UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RETRACTOS ABSOLUTOS Y RETRACTOS DE VECINDAD ABSOLUTOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Juan Antonio García

ASESORES:
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI
DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

TOLUCA, MÉXICO 2024

Introducción

A principios de los años treinta del siglo XX, Karol Borsuk define el concepto de retracto [1], así como los conceptos de retracto absoluto y retracto de vecindad absoluto [2]. La teoría de estos espacios, llamada Teoría de los Retractos, se desarrollo tanto, que para 1967 ya se habían escrito dos libros sobre ellos: [6] y [3]. La teoría de los retractos a resultado ser muy útil en la topología de dimensión infinita [4], [9] y [10]. Se han estudiado los retractos absolutos en la teoría de los hiperespacios de espacios métricos, compactos y conexos [5] y [12] (véanse [7] y [8] para saber más de hiperespacios).

El siguiente trabajo se distribuye de la siguiente manera, el primer capítulo está dedicado a estudiar conceptos básicos, así como producto topológico, un poco de contractibilidad, separabilidad, la metrizabilidad del espacio de las funciones continuas, además presentamos algo de conjuntos convexos.
En el segundo capítulo estudiamos retractos absolutos, retractos de vecindad absolutos, y las relaciones entre ellos.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Conceptos básicos

Comencemos considerando los siguientes conjuntos:

- $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales.

- $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales.

- Al conjunto de los números reales lo consideramos con su topología usual, la cual se define como la topología inducida por el valor absoluto.

- A la cerradura de un conjunto A la denotaremos como $\mathrm{Cl}(A)$.

- Para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ denota el espacio euclidiano de dimensión n cuya norma, $||\cdot||$, está dada por:
$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Sea X un espacio métrico con métrica ρ sobre X. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la bola abierta de radio ε con centro en x como el conjunto:
$$B_\rho(\varepsilon, x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}.$$
En el caso de que no haya confusión en el uso de la métrica ρ, usaremos el símbolo $B(\varepsilon, x)$ en ves de $B_\rho(\varepsilon, x)$.
Para el espacio métrico $\mathbb{R}$ con la métrica del valor absoluto, denotaremos la bola abierta de radio ε con centro en x como $B^{\mathbb{R}}(\varepsilon, x)$.

- Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ y $r > 0$. Definimos
$$N(A, r) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < r\} = \bigcup_{a \in A} B(r, a).$$

- La bola cerrada de dimensión n y radio 1 es el conjunto:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}.$$

- La esfera de dimensión $n-1$ y radio 1 es el conjunto:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}.$$

- El cubo de Hilbert, denotado y definido por $I^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} [0,1]_n$, donde $[0,1]_n = [0,1]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Al cubo de Hilbert lo consideramos con la topología producto.

- Definimos $\mathbb{R}^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}_n$, donde $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. A $\mathbb{R}^\infty$ lo consideramos con la topología producto.

Lema 1.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ compacto. Si U es un abierto que contiene a A, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $N(A,\varepsilon) \subset U$.*

Demostración. Supongamos que $U \neq X$. Sea

$$\varepsilon = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in X \setminus U\}.$$

Probaremos que $\varepsilon > 0$. Supongamos que $\varepsilon = 0$, entonces existen dos sucesiones, una $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ y otra $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \setminus U$ tales que la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0. Como A es compacto, entonces existe una subsuseción convergente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x para algún $x \in A$.
Ahora veamos que $x \in \text{Cl}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty})$. Sea $\delta > 0$. Vamos a probar que $B_\delta(x) \cap \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \emptyset$. Como $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, y_n) < \frac{\delta}{2}$ para todo $n \geq N_1$. Dado que $x_n \longrightarrow x$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \frac{\delta}{2}$ para todo $n \geq N_2$. Sea $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Usando la desigualdad del triángulo,

$$d(x, y_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Por lo que $d(x, y_n) < \delta$. Se sigue que $y_n \in B_\delta(x) \cap \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Así, $x \in \text{Cl}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty})$. Como $x \in \text{Cl}(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}) \subset \text{Cl}(X \setminus U) = X \setminus U$. Tenemos que $x \in X \setminus U$, lo cual es una contradicción. Por lo que $\varepsilon > 0$. Finalmente, probaremos que $N(A,\varepsilon) \subset U$. Para esto, sea $x \in N(A,\varepsilon)$. Supongamos que $x \notin U$. Entonces $x \in X \setminus U$. Como $x \in N(A,\varepsilon)$, existe $a \in A$ tal que $d(x,a) < \varepsilon$. Por otro lado, como $a \in A$ y $x \in X \setminus U$, $\varepsilon \leq d(x,a)$. Así, $d(x,a) < d(x,a)$, contradicción. Por lo que $x \in U$. De aquí concluimos que $N(A,\varepsilon) \subset U$. □

Proposición 1.2. *Sean (X,τ) un espacio normal, $F \subset X$ cerrado y $U \in \tau$ tales que $F \subset U$. Entonces, existe $W \in \tau$ tal que $F \subset W \subset \text{Cl}_X(W) \subset U$.*

Demostración. Si $U = X$, entonces $W = X$ y $\text{Cl}(W) = X \subset U$. Consideremos que $U \neq X$. Como F y $X \setminus U$ son cerrados y ajenos en X, por la normalidad de X existen $V, W \in \tau$ tales que $V \cap W = \emptyset$, $X \setminus U \subset V$ y $F \subset W$.
Notemos que $X \setminus (X \setminus U) = U \supset X \setminus V \supset W$ y $X \setminus V$ es cerrado. Así, $F \subset W \subset \text{Cl}(W) \subset \text{Cl}(X \setminus V) = X \setminus V \subset U$. De donde $F \subset W \subset \text{Cl}(W) \subset U$. □

Corolario 1.3. *Sean X un espacio normal y T_1 y β una base para X. Entonces para cada $V \in \beta$ y para cada $x \in V$, existe $U \in \beta$ tal que $x \in U$ y $\mathrm{Cl}(U) \subset V$.*

Demostración. Sean $V \in \beta$ y $x \in V$. Dado que los puntos son cerrados y X es normal, por la Proposición 1.2, existe un abierto W en X tal que $x \in W \subset \mathrm{Cl}(W) \subset V$. Como β es una base, existe $U \in \beta$ tal que $x \in U \subset W$. Tomando cerraduras, obtenemos que $\mathrm{Cl}(U) \subset \mathrm{Cl}(W)$. Así $x \in U \subset \mathrm{Cl}(U) \subset V$.

□

Proposición 1.4. *Sea X un espacio topológico. Si X es segundo numerable, entonces X es separable.*

Demostración. Sea $\beta = \{U_1, \ldots, U_n, \ldots\}$ una base numerable para la topología de X. Por cada $i \in \mathbb{N}$, sea $x_i \in U_i$. Probaremos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un subconjunto denso de X. Sean U un abierto en X y $x \in U$. Como β es una base, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_i \subset U$. Dado que $x_i \in U_i$, $x_i \in U_i \cap U$. Concluimos que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un subconjunto denso de X. Por lo tanto X es separable. □

Proposición 1.5. *Sea (X, d) es un espacio métrico. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) *X es segundo numerable;*

2) *X es separable.*

Demostración. Por la Proposición 1.4, 1) implica 2).
Para probar 2) implica 1), sea $D \subset X$ denso y numerable. Definimos

$$\beta = \{B_d(\tfrac{1}{k}, x) : x \in D, k \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente β es numerable. Probaremos que β es una base para la topología sobre X. Sean $z \in X$, $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Como D es denso en X, $B_d(\frac{1}{k}, z) \cap D \neq \emptyset$. Sea $x \in B_d(\frac{1}{k}, z) \cap D$. Nótese que $z \in B_d(\frac{1}{k}, x)$. Ahora probaremos que $B_d(\frac{1}{k}, x) \subset B_d(\varepsilon, z)$. Sea $y \in B_d(\frac{1}{k}, x)$. Entonces,

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon$$

Así, $y \in B_d(\varepsilon, z)$. Así, $B_d(\frac{1}{k}, x) \subset B_d(\varepsilon, z)$.
Esto prueba que β es una base numerable para la topología sobre X. Por lo tanto X es segundo numerable. □

Proposición 1.6. *Si (X, d) es un espacio métrico y compacto, entonces X es separable.*

Demostración. Observemos que por cada $k \in \mathbb{N}$, la familia $\{B_d(\frac{1}{k}, x) : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Sea $k \in \mathbb{N}$. Por la compacidad de X, existen $m_k \in \mathbb{N}$ y $D_k = \{x_1^k, \ldots, x_{m_k}^k\} \subset X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{m_k} B_d(\frac{1}{k}, x_i^k)$. Hagamos $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$. Entonces, D es a lo más numerable. Ahora, probaremos que $\mathrm{Cl}(D) = X$. Sean $x \in X$, $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Como $x \in X = \bigcup_{i=1}^{m_k} B_d(\frac{1}{k}, x_i^k)$, se tiene que $x \in B_d(\frac{1}{k}, x_i^k)$ para algún $i \in \{1, \ldots, m_k\}$. Así $d(x, x_i^k) < \frac{1}{k} < \varepsilon$. De donde $x_i^k \in B_d(\varepsilon, x)$. Dado que $x_i^k \in D_k$, $B_d(\varepsilon, x) \cap D \neq \emptyset$.
Concluimos que $\mathrm{Cl}(D) = X$. Por lo tanto X es separable. □

Lema 1.7. *Sean X un conjunto y $\mathcal{S} = \{U_1, U_2, \ldots\} \subset \mathcal{P}(X)$ numerable. Entonces:*

1) $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ *es finito no vacío*$\}$ *es numerable.*

2) $\mathcal{C} = \{\bigcup \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ *es finito no vacío*$\}$ *es numerable.*

Demostración. Para la prueba de 1), notemos que $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^s = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \cdots$ es numerable. Definamos la función $\varphi : \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^s \to \mathcal{B}$ por

$$\varphi(a) = \begin{cases} U_a & \text{si } a \in \mathbb{N}, \\ \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i} & \text{si } a = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Claramente φ está bien definida. Probaremos que φ es suprayectiva. Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ finito y no vacío. Consideremos los siguientes casos.
Caso I. Supongamos que $\mathcal{D} = \{U_i\}$ para algún $i \in \mathbb{N}$.
Entonces, $\varphi(i) = U_i = \bigcap \mathcal{D}$.
Caso II. Supongamos que $\mathcal{D} = \{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$.
De donde $\varphi((i_1, \ldots, i_n)) = \bigcap_{j=1}^{n} U_{i_j} = \bigcap \mathcal{D}$.
De los casos anteriores concluimos que φ es suprayectiva. Como $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^s$ es numerable, $\mathcal{B}$ es numerable.

La prueba de 2), es similar al anterior. $\square$

Lema 1.8. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una base numerable para la topología sobre X. Entonces $\mathcal{C} = \{\bigcup \mathcal{D} : \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ es finito no vacío$\}$ es una base numerable para X.*

Demostración. Por el Lema 1.7, $\mathcal{C}$ es un conjunto numerable. Dado que $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$, se sigue que $\mathcal{C}$ es una base para X. $\square$

Definición 1.9. *Sean d_1 y d_2 dos métricas para un conjunto X. Decimos que d_1 y d_2 son equivalentes si la topológia inducida por d_1 coincide con la topológia inducida por d_2.*

Proposición 1.10. *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Entonces, existe una métrica acotada por 1 sobre X equivalente a ρ.*

Demostración. Definamos la función $\rho_1 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ para cada $(x, y) \in X \times X$. Vamos a probar que ρ_1 es una métrica para X. Sean $x, y, z \in X$. Necesitamos probar las siguientes afirmaciones.
Afirmación 1. $\rho_1(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
Supongamos que $\rho_1(x, y) = 0$. Como $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\} = 0$, $\rho(x, y) = 0$. Así, $x = y$.
Para $x = y$, tenemos que $\rho(x, y) = 0$. De donde $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\} = 0$. Esto prueba la afirmación 1.
Afirmación 2. $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$.
Dado que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\} = \min\{1, \rho(y, x)\} = \rho_1(y, x)$. Entonces $\rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$.

