

**Teorema 2.50.** *Sea $X$ un continuo. Entonces $\mathcal{L} \cap [C(X) \times C(X)]$ es arco conexo.*

*Demostración.* Sea $(A, B) \in \mathcal{L} \cap [C(X) \times C(X)]$. Dado que $A$ y $T(B)$ son elementos de $C(X)$, por el Teorema 2.49 existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A, \alpha(1) = T(B)$ y para cada $t \in [0,1]$, $A \subseteq \alpha(t) \subseteq T(B)$. Además, como $(A, B) \in \mathcal{L}$ y por el Teorema 2.44.2, $(\alpha(t), B) \in \mathcal{L}$ para cada $t \in [0,1]$. Por lo que $j(t) = (\alpha(t), B)$, $t \in [0,1]$ define un arco que une a $(A, B)$ con $(T(B), B)$ y este es un subconjunto de $\mathcal{L} \cap [C(X) \times C(X)]$.

Por otra parte, como $B$ y $T(B)$ son conexos y $B \subseteq T(B)$ y nuevamente por el Teorema 2.49, existe un arco ordenado $\gamma : [0,1] \to C(X)$ tal que $\gamma(0) = B$ y $\gamma(1) = T(B)$ y para cada $t \in [0,1]$, $B \subseteq \gamma(t) \subseteq T(B)$. Así, para cada $t \in [0,1]$, $B \subseteq \gamma(t) \subseteq T(B)$, lo cual implica que $T(B) \subseteq T(\gamma(t))$, y $\gamma(t) \subseteq T(T(B))$. De donde $(\gamma(t), B)$ está en $\mathcal{L} \cap [C(X) \times C(X)]$ para cada $t \in [0,1]$. Entonces $g : [0,1] \to \mathcal{L} \cap [C(X) \times C(X)]$ definido como $g(t) = (\gamma(t), B)$ es un arco que une a $(B, B)$ con $(T(B), B)$ y este es un subconjunto de $\mathcal{L} \cap [C(X) \times C(X)]$.

Finalmente, como $\{(A, A) : A \in 2^X\} \cap [C(X) \times C(X)]$ es homeomorfo a $C(X)$ y $C(X)$ es arco conexo, entonces $\mathcal{L} \cap [C(X) \times C(X)]$ es arco conexo. $\square$

# Capítulo 3

# La función $S$

## 3.1. La función $S$ y la función $T$

En esta sección usaremos la definición de la función $T$ para definir una nueva la función que llamaremos $S$, presentaremos algunos ejemplos y propiedades básicas de esta función.

**Definición 3.1.** *Sea $X$ un espacio topológico. Definimos la función $S : P(X) \to P(X)$, de la siguiente manera, para cada $A \in P(X)$,*

$$S(A) = \{x \in T(A) : A \cap T(x) \neq \emptyset\}.$$

*Para el caso en el que $A = \{p\}$, vamos a escribir $S(p)$ en lugar de $S(\{p\})$.*

El siguiente ejemplo muestra que la función $T$ y la función $S$ son distintas.

**Ejemplo 3.2.** *Sea $\mathbb{A}$ el abanico armónico definido en el Ejemplo 2.5. Entonces, para cada $p \in [0,1) \times \{0\}$, $T(p) \neq S(p)$.*

Recordando que en el Ejemplo 2.5 se probó lo siguiente, para cada $p \in \mathbb{A}$:

$$T(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } p \in \mathbb{A} \setminus \{L_0\}, \\ [x,1] \times \{0\} & \text{si } p = (x,0) \text{ y } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Ahora, sea $x \in [0,1)$ y $p = (x,0)$. Probaremos que $S(p) \neq T(p)$. Notemos que para cada $z \in [x,1] \times \{0\}$

$$T((z,0)) = \begin{cases} \{(z,0)\} & \text{si } z = 1, \\ [z,1] \times \{0\} & \text{si } z < 1. \end{cases}$$

Así:

$$\begin{aligned} S(p) &= \{(z,y) \in T(p) : \{p\} \cap T((z,y)) \neq \emptyset\} \\ &= \{(z,0) \in [x,1] \times \{0\} : \{p\} \cap T((z,0)) \neq \emptyset\} \\ &= \{(x,0)\}. \end{aligned}$$

Por lo que $S(p) \neq T(p)$.

En los siguientes teoremas probaremos algunas propiedades básicas de la función $S$ motivadas por las propiedades de la función $T$ de Jones.

**Teorema 3.3.** *Sean $X$ un espacio topológico y $A, B \subset X$. Se tienen las siguientes condiciones:*

1. *$A \subset S(A) \subset T(A)$;*
2. *$p \in S(q)$ si y sólo si $q \in S(p)$;*
3. *si $A \subset B$, entonces $S(A) \subset S(B)$;*
4. *si $X$ es compacto y $A$ es cerrado no vacío, entonces $S(A)$ es cerrado en $X$.*

*Demostración.* Para probar 1, sea $x \in A$. Como $x \in T(x)$, $x \in A \cap T(x)$. De donde $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Por lo que $A \subset S(A)$. La otra contención se sigue de la definición de la función $S$.
Probaremos 2. Para la necesidad, sea $p \in S(q)$. Supongamos que $q \notin S(p)$. Entonces $T(q) \cap \{p\} = \emptyset$. Por lo que $p \notin T(q)$, lo cual es una contradicción. De donde $q \in S(p)$. De la misma manera se prueba la suficiencia.
Para demostrar 3, sea $x \in S(A)$. Así, $x \in T(A)$ y $T(x) \cap A \neq \emptyset$. Dado que $T(A) \subset T(B)$ y $A \subset B$, $x \in T(B)$ y $\emptyset \neq T(x) \cap A \subset T(x) \cap B$. De donde $x \in S(B)$.
Probaremos 4. Vamos a ver que $X \setminus S(A)$ es abierto. Sea $p \in X \setminus S(A)$. Consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** $p \notin T(A)$.

Como $T(A)$ es cerrado, entonces $X \setminus T(A)$ es un abierto que contiene $p$ que se queda contenido en $X \setminus S(A)$.

**Caso II.** $p \in T(A)$ y $A \cap T(p) = \emptyset$.

Entonces para cada $a \in A$, existe $C_a \in C(X)$ tal que $a \in \operatorname{int}(C_a)$ y $p \notin C_a$. Notemos que $\{\operatorname{int}(C_a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta de $A$. Como $A$

es compacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int}(C_{a_i})$. Entonces $p \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{a_i}$ y $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{a_i}$ es un abierto en $X$. Finalmente, veamos que

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{a_i} \subset X \setminus S(A).$$

Sea $z \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{a_i}$. Para ver que $z \notin S(A)$ es suficiente probar que $T(z) \cap A = \emptyset$. Supongamos que $T(z) \cap A \neq \emptyset$. Tomemos $y \in T(z) \cap A$. Dado que $y \in A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{int(C_{a_i})}$, $y \in \mathrm{int}(C_{a_i}) \subset C_{a_i}$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, como $y \in T(z)$, $C_{a_i} \cap \{z\} \neq \emptyset$. De donde $z \in C_{a_i}$, lo cual es una contradicción. Por lo que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{a_i}$ es un abierto contenido en $X \setminus S(A)$.

Por lo tanto, en cualquier caso $X \setminus S(A)$ es abierto en $X$. □

### 3.1.1. Indescomponibilidad, unicoherencia y la función $S$

A continuación veremos la relación que hay entre los conceptos de indescomponibilidad, unicoherencia y la función $S$.

**Definición 3.4.** *Sea $X$ un espacio conexo. Decimos que $X$ es* ***unicoherente*** *si $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$ son tales que $X = A \cup B$, entonces $A \cap B$ es conexo. Decimos que $X$ es* ***hereditariamente unicoherente*** *si para cada $A, B \in C(X)$, $A \cap B$ es conexo.*

**Teorema 3.5.** *Para un espacio $X$ se tienen las siguientes condiciones:*

1. *Si $X$ es $T_1$, entonces $X$ es indescomponible si y sólo si $S(A) = X$ para cada $A \in 2^X$,*

2. *Si $X$ es aposindético, entonces $S(A) = A$ para cada $A \in 2^X$,*

3. *Si $X$ es un continuo hereditariamente unicoherente y $S(A) = A$ para cada $A \in 2^X$, entonces $X$ es aposindético.*

*Demostración.* Para probar 1, supongamos que $X$ es indescomponible. Sea $A \in 2^X$. Veamos que $S(A) = X$. Sea $x \in X$. Para probar que $x \in S(A)$ es suficiente ver que $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Dado que $X$ es indescomponible, tenemos por el Teorema 2.41 que $T(x) = X$. Así $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Por lo que $S(A) = X$. Ahora, para probar la suficiencia de 1, sea $p \in X$. Veamos que $T(p) = X$. Dado que $\{p\} \in 2^X$ y $X = S(p) \subset T(p) \subset X$, $T(p) = X$. Así, por el Teorema 2.41, $X$ es indescomponible.

