Universidad autónoma del Estado de México

Facultad de ciencias
Licenciatura en Matemáticas

Sobre pseudo-contractibilidad y conjuntos rígidos en continuos

T E S I S

Que para obtener el título de:
Matemático

presenta:

Roberto Sousa Carranza

Director de tesis:
Dr.Félix Capulín Pérez

Co-director:
Dr.Fernando Orozco Zitli

Campus El Cerrillo, Piedras Blancas, Toluca de Lerdo, Enero 2026

FACULTAD DE CIENCIAS
UAEM

Índice

1. Introducción

Sean X y Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Se dice que f es pseudo-homotópica a g si existen un continuo C, dos puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : X \times C \to Y$ tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. La función H es llamada una pseudo-homotopía entre f y g y el continuo C es llamado espacio factor. Un espacio topológico X se dice ser pseudo-contráctil si la función identidad Id_X es pseudo-homotópica a una función constante en X. Claramente, estos conceptos generalizan a los conceptos de homotopía y contractibilidad dados en la topología general.

Históricamente, R. H. Bing introdujo la noción de pseudo-contractibilidad, esto se ha transmitido por varios autores; sin embargo, fue W. Kuperberg el primer matemático que probó que las nociones de pseudo-contractibilidad y contractibilidad son diferentes (véase [23, Problem 118, p. 385]), se presentará un continuo pseudo-contráctil no contráctil. Por la naturaleza del ejemplo que W. Kuperberg dió, el cual, en apariencia es más complejo de escribir y similar a la curva del topólogo, pregunta lo siguiente: ¿Será la curva del topólogo pseudo-contráctil? En relación a esta pregunta, H. Katsuura probó en [17] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil con espacio factor él mismo. Adicionalmente, probó que si Y es un continuo indescomponible no degenerado tal que cada una de sus componentes es arco-conexa y X es un continuo que tiene arco-componentes densas, entonces X no es pseudo-contráctil con espacio factor Y.

Posteriormente, W. Debski probó en [14] que la curva del topólogo no es pseudo-contráctil. Ya en 2007, M. Sobolewsky presentó un resultado más general en [32], mostrando que el único continuo encadenable pseudo-contráctil es el arco. Este resultado obviamente abarca a la curva del topólogo y al pseudo-arco, entre algunos otros continuos, este último se ignoraba si pudiese ser pseudo-contráctil.

Otros trabajos previos relacionados al tema se pueden consultar en [2],[6],[7],[3],[10],[15] y [18].

Las propiedades de contractibilidad y pseudo-contractibilidad nos permiten determinar cuando un espacio no presenta cierto tipo de “agujeros” por lo que en topología es importante determinar qué tipo de espacios presentan "agujeros" o no. Sin embargo, la propiedad de no tener agujeros no es suficiente para determinar la (pseudo-)contractibilidad de un espacio. Por lo que un problema natural es determinar qué tipo de propiedades o qué tipos de conjuntos en los espacios impiden que estos sean (pseudo-)contráctiles.

Existen conjuntos que llamaremos conjuntos rígidos bajo homotopías, los cuales hacen que un continuo no sea (pseudo-)contráctil. Aquí nos enfocaremos principalmente en los llamados R^i-continuos $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y R^i-conjuntos $i \in \{1, 2, 3\}$, los cuales tienen la cualidad de mantenerse "fijos" bajo homotopías. Posteriormente, en el capítulo 5 explicaremos que significa esto.

Este trabajo tiene la finalidad de mostrar algunos resultados básicos relacionados a la pseudo-contractibilidad, también mostrar ejemplos y propiedades de ciertos "conjuntos rígidos" y la relación que guardan con la (pseudo-)contractibilidad, a saber, son conjuntos que impiden que un espacio sea (pseudo-)contráctil.