Afirmación 3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.
Sean $\rho(x,z) = a$, $\rho(z,y) = b$, $\rho(x,y) = c$. Como $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, $c \leq a + b$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} \rho_1(x,z) + \rho_1(z,y) & = & \min\{1,a\} + \min\{1,b\} \\ & \geq & \min\{2, 1+a, 1+b, a+b\} \\ & \geq & \min\{1,c\} \\ & = & \rho(x,y). \end{array}$$

Por lo que $\rho_1(x,y) \leq \rho_1(x,z) + \rho_1(z,y)$.
De las Afirmaciones 1, 2 y 3, ρ_1 es una métrica sobre X. Notemos que ρ_1 está acotada por 1.
Veamos que ρ y ρ_1 son equivalentes. Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in X$. Probaremos que $B_\rho(\varepsilon, a) \subset B_{\rho_1}(\varepsilon, a)$. Sea $c \in B_\rho(\varepsilon, a)$. Como

$$\rho_1(a,c) \leq \rho(a,c) < \varepsilon,\ \rho_1(a,c) < \varepsilon.$$

Así, $c \in B_{\rho_1}(\varepsilon, a)$.

Ahora veamos que $B_{\rho_1}(\varepsilon, a) \subset B_\rho(\varepsilon, a)$. Sea $c \in B_{\rho_1}(\varepsilon, a)$. Consideremos los siguientes casos:
Caso 1. Supongamos que $\varepsilon \leq 1$.
Como $c \in B_{\rho_1}(\varepsilon, a)$, $\rho_1(a,c) < \varepsilon \leq 1$. Así, por la definición de ρ_1, $\rho_1(a,c) = \rho(a,c) < \varepsilon$. Por lo que $c \in B_\rho(\varepsilon, a)$.
Caso 2. Supongamos que $1 < \varepsilon$.
Subcaso 1. Supongamos que $1 \leq \rho(a,c) < \varepsilon$. Entonces, $c \in B_\rho(\varepsilon, a)$.
Subcaso 2. Supongamos que $\rho(a,c) < 1 < \varepsilon$. Entonces, $\rho(a,c) = \rho_1(a,c) < \varepsilon$. Por lo que $c \in B_\rho(\varepsilon, a)$.

Concluimos que ρ_1 y ρ son equivalentes. $\square$

Proposición 1.11. *Las siguientes operaciones definidas en* $\mathbb{R}$ *son continuas,*

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$+(a,b) = a + b$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\cdot(a,b) = a \cdot b,$$

donde el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *tiene la métrica del máximo, la cual satisface que para cada* $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *le asigna el número* $\max\{|a-c|, |b-d|\}$.

Demostración. Primero probaremos que "+" es continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.
Consideremos $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tales que $\max\{|a-c|, |b-d|\} < \delta$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} |(a+b) - (c+d)| & = & |(a-c) + (b-d)| \\ & \leq & |a-c| + |b-d| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

Por lo que la operación suma es continua.
Ahora, sea $(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Probaremos que "$\cdot$" es continua en (c,d). Hagamos $r = |c|+|d|$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta = \sqrt{\varepsilon + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}$. Necesitamos probar que $\delta > 0$. Si $\sqrt{\varepsilon + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2} \leq 0$, entonces $\sqrt{\varepsilon + \frac{r^2}{4}} \leq \frac{r}{2}$, de donde

$$\varepsilon + \frac{r^2}{4} \leq \frac{r^2}{4}$$

y

$$\varepsilon \leq \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo que $\delta > 0$.

Sea $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tal que $\max\{|a-c|, |b-d|\} < \delta$. Entonces,

$$\begin{aligned} |ac-bd| &= |(ac-bc)+(bc-bd)| \\ &\leq |ac-bc| + |bc-bd| \\ &= |a-b||c| + |b||c-d| \\ &< \delta|c| + |b|\delta \\ &= \delta(|c|+|b|). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} |b| &= |b-d+d| \\ &\leq |b-d| + |d| \\ &< \delta + |d|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(|c|+|b|) &< \delta(|c|+\delta+|d|) \\ &= \delta(\delta+r). \end{aligned}$$

Por lo que

$$|ac-bd| \leq \delta(\delta+r).$$

Por otra parte, dado que

$$\begin{aligned} \delta(\delta+r) &= \left(\sqrt{\varepsilon + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}\right)\left(\sqrt{\varepsilon + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2} + r\right) \\ &= \left(\sqrt{\varepsilon + \frac{r^2}{4}} - \frac{r}{2}\right)\left(\sqrt{\varepsilon + \frac{r^2}{4}} + \frac{r}{2}\right) \\ &= \varepsilon + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

$$|ac-bd| \leq \delta(\delta+r) < \varepsilon.$$

Concluimos que la operación producto es continua.

$\square$

Corolario 1.12. *El espacio $\mathbb{R}$ con la topología usual, su suma y producto es un espacio vectorial topológico.*

1.2. Producto topológico

Sea X un conjunto, $\{(Y_\lambda, \tau_{Y_\lambda})\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_\lambda : X \to Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de funciones. Sea τ la topología en X generada por la familia $\{f_\lambda^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda, V_\lambda \in \tau_{Y_\lambda}\}$, la cual resulta ser una subbase para τ. La topología τ en X tiene como base a la familia de todos los conjuntos de la forma $\bigcap\limits_{i=1}^{k} f_{\lambda_i}^{-1}(V_i)$, donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \Lambda$ y V_i es un abierto de Y_{λ_i} para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Además τ es la mínima topología que contiene a $\{f_\lambda^{-1}(V_\lambda) : \lambda \in \Lambda, V_\lambda \in \tau_{Y_\lambda}\}$. La topología τ en X es llamada la topología generada por la familia de funciones $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

A continuación recordaremos el producto topológico de una familia abitraria de espacios topológicos. Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Definamos

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\Lambda : x(\lambda) \in X_\lambda \text{ para cada } \lambda \in \Lambda\}.$$

Para cada $\lambda \in \Lambda$, definimos la función $p_\lambda : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ como $p_\lambda(x) = x(\lambda)$. Hagamos τ_{prod} la topología generada por las funciones $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Esta siempre dotado por la topología producto. El conjunto $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es considerado con la topología τ_{prod}. A la topología τ_{prod} se le conoce con el nombre de Topología de Tychonoff o Topología Producto sobre $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Por cada $\lambda \in \Lambda$, la función $p_\lambda : \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\lambda$ es llamada la λ-ésima proyección.

El producto cartesiano de una familia finita de espacios $\{X_i\}_{i=1}^k$ es denotada por $X_1 \times \cdots \times X_k$. Si $X_i = X$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces el producto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_k$ es denotada por X^k.

Debido a que la demostración del siguiente resultado es muy técnica, omitimos la demostración.

Proposición 1.13. *Sean Λ una familia de índices, Γ_1 y Γ_2 dos subconjuntos de Λ tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Lambda$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ y $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Entonces $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es homeomorfo a $\prod\limits_{\lambda\in\Gamma_1} X_\lambda \times \prod\limits_{\lambda\in\Gamma_2} X_\lambda$.*

El siguiente resultado se encuentra probado en [11, Teorema 16.4, p. 109].

Proposición 1.14. *Si $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ es una familia de espacios topológicos Hausdorff y separables, entonces $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ es separable.*

Proposición 1.15. *Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos. Si A_s es un subespacio de X_s para toda $s \in S$, entonces*

$$\mathrm{Cl}\left(\prod_{s\in S} A_s\right) = \prod_{s\in S} \mathrm{Cl}(A_s).$$

Demostración. Primero, sea $x \in \mathrm{Cl}\left(\prod_{s\in S} A_s\right)$. Queremos ver que $x \in \prod_{s\in S} \mathrm{Cl}(A_s)$. Notemos que $x \in \prod_{s\in S} X_s$. Queremos ver que para toda $s \in S, x(s) \in \mathrm{Cl}(A_s)$. Sean $s \in S$ y $W \in \tau_{X_s}$ tal que $x(s) \in W$. Probaremos que $W \cap A_s \neq \emptyset$. Notemos que $x \in p_s^{-1}(W)$. Por definición de cerradura, $p_s^{-1}(W) \cap \prod_{s\in S} A_s \neq \emptyset$. Sea $y \in p_s^{-1}(W) \cap \prod_{s\in S} A_s$. Entonces, $p_s(y) = y(s) \in W$ y $p_s(y) = y(s) \in A_s$. Así, $y(s) \in W \cap A_s$. Por lo tanto $W \cap A_s \neq \emptyset$. Así $x(s) \in \mathrm{Cl}(A_s)$. De donde $x \in \prod_{s\in S} \mathrm{Cl}(A_s)$. Por lo tanto $\mathrm{Cl}\left(\prod_{s\in S} A_s\right) \subset \prod_{s\in S} \mathrm{Cl}(A_s)$.

Por otro lado, sea $x \in \prod_{s\in S} \mathrm{Cl}(A_s)$. Dado que $x(s) \in \mathrm{Cl}(A_s) \subset X_s$ para toda $s \in S$. Por lo que $x \in \prod_{s\in S} X_s$. Queremos ver que $x \in \mathrm{Cl}\left(\prod_{s\in S} A_s\right)$. Sean $s_1, \ldots, s_n \in S$ y $W_{s_i} \in \tau_{X_{s_i}}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $x \in \bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$.
Vamos a demostrar que $\left(\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})\right) \cap \prod_{s\in S} A_s \neq \emptyset$. Sabemos que $p_{s_i}(x) = x(s_i) \in W_{s_i}$ y $x(s_i) \in \mathrm{Cl}(A_{s_i})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, $W_{s_i} \cap A_{s_i} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $a_i \in W_{s_i} \cap A_{s_i} \subset X_{s_i}$. Por el axioma de elección, $\prod_{s\in S} A_s \neq \emptyset$. Sea $z \in \prod_{s\in S} A_s$. Definamos $y : S \longrightarrow \bigcup_{s\in S} A_s$ como

$$y(s) = \begin{cases} a_i, & si \quad s \in \{s_1, \ldots, s_n\}, \\ \\ z(s), & si \quad s \notin \{s_1, \ldots, s_n\}. \end{cases}$$

Así, $y \in \prod_{s\in S} A_s$. Queremos ver que $y \in \bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})$. Notemos que $p_{s_i}(y) = y(s_i) = a_i \in W_{s_i} \cap A_{s_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo que $y \in p_{s_i}^{-1}(W_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De donde $y \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(W_{s_i})\right) \cap \prod_{s\in S} A_s$. Concluimos que $x \in \mathrm{Cl}\left(\prod_{s\in S} A_s\right)$. Por lo que $\prod_{s\in S} \mathrm{Cl}(A_s) \subset \mathrm{Cl}\left(\prod_{s\in S} A_s\right)$.
Por lo tanto $\mathrm{Cl}\left(\prod_{s\in S} A_s\right) = \prod_{s\in S} \mathrm{Cl}(A_s)$. □

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [11, Teorema 8.8, p. 55].

Proposición 1.16. *Sean X un espacio topológico, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos no vacíos y $F : X \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ una función. Entonces F es continua si y sólo si $p_\lambda \circ F$ es continua para toda $\lambda \in \Lambda$.*

Proposición 1.17. *Sean $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ dos familias de espacios topológicos no vacíos y $\{h_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de funciones tales que cada h_λ es un homeomorfismo. Entonces, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es homeomorfo a $\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$.*

Demostración. Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos las siguientes funciones proyección,

$$p_\lambda : \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha \longrightarrow Y_\lambda \text{ y}$$

$$\pi_\lambda : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_\lambda .$$

Ahora, para cada $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, definimos la función

$$y_x : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \text{ por } y_x(\lambda) = h_\lambda(x(\lambda))$$

para cada $\lambda \in \Lambda$.