Veamos 2, Sea $A \in 2^X$. Probaremos que $S(A) = A$. Dado que $A \subset S(A)$, sólo necesitamos probar que $S(A) \subset A$. Sea $x \in S(A)$. Entonces $x \in T(A)$ y $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Como $X$ es aposindético, $T(x) = \{x\}$. Así, $x \in A$. Por lo que $S(A) = A$.
Probaremos 3. Sean $p \in X$. Para probar que $X$ es aposindético en $p$ con respecto a $q$, es suficiente ver por el Teorema 2.26 que $p \notin T(q)$. En el caso de que $T(q) = \{q\}$, se tiene que $p \notin T(q)$. Ahora, supongamos que $p \in T(q)$ y $T(q) \neq \{q\}$. Dado que $T(q)$ es un subcontinuo de $X$ (ver Corolario 2.20), por la Proposición 2.34, existe un subcontinuo $M$ de $T(q)$ irreducible entre $p$ y $q$. Sea $z \in M \setminus \{p, q\}$. Demostraremos que $z \in S(\{p, q\})$. Notemos que $z \in M \subset T(q) \subset T(\{p, q\})$. Falta probar que $\{p, q\} \cap T(z) \neq \emptyset$. Basta ver que $p \in T(z)$. Sea $G$ es un continuo que contiene a $p$ en su interior. Dado que $p \in T(q)$, $q \in G$. Ahora, vamos a demostrar que $M \subset G$. Como $M$ es un continuo en $T(q)$, $M$ es un continuo en $X$. Por ser $X$ hereditariamente unicoherente, $M \cap G$ es un continuo. Notemos que $p, q \in M \cap G \subset M$. Así, $M \cap G = M$. De donde $M \subset G$. Por lo que $z \in G$. Concluimos que $p \in T(z)$. De lo anterior $z \in S(\{p, q\})$, esto contradice la segunda parte de la hipótesis. Por lo tanto $p \notin T(q)$. $\square$

La implicación inversa del Teorema 3.5.2 no es cierta en general, es decir, existe un espacio $X$ tal que $S(A) = A$ para cada $A \in 2^X$ y $X$ no es aposindético. A continuación vamos a construir un espacio que cumple con éstas condiciones. Sea $Z$ el espacio como en la Figura 3.1, y sean $v_1$ y $v_2$ sus vértices.

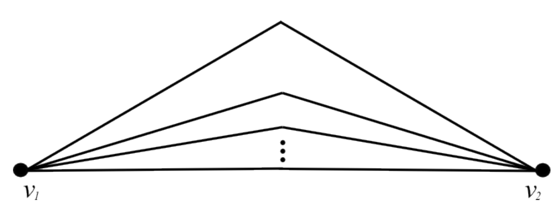


Figura 3.1: El espacio $Z$.

Consideremos $\mathbb{C}$ el espacio cociente que resulta de identificar a $v_1$ con $v_2$ a un punto, ver la Figura 3.2, a dicho punto lo denotaremos por $v$.

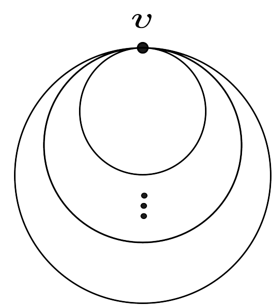


Figura 3.2: El espacio $\mathbb{C}$.

Es fácil convencerse que $\mathbb{C}$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$ es métrico, compacto y conexo, además es la unión numerable de circunferencias $C_0, C_1, C_2, \ldots$, como en la Figura 3.3.

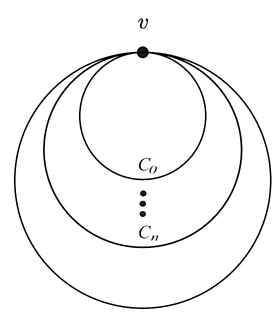


Figura 3.3: El espacio $\mathbb{C} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} C_i$.

Vamos a probar que $\mathbb{C}$ es el espacio requerido. Sea $A \in 2^{\mathbb{C}}$. Probaremos que $S(A) = A$. Primero vamos a calcular $T(A)$. Para esto necesitamos probar la siguiente afirmación.

**Afirmación I.** Si $z \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \setminus (A \cup \{v\})$, entonces $z \notin T(A)$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in C_n$. En el caso de que $A \cap C_n = \emptyset$, $z \in \operatorname{int}(C_n)$. Por lo que $z \notin T(A)$. Supongamos que $A \cap C_n \neq \emptyset$. Como $C_n$ es una circunferencia, existe una parametrización $g : [-\pi, \pi] \to C_n$ tal que $g(-\pi) = g(\pi) = v$ y $g|_{(-\pi,\pi)}$ es un homeomorfismo. Así, $g^{-1}(A \cap C_n)$ es un cerrado no vacío en $[-\pi, \pi]$. Ahora, notemos que $g^{-1}(z) \notin g^{-1}(A \cap C_n)$ y $-\pi, \pi \notin g^{-1}(A \cap C_n)$. Sea $a' = \min\{g^{-1}(A \cap C_n)\}$ y $b' = \max\{g^{-1}(A \cap C_n)\}$. De donde $-\pi < a' \leq b' < \pi$ y $g^{-1}(z) \in (-\pi, a') \cup (b', \pi)$. Sean $a, b \in [-\pi, \pi]$ tales que $-\pi < a < a' \leq b' < b < \pi$ y $g^{-1}(z) \in (-\pi, a) \cup (b, \pi)$. Hagamos $W = g([-\pi, a] \cup [b, \pi])$. Notemos que $z \in \operatorname{int}(W) \subset W \in C(\mathbb{C})$ y $W \cap A = \emptyset$, (ver la Figura 3.4). Por lo que $z \notin T(A)$.

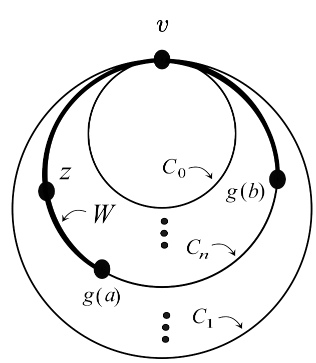


Figura 3.4: $z \in \operatorname{int}(W) \subset W \in C(\mathbb{C})$.

Ahora, veremos los siguientes casos.

**Caso A.** $v \in A$.
Vamos a demostrar que $T(A) = C_0 \cup A$. Por el Teorema 2.6.1, $A \subset T(A)$. Sea $z \in C_0 \setminus \{v\}$. Veremos que $z \in T(A)$. Sea $W \in C(\mathbb{C})$ tal que $z \in \operatorname{int}(W)$. Probaremos que $W \cap A \neq \emptyset$. Dado que $z \in \operatorname{int}(W)$ y $W$ es un cerrado y conexo, por la construcción de $\mathbb{C}$, $v \in W \cap A$, ver la Figura 3.5. De donde $z \in T(A)$. Por lo que $C_0 \subset T(A)$.

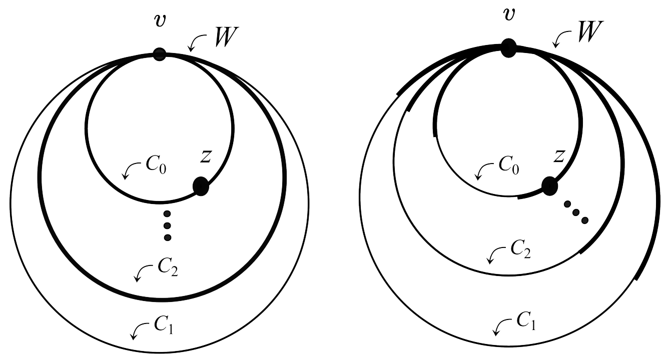


Figura 3.5: $z \in \operatorname{int}(W)$.

Sea $z \in T(A) \setminus A$. Mostraremos que $z \in C_0 \cup A$. Supongamos que $z \notin C_0$. Por la construcción de $\mathbb{C}$, $z \in C_n \setminus \{v\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por la afirmación I, existe un subarco de circunferencia $W$ de $C_n$ tal que $z \in \operatorname{int}(W)$ y $W \cap A = \emptyset$, esto es una contradicción. Por lo que $z \in C_0$.
Por lo tanto $T(A) = C_0 \cup A$.

**Caso B.** $v \notin A$.
Primero necesitamos probar las siguientes afirmaciones.

**Afirmación II.** $v \notin T(A)$.

Supongamos que $A \cap C_0 \neq \emptyset$.
Como $C_0$ es una circunferencia, existe una parametrización $f : [-\pi, \pi] \to C_0$ tal que $f(-\pi) = f(\pi) = v$ y $f|_{(-\pi,\pi)}$ es un homeomorfismo. Así, $f^{-1}(A \cap C_0)$ es un cerrado no vacío en $[-\pi, \pi]$. Dado que $v \notin A$, $-\pi, \pi \notin f^{-1}(A \cap C_0)$. Sea $a' = \text{mín}\{f^{-1}(A \cap C_0)\}$ y $b' = \text{máx}\{f^{-1}(A \cap C_0)\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \leq b$. Sean $a', b' \in [-\pi, \pi]$ tales que $-\pi < a < a' \leq b' < b < \pi$.