2. Preliminares

Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto de un espacio topológico X que es un continuo, es llamado un *subcontinuo* de X. Un espacio topológico es llamado *conexo por continuos* si para cualesquiera dos puntos, estos están contenidos en un subcontinuo del espacio. A lo largo de este trabajo el intervalo unitario cerrado $[0,1]$ será denotado por I. Un *arco* se entiende como la imagen homeomorfa de I. Si A es un arco y $h : I \to A$ es un homeomorfismo, entonces a $h(0) = p$ y $h(1) = q$ se les llama *puntos finales del arco* y comúnmente se dice que A es un arco que va de p a q. También se suele abusar del lenguaje y se dice que el mismo homemorfismo es un arco que va de p a q. Muchas veces usaremos la notación pq para escribir el arco que va de p a q. Una *trayectoria* que va de p a q es una función continua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Nótese que el homeomorfismo que define un arco es una trayectoria, pero una trayectoria no siempre determina un arco. Si para cualesquiera dos puntos de un espacio, se puede definir una trayectoria, entonces el espacio es llamado *conexo por trayectorias.* Diremos que un espacio es *arco-conexo* si para cualesquier par de puntos p y q es posible definir un arco de p a q. Se sabe que si el espacio X es de Hausdorff y conexo por trayectorias, entonces es arco-conexo. Un continuo X es *unicoherente* si para cada par de subcontinuos $A, B \in X$ tales que $X = A \cup B$, se cumple que $A \cap B$ es conexo. Se dice que un continuo X es *hereditariamente unicoherente* si cada subcontinuo de X es unicoherente. Un continuo X es un *dendroide* si es hereditariamente unicoherente y arco-conexo.

Definición 1. Dado $x \in X$ y $A \subseteq X$ se dirá que x es un:

1. *Punto interior* de A si existe un abierto U tal que $x \in U \subset A$.

2. *Punto frontera* si para todo abierto U tal que $x \in U$ $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \setminus A \neq \emptyset$.

3. *Punto de adherencia* de A si para todo abierto U tal que $x \in U$ $A \cap U \neq \emptyset$.

Así, el conjunto de los puntos interiores de A (el *interior de* A) se denotará por $\operatorname{int}(A)$, el conjunto de puntos frontera (la *frontera de* A) se denotará por $\operatorname{Fr}(A)$ y el conjunto de puntos de adherencia de A (la *cerradura* *de A*) se denotará por $\overline{A}$.

Definición 2. Sean X, Y espacios topológicos, definimos el conjunto $C(X, Y)$ como el *conjunto de todas las funciones continuas* que van de X a Y; es decir, $C(X, Y) = \{f : X \to Y |\ f \text{ es continua}\}$.

Al conjunto $C(X, Y)$ se le dota comúnmente de la topología compacto-abierta. Se sabe que si Y es métrico y X es compacto, entonces esta topología coincide con la topología de la convergencia uniforme (la topología generada por la métrica del supremo).

Por cada $y \in Y$ denotaremos por c_y a la *función constante* de X a Y con único valor y.

Definición 3. Sea X un continuo, un *hiperespacio* de X es una colección de subconjuntos cerrados de X.

Estos son algunos de los hiperespacios más comunes:

- $2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es no vacío y cerrado}\}$ se conoce como el hiperespacio de subconjuntos cerrados de X.
- $C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$ es conocido como el hiperespacio de subcontinuos de X.
- $C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$, con $n \in \mathbb{N}$.
- $C_\infty(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene una cantidad finita de componentes}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(X)$.
- $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$, con $n \in \mathbb{N}$, llamado el n-ésimo producto simétrico de X.

Definición 4. Si $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$, definimos y denotamos a la *nube* de radio ε con centro en A como

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

A veces también llamado, la *vecindad* abierta de radio ε con centro en A.

En 2^X podemos definir la siguiente función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(A,B) = \sup\{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\varepsilon, A)\}.$$

La función H así definida es una métrica para 2^X la cual es llamada la *métrica de Hausdorff* (Ver [27, Definition 4.1, p. 52]).

El siguiente resultado muestra algunos conjuntos abiertos y cerrados en 2^X que son muy usados dentro de la teoría de hiperespacios.

Teorema 1. *Sean X un continuo y $A \subseteq X$. Consideremos las siguientes familias*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\},$$
$$D(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$
$$\phi(A) = \{B \in 2^X : A \subseteq B\}.$$

Entonces lo siguiente se cumple:

1. *Si A es abierto, entonces $\Gamma(A)$ y $D(A)$ son abiertos en 2^X,*

2. *Si A es cerrado, entonces $\Gamma(A)$, $D(A)$ y $\phi(A)$ son cerrados en 2^X.*

Observación 2. *Al conjunto $\Gamma(A)$ se le denota también por 2^A.*

Dado un continuo X, se definen las funciones $C^*(X) : C(X) \to C(C(X))$ y $2^* : 2^X \to 2^{2^X}$ como

$$C^*(A) = C(A) \text{ para cada } A \in C(X)$$

$$2^*(A) = 2^A \text{ para cada } A \in 2^X.$$

Sea (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos compactos no vacíos. Una función $F : X \to 2^Y$ es *semicontinua superiormente en el punto $x_0 \in X$* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x_0, x) < \delta$, entonces $F(x) \subset N(\varepsilon, F(x_0))$. La función F es *semicontinua superiormente* si es semicontinua superiormente para cada punto de X.