Definamos la función $F : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ por $F(x) = y_x$ para toda $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Para probar la continuidad de F, sean $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y $\lambda \in \Lambda$. Dado que $h_\lambda \circ \pi_\lambda$ es continua y

$$\begin{aligned} (p_\lambda \circ F)(x) &= p_\lambda(y_x) \\ &= y_x(\lambda) \\ &= h_\lambda(x(\lambda)) \\ &= (h_\lambda \circ \pi_\lambda)(x), \end{aligned}$$

$p_\lambda \circ F$ es continua. Entonces, por la Proposición 1.16 F es continua.
A continuación, definimos la función inversa de F de la siguiente manera, para cada $y \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$, definimos la función

$$x_y : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ por } x_y(\lambda) = h_\lambda^{-1}(y(\lambda))$$

para cada $\lambda \in \Lambda$. Finalmente, definimos la función inversa

$$G : \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ por } G(y) = x_y .$$

Para probar la continuidad de G, sean $y \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ y $\lambda \in \Lambda$. Dado que $h_\lambda^{-1} \circ p_\lambda$ es continua y

$$\begin{aligned} (\pi_\lambda \circ G)(y) &= \pi_\lambda(G(y)) \\ &= \pi_\lambda(x_y) \\ &= x_y(\lambda) \\ &= h_\lambda^{-1}(y(\lambda)) \\ &= h_\lambda^{-1} \circ p_\lambda(y), \end{aligned}$$

$\pi_\lambda \circ G$ es continua. Entonces, por la Proposición 1.16, G es continua.

Demostraremos que $G \circ F = Id_{\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda}$ y $F \circ G = Id_{\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda}$. Para probar la primera igualdad, sea $z \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, entonces, $(G \circ F)(z) = G(F(z)) = G(y_z) = x_{y_z}$. Veamos que las funciones z y x_{y_z} son iguales. Claramente, ellas tienen el mismo dominio. Para la otra parte, de la igualdad de funciones, sea $\lambda \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned} x_{y_z}(\lambda) &= h^{-1}(y_z(\lambda)) \\ &= h_\lambda^{-1}(h_\lambda(z(\lambda))) \\ &= z(\lambda). \end{aligned}$$

Así, las funciones z y x_{y_z} son iguales. Por lo que $G \circ F = Id_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda}$.
Similarmente se prueba que $F \circ G = Id_{\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda}$.
Concluimos que F es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es homeomorfo a $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. $\square$

Proposición 1.18. *Sea $\{(X_i,\rho_i)\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de espacios métricos tal que para cada $i \in \mathbb{N}$, ρ_i se puede elegir como una métrica acotada por uno en X_i. Hagamos $X = \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. Si definimos la función $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i)$, para cada $x = (x_1,x_2,\ldots), y = (y_1,y_2,\ldots) \in X$, entonces ρ es una métrica sobre X acotada por uno.*

Demostración. Veamos que ρ está bien definida. Sean $x = (x_1,x_2,\ldots), y = (y_1,y_2,\ldots) \in X$. Sea $i \in \mathbb{N}$. Como $\rho_i(x_i,y_i) \le 1$, entonces $\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i) \le \frac{1}{2^i}$. Así,

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i) \\ &\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De donde ρ está bien definida y acotada por uno. Claramente $\rho(x,y) \ge 0$, para cuales quiera $x,y \in X$.

Sean $x = (x_1,x_2,\ldots)$, $y = (y_1,y_2,\ldots)$, $z = (z_1,z_2,\ldots) \in X$. Necesitamos probar las siguientes afirmaciones.
Afirmación 1. $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
Primero, supongamos que $\rho(x,y) = 0$. Sea $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \rho(x,y) = 0$. Sea $i \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que $\rho_i(x_i,y_i) = 0$. Supongamos que $\rho_i(x_i,y_i) > 0$. Así, $0 < \frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i) \le S_n$ para todo $n \ge i$. De donde $0 < \frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i) \le \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, lo cual es una contradicción. De lo anterior, se sigue que $\rho_i(x_i,y_i) = 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por lo que $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Concluimos que $x = y$.
Ahora, supongamos que $x = y$. Entonces, $\rho_i(x_i,y_i) = 0$. De donde $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, $\rho(x,y) = 0$.
Afirmación 2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

Dado que $\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i) = \frac{1}{2^i}\rho_i(y_i,x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(y_i,x_i)\\ &= \rho(y,x).\end{aligned}$$

De donde $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

Afirmación 3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$.
Usando la desigualdad del triángulo, se tiene que $\rho_i(x_i,y_i) \leq \rho(x_i,z_i) + \rho(z_i,y_i)$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i) &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho_i(x_i,z_i)+\rho_i(z_i,y_i)}{2^i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\rho_i(x_i,z_i)}{2^i}+\frac{\rho_i(z_i,y_i)}{2^i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,z_i)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(z_i,y_i).\end{aligned}$$

De lo anterior y de que ρ está bien definida, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i) \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,z_i) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\rho_i(z_i,y_i).$$

Por lo que

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Por las afirmaciónes anteriores, ρ es una métrica sobre X. □

Siguiendo con la anterior notación, es conocido que la topología producto en X coincide con la topología inducida por la métrica ρ.

Corolario 1.19. *La función* $d_{I^\infty} : I^\infty \times I^\infty \longrightarrow [0,\infty]$ *definida por* $d_{I^\infty}(x,y) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{|x_i-y_i|}{2^i}$, *es una métrica sobre* I^∞.

Demostración. Para toda $i \in \mathbb{N}$. Definamos la función

$$\rho_i : [0,1]_i \times [0,1]_i \longrightarrow \mathbb{R} \text{ por } \rho_i(x_i,y_i) = |x_i - y_i|,$$

donde $[0,1]_i = [0,1]$. Dado que ρ_i es una restricción del valor absoluto, entonces ρ_i es una métrica para $[0,1]_i$. Sean $x_i, y_i \in [0,1]_i$. Entonces, $0 \leq x_i \leq 1$ y $-1 \leq -y_i \leq 0$. Así, $-1 \leq x_i - y_i \leq 1$. Por tanto $\rho_i(x_i,y_i) = |x_i - y_i| \leq 1$. De donde ρ esta acotada por 1. Por la Proposición 1.18, $\rho : I^\infty \times I^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x,y) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i}\rho_i(z_i,y_i)$, es una métrica sobre I^∞. □

Proposición 1.20. *Sea* $\{(X_i, \rho_i)\}_{i=1}^{\infty}$ *una familia de espacios métricos y separables. Entonces,* $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ *es separable.*

Demostración. Se sigue de que la topología producto en X coincide con la topología inducida por la métrica ρ y de la Proposición 1.14. $\square$

Como $[0, 1]$ con la topología usual es compacto, por el Teorema de Tychonoff, I^{∞} es compacto.

Proposición 1.21. *Sea* $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *una familia de espacios topológicos. Entonces, para cada* $\alpha \in \Lambda$*,* X_α *es homeomorfo a un subespacio de* $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$*.*

Demostración. Sean $\alpha \in \Lambda$ y $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Para todo $\lambda \neq \alpha$, definimos $Y_\lambda = \{x(\lambda)\}$, y para $\lambda = \alpha$, definimos $Y_\lambda = X_\alpha$. Ahora, por cada $a \in X_\alpha$, definimos la función

$$\varphi_a : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

por

$$\varphi_a(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda), & \text{si } \lambda \neq \alpha, \\ \\ a, & \text{si } \lambda = \alpha. \end{cases}$$

Notemos que $\varphi_a \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ para cada $a \in X_\alpha$.
Finalmente, definimos la función

$$i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$$

por

$$i_\alpha(a) = \varphi_a.$$

Veamos que i_α es un homeomorfismo. Primero probaremos la inyectividad de i_α. Sean $a, b \in X_\alpha$ tales que $a \neq b$. Notemos que $i_\alpha(a) = \varphi_a$ y $i_\alpha(b) = \varphi_b$. Como $\varphi_a(\alpha) = a$ y $\varphi_b(\alpha) = b$, $\varphi_a(\alpha) \neq \varphi_b(\alpha)$. De donde $\varphi_a \neq \varphi_b$ para toda $\lambda \in \Lambda \setminus \{\alpha\}$. Así, i_α es inyectiva.
Para la suprayectividad, sea $z \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. Entonces, $z(\lambda) \in Y_\lambda = \{x(\lambda)\}$ para cada $\lambda \neq \alpha$ y $z(\alpha) \in X_\alpha$. Dado que $z(\lambda) = x(\lambda)$ para cada $\lambda \neq \alpha$, $z = \varphi_{z(\alpha)}$. De donde $i_\alpha(z(\alpha)) = z = \varphi_{z(\alpha)}$. Esto prueba la suprayectividad de i_α.
Para probar la continuidad de i_α, consideremos las funciones proyección $p_\beta : \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \longrightarrow Y_\beta$.
Por la Proposición 1.16 es suficiente probar que $p_\beta \circ i_\alpha$ es continua para cada $\beta \in \Lambda$. Sea $\lambda \in \Lambda$. Consideremos los siguientes casos.
Caso 1. Supongamos que $\beta \neq \alpha$.
Sea $a \in X_\alpha$. Entonces, $(p_\beta \circ i_\alpha)(a) = p_\beta(i_\alpha(a)) = p_\beta(\varphi_a) = \varphi_a(\beta) = x(\beta)$. Así, $(p_\beta \circ i_\alpha)(a) = x(\beta)$. Por lo que $(p_\beta \circ i_\alpha)$ es una función constante.
Caso 2. Supongamos que $\beta = \alpha$.
Entonces, $(p_\alpha \circ i_\alpha)(a) = p_\alpha(i_\alpha(a)) = p_\alpha(\varphi_a) = \varphi_a(\alpha) = a$ para toda $a \in X_\alpha$. De donde $(p_\beta \circ i_\alpha)$ es la función identidad.
Entonces, $(p_\lambda \circ i_\alpha)$ es continua para toda $\lambda \in \Lambda$. Por lo que i_α es continua.

Finalmente, probaremos que i_α^{-1} es continua. Para ello, dado que i_α es una función biyectiva, es suficiente probar que i_α es una función abierta. Sea U un abierto en X_α. Probaremos que $i_\alpha(U)$ es un abierto en $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. Observemos que $p_\alpha^{-1}(U)$ es un abierto en $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. Probaremos que $p_\alpha^{-1}(U) = i_\alpha(U)$. Sea $a \in U$. Entonces, $i_\alpha(a) = \varphi_a$ y $p_\alpha(i_\alpha(a)) = p_\alpha(\varphi_a) = \varphi_a(\alpha) = a \in U$. Así, $i_\alpha(a) \in p_\alpha^{-1}(U)$. Concluimos que $i_\alpha(U) \subset p_\alpha^{-1}(U)$. Para probar la otra contención, sea $z \in p_\alpha^{-1}(U)$. Recordemos que $z = \varphi_{z(\alpha)}$. Como $z \in p_\alpha^{-1}(U)$, $p_\alpha(z) = z(\alpha) \in U$. De donde $z = \varphi_{z(\alpha)} = i_\alpha(z(\alpha)) \in i_\alpha(U)$. Por lo que $z \in i_\alpha(U)$. Se concluye que, $p_\alpha^{-1}(U) \subset i_\alpha(U)$. De lo anterior, obtenemos que $p_\alpha^{-1}(U) = i_\alpha(U)$. Así, $i_\alpha(U)$ es un abierto en $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$. Esto prueba que i_α es abierta.
Por lo tanto i_α es un homeomorfismo.
Dado que $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ es un subespacio de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, X_α es homeomorfo a un subespacio de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. □

Continuando con las condiciones y notación de la proposición anterior, consideramos a X_α como subespacio del $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ cuando no exista confusión.