Notemos que $f([-\pi, a] \cup [b, \pi]) \in C(\mathbb{C})$ y $f([-\pi, a] \cup [b, \pi]) \cap A = \emptyset$. Hagamos $\gamma = f([-\pi, a] \cup [b, \pi])$, ver la Figura 3.6.

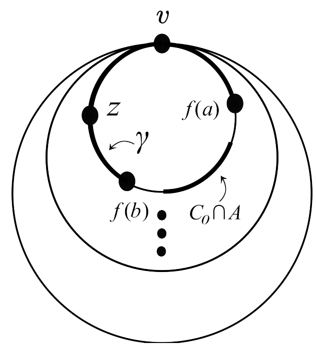


Figura 3.6: El arco $\gamma$.

Dado que $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $C_0$, existen dos sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ convergentes a $f(a)$ y a $f(b)$, respectivamente, tales que $a_n, b_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, por cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\gamma_n$ el arco en $C_n$, como en la Figura 3.7, que une a $a_n$ con $b_n$. Por la construcción de $\mathbb{C}$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\gamma$.

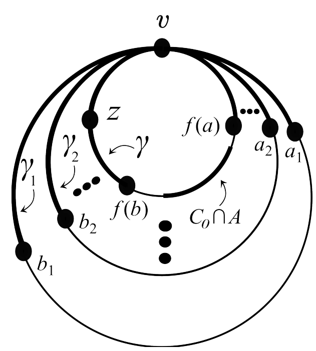


Figura 3.7: $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\gamma$.

Necesitamos probar lo siguiente: existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n \cap A = \emptyset$ para todo $n \geq N$. Supongamos que, por cada $i \in \mathbb{N}$, existe $n_i \geq i$ tal que $\gamma_{n_i} \cap A \neq \emptyset$, ver Figura 3.8. Ahora, por cada $i \in \mathbb{N}$, sea $y_{n_i} \in \gamma_{n_i} \cap A$. Por la compacidad de $\mathbb{C}$, podemos suponer que $\{y_{n_i}\}$ conerge a $y \in A$. Así, por la Proposición 1.44, $y \in \gamma \cap (A \cap C_0)$, esto es una contradicción.

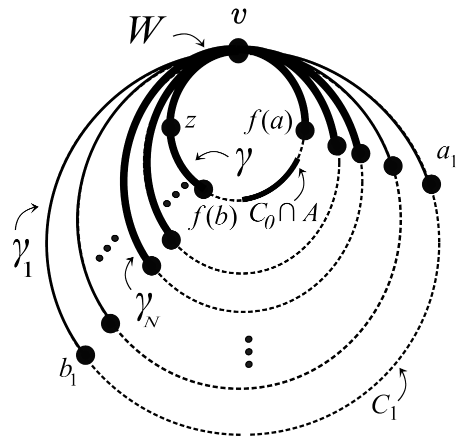


Figura 3.8: $W = \bigcup_{n=N}^{\infty} \gamma_n \cup \gamma$.

Ahora, supongamos que $C_i$ intersecta a $A$ para cada $i \in \{1, \ldots, N-1\}$. Sea $i \in \{1, \ldots, N-1\}$. Como $C_i$ es una circunferencia, existe una parametrización $g_i : [-\pi, \pi] \to C_n$ tal que $g_i(-\pi) = g(\pi) = v$ y $g_i|_{(-\pi,\pi)}$ es un homeomorfismo. Así, $g_i^{-1}(A \cap C_n)$ es un cerrado no vacío en $[-\pi, \pi]$. Notemos que $-\pi, \pi \notin g_i^{-1}(A \cap C_i)$. Sea $a_i' = \text{mín}\{g_i^{-1}(A \cap C_i)\}$ y $b_i' = \text{máx}\{g_i^{-1}(A \cap C_i)\}$. De donde $-\pi < a_i' \leq b_i' < \pi$. Sean $a_i, b_i \in [-\pi, \pi]$ tales que $-\pi < a_i < a_i' \leq b_i' < b_i < \pi$. Entonces $[-\pi, a_i] \cup [b_i, \pi] \subset [-\pi, \pi] \setminus g_i^{-1}(A \cap C_i)$. Por cada $i \in \{i, \ldots, N-1\}$, sea $W_i = g_i([-\pi, a_i] \cup [b_i, \pi])$.

Hagamos $W = \bigcup_{i=1}^{N-1} W_i \cup \bigcup_{i=N}^{\infty} \gamma_i \cup \gamma$, ver la Figura 3.9. Notemos que $W$ es un subconjunto compacto, conexo de $\mathbb{C}$, $W \cap A = \emptyset$ y $v \in \text{int}(W) \subset W \in C(\mathbb{C})$. De donde $v \notin T(A)$.

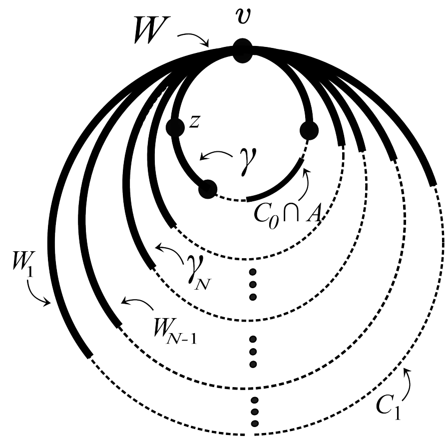


Figura 3.9: $W = \bigcup_{i=1}^{N-1} W_i \cup \bigcup_{i=N}^{\infty} \gamma_i \cup \gamma$.

Supongamos que $C_0 \cap A \neq \emptyset$. Como $C_0$ es una circunferencia, existe una parametrización $f : [-\pi, \pi] \to C_0$ tal que $f(-\pi) = f(\pi) = v$ y $f|_{(-\pi,\pi)}$ es un homeomorfismo. Así, $f^{-1}(A \cap C_0)$ es un cerrado no vacío en $[-\pi, \pi]$. Dado que $v \notin A$, $-\pi, \pi \notin f^{-1}(A \cap C_0)$. Sea $a = \text{mín}\{f^{-1}(A \cap C_0)\}$ y $b = \text{máx}\{f^{-1}(A \cap C_0)\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \leq b$. Hagamos $\beta = f([a, b])$. Entonces $A \cap C_0 \subset \beta$. Necesitamos probar la siguiente afirmación.

**Afirmación III** Si $z \in C_0 \setminus (\beta \cup \{v\})$ y $A \cap C_0 \neq \emptyset$, entonces $z \notin T(A)$.

Como $C_0$ es una circunferencia y $A \cap C_0 \subset \beta$ el cual no contiene a $v$, usando una parametrización como arriba, podemos probar que existen $a, b \in C_0 \setminus \beta$ y un arco $\gamma$ en $C_0$ con puntos extremos $a$ y $b$ tales que $z, v \in \gamma \setminus \{a, b\}$ y $\gamma \cap \beta = \emptyset$. Sin pérdidad de generalidad podemos suponer que $\gamma$ es como en la Figura 3.10.

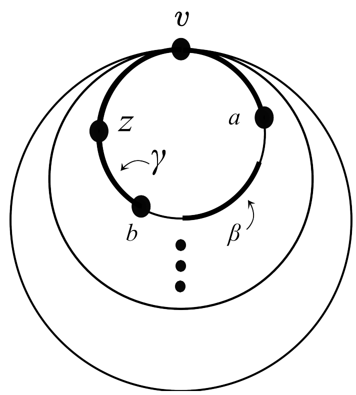


Figura 3.10: $A \cap C_0 \subset \beta$.

Dado que $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $C_0$, procedemos como arriba, para probar que existe una sucesión $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ tal que, por cada $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n$ el arco en $C_n$ que cintiene a $v$ y $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\gamma$.

Ahora, necesitamos probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_n \cap A = \emptyset$ para todo $n \geq N$. Supongamos que, por cada $i \in \mathbb{N}$, existe $n_i \geq i$ tal que $\gamma_{n_i} \cap A \neq \emptyset$. Ahora, por cada $i \in \mathbb{N}$, sea $y_{n_i} \in \gamma_{n_i} \cap A$. Por la compacidad de $\mathbb{C}$, podemos suponer que $\{y_{n_i}\}$ converge a $y \in A$. Así, por la Proposición 1.44, $y \in \gamma \cap (A \cap \beta)$, esto es una contradicción.

Finalmente, sea $W = \bigcup\limits_{n=N}^{\infty} \gamma_n \cup \gamma$. Claramente $W \in C(\mathbb{C})$, $z \in \operatorname{int}(W)$ y $W \cap A = \emptyset$, ver la Figura 3.8. Por lo que $z \notin T(A)$.

Ahora, consideremos los siguientes casos.