Teorema 3. *[27, Theorem 15.2 p. 514] Para cualquier continuo X, C^* y 2^* son semicontinuas superiormente.*

Teorema 4. *[27, Theorem 15.3 p. 515] Si X es un continuo con métrica d, entonces 2^* es continua.*

Demostración. Como 2^X es métrico, para que 2^* sea continua es suficiente demostra que si $A \in 2^X$ y $\{A_n\}$ es una sucesión en 2^X que converge a A, entonces la sucesión de imagenes $\{2^*(A_n)\} = \{2^{A_n}\}$ converge a 2^A. Para mostra esto último vamos a demostrar primero que cualquier subsucesión convergente $\{2^*(A_{n_j})\}$ de $\{2^*(A_n)\}$ converge a $2^A = 2^*(A)$.

Sean $A \in 2^X$ y $\{A_n\}$ una sucesión en 2^X que converge a A y $\{2^*(A_{n_j})\}$ una subsucesión de $\{2^*(A_n)\}$ que converge a $\mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Se mostrará que $\mathcal{A} = 2^*(A)$. Por el Teorema 3, $\mathcal{A} \subseteq 2^*(A)$.

Para probar la otra contención, sean $B \in 2^*(A)$ y $\varepsilon > 0$. Como $\{A_{n_j}\}$ converge a A y $\{2^*(A_{n_j})\}$ converge a $\mathcal{A}$, existe un número natural $k = n_j$ para algún j tal que

$$A \subseteq N(\varepsilon/3, A_k) \tag{1}$$

$$2^*(A_k) \subseteq N(\varepsilon/3, \mathcal{A}) \tag{2}$$

Como B es un conjunto compacto no vacío y $\mathcal{C} = \{B_{\varepsilon/3}(x) : x \in B\}$ es una cubierta abierta de B, existe un conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq B$ tal que $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\varepsilon/3}(x_i)$; esto hace que $H(B, F) < \varepsilon/3$. Entonces, por (1), existe $y_i \in A_k$ tal que $d(x_i, y_i) < \varepsilon/3$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Sea $F_k = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, es fácil ver que $H(F, F_k) < \varepsilon/3$. Como $F_k \in 2^*(A_k)$, por (2) que existe $L \in \mathcal{A}$ tal que $H(F_k, L) < \varepsilon/3$.

Ahora, como $H(B, L) \leq H(B, F) + H(F, F_k) + H(F_k, L) < \varepsilon$, como $\mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de 2^{2^X} y ε es arbitrario, se sigue que $B \in \mathcal{A}$. Esto prueba que $2^*(A) \subseteq \mathcal{A}$ y como $\mathcal{A} \subseteq 2^*(A)$, $2^*(A) = \mathcal{A}$.

Finalmente si $\{2^*(A_n)\}$ no converge a $2^*(A)$ existiría una subsucesión que no converge a $2^*(A)$ lo cual no es posible por lo demostrado anteriormente. Se concluye que 2^* es continua en A. $\square$

Lema 5. *[26, Teorema 18.3 (Lema del Pegado), p. 123] Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X. Sea $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ funciones* *continuas. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, entonces la función $h : X \to Y$ definida como*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in A, \\ g(x) & si\ x \in B \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ cerrado. Como f y g son continuas, $f^{-1}(U)$ y $g^{-1}(U)$ son conjuntos cerrados en A y B respectivamente. Como

$$h^{-1}(U) \cap A = (h|_A)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

y

$$h^{-1}(U) \cap B = (h|_B)^{-1}(U) = g^{-1}(U)$$

Dado que A y B son cerrados en X, $h^{-1}(U) \cap A$ y $h^{-1}(U) \cap B$ son cerrados. Entonces su unión

$$(h^{-1}(U) \cap A) \cup (h^{-1}(U) \cap B) = h^{-1} \cap (A \cup B) = h^{-1}(U)$$

es un conjunto cerrado, al ser la unión finita de conjuntos cerrados. Por lo tanto, la función h es continua. $\square$