Lema 1.22. *Sean $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y $\mathcal{U}$ un abierto de $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Si $y \in \mathcal{U}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} C_n \subset \mathcal{U}$.*

Demostración. Dado que $y \in \mathcal{U}$, existen $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ y abiertos $W_{n_1}, \ldots, W_{n_k}$ de $C_{n_1}, \ldots, C_{n_k}$, respectivamente, tales que $y \in \bigcap\limits_{j=1}^{n_k} p_{n_j}^{-1}(W_{n_j}) \subset \mathcal{U}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{n_1, \ldots, n_k\} = \{1, \ldots, m\}$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Necesitamos probar que $\{y_1\}\times\cdots\times\{y_m\}\times \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} C_n \subset \bigcap\limits_{j=1}^{m} p_j^{-1}(W_j)$. Sea $z \in \{y_1\}\times\cdots\times\{y_m\}\times \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} C_n$. Entonces, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, $p_j(z) = y_j = p_j(y) \in W_j$. Así, $z \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} p_j^{-1}(W_j)$. Por lo tanto $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} C_n \subset \mathcal{U}$. □

1.3. Contractibilidad

Definición 1.23. *Decimos que un espacio topológico X es contráctil si existen un punto x_0 en X y una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tales que $H((x,0)) = x$ y $h((x,1)) = x_0$, para toda $x \in X$.*

Proposición 1.24. *La propiedad de ser contráctil es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos tales que X es un espacio contráctil, y $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Denotemos por f^{-1} a la función inversa de f. Definamos la función

$$g : Y \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$$
$$\text{por } g((y,t)) = (f^{-1}(y), t)$$

para toda $(y,t) \in Y \times [0,1]$. Dado que la función inversa f^{-1} y la función identidad $Id_{[0,1]}$ son continuas, g es continua. Probaremos que Y es contráctil. Como X es contráctil existen $x_0 \in X$ y una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tales que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = x_0$ para todo $x \in X$. Ahora, definamos la función $H' : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ como $H'(y,t) = (f \circ H \circ g)(y,t)$. Dado que f, H y g son continuas, H' es continua. Entonces,

$$\begin{aligned} H'(y,0) &= (f \circ H \circ g)(y,0) \\ &= f(H(g(y,0))) \\ &= f(H((f^{-1}(y),0))) \\ &= f(f^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H'(y,1) &= (f \circ H \circ g)(y,1) \\ &= f(H(g(y,1))) \\ &= f(H((f^{-1}(y),1))) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto Y es contráctil. □

1.4. El espacio de funciones continuas

Sea (X,d) un espacio métrico y compacto. Consideremos $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ donde $\tau_{\mathbb{R}}$ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Definimos

$$C(X,\mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{es continua}\}.$$

Dado que X es compacto, todas las funciones en $C(X,\mathbb{R})$ son acotadas. Definamos la función norma $||\cdot|| : C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty)$ como

$$||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

Es fácil probar que $||\cdot||$ es una norma para $C(X,\mathbb{R})$.
Ahora, definimos la función $\rho : C(X,\mathbb{R}) \times C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty)$ como

$$\rho(f,g) = ||f-g|| = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$

Nótese que la función ρ está bien definida y además que ρ es una métrica para $C(X,\mathbb{R})$.
Denotemos por τ_ρ la topología inducida por la métrica ρ.
Es conocido que $((C(X,\mathbb{R}), \tau_\rho), +, *)$ es un espacio vectorial topológico, donde el operador suma está definido de la siguiente manera, para cualesquiera $f, g \in C(X,\mathbb{R})$ definimos la función $f+g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, de manera similar se define el producto de un escalar por una función.

Siguiendo con la misma notación del anterior parrafo, consideremos $\mathcal{K}(X) = \{K \subset X : K$es compacto y no vacío$\}$. Sean $K \in \mathcal{K}(X)$ y A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Definimos

$$[K : A] = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(K) \subset A\};$$

$$\mathcal{S} = \{[K : A] : K \in \mathcal{K}(X), A \in \tau_{\mathbb{R}}\}.$$

Sea τ_{com} la topología que tiene como subbase a la familia $\mathcal{S}$. A τ_{com} se le conoce como la topología compacto-abierta.

Proposición 1.25. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces, la topología inducida por ρ en $C(X, \mathbb{R})$ coincide con la topología compacto-abierta en $C(X, \mathbb{R})$.*

Demostración. Vamos a demostrar que $\tau_{com} \subset \tau_\rho$. Para ello consideremos $U_1, \ldots, U_n \in \tau_{\mathbb{R}}$, $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}(X)$ y $\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^{n} [K_i, U_i]$. Tomemos $f \in \mathcal{U}$. Veamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\rho(\varepsilon, f) \subset \mathcal{U}$. Como f es continua, $f(K_i)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $f(K_i) \subset U_i$, por el Lema 1.1 existe $\varepsilon_i > 0$ tal que $f(K_i) \subset N(f(K_i), \varepsilon_i) \subset U_i$.
Hagamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Probaremos que $B_\rho(\varepsilon, f) \subset \mathcal{U}$. Sean $g \in B_\rho(\varepsilon, f)$ y $z \in K_i$. Dado que $|g(z) - f(z)| \leq \rho(g, f) < \varepsilon$,

$$g(z) \in B^{\mathbb{R}}(\varepsilon, f(z)) \subset N(f(K_i), \varepsilon) \subset N(f(K_i), \varepsilon_i) \subset U_i.$$

Así, $g(z) \in U_i$. Por lo que $g(K_i) \subset U_i$. Entonces, $g \in [K_i, U_i]$. Por lo tanto $B_\rho(\varepsilon, f) \subset \mathcal{U}$.
Ahora, sean $\mathcal{V} \in \tau_{com}$ y $f \in \mathcal{V}$. Entonces existen $U_1, \ldots, U_n \in \tau_{\mathbb{R}}$, $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}(X)$ tales que $f \in \bigcap_{i=1}^{n} [K_i, U_i] \subset \mathcal{V}$. Por lo anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\rho(\varepsilon, f) \subset \bigcap_{i=1}^{n} [K_i, U_i] \subset \mathcal{V}.$$

Por lo que $\mathcal{V} \in \tau_\rho$. Así, $\tau_{com} \subset \tau_\rho$.

Finalmente, probaremos que $\tau_\rho \subset \tau_{com}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $f \in C(X, \mathbb{R})$. Por cada $x \in X$, definimos $U_x = f^{-1}(B(f(x), \frac{\varepsilon}{8}))$. Notemos que la familia $\{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Dado que X es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, hagamos:

$$C_i = \mathrm{Cl}(U_{x_i}) \text{ y } V_i = B^{\mathbb{R}}(\frac{\varepsilon}{4}, f(x_i))).$$

Observemos que cada C_i es compacto y que cada V_i es abierto.
Afirmación 1. $f \in \bigcap_{i=1}^{n} [C_i, V_i]$.
Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que f es continua, $f(\mathrm{Cl}(U_{x_i})) \subset \mathrm{Cl}(f(U_{x_i}))$. Así

$$f(C_i) \subset \mathrm{Cl}(f(U_{x_i})) = \mathrm{Cl}(f(f^{-1}(B^{\mathbb{R}}(\tfrac{\varepsilon}{8}, f(x_i))))) \subset \mathrm{Cl}(B^{\mathbb{R}}(\tfrac{\varepsilon}{8}, f(x_i))) \subset B^{\mathbb{R}}(\tfrac{\varepsilon}{4}, f(x_i)) = V_i.$$

Por lo que $f(C_i) \subset V_i$ y $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n}[C_i, V_i]$.

Afirmación 2. $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[C_i, V_i] \subset B_\rho(\varepsilon, f)$.

Sean $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{n}[C_i, V_i]$ y $z \in X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Entonces, $z \in U_{x_i}$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $z \in U_{x_i} \subset C_i$ y $g(C_i) \subset V_i$, $g(z) \in V_i$. Así,

$$g(z) \in B^{\mathbb{R}}(\tfrac{\varepsilon}{4}, f(x_i)) \text{ y } |g(z) - f(x_i)| < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Por otra parte, dado que $z \in U_{x_i} \subset C_i$ y $f(C_i) \subset V_i$, se tiene que:

$$f(z) \in B^{\mathbb{R}}(\tfrac{\varepsilon}{4}, f(x_i)) \text{ y } |f(z) - f(x_i)| < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leq |f(z) - f(x_i)| + |f(x_i) - g(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por lo que $|f(z) - g(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así $\rho(g, f) < \varepsilon$. De donde $g \in B_\rho(\varepsilon, f)$. Esto prueba la Afirmación 2.
Concluimos que $B_\rho(\varepsilon, f) \in \tau_{com}$. Por lo tanto $\tau_{com} = \tau_\rho$. □

Proposición 1.26. *Si (X, d) es un espacio métrico y compacto, entonces $(C(X, \mathbb{R}), \tau_\rho)$ es segundo numerable.*

Demostración. Por las Proposiciones 1.5 y 1.6, existe β_X una base numerable para la topología sobre$X$. Por el Lema 1.8, podemos suponer que β_X contiene a las uniones finitas de sus elementos. Sea $\beta_{\mathbb{R}}$ una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$ tal que contiene a las uniones finitas de sus elementos. Hagamos $\mathcal{C} = \{\mathrm{Cl}_X(V) : V \in \beta_X\}$. Notemos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}(X)$ y es a lo más numerable.
Sea $\mathcal{S} = \{[K, U] : K \in \mathcal{C} \text{ y } U \in \beta_{\mathbb{R}}\}$. Nótese que $\mathcal{S}$ es a lo más numerable. Ahora probaremos que $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología τ_{com}. Sean $K \in \mathcal{K}(X)$, $U \in \tau_{\mathbb{R}}$ y $f \in [K, U]$.
Afirmación 1. Existe $V \in \beta_X$ tal que $K \subset \mathrm{Cl}_X(V) \subset f^{-1}(U)$.
Por la continuidad de f, $f^{-1}(U)$ es abierto en X. Por otra parte, para todo $x \in K$, existe $V_x \in \beta_X$ tal que $x \in V_x \subset f^{-1}(U)$. Por la normalidad de X, podemos suponer que $\mathrm{Cl}_X(V_x) \subset f^{-1}(U)$ para cada $x \in K$. Dado que la familia $\{V_x : x \in K\}$ es una cubierta abierta de K y K es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}_X(V_{x_i}) \subset f^{-1}(U)$. Sea $V = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Entonces $V \in \beta_X$, $\mathrm{Cl}_X(V) \in \mathcal{C}$ y $f(K) \subset f(\mathrm{Cl}_X(V)) \subset U$. Así $K \subset \mathrm{Cl}_X(V) \subset f^{-1}(U)$.

Afirmación 2. Existe $W \in \beta_{\mathbb{R}}$ tal que $f(\mathrm{Cl}_X(V)) \subset W \subset U$.
Dado que $\mathrm{Cl}_X(V)$ es cerrado y X es compacto, entonces $\mathrm{Cl}_X(V)$ es compacto. Como la compacidad es una propiedad topológica, $f(\mathrm{Cl}_X(V))$ es compacto en $\mathbb{R}$ y $f(\mathrm{Cl}_X(V) \subset U$. Por cada $y \in f(\mathrm{Cl}_X(V)$, existe $W_y \in \beta_{\mathbb{R}}$ tal que $y \in W_y \subset U$. Dado que la familia $\{W_y : y \in f(\mathrm{Cl}_X(V)\}$ es una cubierta abierta de $f(\mathrm{Cl}_X(V)$, existen $y_1, \ldots, y_m \in f(\mathrm{Cl}_X(V))$ tales que $f(\mathrm{Cl}_X(V)) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{y_i} \subset U$. Sea $W = \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{y_i}$. Claramente $W \in \beta_{\mathbb{R}}$. Así, $f(\mathrm{Cl}_X(V)) \subset W \subset U$. Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

Afirmación 3. Existen $V \in \beta_X$ y $W \in \beta_{\mathbb{R}}$ tales que $f \in [\mathrm{Cl}_X(V), W] \subset [K, U]$.
Elegimos $V \in \beta_X$ y $W \in \beta_{\mathbb{R}}$ como en las afirmaciones 1 y 2, respectivamente. Ahora bien, como $f(\mathrm{Cl}_X(V)) \subset W$, $f \in [\mathrm{Cl}_X(V), W]$. Ahora, necesitamos probar que $[\mathrm{Cl}_X(V), W] \subset [K, U]$. Sea $g \in [\mathrm{Cl}_X(V), W]$. Dado que $K \subset \mathrm{Cl}_X(V)$, $g(K) \subset g(\mathrm{Cl}_X(V)) \subset W \subset U$. Por lo que $g \in [K, U]$. De todo lo anterior, $f \in [\mathrm{Cl}_X(V), W] \subset [K, U]$.