**B.1.** $A \cap C_0 = \emptyset$.

Para este caso demostraremos que $T(A) = A$. Antes, necesitamos probar que: existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} C_{n_i}$. Supongamos que existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $\mathbb{N}$ tal que $A \cap C_{n_i} \neq \emptyset$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Tomemos, por cada $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in A \cap C_{n_i}$. Por la compacidad de $A$, podemos suponer que existe un $a \in A$ tal que $a_{n_i}$ converge a $a$, ver la Figura 3.11. Dado que $C_{n_k}$ converge a $C_0$ (por la construcción de $\mathbb{C}$), $a \in C_0$. Así, $a \in A \cap C_0$, lo cual es una contradicción.

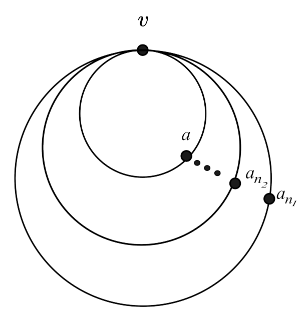


Figura 3.11: $a_{n_i} \in A \cap C_{n_i}$.

Ahora, probaremos la siguiente afirmación.

**Afirmación B.1.1.** Si $z \in C_0$, entonces $z \notin T(A)$.

Sean $z \in C_0$, $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ e $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \cap C_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Como $C_i$ es una circunferencia, existe una parametrización $g_i : [-\pi, \pi] \to C_n$ tal que $g_i(-\pi) = g(\pi) = v$ y $g_i|_{(-\pi,\pi)}$ es un homeomorfismo. Así, $g_i^{-1}(A \cap C_n)$ es un cerrado no vacío en $[-\pi, \pi]$. Ahora, notemos que $g_i^{-1}(z) \notin g_i^{-1}(A \cap C_i)$ y $-\pi, \pi \notin g_i^{-1}(A \cap C_i)$. Sea $a'_i = \min\{g_i^{-1}(A \cap C_i)\}$ y $b'_i = \max\{g_i^{-1}(A \cap C_i)\}$. De donde $-\pi < a'_i \leq b'_i < \pi$. Sean $a_i, b_i \in [-\pi, \pi]$ tales que $-\pi < a_i < a'_i \leq b'_i < b_i < \pi$. Entonces $[-\pi, a_i] \cup [b_i, \pi] \subset [-\pi, \pi] \setminus g_i^{-1}(A)$. Por cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ hagamos $W_i = g_i([-\pi, a_i] \cup [b_i, \pi])$.

Hagamos $W = \bigcup_{i=1}^{m} W_i \cup \bigcup_{i=m+1}^{\infty} C_i \cup C_0$, ver la Figura 3.12. Notemos que $W$ es un subconjunto compacto, conexo de $\mathbb{C}$, $W \cap A = \emptyset$ y $z, v \in \operatorname{int}(W) \subset W \in C(\mathbb{C})$. De donde $z, v \notin T(A)$.

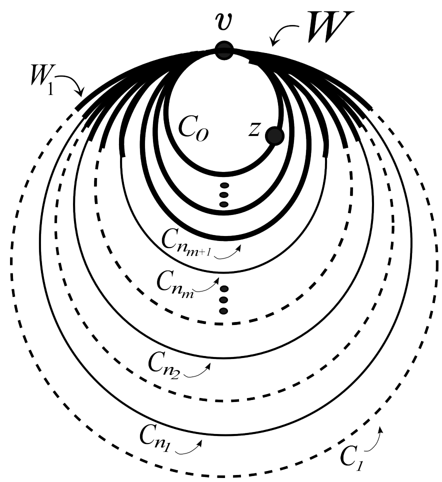


Figura 3.12: $W = \bigcup_{i=1}^{m} W_i \cup \bigcup_{i=m+1}^{\infty} C_i \cup C_0$.

Regresado a la prueba de que $T(A) = A$, sea $z \in T(A)$. Por las Afirmaciones I, II y B.1.1, se tiene que $z \in A$.
Por lo que en este caso $T(A) = A$.

**B.2.** $A \cap C_0 \neq \emptyset$.
Consideremos los siguientes casos.
**B.2.1.** Si $A \cap C_0$ es un conexo, entonces $T(A) = A$.
Dado que $A \cap C_0$ es un conexo y cerrado en $C_0$, $\beta = A \cap C_0$. Sea $z \in T(A)$. Por las Afirmaciones I, II y III, se tiene que $z \in A$.
Por lo que en este caso $T(A) = A$.

**B.2.2.** Si $A \cap C_0$ no es conexo, entonces $T(A) = A \cup \beta$.

Recordemos que $A \cap C_0 \subset \beta$. Sea $z \in T(A)$. Por las Afirmaciones I, II y III, se tiene que $z \in A \cup \beta$.

Finalmente, sea $z \in \beta \setminus A \cap C_0$. Probaremos que $z \in T(A)$. Sea $W \in C(\mathbb{C})$ tal que $z \in \text{int}(W)$. Por la construcción de $\beta$ y $\mathbb{C}$, $a \in W$ o $b \in W$. Por lo que, $A \cap W \neq \emptyset$. De donde $z \in T(A)$.

Esto finaliza el cálculo de $T(A)$ para cada $A \in 2^{\mathbb{C}}$.

Ahora vamos a probar que $S(A) = A$. Para esto tenemos los siguientes casos.
**Caso I** $v \in A$.

Recordemos que en este caso, $T(A) = C_0 \cup A$. Claramente $A \subset S(A)$. Ahora, sea $x \in S(A)$. Entonces $x \in T(A)$. En el caso de que $x \in C_0 \setminus A$, se tiene que $T(x) = x$, así $T(x) \cap A = \emptyset$, una contradicción. De donde, $x \in A$.

**Caso II** $v \notin A$.

En este caso, si $A \cap C_0 = \emptyset$ o $A \cap C_0$ es conexo, entonces $T(A) = A$ y dado que $A \subset S(A) \subset T(A)$, se sigue que $S(A) = A$.
Ahora, supongamos que $A \cap C_0$ no es conexo. Entonces $T(A) = A \cup \beta$. Notemos que $A \subset S(A)$. Ahora, sea $x \in S(A)$. Si $x \in \beta \setminus A$, tenemos que $T(x) = x$, así $A \cap T(x) = \emptyset$. De donde $x \in A$. Por lo que, $S(A) = A$.
De lo anterior, concluimos que $S(A) = A$.
Finalmente, dado que $T(v) = C_0$, por el Teorema 2.26, $\mathbb{C}$ no es aposindético.

**Proposición 3.6.** *Sea $X$ es un espacio conexo, regular y $T_1$. Si $X$ es localmente conexo, entonces $S(A) = A$ para cada $A \in 2^X$.*

*Demostración.* La prueba se sigue de la Proposición 2.24 y del Teorema 3.5 inciso 2. □

### 3.1.2. Conexidad y la función $S$

A diferencia de la función $T$ de Jones, $S(A)$ no siempre es conexo para $A \in C(X)$. En esta parte discutiremos este problema. Comenzamos construyendo un espacio métrico compacto y conexo en el cual se muestra que $S(A)$ no siempre es conexo para $A \in C(X)$.

Ahora, consideremos dos abanicos armónicos ajenos, ver la Figura 2.5, $X_1$ y $X_2$, dichos abanicos con barra límite $C_{v_i,u_i}$, donde $v_i$ es el vértice del abanico armónico y $u_i$ el punto final de la barra límite de $X_i$, ver Figura 3.13.

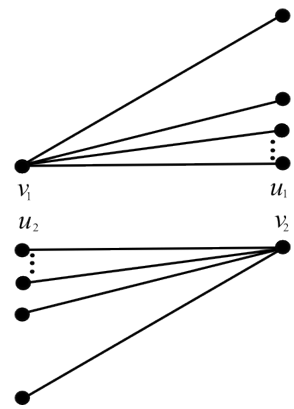


Figura 3.13: Abanicos armónicos.

Sea $\mathbb{G}$ el espacio que resulta de identificar a $v_1$ con $u_2$ y a $v_2$ con $u_1$, ver la Figura 3.14. Sin pérdidad de generalidad, podemos suponer que $C_0 = C_{v_1,u_1} \cup C_{v_2,u_2}$. Hagamos $p = \{u_1, v_2\}$ y $q = \{u_2, v_1\}$.

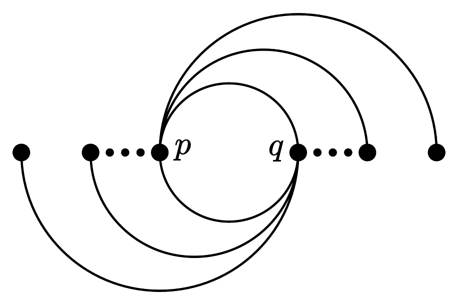


Figura 3.14: El espacio $\mathbb{G}$.

**Ejemplo 3.7.** *El espacio* $\mathbb{G}$ *cumple las siguientes condiciones:*

1. $T(p) = C_{v_1,u_1}$ *y* $T(q) = C_{v_2,u_2}$.

2. $S(p) = S(q) = \{p, q\}$.