Afirmación 4. Para todo $\mathcal{U} \in \tau_{com}$ y para toda $f \in \mathcal{U}$, existen $V_1, \ldots, V_n \in \beta_X$ y $W_1, \ldots, W_n \in \beta_{\mathbb{R}}$ tales que $f \in \bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{Cl}_X(V_i), W_i] \subset \mathcal{U}$.
Por la definición de τ_{com}, existen $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{K}(X)$ y $U_1, \ldots, U_n \in \tau_{\mathbb{R}}$ tales que $f \in \bigcap_{i=1}^{n} [K_i, U_i] \subset \mathcal{U}$. Por la Afirmación 3, existen $V_1, \ldots, V_n \in \beta_X$ y $W_1, \ldots, W_n \in \beta_{\mathbb{R}}$ tales que $f \in [\mathrm{Cl}_X(V_i), W_i] \subset [K_i, U_i]$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo que

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} [\mathrm{Cl}_X(V_i), W_i] \subset \bigcap_{i=1}^{n} [K_i, U_i] \subset \mathcal{U}.$$

De la Afirmación 4, concluimos que $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología τ_{com}.
De donde, la familia $\mathcal{S}'$ de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para τ_{com}. Por el Lema 1.7, $\mathcal{S}'$ es una base numerable para τ_{com}.
Por lo tanto $(C(X, \mathbb{R}), \tau_\rho)$ es segundo numerable. □

Corolario 1.27. *Si (X, d) es un espacio métrico y compacto, entonces $(C(X, \mathbb{R}), \tau_\rho)$ es separable.*

Demostración. Se sigue de las Proposiciones 1.5 y 1.26 que $(C(X, \mathbb{R}), \tau_\rho)$ es separable. □

Lema 1.28. *Sean $f_0 \in C(I^\infty, \mathbb{R})$. Entonces la función $H : C(I^\infty, \mathbb{R}) \times [0, 1] \longrightarrow C(I^\infty, \mathbb{R})$ definida por $H(f, t) = (1 - t)f + tf_0$ es una función continua.*

Demostración. Consideremos $(f, t) \in C(I^\infty, \mathbb{R}) \times [0, 1]$. Sea $\{(f_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(I^\infty, \mathbb{R}) \times [0, 1]$ tal que $(f_n, t_n) \longrightarrow (f, t)$. Para probar que $H((f_n, t_n)) \longrightarrow H(f, t)$, probaremos que $(1 - t)f_n + t_n f_0 \longrightarrow (1 - t)f + tf_0$. Como $(f_n, t_n) \longrightarrow (f, t)$, $f_n \longrightarrow f$ y $t_n \longrightarrow t$. Por la continuidad del producto por un escalar en el espacio vectorial topológico, $(1 - t)f_n \longrightarrow (1 - t)f$ y $t_n f_0 \longrightarrow tf_0$. Así, dado que la suma es una función continua, $(1 - t)f_n + t_n f_0 \longrightarrow (1 - t)f + tf_0$. Esto prueba que H es continua. □

1.5. Conjuntos convexos

Definición 1.29. *Sean V un espacio vectorial métrico, separable y no vacío, y C un subconjunto no vacío de V. Decimos que C es un subconjunto convexo si para cualesquiera dos elementos c_0 y c_1 de C, se tiene que $\{(1 - t)c_0 + tc_1 : t \in [0, 1]\} \subset C$.*

Definición 1.30. *Sea V un espacio vectorial métrico separable, compacto y no vacío, y A un subconjunto no vacío de V. El casco convexo de A, denotado por $conv(A)$, se define como:*

$$conv(A) = \bigcap \{C : A \subset C \text{ y } C \text{es un conjunto convexo}\}.$$

La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [9, Teorema 1.2.3, p. 8].

Teorema 1.31. *Para cada espacio métrico, compacto, separable y no vacío X, existe un encaje isométrico $h : X \longrightarrow C(X, \mathbb{R})$ tal que:*

1) para cada subconjunto Y de X, $h(Y)$ es subconjunto cerrado de $conv(h(Y))$.

2) $h(X) \subset \{f \in C(X, \mathbb{R}) : ||f|| \leq diam(X)\}$.

Lema 1.32. *Sea C un subespacio convexo de $C(I^\infty, \mathbb{R})$. Entonces C es contráctil. En particular $C(I^\infty, \mathbb{R})$ es contráctil.*

Demostración. Sea $f_0 \in C$. Hagamos a $H : C \times [0,1] \longrightarrow C$ por $H((f,t)) = (1-t)f + tf_0$. Como C es convexo, H está bien definida. La continuidad de H se sigue del Lema 1.28. Así, para cada $f \in C$, $H((f,0)) = (1-0)f + 0f_0 = f$ y $H((f,1)) = (1-1)f + 1f_0 = f_0$. Por lo tanto C es contráctil. Dado que $(1-t)c_0 + tc_1 \in C(I^\infty, \mathbb{R})$ para cualesquiera c_0, $c_1 \in C(I^\infty, \mathbb{R})$ y cualquier $t \in [0,1]$, entonces $C(I^\infty, \mathbb{R})$ es contráctil. □

1.5.1. Normalidad y el cubo de Hilbert

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de extensión de Dugundji (ver [9, Teorema 1.4.13, p. 38]).

Teorema 1.33. *Sea (V, ρ) un espacio vectorial topológico normado, separable y no vacío. Para cada espacio X, cada subespacio cerrado A de X y toda función continua $f : A \longrightarrow V$, existe una función continua $F : X \longrightarrow V$ tal que $F|_A = f$ y $F(X) \subset conv(f(A))$.*

Como consecuencia del Teorema 1.33, obtenemos el Teorema de extensión de Tietze (ver [9, Teorema 1.4.14, p. 39]).

Teorema 1.34. *Sean X un espacio métrico, separable y no vacío, y A un subconjunto cerrado de X. Si $f : A \longrightarrow [0,1]$ es una función continua, entonces existe una función continua $F : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $F|_A = f$.*

Del Teorema 1.34, se obtiene el siguiente resultado conocido como el Lema de Urysohn (ver [9, Teorema 1.4.15, p. 39]). Es conocido que todo espacio métrico es normal, por lo que se puede aplicar el Lema de Urysohn, sin usar la hipótesis de ser separable, sin embargo lo escribimos como aparece en la referencia.

Teorema 1.35. *Sea X un espacio métrico, separable y no vacío. Si A y B son subconjuntos cerrados y ajenos de X. Entonces existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $fB) = \{1\}$.*

Teorema 1.36. *Todo espacio métrico, separable y no vacío X se puede encajar en el cubo de Hilbert $\mathcal{I}^\infty$.*

Demostración. Dado que todo espacio métrico y separable es segundo numerable, sea $\beta = \{U_1, U_2, \ldots\}$ una base numerable para la topología de X. Definamos $\mathcal{W} = \{(U_i, U_j) \in \beta \times \beta : \mathrm{Cl}(U_i) \subset U_j\}$. Por el Lema 1.3, $\mathcal{W} \neq \emptyset$. Como $\mathcal{W} \subset \beta \times \beta$ y $\beta \times \beta$ es numerable, $\mathcal{W}$ es a lo más numerable. Supongamos que $\mathcal{W} = \{W_1, W_2, \ldots\}$.

Dado que X es normal, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $W_n = (U_{i_n}, U_{j_n})$ en $\mathcal{W}$. Por el Teorema 1.35, existe una función continua $f_n : X \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathrm{Cl}(U_{i_n}), \\ \\ 1, & \text{si } x \in X \setminus U_{j_n}. \end{cases}$$

Definimos la función $f : X \longrightarrow I^\infty$ por $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots)$. Probaremos que f es un homeomorfismo sobre su imagen.
Primero veamos que f es continua. Sea $\pi_n : I^\infty \longrightarrow I$ la n-ésima proyección. Entonces, $\pi \circ f = f_n$ para cada n. Como cada f_n es continua para cada n, f es continua.

Para probar la inyectividad de f, sean x y y puntos distintos de X. Como X es de Hausdorff, existe $U_j \in \beta$ tal que $x \in U_j$ y $y \notin U_j$. Dado que X es normal, existe $U_i \in \beta$ tal que $x \in U_i \subset \mathrm{Cl}(U_i) \subset U_j$. De esta manera, $(U_i, U_j) \in \mathcal{W}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $(U_i, U_j) = W_m$. Dado que $x \in \mathrm{Cl}(U_i)$ y $y \in X \setminus U_j$, $f_m(x) = 0$ y $f_m(y) = 1$. De donde $f(x) \neq f(y)$. Por lo que f es inyectiva.

Ahora, probaremos que f es una función cerrada.
Sea A un subconjunto cerrado de X. Probaremos que $\mathrm{Cl}(f(A)) = f(A)$. Claramente $f(A) \subset \mathrm{Cl}(f(A))$. Para probar la otra contención, sea $y \in \mathrm{Cl}(f(A))$. Veamos que $y \in f(A)$. Supongamos que $y \notin f(A)$. Sea $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $x \notin A$.

Dado que $x \in X \setminus A$ y $X \setminus A$ es abierto, existe $U_j \in \beta$ tal que $x \in U_j \subset X \setminus A$. Dado que X es normal, existe $U_i \in \beta$ tal que $x \in U_i \subset \mathrm{Cl}(U_i) \subset U_j$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $(U_i, U_j) = W_k$. Ahora, como $x \in \mathrm{Cl}(U_i)$ y $A \subset X \setminus U_j$, entonces $f_k(x) = 0$ y $f_k(a) = 1$ para cada $a \in A$. Entonces, para cada $a \in A$

$$\begin{aligned} d_{I^\infty}(f(x), f(a)) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f_i(x) - f_i(a)|}{2^i} \\ &\geq \frac{|f_k(x) - f_k(a)|}{2^k} \\ &= \frac{|0-1|}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^k} \\ &> \frac{1}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Así, $B(\frac{1}{2^{k+1}}, f(x)) \cap f(A) = \emptyset$. De donde $f(x) = y \notin \mathrm{Cl}(f(A))$, una contradicción. Concluimos que $y \in f(A)$. Por lo que $\mathrm{Cl}(f(A)) \subset f(A)$ y $\mathrm{Cl}(f(A)) = f(A)$. Esto prueba que f es cerrada.
Por lo tanto $f : X \longrightarrow f(X)$ es un homeomorfismo de X sobre $f(X)$.

□

Capítulo 2

Una introducción a los RA y a los RVA

2.1. Retractos

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico y A un subespacio no vacío de X. Decimos que A es un retracto de X si existe una función continua $r : X \longrightarrow A$ tal que $r(a) = a$, para toda $a \in A$. A la función r se le llama retracción.*

Proposición 2.2. *Sean X un espacio topológico de Hausdorff y A un subespacio de X. Si A es un retracto de X, entonces A es cerrado en X.*

Demostración. Sean A un retracto de X y $r : X \longrightarrow A$ una retracción. Si $A = X$, A es cerrado en X. Supongamos que $A \neq X$, sea $x_0 \in X \setminus A$. Notemos que $r(x_0) \neq x_0$. Entonces existen dos abiertos ajenos U_0 y V_0 tales que $x_0 \in U_0$, $r(x_0) \in V_0$. Ahora, como r es continua, $r^{-1}(V_0)$ es un abierto de X tal que $x_0 \in r^{-1}(V_0)$. Sea $W_0 = U_0 \cap r^{-1}(V_0)$. Entonces W_0 es un abierto de X y $x_0 \in W_0$. Dado que $W_0 \subset r^{-1}(V_0)$, $r(W_0) \subset V_0$. Así, $W_0 \cap r(W_0) = \emptyset$. Vamos a probar que $W_0 \subset X \setminus A$. Supongamos que $W_0 \cap A \neq \emptyset$. Sea $a \in W_0 \cap A$. Como $a \in A$ y r es una retracción, $r(a) = a$. Así, dado que $a \in W_0$, $r(a) = a \in r(W_0)$. Entonces $a \in W_0 \cap r(W_0)$, lo cual es una contradicción. De donde, $W_0 \subset X \setminus A$ y $X \setminus A$ es abierto en X. Por lo tanto A es cerrado en X. □

Proposición 2.3. *Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X. Entonces A es un retracto de X si y solo si para cada espacio Y y cada función continua $f : A \longrightarrow Y$, existe una función continua $F : X \longrightarrow Y$ tal que $F|_A = f$.*

Demostración. Para probar la Necesidad, consideremos una retracción $r : X \longrightarrow A$. Sean Y un espacio topológico y $f : A \longrightarrow Y$ una función continua. Hagamos $F = f \circ r$. Entonces F es una función continua de X en Y. Dado que r es una retracción, $F(a) = (f \circ r)(a) = f(r(a)) = f(a)$, para cualquier $a \in A$. De donde $F|_A = f$.

Para ver la Suficiencia, sea $Y = A$ y $f = \mathrm{Id}_A$. Por hipótesis, existe una función continua $F : X \longrightarrow A$ tal que $F|_A(a) = \mathrm{Id}_A$. Veamos que F es una retracción. Sea $a \in A$. Entonces, $F(a) = F|_A(a) = \mathrm{Id}_A(a) = a$. Por lo tanto, A es un retracto de X. □

Proposición 2.4. *Sean X un espacio contráctil y A un subespacio de X. Si A es un retracto de X, entonces A es contráctil.*

Demostración. Sea $r : X \longrightarrow A$ una retacción. Como X es contráctil, existen un punto $x_0 \in X$ y una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tales que $H((x,0)) = x$ y $H((x,1)) = x_0$ para toda $x \in X$. Definamos la función $F : A \times [0,1] \longrightarrow A$ como $F((a,t)) = (r \circ H)((a,t))$ para cada $(a,t) \in A \times [0,1]$. Entonces F es una función bien definida y continua. Ahora, sea $a \in A$. Así,

$$\begin{aligned} F((a,0)) &= (r \circ H)((a,0)) \\ &= r(H((a,0))) \\ &= r(a) \\ &= a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F((a,1)) &= (r \circ H)((a,1)) \\ &= r(H((a,1))) \\ &= r(x_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto A es contráctil. □

Proposición 2.5. *Sean $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos familias de espacios topológicos tales que $Y_n \subset C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n \subset \mathcal{U}$ y $r : \mathcal{U} \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ es una retracción, entonces, para cada $y \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} Y_n$ es un retracto de $\{y_1\} \times \cdots \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$.*

Demostración. Sea $y \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$. Elegimos un número $m \in \mathbb{N}$ el cual es proporcionado por el Lema 1.22. Entonces $\{y_1\}\times\cdots\times\{y_m\}\times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n \subset \mathcal{U}$. Sea $z \in \{y_1\}\times\cdots\times\{y_m\}\times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$. Ahora, definimos la función $\varphi_z : \mathbb{N} \longrightarrow \{y_1, \ldots, y_m\} \cup \bigcup_{n=m+1}^{\infty} Y_n$ por,

$$\varphi_z(n) = \begin{cases} y_n, & \text{si } n \in \{1, \ldots, m\}, \\ \\ p_n(r(z)), & \text{si } n \geq m+1, \end{cases}$$

donde p_n es la n-ésima función proyección. Observemos que φ_z está bien definida y $\varphi_z \in \{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} Y_n$. De lo anterior, definimos una función

$$G_m : \{y_1\} \times \cdots \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n \longrightarrow \{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} Y_n$$

como $G_m(z) = \varphi_z$, para cada $z \in \{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$.

Afirmamos que la función G_m es continua y $G_m(z) = z$, para toda $z \in \{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} Y_n$. Con el fin de probar esto, sea $n \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que $p_n \circ G_m$ es continua. Si $n \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $p_n \circ G_m$ es igual a la constante y_n. En el caso en que $n \geq m+1$, $p_n \circ G_m = p_n \circ r$. En cualquiera de los casos, $p_n \circ G_m$ es continua para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que G_m es una función continua.

Para probar la otra parte, sea $z \in \{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} Y_n$. Con el fin de demostrar que $G_m(z) = z$, usando que $G_m(z) = \varphi_z$, es suficiente probar que $\varphi_z = z$. Notemos que las funciones φ_z y z tienen el mismo dominio. Para probar la otra parte de la igualdad de funciones, sea $n \in \mathbb{N}$. Si $n \in \{1, \ldots, m\}$, entonces $\varphi_z(n) = y_n = z(n)$. En el caso de que $n \geq m+1$,

$$\begin{aligned} \varphi_z(n) &= (p_n \circ r)(z) \\ &= p_n(r(z)) \\ &= p_n(z) \\ &= z(n). \end{aligned}$$

En cualquiera de los casos, se tiene que $\varphi_z(n) = z(n)$. De lo anterior, concluimos que, $\varphi_z = z$. Por lo que, $G_m(z) = z$.

Por lo tanto, $\{y_1\} \times \cdots \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} Y_n$ es un retracto de $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$. $\square$

Proposición 2.6. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Entonces para cada $\lambda \in \Lambda$, X_λ es un retracto de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.*

Demostración. Sean $\alpha \in \Lambda$ y $x \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Para todo $\lambda \neq \alpha$, definimos $Y_\lambda = \{x(\lambda)\}$, y para $\lambda = \alpha$, definimos $Y_\lambda = X_\alpha$. Ahora, por cada $a \in X_\alpha$, definimos la función

$$\varphi_a : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$$

por

$$\varphi_a(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda), & \text{si } \lambda \neq \alpha, \\ \\ a, & \text{si } \lambda = \alpha. \end{cases}$$

Notemos que $\varphi_a \in \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ para cada $a \in X_\alpha$.

Finalmente, definimos la función $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ por $i_\alpha(a) = \varphi_a$ para cada $a \in X_\alpha$. Entonces, $i_\alpha(X_\alpha)$ es un subespacio de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Probaremos que la función composición $i_\alpha \circ p_\alpha : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ es una retracción. Dado que i_α y p_α son continuas, $i_\alpha \circ p_\alpha$ es continua. Sea $a \in X_\alpha$. De donde

$$\begin{aligned} (i_\alpha \circ p_\alpha)(i_\alpha(a)) &= i_\alpha(p_\alpha(i_\alpha(a))) \\ &= i_\alpha(p_\alpha(\varphi_a)) \\ &= i_\alpha(\varphi_a(\alpha)) \\ &= i_\alpha(a). \end{aligned}$$

Así, $i_\alpha(X_\alpha)$ es un retracto de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ y $i_\alpha \circ p_\alpha$ es una retracción.
Por lo tanto, X_α es un retracto de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. □

2.2. RA, EA, RVA y EVA

En este capítulo probaremos que la propiedad de ser un retracto de vecindad absoluto es equivalente a la propiedad de ser un retracto de vecindad absoluto, asimismo veremos que la propiedad de ser un retracto de vecindad absoluto es equivalente a la propiedad de ser un extensor de vecindad absoluto. Para los retractos en un continuo, se tiene que éstos son retractos absolutos o retractos de vecindad absolutos siempre que el continuo sea un retracto absoluto o un retracto de vecindad absoluto, respectivamente. Para el producto topológico probaremos algunos resultados relacionados con retractos absolutos, retractos de vecindad absolutos y retractos de vecindad absoluto contráctil.
A continuación recordaremos la decinición de retracto de vecindad.

Definición 2.7. *Sean X un espacio topológico y A un subespacio de X. Decimos que A es un retracto de vecindad de X si existen un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una retracción $r : U \longrightarrow A$.*

Definición 2.8. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un retracto absoluto si para cada espacio Z y cada encaje $h : X \longrightarrow Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z, se tienen que $h(X)$ es un retracto de Z.*

Proposición 2.9. *Si C es un subconjunto convexo de un espacio vectorial normado, separable y no vacío V, entonces C es un retracto absoluto.*

Demostración. Sean Z un espacio topológico y $h : C \longrightarrow Z$ un encaje tal que $h(C)$ es cerrado en Z. Como $h^{-1} : h(C) \longrightarrow C$ es una función continua. Por el Teorema 1.33, existe una función continua $H : Z \longrightarrow Conv(C)$ tal que $H|_{h(C)} = h^{-1}$. Como C es convexo, $Conv(C) = C$. Sea $r : Z \longrightarrow h(C)$ definida como $r = h \circ H$. Entonces, r es una función continua tal que

$$\begin{aligned} r(h(c)) &= (h \circ H)(h(c)) \\ &= h(H(h(c))) \\ &= h(h^{-1}(h(c))) \\ &= h(c). \end{aligned}$$

Con esto r es una retracción. Por lo tanto, C es un retracto absoluto. □

Definición 2.10. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un extensor absoluto si para cada espacio Z, cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z y toda función continua $f : A \longrightarrow X$, existe una función continua $F : Z \longrightarrow X$ tal que $F|_A = f$.*

Definición 2.11. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un retracto de vecindad absoluto si para cada espacio Z y cada encaje $h : X \longrightarrow Z$ tal que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z, se tiene que $h(X)$ es un retracto de vecindad de Z.*

Definición 2.12. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un extensor de vecindad absoluto si para cada espacio Z, cada subconjunto cerrado y no vacío A de Z, y cada función continua $f : A \longrightarrow X$, existen un subconjunto abierto U de Z tal que $A \subset U$ y una función continua $F : U \longrightarrow X$ tal que $F|_A = f$.*

Proposición 2.13. *Las propiedades de ser un retracto absoluto y de ser un retracto de vecindad absoluto son propiedades topológicas.*

Demostración. Solo probaremos que la propiedad de ser un retracto de vecindad absoluto es una propiedad topológica ya que la prueba para un retracto absoluto es similar.

Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Supongamos que X es un retracto de vecindad absoluto. Sean Z un espacio topológico y $h : Y \longrightarrow Z$ un encaje tal que $h(Y)$ es un subconjunto cerrado de Z. Notemos que $h \circ f : X \longrightarrow Z$ es un encaje. Como

$$(h \circ f)(X) = h(f(X)) = h(Y),$$

$(h \circ f)(X)$ es un cerrado en Z. Dado que X es un retracto de vecindad absoluto, existe un abierto U de Z tal que $(h \circ f)(X)$ es un retracto de U. Así, dado que

$$(h \circ f)(X) = h(f(X)) = h(Y),$$

Y es un retracto de vecindad absoluto. □

Proposición 2.14. *Todo retracto absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. La demostración se sigue de la definición. □

Proposición 2.15. *Las propiedades de ser un extensor absoluto y de ser un extensor de vecindad absoluto son propiedades topológicas.*

Demostración. Probaremos que la propiedad de ser un extensor de vecindad absoluto es una propiedad topológica, ya que la prueba para el caso de ser un extensor absoluto es análoga.
Sean X un extensor de vecindad absoluto y Y un espacio homeomorfo a X. Sea $h : Y \longrightarrow X$ un homeomorfismo. Sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado no vacío de Z y $f : A \longrightarrow Y$ una función continua. Notemos que $h \circ f : A \longrightarrow X$ es una función continua. Como X es un extensor de vecindad absoluto, existen un subconjunto U de Z tal que $A \subset U$ y una función continua $g : U \longrightarrow X$ tal que $g|_A = h \circ f$. Definimos $F : U \longrightarrow Y$ como $F = h^{-1} \circ g$. Entonces, F es una función continua. Ahora, probaremos que $F|_A = f$.

Sea $a \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(a) &= (h^{-1} \circ g)(a) \\ &= h^{-1}(g(a)) \\ &= h^{-1}((h \circ f)(a)) \\ &= h^{-1}(h(f(a))) \\ &= (h^{-1} \circ h)(f(a)) \\ &= \mathrm{Id}|_Y(f(a)) = f(a). \end{aligned}$$

Con esto $F|_A = f$. Por lo tanto, Y es un extensor de vecindad absoluto. □

Proposición 2.16. *Sea X un espacio métrico y separable. Entonces:*

(1) X es un retracto absoluto si, y sólo si, X es un extensor absoluto.