Probaremos que $S(p) = S(q) = \{p, q\}$. Primero, calcularemos $T(p)$. Notemos que $p \in T(p)$.

Claramente si $x \in \mathbb{G} \setminus C_0$, entonces $x \notin T(p)$. Ahora, probaremos que si $x \in C_{v_2,u_2} \setminus \{p,q\}$, entonces $x \notin T(p)$. Sea $x \in C_{v_2,u_2} \setminus \{p,q\}$. Por la forma en que se construyó $\mathbb{G}$, existe un abanico $W$, como en la Figura 3.15, contenido en $\mathbb{G}$ tal que $x \in \operatorname{int}(W) \subset W \subset \mathbb{G} \setminus \{p\}$. Así, $x \notin T(p)$.

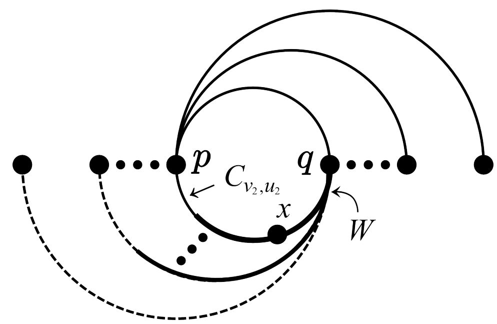


Figura 3.15: $x \in \operatorname{int}(W)$.

Ahora, para $x \in C_{v_1,u_1}$, probaremos que $x \in T(p)$. Sean $x \in C_{v_1,u_1} \setminus \{p,q\}$ y $W \in C(\mathbb{G})$ tal que $x \in \operatorname{int}(W)$. Probaremos que $p \in W$. Por la forma en que se construyó $\mathbb{G}$, existe un abanico $W' \subset W$, como en la Figura 3.16, tal que $x \in \operatorname{int}(W') \subset \operatorname{int}(W)$ y $p \in W'$. Por lo que $p \in W$. Así, $x \in T(p)$.

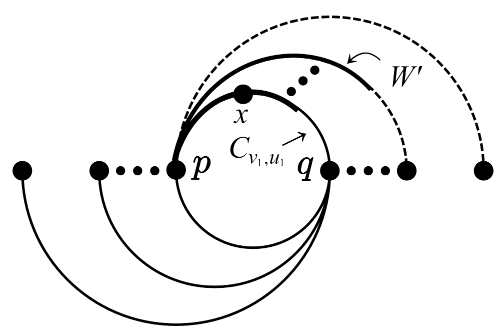


Figura 3.16: $x \in \operatorname{int}(W')$.

En el caso de que $x = q$, sea $W \in C(\mathbb{G})$ tal que $q \in \operatorname{int}(W)$. Probaremos que $p \in W$. Por la forma en que se construyó $\mathbb{G}$, existe $W' \in C(W)$, como en la Figura 3.17, tal que $q \in \text{int}(W') \subset \text{int}(W)$ y $p \in W'$. Por lo que $p \in W$.

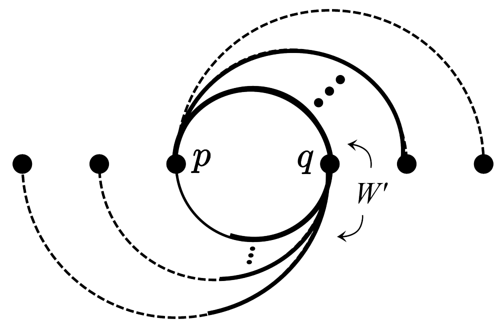


Figura 3.17: $q \in \text{int}(W')$.

De lo anterior, tenemos que $T(p) = C_{v_1,u_1}$. Haciendo el mismo análisis, tenemos que $T(q) = C_{v_2,u_2}$.

Ahora vamos a calcular $S(p)$. Sea $x \in C_{v_1,u_1} \setminus \{p,q\}$. Claramente, $T(x)$ es el arco $\gamma$ con extremos $x$ y $q$, como en la Figura 3.18, el cual no contiene a $p$. Por lo que, $x \notin S(p)$. Así, dado que $T(p) = C_{v_1,u_1}$ y $T(q) = C_{v_2,u_2}$, $S(p) = \{p,q\}$.
De manera similar, se prueba que $S(q) = \{p,q\}$.

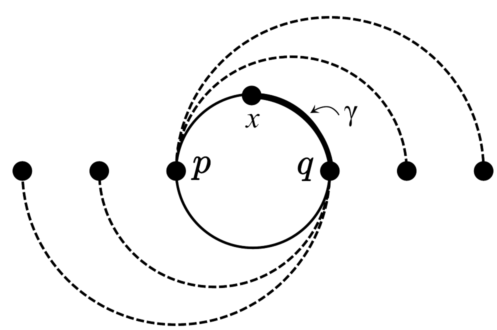


Figura 3.18: El arco $\gamma$.

Los siguientes dos teoremas son consecuencia inmediata del Teorema 3.5.

**Teorema 3.8.** *Si $X$ es aposindético, entonces $S(A)$ es conexo para cada $A \subset X \in C(X)$ .*

**Teorema 3.9.** *Si $X$ es $T_1$ e indescomponible, entonces $S(A)$ es conexo para cada $A \subset X \in C(X)$.*

**Teorema 3.10.** *Sean $X$ un espacio conexo y*

$$S^* = \{(x, y) \in X \times X : x \in T(y) \text{ y } y \in T(x)\}$$

1. *Si $S(p)$ es conexo para cada $p$, entonces $S^*$ es conexo.*
2. *Si $S^*$ es conexo, entonces $S(p)$ es conexo para algún $p \in X$.*

*Demostración.* Para probar 1, primero probaremos que $S^* = \bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times S(p))$.
Sea $(x, y) \in S^*$. Veamos que $(x, y) \in \{x\} \times S(x)$. Dado que $\{x\} \cap T(y) \neq \emptyset$ y $y \in T(x)$, $y \in S(x)$. De donde $(x, y) \in \{x\} \times S(x)$. Por lo que $S^* \subset \bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times S(p))$.
Para probar la otra contención, sea $(x, y) \in \{p\} \times S(p)$. Entonces $x = p$ y $y \in S(p)$. Así $y \in T(x)$ y $T(y) \cap \{x\} \neq \emptyset$. De donde $(x, y) \in S^*$. Por lo que $\bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times S(p)) \subset S^*$.
Notemos que la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset S^*$ es conexa y ésta intersecta a cada uno de los conjuntos $\{p\} \times S(p)$. Así, dado que cada $\{p\} \times S(p)$ es conexo, $S^*$ es conexo.
Para ver 2, supongamos que para cada punto $p \in X$, $S(p) = H_p \cup K_p$ donde $H_p$ y $K_p$ son subconjuntos disjuntos no vacíos y cerrados de $X$. Veremos que $S^* = \bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times H_p) \cup \bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times K_p)$ notemos que los conjuntos $\{p\} \times H_p$ y $\{p\} \times K_p$ son cerrados en $X \times X$ pero $S^* = \bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times S(p)) = \bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times H_p) \cup \bigcup\limits_{p \in X} (\{p\} \times K_p)$. Si $(x, y) \in \{p\} \times H_p \cap \{q\} \times K_p$ entonces $x = p = q$ y $y \in H_p \cap k_p$ lo cual es una contradicción. Esto prueba que para algún $p \in X$, $S(p)$ es conexo. $\square$

**Observación 3.11.** *En el Teorema 3.10, la hipótesis de la condición del inciso 1, es necesaria, ya que en el Ejemplo 3.7 se tiene que $S(x) = \{x\}$ para cada $x \in \mathbb{G} \setminus \{p, q\}$ y que $S^* = \{(x, x) : x \in \mathbb{G}\} \cup \{(p, q), (q, p)\}$ el cual no es conexo.*

### 3.1.3. Simetría, aditividad e idempotencia de la función $S$

Se sigue de la definición de la función $S$ que cualquier continuo es puntualmente $S$-simétrico (ver la parte 2 del Teorema 3.3) pero no siempre es $S$-simétrico, ya que el espacio $\mathbb{A}$ como en el Ejemplo 2.5, es un puntualmente $S$-simétrico pero no es $S$-simétrico, la prueba la realizaremos a continuación.

Para probar que $\mathbb{A}$ no es $S$-simétrico, consideramos los conjuntos $A = \{(\frac{1}{3}, 0), (\frac{2}{3}, 0)\}$ y $B = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$, ver Figura 3.19.

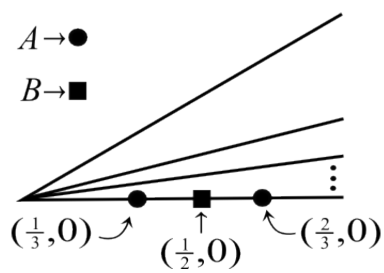


Figura 3.19: Los conjuntos $A$ y $B$.