(2) X es un retracto de vecindad absoluto si, y sólo si, X es un extensor de vecindad absoluto.

Demostración. Sólo probaremos (2), ya que la demostración de (1) es similar. Para probar la Necesidad de (2), sean Y un espacio, A un subconjunto cerrado no vacío de Y y $f : A \longrightarrow X$ una función continua. Dado que X un espacio métrico y separable, por el Teorema 1.36, existe un encaje $h^{'} : X \longrightarrow I^{\infty}$. Como I^{∞} es métrico y compacto, por el Teorema 1.31, existe un encaje isométrico $h^{''} : I^{\infty} \longrightarrow C(X, \mathbb{R})$ tal que $h^{''}(h^{'}(X))$ es un subconjunto cerrado de $conv(h^{''}(h^{'}(X)))$. Consideremos la siguiente función continua $h^{''} \circ h^{'} \circ f : A \longrightarrow h^{''}(h^{'}(X))$. Nótese que $h^{''} \circ h^{'} \circ f : A \longrightarrow C(X, \mathbb{R})$ sigue siendo continua. Por el Teorema 1.33, existe una función continua $\overline{f} : Y \longrightarrow C(X, \mathbb{R})$ tal que $\overline{f}|_A = h^{''} \circ h^{'} \circ f$ y $\overline{f}(Y) \subset conv(h^{''}(h^{'}(f(A))))$. Usando que

$$h^{''}(h^{'}(f(A))) \subset h^{''}(h^{'}(X)) \subset conv(h^{''}(h^{'}(X)))$$

y la definición de casco convexo de un conjunto, se tiene que

$$conv(h^{''}(h^{'}(f(A)))) \subset conv(h^{''}(h^{'}(X))).$$

Por lo que $\overline{f} : Y \longrightarrow conv(h^{''}(h^{'}(X)))$ sigue siendo continua.

Por otra parte, dado que X es un retracto de vecindad absoluto y $h^{''}(h^{'}(X))$ es un subconjunto cerrado en $conv(h^{''}(h^{'}(X)))$, existe una vecindad U de $h^{''}(h^{'}(X))$ en $conv(h^{''}(h^{'}(X)))$ y una retracción $r : U \longrightarrow h^{''}(h^{'}(X))$. Como

$$\overline{f}(A) = h^{''}(h^{'}(f(A))) \subset h^{''}(h^{'}(X)) \subset U,$$

entonces $(\overline{f})^{-1}(U)$ es una vecindad de A en Y. Sea

$$G = r \circ (\overline{f}|_{(\overline{f})^{-1}(U)}) : (\overline{f})^{-1}(U) \longrightarrow h^{''}(h^{'}(X)).$$

Notemos que G es continua. Veamos que $G|_A = h^{''} \circ h^{'} \circ f$. Para esto, sea $a \in A$. Entonces,

$$G(a) = r(\overline{f}(a)) = r(h^{''}(h^{'}(f(a)))) = h^{''}(h^{'}(f(a))).$$

Ahora, definamos las siguientes funciones

$$g_1 = (h^{''})^{-1}|_{h''(h'(X))} : h^{''}(h^{'}(X)) \longrightarrow h^{'}(X),$$

$$g_2 = (h^{'})^{-1} : h^{'}(X) \longrightarrow X$$

y

$$g = g_2 \circ g_1 : h^{''}(h^{'}(X)) \longrightarrow X.$$

Con lo anterior, definimos la función $F = g \circ G : f^{-1}(U) \longrightarrow X$, la cual es continua. Probaremos que $F|_A = f$. Sea $a \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(a) &= g(G(a)) \\ &= g_2(g_1(h^{''}(h^{'}(f(a))))) \\ &= (h^{''})^{-1}((h^{'})^{-1}(h^{''}(h^{'}(f(a))))) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto X es un extensor de vecindad absoluto. Para la Suficiencia, supongamos que X es un extensor de vecindad absoluto. Mostraremos que X es un retracto de vecindad absoluto. Sean Z un espacio y $h : X \longrightarrow Z$ un encaje tales que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Z. Usando la Proposición 2.15, $h(X)$ es un extensor de vecindad absoluto. Así, de la definición de extensor de vecindad absoluto, para la función identidad $Id : h(X) \longrightarrow h(X)$, existen un subconjunto abierto U de Z que contiene a $h(X)$ y una función continua $F : U \longrightarrow h(X)$ tal que $F|_{h(X)} = Id$. Entonces, F es una retracción y $h(X)$ es un retracto de U. Por lo que, $h(X)$ es un retracto de vecindad absoluto. Por lo tanto, X es un retracto de vecindad absoluto. $\square$

Proposición 2.17. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Todo subconjunto abierto y no vacío de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.

(2) Todo retracto de un retracto absoluto es un retracto absoluto.

(3) Todo retracto de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.

Demostración. Para ver que se cumple (1), supongamos que X un retracto de vecindad absoluto. Sean U un subconjunto abierto no vacío de X, Z un espacio y $h : U \longrightarrow Z$ un encaje tales que $h(U)$ es un subconjunto cerrado de Z. Entonces, $h^{-1} : h(U) \longrightarrow X$ es una función continua. Como X es un retracto de vecindad absoluto, por la Proposición 2.16, X es un extensor de vecindad absoluto. Así, dado que $h(U)$ es un subconjunto cerrado de Z, existen un subconjunto abierto V de Z tal que $h(U) \subset V$ y una función continua $F : V \longrightarrow X$ tal que $F|_{h(U)} = h^{-1}$. Como U es abierto en X, $W = F^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en V y también en Z. Veamos que $h(U) \subset W$. Sea $a \in U$. Entonces, $F(h(a)) = h^{-1}(h(a)) = a \in U$. Así $h(U) \subset W$.

Por otra parte, sea $r : W \longrightarrow h(U)$ definida por $r(w) = (h \circ F|_W)(w)$. Como h y F son continuas, r es continua. Para probar que r es una retracción, sea $h(u) \in h(U)$. Entonces,

$$\begin{aligned} r(h(u)) &= (h \circ F)(h(u)) \\ &= h(h^{-1}(h(u))) \\ &= h(u). \end{aligned}$$

Así, $h(U)$ es un retracto de W. Por lo tanto, U es un retracto de vecindad absoluto.

Ahora probaremos (3). La demostración de (2) es similar. Sean X un retracto de vecindad absoluto y Y un retracto de X. Sea $r : X \longrightarrow Y$ una retracción. Sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f : A \longrightarrow Y$ una función continua. Como X es un retracto de vecindad absoluto, por la Proposición 2.16, existen un abierto V de Z tal que $A \subset V$ y una función continua $g : V \longrightarrow X$ tal que $g|_A = f$. Hagamos $F = r \circ g : V \longrightarrow Y$. Entonces, f es una función continua. Veamos que $F|_A = f$. Sea $a \in A$. Así,

$$\begin{aligned} F(a) &= (r \circ g)(a) \\ &= r(g(a)) \\ &= r(f(a)) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Por lo que Y es un extensor de vecindad absoluto. Por la Proposición 2.16, Y es un retracto de vecindad absoluto.

□

Proposición 2.18. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Si $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es un retracto absoluto, entonces X_λ es un retracto absoluto para cada $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Supongamos que $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es un retracto absoluto. Sea $\alpha \in \Lambda$. Probaremos que X_α es un retracto absoluto. Consideremos la función i_α definida en la Proposición 1.21. Nuevamente, por la Proposición 1.21, $i_\alpha(X_\alpha)$ es un retracto de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Por la Proposición 2.17, (2), $i_\alpha(X_\alpha)$ es un retracto absoluto. De la Proposición 2.13 se sigue que, X_α es un retracto absoluto.

□

Proposición 2.19. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia numerable de espacios métricos, separables y no vacíos. Si cada X_n es un retracto absoluto, entonces $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto.*

Demostración. Por la Proposición 1.20, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico separable. Para probar que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto, por la Proposición 2.16, es suficiente ver que

$\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un extensor absoluto. Sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f : A \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ una función continua. Sea $m \in \mathbb{N}$. Consideremos $p_m \circ f : A \longrightarrow X_m$, la cual es una función continua. Dado que cada X_m es un retracto absoluto, por la Proposición 2.16, X_m es un extensor absoluto. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una función continua $f_m : Z \longrightarrow X_m$ tal que $f_m|_A = p_m \circ f$.
Por otra parte, definamos una familia de funciones de la siguiente manera. Sea $z \in Z$, definimos

$$\delta_z : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

por

$$\delta_z(n) = f_n(z).$$

Dado que $\delta_z(n) = f_n(z) \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\delta_z \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Finalmente, definamos la función

$$F : Z \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

por

$$F(z) = \delta_z.$$

Veamos que $F|_A = f$. Sea $a \in A$. Como $F(a) = \delta_a$, basta probar que $\delta_a = f(a)$. Nótese que el dominio de las funciones δ_a y $f(a)$ es $\mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\delta_a(n) = (f(a))(n)$. Esto se sigue de que

$$\begin{aligned} \delta_a(n) &= f_n(a) \\ &= (p_n \circ f)(a) \\ &= p_n(f(a)) \\ &= (f(a))(n). \end{aligned}$$

Concluimos que δ_a y $f(a)$ son iguales. Entonces, $F|_A = f$. Así, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un extensor absoluto. Utilizando nuevamente la Proposición 1.10, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto.

□

Proposición 2.20. *El producto de una familia finita de retractos de vecindad absolutos es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de retractos de vecindad absolutos. La prueba será por inducción matemática sobre n.

Primero probaremos que $X_1 \times X_2$ es un retracto de vecindad absoluto, por la Proposición 2.16, es suficiente probar que $X_1 \times X_2$ es un extensor de vecindad absoluto. Sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f : A \longrightarrow X_1 \times X_2$ una función continua. Consideremos las funciones continuas $\pi_1 \circ f : A \longrightarrow X_1$ y $\pi_2 \circ f : A \longrightarrow X_2$.

Como X_1 y X_2 son extensores de vecindad absoluto, por la Proposición 2.16, existen dos subconjuntos abiertos V_1 y V_2 de Z tales que $A \subset V_1$, $A \subset V_2$ y dos funciones continuas $f_1 : V_1 \longrightarrow X_1$, $f_2 : V_2 \longrightarrow X_2$ que cumplen que $f_1|_A = \pi_1 \circ f$ y $f_2|_A = \pi_2 \circ f$. Sean $V = V_1 \cap V_2$. Definimos la función $F : V \longrightarrow X_1 \times X_2$ como $F(v) = (f_1(v), f_2(v))$. Nótese que F es una función continua. Veamos que $F|_A = f$. Sea $a \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(a) &= (f_1(a), f_2(a)) \\ &= ((\pi_1 \circ f)(a), (\pi_2 \circ f(a))) \\ &= (\pi_1(f(a)), \pi_2(f(a))) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Así, $F|_A = f$. Por lo que $X_1 \times X_2$ es un extensor de vecindad absoluto. Por lo tanto $X_1 \times X_2$ es un retracto de vecindad absoluto.
Ahora, sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de retractos de vecindad absolutos. Por la hipótesis de inducción, $\prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i$ es un retracto de vecindad absoluto. Por la Proposición 1.13, $\left(\prod\limits_{i=1}^{n-1} X_i\right) \times X_n$ es homeomorfo a $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ y X_n es un retracto de vecindad absoluto. Por lo tanto, por la Proposición 2.13, $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ es un retracto de vecindad absoluto.

□

Proposición 2.21. *El producto de una familia a lo más numerable de espacios métricos, separables y no vacíos es un retracto absoluto si, y sólo si, cada factor es un retracto absoluto.*

Demostración. La prueba se sigue de la Proposición 2.18 y la Proposición 2.19.