Primero calculamos $T(A)$ y $T(B)$. Dado que, para cada $p \in \mathbb{A}$,

$$T(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } p \in \mathbb{A} \setminus \{L_0\}, \\ [x, 1] \times \{0\} & \text{si } p = (x, 0) \text{ y } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

tenemos que:

$$T(A) = [\tfrac{1}{3}, 1] \times \{0\}$$

y

$$T(B) = [\tfrac{1}{2}, 1] \times \{0\}.$$

Ahora veamos $S(A)$ y $S(B)$. De lo probado en el Ejemplo 3.2 y de que para cada $p \in \mathbb{A}$,

$$T(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{si } p \in \mathbb{A} \setminus \{L_0\}, \\ [x, 1] \times \{0\} & \text{si } p = (x, 0) \text{ y } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

tenemos lo siguiente:

$$S(A) = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \times \{0\}$$

y

$$S(B) = \left\{(\tfrac{1}{2}, 0)\right\}.$$

De lo anterior, se tiene que:

$$B \cap S(A) = \left\{(\tfrac{1}{2}, 0)\right\} \cap \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right] \times \{0\} = \left\{(\tfrac{1}{2}, 0)\right\} = B.$$

mientras que:

$$A \cap S(B) = \left\{(\tfrac{1}{3}, 0), (\tfrac{2}{3}, 0)\right\} \cap \left\{(\tfrac{1}{2}, 0)\right\} = \emptyset.$$

Por lo tanto $X$ no es $S$-simétrico.

Ahora vamos a presentar algunas relaciones entre simetría y aditividad.

**Teorema 3.12.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $X$ es $S$-simétrico, entonces éste es $S$-aditivo.*

*Demostración.* Sean $A, B \subset X$ cerrados no vacíos. Dado que $S(A) \cup S(B) \subset S(A \cup B)$, es suficiente ver que $S(A \cup B) \subset S(A) \cup S(B)$. Sea $x \in S(A \cup B)$. Como $\{x\} \cap S(A \cup B) \neq \emptyset$ y $X$ es $S$-simétrico, $S(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Así, $S(x) \cap A \neq \emptyset$ o $S(x) \cap B \neq \emptyset$. Sin pérdidad de generalidad, supongamos que $S(x) \cap A \neq \emptyset$. De esta manera, por hipótesis, $\{x\} \cap S(A) \neq \emptyset$, es decir $x \in S(A)$ y $x \in S(A) \cup S(B)$.
Por lo tanto $S(A) \cup S(B) = S(A \cup B)$ y $X$ es $S$-aditivo. $\square$

**Teorema 3.13.** *Si $X$ es puntualmente $T$-simétrico, entonces $S(p) = T(p)$ para cada $p \in X$.*

*Demostración.* Sea $p \in X$. Dado que $S(p) \subset T(p)$, es sufiente probar que $T(p) \subset S(p)$. Sea $x \in T(p)$. Como $X$ es puntualmente $T$-simétrico, $p \in T(x)$. Así $x \in S(p)$.
Por lo tanto $S(p) = T(p)$. $\square$

**Corolario 3.14.** *Sea $X$ un espacio compacto y de Hasudorff. Si $X$ es puntualmente $T$-simétrico, entonces $S(p)$ es conexo para cada $p \in X$.*

*Demostración.* Dado que $X$ es puntualmente $T$-simétrico, por el Teorema 3.13, $S(p) = T(p)$ para cada $p \in X$. Ahora por Corolario 2.20, $T(p)$ es conexo para cada $p \in X$. Por lo tanto $S(p)$ es conexo para cada $p \in X$. $\square$

**Corolario 3.15.** *Sea $X$ un espacio compacto y de Hasudorff. Si $X$ es $T$-simétrico, entonces $S(p)$ es conexo para cada $p \in X$*

**Teorema 3.16.** *Sea $X$ un espacio $T_1$. Si $T$ es idempotente en $X$, entonces para cada $p \in X$, $S(p) = S(q)$ si $q \in S(p)$.*

*Demostración.* Sean $p \in X$ y $q \in S(p)$. Entonces $q \in T(p)$ y $p \in T(q)$. Ahora, sea $x \in S(p)$. Entonces $x \in T(p)$ y $p \in T(x)$. Como $p \in T(q)$ y $T$ es idempotente en $X$, $T(p) \subsetneq T(T(q)) = T(q)$, así $x \in T(q)$. Falta probar que $q \in T(x)$. Como $p \in T(x)$, por la idempotencia de $T$, $T(p) \subsetneq T(T(x)) = T(x)$. Así, dado que $q \in T(p)$, $q \in T(x)$. Por lo que $x \in S(q)$. Esto prueba que $S(p) \subset S(q)$.
De manera similar se prueba que $S(q) \subset S(p)$.
Por lo tanto $S(q) = S(p)$. $\square$

**Corolario 3.17.** *Sea $X$ un espacio $T_1$. Si $T$ es idempotente en $X$, entonces el conjunto $\{S(x) : x \in X\}$ es una descomposición del espacio $X$.*

*Demostración.* Para probar que $\{S(x) : x \in X\}$ es una descomposición, primero veremos que si $S(p) \neq S(z)$ para $x \neq z \in X$, entonces $S(p) \cap S(z) = \emptyset$. Sea $q \in S(p) \cap S(z)$, por el Teorema 3.16, $S(p) = S(q)$ y $S(z) = S(q)$. Por lo que $S(p) = S(z)$, lo cual es una contradicción. De donde, $S(p) \cap S(z) = \emptyset$.
Ahora, para todo $p \in X$, se sigue del Teorema 3.3.1 que $p \in S(p)$. Así $S(p) \neq \emptyset$ para todo $p \in X$.
Finalmente, probaremos que $\bigcup\limits_{p \in X} S(p) = X$. Sólo veremos la prueba de la segunda contención. Sea $p \in X$, por el Teorema 3.3.1, $p \in S(p)$, de esta manera $p \in \bigcup\limits_{p \in X} S(p)$.
Por lo tanto, hemos probado que $\{S(x) : x \in X\}$ es una descomposición del espacio $X$. $\square$

El siguiente teorema nos dice cuando $S$ es idempotente.

**Lema 3.18.** *Sean $X$ un espacio topológico y $A \subset X$ cerrado no vacío. Si $T$ es idempotente, entonces:*

$$S(S(A)) = \{p \in T(A) : S(A) \cap T(p) \neq \emptyset\}.$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.3.1, $A \subset S(A) \subset T(A)$ y el Teorema 2.6.2, $T(A) \subset T(S(A)) \subset T(T(A))$. Así, como $T$ es idempotente, $T(S(A)) = T(A)$. Por lo que:

$$\begin{aligned} S(S(A)) &= \{p \in T(S(A)) : S(A) \cap T(p) \neq \emptyset\} \\ &= \{p \in T(A) : S(A) \cap T(p) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 3.19.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $T$ es idempotente en $X$, entonces $S$ es idempotente en $X$.*

*Demostración.* Sea $A$ un subconjunto cerrado no vacío en $X$. Dado que $S(A) \subset S(S(A))$, es suficiente ver que $S(S(A)) \subset S(A)$. Sea $x \in S(S(A))$. Por el Lema 3.18, $x \in T(A)$. Finalmente, necesitamos probar que $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Como $x \in S(S(A))$, $S(A) \cap T(x) \neq \emptyset$. Sea $y \in S(A) \cap T(x)$. Entonces $A \cap T(y) \neq \emptyset$ y $T(y) \subset T(T(x)) = T(x)$. De donde, $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Así, $x \in S(A)$ por lo que $S(S(A)) \subset S(A)$. $\square$

El siguiente Teorema nos dice que si $T$ es idempotente en un continuo $X$, entonces tenemos algún tipo de aditividad para la función $S$, es decir, para cada $p \in S(A)$, la unión de $S(p)$ coincide con $S(A)$.

**Teorema 3.20.** *Sean $X$ un espacio topológico y $A \subset X$ cerrado no vacío. Si $T$ es idempotente en $X$, entonces $S(A) = \bigcup_{p \in S(A)} S(p)$.*

*Demostración.* Sea $A \subset X$ cerrado no vacío. Para probar la primera contención, sea $x \in S(A)$. Por el Teorema 3.3.1, $\{x\} \subset S(\{x\})$. De donde $x \in \bigcup_{p \in S(A)} S(p)$. Por lo que $S(A) \subset \bigcup_{p \in S(A)} S(p)$.

Para probar la otra contención, sean $p \in S(A)$ y $w \in S(p)$. Probaremos que $w \in S(A)$. Dado que $w \in T(p)$ y $p \in T(A)$, tenemos que $w \in T(p) \subseteq T(T(A))$. Ahora, como $T$ es idempotente, $w \in T(A)$. Finalmente, veamos que $A \cap T(w) \neq \emptyset$. Como $w \in S(p)$, por el Teorema 3.3.2, $p \in S(w)$, así $p \in T(w)$. De lo anterior y de que $T$ es idempotente, $p \in T(p) \subseteq T(T(w)) = T(w)$. De donde, $T(p) \subseteq T(w)$. Ahora, dado que $A \cap T(p) \neq \emptyset$ ($p \in S(A)$), $A \cap T(w) \neq \emptyset$. Con esto concluimos que $w \in S(A)$. Por lo que $\bigcup_{p \in S(A)} S(p) \subseteq S(A)$.

Por lo tanto $S(A) = \bigcup_{p \in S(A)} S(p)$.

$\square$

### 3.1.4. Continuidad de la función $S$

Sean $X$ un continuo. Consideremos a $2^X$ con la topología de Vietoris. Sea $\Theta : 2^X \to 2^X$ una función.
Decimos que $\Theta$ es **semicontinua superiormente** si el conjunto $\{A \in 2^X : \Theta(A) \subseteq U\}$ es abierto en $2^X$ para todo conjunto abierto $U \subset X$.
Decimos que $\Theta$ es **semicontinua inferiormente** si el conjunto $\{A \in 2^X : \Theta(A) \cap U \neq \emptyset\}$ es abierto en $2^X$ para todo conjunto abierto $U \subset X$.

**Teorema 3.21.** *La función $\Theta : 2^X \to 2^X$ es continua si y sólo si es semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente.*

*Demostración.* Sea $U$ un abierto en $X$. Por Lema 1.33 e), f), tenemos que

1. $\{A \in 2^X : \Theta(A) \cap U \neq \emptyset\} = \Theta^{-1}(\langle U, X\rangle)$,
2. $\{A \in 2^X : \Theta(A) \subseteq U\} = \Theta^{-1}(\langle U\rangle)$.

Usando que $\langle U, X\rangle, \langle U\rangle$ son abiertos en $2^X$ y si $\Theta$ es continua, entonces $\Theta$ es semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente.
Ahora, si $\{A \in 2^X : \Theta(A) \cap U \neq \emptyset\}$ y $\{A \in 2^X : \Theta(A) \subseteq U\}$ son abiertos en $2^X$, entonces $\Theta$ es continua. $\square$

Como una consecuencia inmediata del Teorema 3.5 y la Proposición 3.6 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.22.** *Sea $X$ un espacio topológico conexo. Si $X$ satisface una de la siguiente condiciones:*

1. *Indescomponible,*
2. *Aposindético y $T_1$,*
3. *Localmente conexo, regular y $T_1$,*

*entonces $S|_{2^X}$ es continua.*

*Demostración.* Para la prueba de la continuidad de $S|_{2^X}$, usaremos el Teorema 3.21. Supongamos que $X$ es indescomponible. Por el Teorema 3.21.1, es suficiente probar que $S|_{2^X}$ es semicontinua inferiormente y semicontinua superiormente. Sean $U$ un abierto de $X$. Si $U \neq X$, por el Teorema 3.5.1, $\{A \in 2^X : S(A) = X \subseteq U\} = \emptyset$. Ahora, en el caso de que $U = X$, por el Teorema 3.5.1, $\{A \in 2^X : S(A) = X\} = 2^X$. Por lo que $S|_{2^X}$ es semicontinua superiormente.

Por el Teorema 3.5, $\{A \in 2^X : S(A) \cap U \neq \emptyset\} = \{A \in 2^X : X \cap U \neq \emptyset\} = 2^X$. Por lo que $S|_{2^X}$ es semicontinua inferiormente. Por lo tanto $S|_{2^X}$ es continua.

Ahora, consideremos que $X$ es aposindético. Sea $U$ un abierto de $X$. Por el Teorema 3.21.2, se tiene que:

$$\{A \in 2^X : S(A) \subseteq U\} = \langle U \rangle \text{ y}$$

$$\{A \in 2^X : S(A) \cap U \neq \emptyset\} = \langle U, X \rangle.$$

De lo anterior, $S|_{2^X}$ es semicontinua inferiormente y superiormente. Por el Teorema 3.21.1, $S|_{2^X}$ es continua.

Para el caso en que $X$ es localmente conexo, por la Proposición 3.6, la prueba es similar a la anterior. □

El ejemplo 3.7 muestra que $S$ no es continua incluso si es restringida a $X$. En efecto, existe una sucesión $\{x_n\}$ que converge a $p$ tal que $S(x_n) = \{x_n\}$ mientras que $S(p) = \{p, q\}$.

**Teorema 3.23.** *Sea $X$ un continuo. Entonces $S|_{2^X}$ es semicontinua superiormente.*

*Demostración.* Sean $V$ un abierto en $X$ y $\mathcal{W} = \{A \in 2^X : S(A) \subseteq V\}$. Para demostrar que $\mathcal{W}$ es abierto en $2^X$, es suficiente probar que $2^X \setminus \mathcal{W}$ es cerrado en $2^X$. Hagamos $\mathcal{K} = 2^X \setminus \mathcal{W}$. Notemos que $\mathcal{K} = \{A \in 2^X : S(A) \cap X \setminus V \neq \emptyset\}$. Sean $A \in \mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{K})$ y $\{A_n\} \subseteq \mathcal{K}$ una sucesión que converge a $A$. Con el fin de probar que $A \in \mathcal{K}$, es suficiente ver que $S(A) \cap X \setminus V \neq \emptyset$. Como cada $A_n \in \mathcal{K}$, existe $y_n \in S(A_n) \cap (X \setminus V)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de $X$, podemos suponer que $\{y_n\}$ converge a $y$ en $X$. Dado que $(X \setminus V)$ es cerrado, $y \in X \setminus V$. Por otra parte, necesitamos probar que $y \in S(A)$. Primero veremos que $y \in T(A)$. Sea $C$ un subcontinuo de $X$ tal que $y \in \mathrm{int}(C)$. Veamos que $C \cap A \neq \emptyset$. Como $y \in \mathrm{int}(C)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in \mathrm{int}(C)$ para $n > N$. Así, dado que $y_n \in T(A_n)$ para $n > N$, $C \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n > N$. A continuación probaremos que $C \cap A \neq \emptyset$. Por cada $n > N$, sea $x_n \in C \cap A_n$. Por la compacidad de $X$, podemos suponer que $\{x_n\}_{n>N}$ converge a $x$ en $X$. Así, por la Proposición 1.44, $x \in A \cap C$. Esto prueba que $y \in T(A)$. Finalmente, veremos que $A \cap T(y) \neq \emptyset$. Como $y_n \in S(A_n)$, $A_n \cap T(y_n) \neq \emptyset$. Por cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n \cap T(y_n)$. Por la compacidad de $X$, podemos suponer que $x_n$ converge a algún $x \in X$. Por la Proposición 1.44, $x \in A$. Ahora veremos que $x \in T(y)$. Sea $C$ un subcontinuo de $X$ tal que $x \in \text{int}(C)$. Vamos a probar que $y \in C$. Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \text{int}(C)$ para todo $n > N_0$. Como $x_n \in T(y_n)$, $y_n \in C$ para todo $n > N_0$. Así, $y_n \in C$ para todo $n > N_0$. Dado que $C$ es cerrado, $y \in C$. Por lo que $x \in A \cap T(y)$. Lo anterior prueba que $y \in S(A) \cap X \setminus V$. Concluimos que $\mathcal{K}$ es cerrado. Por lo tanto $\mathcal{W}$ es abierto y $S|_{2^X}$ es semicontinua superiormente. □

**Corolario 3.24.** *Sea $X$ un continuo métrico. Entonces $S|_{2^X}$ es continua si y sólo si $S|_{2^X}$ es semicontinua inferiormente.*

*Demostración.* Para la Necesidad, si $S|_{2^X}$ es continua, por el Teorema 3.21, $S|_{2^X}$ es semicontinua superiormente y semicontinua inferiormente. Para la Suficiencia, como $S|_{2^X}$ semicontinua inferiormente y por los Teoremas 3.23 y 3.21, $S|_{2^X}$ es continua. □

### 3.1.5. Relación entre las funciones $T$ de Jones, $K$ y $S$

La función $S$ es definida usando la función $T$ de Jones y está estrechamente relacionada con la función $K$, la cual definimos a continuación.

Dado un continuo $X$. Definimos $K : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ para cada $A \subset X$:

$$K(A) = \bigcap \{W \in C(X) : A \subseteq \text{int}(W)\}.$$

En el caso en que $A = \{p\}$, escribiremos $K(p)$ en lugar de $K(\{p\})$.

**Proposición 3.25.** *Sean $X$ un continuo y $p, x \in X$. Entonces $p \in T(x)$ si y sólo si $x \in K(p)$.*

*Demostración.* La prueba se sigue de ambas definiciones. □

**Teorema 3.26.** *Sea $X$ un continuo. Entonces se tienen las siguientes condiciones:*

1. *Si $A \subset B \subset X$, entonces $K(A) \subset K(B)$,*

*2.* $S(p) = T(p) \cap K(p)$ *para cada* $p \in X$*,*

*3.* $S(A) \subset T(A) \cap K(A)$ *para cada* $A \in 2^X$*,*

*4.* $S(A) = T(A) \cap K(A)$ *para cada* $A \in C(X)$*.*

*Demostración.* La prueba de 1, se sigue de que:

$$\{W \in C(X) : B \in \mathrm{int}(W)\} \subset \{W \in C(X) : A \in \mathrm{int}(W)\}.$$

Veamos 2. Para probar la primera contención, sea $x \in S(p)$. Entonces $x \in T(p)$ y $p \in T(x)$. Por la Proposición 3.25, $x \in K(p)$. Así, $x \in T(p) \cap K(p)$. Para la otra contención. Sea $x \in T(p) \cap K(p)$. Entonces $x \in T(p)$. Como $x \in K(p)$, por la Proposición 3.25, $p \in T(x)$. De donde $x \in S(p)$.