□

Proposición 2.22. *Sea $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de espacios topológicos. Si $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ es un retracto de vecindad absoluto, X_λ es un retracto de vecindad absoluto para cada $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Sea $\alpha \in \Lambda$. Por la Proposición 2.13, X_α es un retracto absoluto de $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Por la Proposición 2.17, (3), X_α es un retracto de vecindad absoluto. □

Proposición 2.23. *Los espacios I^∞, $\mathbb{R}^\infty$, $\mathbb{R}^n$ y $[0,1]^n$, con $n \in \mathbb{N}$, son retractos absolutos.*

Demostración. Consideremos al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la norma usual (valor absoluto) y con la métrica inducida por la norma usual. Es conocido que $\mathbb{R}$ con la métrica usual es separable. El intervalo cerrado $[0,1]$ es considerado como subespacio de $\mathbb{R}$, el cual también es separable.

Probaremos que $[0,1]$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. Sean $a, b, t \in [0,1]$ tales que $a < b$ y $t > 0$. Probaremos que $(1-t)a + tb \in [0,1]$. Dado que $ta \leq tb \leq a + tb$, $ta \leq a + tb$. Así, $0 \leq a - ta + tb = (1-t)a + tb$. Para probar la otra desigualdad, como $t \leq 1$ y $b - a > 0$, $(b-a)t \leq b - a$. Dado que $b - a \leq 1 - a$, $(b-a)t \leq 1 - a$. Entonces, $(1-t)a + tb = -ta + tb + a \leq 1$. Por lo tanto $[0,1]$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$.

También nótese que $\mathbb{R}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$. Por el Corolario 1.12, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial topológico. Por la Proposición 2.9, $\mathbb{R}$ y $[0,1]$ son retractos absolutos. Por Proposición 2.17 inciso (4), $\mathbb{R}^\infty$ y $[0,1]^\infty$ son retractos absolutos. □

Proposición 2.24. *Todo retracto de vecindad de un retracto de vecindad absoluto es un retracto de vecindad absoluto.*

Demostración. Sean X un retracto de vecindad absoluto y A un retracto de vecindad de X. Para ver que A es un retracto de vecindad absoluto, sean Z un espacio, B un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f : B \longrightarrow A$ una función continua. Como X es un retracto de vecindad absoluto, por la Proposición 2.16, existen un abierto V de Z tal que $B \subset V$ y una función continua $g : V \longrightarrow X$ tal que $g|_B = f$.

Por otra parte, dado que A es un retracto de vecindad de X, existen un abierto U de X tal que $A \subset U$ y una retracción $r : U \longrightarrow A$. Por la continuidad de g, $W = g^{-1}(U)$ es un abierto de V. Dado de V es abierto en Z, W es un abierto en Z. Necesitamos probar que $B \subset W$. Sea $b \in B$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(b) &= g|_B(b) \\ &= f(b) \in A \subset U. \end{aligned}$$

Así, $b \in g^{-1}(U)$. De donde $B \subset W$. Finalmente, definimos la función $F : W \longrightarrow A$ como $F = r \circ g|_W$. Nótese que F es continua. Veamos que $F|_B = f$. Sea $b \in B$. Entonces,

$$\begin{aligned} F(b) &= (r \circ g|_W)(b) \\ &= r(g|_B(b)) \\ &= r(f(b)) \\ &= f(b). \end{aligned}$$

Concluimos que $F|_B = f$. Por lo tanto, usando la Proposición 2.16, A es un retracto de vecindad absoluto. □

Proposición 2.25. *Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia numerable de espacios métricos, separables y no vacíos. Entonces, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto de vecindad absoluto si, y sólo si, cada X_n es un retracto de vecindad absoluto y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que X_n es un retracto absoluto para cada $n \geq m$.*

Demostración. Para probar la Suficiencia, supongamos que cada X_n es un retracto de vecindad absoluto y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que X_n es un retracto absoluto para cada $n \geq m$. Por la Proposición 1.13, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es homeomorfo a $\prod_{n=1}^{m-1} X_n \times \prod_{n=m}^{\infty} X_n$. De la Proposición 2.19, $\prod_{n=m}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto. Entonces, de la Proposición 2.14, $\prod_{n=m}^{\infty} X_n$ es un retracto de vecindad absoluto. Por la Proposición 2.20, $\prod_{n=1}^{m-1} X_n$ es un retracto de vecindad absoluto. Entonces, por la Proposición 2.20, $\prod_{n=1}^{m-1} X_n \times \prod_{n=m}^{\infty} X_n$ es un retracto de vecindad absoluto.

Así, por la Proposición 2.13, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto de vecindad absoluto.

Para la Necesidad, supongamos que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto de vecindad absoluto. Sea $m \in \mathbb{N}$. Considerando la función i_m como en la Proposición 2.6, X_m es homeomorfo a $i_m(X_m)$. Por la Proposición 2.6, $i_m(X_m)$ es un retracto de $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. De la Proposición 2.17, (3), $i_m(X_m)$ es un retracto de vecindad absoluto. Así, por la Proposición 2.13, X_m es un retracto de vecindad absoluto.
Para la segunda parte sea $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.36, existe un encaje $h_n : X_n \longrightarrow I^{\infty}$.

Dado que I^{∞} es métrico, compacto y separable, por el Teorema 1.31, existe un encaje isométrico $h : I^{\infty} \longrightarrow C(I^{\infty}, \mathbb{R})$ tal que para cada subconjunto cerrado Y de I^{∞}, $h(Y)$ es cerrado en $conv(h(Y))$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n(X_n)$ es un cerrado en $conv(h(h_n(X_n)))$. Para simplificar la prueba, hagamos $C_n = conv(h(h_n(X_n)))$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.15, $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un cerrado en $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$. Por el Corolario 2.9, C_n es un retracto absoluto para toda $n \in \mathbb{N}$. Del Corolario 2.14, C_n es un retracto de vecindad absoluto para toda $n \in \mathbb{N}$.
Usando que cada h_n es un encaje sobre su imagen, se sigue de la Proposición 1.17 que, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es homeomorfo a $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$. Y dado que $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un retracto de vecindad absoluto, se tiene por la Proposición 2.13 que, $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un retracto de vecindad absoluto. De está manera, existen un abierto $\mathcal{U}$ de $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n) \subset \mathcal{U}$ y una retracción $r : \mathcal{U} \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$. Sea $y \in \prod_{n=1}^{\infty} h_n(X_n)$. Elegimos $m \in \mathbb{N}$ como en la Proposición 2.5. Por la Proposición 2.9, cada C_n es un retracto absoluto. Dado que, cada C_n es un subespacio métrico separable de $C(I^{\infty}, \mathbb{R})$ (ver 1.27) se sigue de la proposición 2.19 que, $\prod_{n=1}^{\infty} C_n$ y $\prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$ son retractos absolutos. Notemos que $\prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$ es homehomorfo a $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$. Por la Proposición 2.13, $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$ es un retracto absoluto. Por la Proposicioń 2.5, $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un retracto de $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} C_n$. Por la parte (2) de la Proposición 2.17, $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$ es un retracto absoluto. Dado que, $\{y_1\} \times \cdots \times \{y_m\} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$ es homeomorfo a $\prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$ y $\prod_{n=m+1}^{\infty} h_n(X_n)$ es homeomorfo a $\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$. Por la Proposición 2.13, $\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$ es un retracto absoluto. Finalmente, por la Proposición 2.18, X_n es un retracto absoluto, para toda $n \geq m$. □

El siguiente teorema es conocido como El Teorema de Extensión Homotópica de Borsuk (ver [9, Teorema 1.6.3, p.52]).

Teorema 2.26. *Sean X un retracto de vecindad absoluto, Z un espacio, A un subconjunto cerrado y no vacío de Z y $f : A \times [0,1] \longrightarrow X$ una función continua. Si existe una función continua $F_0 : Z \longrightarrow X$ tal que $F_0(a) = f((a,0))$ para toda $a \in A$, entonces existe una función continua $F : Z \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que para toda $z \in Z$, $F((z,0)) = F_0(z)$ y $F((a,t)) = f((a,t))$, para toda $a \in A$ y para toda $t \in [0,1]$.*

Proposición 2.27. *Sea X un espacio métrico, separable y no vacío. Entonces, X es un retracto absoluto si, y sólo si, X es un retracto de vecindad absoluto contráctil.*

Demostración. Para la Necesidad, supongamos que X es un retracto absoluto. Por la Proposición 2.14, X es un retracto de vecindad absoluto. Ahora, veamos que X es contráctil. Por la Proposición 1.36 existe, un encaje $g : X \longrightarrow I^\infty$. Del Teorema 1.31, existen un subespacio convexo C de $C(I^\infty, \mathbb{R})$ y un encaje $h : X \longrightarrow C$ de tal forma que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de C. Dado que X es un retracto absoluto, $h(X)$ es un retracto de C. Por la Proposición 2.4 y por el Lema 1.32, $h(X)$ es contráctil. Usando la Proposición 1.24, concluimos que X es contráctil.
Para la Suficiencia, supongamos que X es un retracto de vecindad absoluto contráctil. Por la Proposición 2.16, (1), es suficiente probar que X es un extensor absoluto. Sean Z un espacio, A un subconjunto cerrado no vacío de Z y $f : A \longrightarrow X$ una función continua.

Como X es contráctil, existen un punto $x_0 \in X$ y una función continua $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tales que para toda $x \in X$, $H((x,0)) = x$ y $H((x,1)) = x_0$. Definamos las siguientes funciones:

1. $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$
   $\phi(t) = 1 - t$;
2. $g : A \times [0,1] \longrightarrow X \times [0,1]$
   $g((a,t)) = (f(a), \phi(t))$;
3. $f' : A \times [0,1] \longrightarrow X$
   $f'((a,t)) = (H \circ g)(a,t)$,
4. $F_0 : Z \longrightarrow X$
   $F_0(z) = x_0$.

Obsérvese que ϕ, g, f' y F_0 son continuas. Ahora, para toda $a \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned} f'((a,0)) &= H((f(a), 1-0)) \\ &= H((f(a),1)) \\ &= x_0 \\ &= F_0(a). \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.26, existe una función continua $F : Z \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que para cada $(a,t) \in A \times [0,1]$, $F((a,t)) = f'((a,t))$. Sea $F_1 : Z \longrightarrow X$ dada por $F_1(z) = F((z,1))$.

Dado que $F_1 = F|_{Z\times\{1\}}$, F_1 es una función continua. Si $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} F_1(a) &= F((a,1)) \\ &= f^{'}((a,1)) \\ &= H((f(a),1-1)) \\ &= H((f(a),0)) \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Por lo que, $F_1|_A = f$. Así, X es un extensor absoluto. De la Proposición 2.16. (1), X es un retracto absoluto.

$\square$

Bibliografía

[1] Borsuk K., “Sur les rétractes”, Fund. Math. 17 (1931), 152-170.

[2] Borsuk K., “Über eine Klasse von Lokal Zusammenhängenden Räume”, Fund. Math. 19 (1932), 220-242.

[3] Borsuk K., “Theory of retracts”, Monografie Matematyczne Tom 44, Warzaw, 1967.

[4] Chapman T.A., “Lecture on Hilbert cube manifolds”, Regional Conference Series in Mathematics, No. 28, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.

[5] Ganea T., “Symmetrische potenzen topologischer Räume”, Math. Nachr. 11 (1954), 305-316.

[6] Hu S.T., “Theory of retracts”, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[7] Macías S., “Topics of continua”, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[8] Macías S., “ Un breve panorama de los hiperespacios de continuos”, Rev. Integr. Temas Mat. 23 (2005), no. 2, 1-13.

[9] Van Mill, J., “Infinite-dimensional topology”, North Holland Mathematical Library, Amsterdam,1989.

[10] Van Mill J., “The infinite-dimensional topology of function spaces”, North holland Mathematical Library, Amsterdam, 2001.

[11] Willard, S., “General topology”, Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y 11501.

[12] Wojdislawski M., “Rétracts absolus et hyperspaces des continus”, Fund. Math. 32 (1939), 184-192.