Probaremos 3. Sea $x \in S(A)$, entonces $x \in T(A)$ y $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Sea $a \in A \cap T(x)$, entonces $a \in T(x)$ lo cual implica que $x \in K(a) \subseteq K(A)$. Así $x \in T(A) \cap K(A)$.

Para demostrar 4. sean $A \in C(X)$ y $x \in T(A) \cap K(A)$. Probaremos que $x \in S(A)$. Notemos que $x \in T(A)$. Falta probar que $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Supongamos que $A \cap T(x) = \emptyset$. Entonces para cada $a \in A$, $a \notin T(x)$, así, para cada $a \in A$, existe un continuo $W_a$ tal que $a \in \mathrm{int}(W_a)$ y $x \notin W_a$. Como $\{\mathrm{int}(W_a)\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta para $A$ y $A$ es compacto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{\mathrm{int}(W_{a_i}) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es una cubierta de $A$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$. Claramente $M$ es compacto, $A \subset \mathrm{int}(M)$ y $x \notin M$. Dado que $A$ es conexo y cada $W_{a_i}$ es conexo, $M$ es conexo. De donde $x \notin K(A)$, lo cual es una contradicción. Así $A \cap T(x) \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in S(A)$.
La otra contención se sigue del inciso 2. □

Observamos que en el Teorema 3.26, inciso 3, la igualdad no se tiene en general, por lo que vamos a construir un continuo $\mathbb{Z}$ para el cual existe $A \in 2^{\mathbb{Z}}$ tal que $S(A) \neq T(A) \cap K(A)$. Sea $\mathbb{Z}$ el espacio obtenido al hacer la unión de dos abanicos armónicos $F_1$ y $F_2$ contenidos en $\mathbb{R}^2$ tales que $F_1 \cap F_2 = \{(1,0)\}$ y los puntos $(0,0), (1,0)$ son los vértices de $F_1$ y $F_2$, respectivamente, donde las barras límites de $F_1$ y $F_2$ son $[0,1] \times \{0\}$ y $[1,2] \times \{0\}$, resp., como en la Figura 3.20. Dado el conjunto $A = \{\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)\}$, ver la Figura 3.20, probaremos que $S(A) \neq T(A) \cap K(A)$.

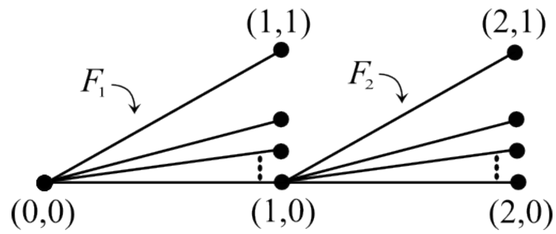


Figura 3.20: El continuo $\mathbb{Z} = F_1 \cup F_2$.

Claramente, $T(A) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right] \times \{0\}$, ver Figura 3.21.

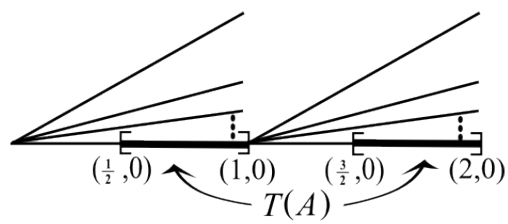


Figura 3.21: $T(A)$.

Ahora, veamos que $K(A) = [0, \frac{3}{2}] \times \{0\}$. Sea $W$ un continuo tal que $\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)\} \subset \text{int}(W)$. Por la construcción de $\mathbb{Z}$, $[0, \frac{3}{2}] \times \{0\} \subset W$, ver la Figura 3.22.

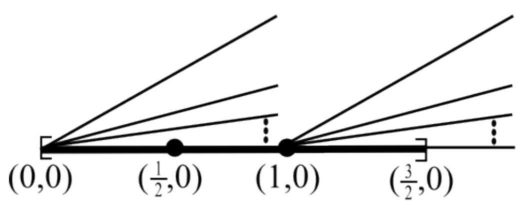


Figura 3.22: $[0, \frac{3}{2}] \times \{0\} \subset W$.

Ahora, probaremos que para cada $z \in \mathbb{Z} \setminus [0, \frac{3}{2}] \times \{0\}$, $z \notin K(A)$. Sea $z \in \mathbb{Z} \setminus [0, \frac{3}{2}] \times \{0\}$. Supongamos que $z \in (\frac{3}{2}, 2] \times \{0\}$. Por la construcción de

$\mathbb{Z}$, existe $W \in C(\mathbb{Z})$ tal que $\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)\} \subset \text{int}(W)$ y $z \notin W$, ver Figura 3.23. Así, $z \notin K(A)$.

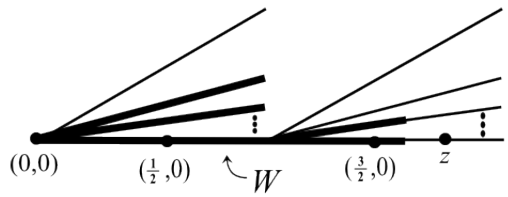


Figura 3.23: $z \notin W$.

Para el caso en que $z \in \mathbb{Z} \setminus [0, 2] \times \{0\}$, por la construcción de $\mathbb{Z}$, existe $W \in C(\mathbb{Z})$ tal que $\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)\} \subset \text{int}(W)$ y $z \notin W$, ver Figura 3.24. De donde $z \notin K(A)$.

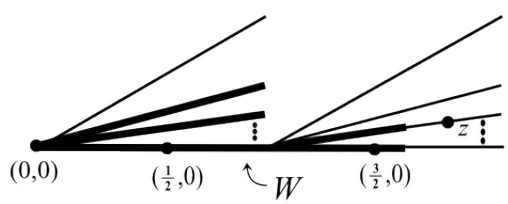


Figura 3.24: $z \notin W$.

De lo anterior, $K(A) = [0, \frac{3}{2}] \times \{0\}$.

Por lo que, $T(A) \cap K(A) = \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right] \times \{0\}\right) \cap \left([0, \frac{3}{2}] \times \{0\}\right) = \left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\} \cup \left\{\left(\frac{3}{2}, 0\right)\right\}\right)$, ver Figura 3.25.

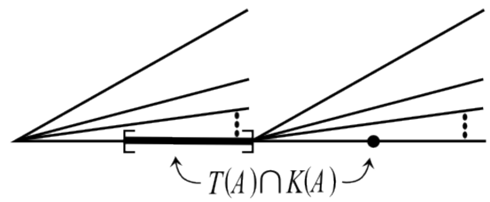


Figura 3.25: $T(A) \cap K(A)$.

Finalmente, probaremos que $S(A) = A$, ver Figura 3.26. Sea $(x, 0) \in T(A) \setminus A$. Si $(x, 0) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\}$, entonces $T((x, 0)) = [x, 1] \times \{0\}$. Ahora, en el caso de que $(x, 0) \in \left[\frac{3}{2}, 1\right] \times \{0\}$, entonces $T((x, 0)) = [x, 2] \times \{0\}$. En cualquiera de los casos $T(x) \cap A = \emptyset$. De donde $(x, 0) \notin S(A)$. Concluimos que $S(A) = A$.

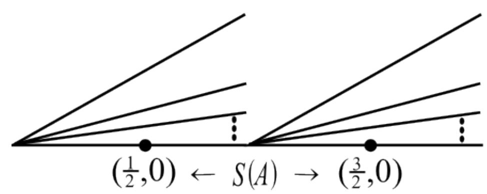


Figura 3.26: $S(A)$.

Por lo tanto $S(A) \neq T(A) \cap K(A)$.

# Bibliografía


[1] H. S. Davis, D. P. Stadtlander, and P. M. Single, *Properties of the set function $T^n$*, Portugaliae Mathematicae, Vol. 21-2 (1962), 113-133.

[2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, Mass, 1966.

[3] L. Fernández, R. Leonel and I. Puga, *The set function $S$ and the space $\mathcal{L}$*, en preparación.

[4] A. García Máynez y A. Tamariz Mascarúa, *Topología General,* Porrúa, (1988).

[5] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, New York, Basel, 1999.

[6] F. B. Jones, *Concerning nonaposyndetic continua*, Amer. J. Math., 70 (1948), 403-413.

[7] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman, Hall/CRC, Taylor, Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[8] J. R. Munkres, *Topología*, segunda edición, Pearson Educación, S. A., Madrid, 2002.

[9] S. B. Nadler, Jr., *Continumm Theory: An introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[10] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass., 1970.