Teorema 6. *[28, 5.7 Boundary Bumping Theorem III, p. 75] Sean X un continuo y E un subconjunto propio de X. Si K es una componente de E, entonces:*

- *Si E es abierto, $\overline{K} \setminus E \neq \emptyset$.*
- *Si E es cerrado, $K \cap \overline{(X \setminus E)} \neq \emptyset$.*

3. Pseudo-homotopías

¿Qué estudia un topólogo? La respuesta se basa casi siempre en la idea intuitiva de “deformar” objetos y comienza uno explicando con un ejemplo: para nosotros una taza y una dona son “iguales” y explicamos en qué sentido son “iguales”. Les decimos que se imaginen que ambos objetos están hechos de plastilina o de algún material que sea moldeable. Entonces comentamos que los objetos serán “iguales” si podemos deformar uno en el otro, en nuestro ejemplo, deformar la dona hasta obtener la taza, bajo la restricción que no podemos romper el material y después pegarlo. Si podemos hacer esto entonces los consideramos como lo “mismo”. Si bien nos va, los convencemos y vivimos felices. Claro, esta no es la única forma de describir o decir cuando dos objetos de cierta manera son “iguales”. La formalización de lo aquí escrito, se centra en el concepto de homotopía o algunas variantes como la de pseudo-homotopía (en esta última está basada nuestro trabajo). Comencemos entonces con nuestro estudio de lo que a nuestro parecer es básico sobre el tema.

Lo siguiente es la definición tradicional de homotopía.

Definición 5. Sean X y Y espacios topológicos y $f, g \in C(X, Y)$. Se dice que f es *homotópica* a g (o que f y g son *homotópicas*), si existe una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Esto se denota como $f \simeq g$. La función H es llamada una *homotopía* entre f y g.

Definición 6. Sean X y Y espacios topológicos y $f, g \in C(X, Y)$. Se dice que f es *pseudo-homotópica* a g (o que f y g son *pseudo-homotópicas*) si existen un continuo C, puntos $a, b \in C$ $a \neq b$ y una función $H : X \times C \to Y$ continua tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$ para todo $x \in X$. Esto se denota como $f \simeq_C g$. La función H es llamada una *pseudo-homotopía* entre f y g con *espacio factor* C.

De las Definiciones 5 y 6 es fácil ver que si dos funciones son homotópicas, entonces son pseudo-homotópicas. En el capítulo 4 se presenta un ejemplo en donde se muestra que no toda homotopía es una pseudo-homotopía.

De manera natural se puede plantear la siguiente pregunta.

Pregunta 1. ¿Bajo qué condiciones sobre el espacio factor o sobre los espacios soporte en donde están definidas funciones pseudo-homotópicas, estas resultan ser homotópicas?

Existen algunas respuestas parciales a esta pregunta. Por ejemplo, si $f, g \in C(X, Y)$ y estas son pseudo-homotópicas con espacio factor arco-conexo, no importando como sean X y Y, f y g son homotópicas.

Prosigamos a enunciar y probar este resultado.

Teorema 7. *Sean $f, g \in C(X, Y)$. Si f y g son pseudo-homotópicas con espacio factor arco-conexo, entonces f y g son homotópicas.*

Demostración. Como f y g son pseudo-homotópicas con factor arco-conexo, existen un continuo arco-conexo C, puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : X \times C \to Y$ tal que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$. Por lo que, existe un arco $\alpha : I \to C$ que va de a a b; esto es $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$. Considérese $\gamma : X \times I \to X \times C$ definida por $\gamma(x, t) = (x, \alpha(t))$, esta función es continua pues la identidad ($Id_X : X \to X$) y α son continuas. Sea $G : X \times I \to X$ definida por $G(X, t) = (H \circ \gamma)(x, t) = H(x, \alpha(t))$. Dado que $G = H \circ \gamma$ y H y γ son continuas, G es continua. Nótese que $G(x, 0) = H(x, \alpha(0)) = H(x, a) = f(x)$ y $G(x, 1) = H(x, \alpha(1)) = H(x, b) = g(x)$. Así, G es una homotopía. Por lo tanto, f y g son homotópicas. □

En general podemos dar el siguiente resultado que incluye tener arcos implícitamente en el espacio factor.

Teorema 8. *Sean $f, g \in C(X, Y)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Las funciones f y g son homotópicas,*
2. *Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con cualquier continuo como espacio factor,*
3. *Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con algún continuo localmente conexo como espacio factor,*
4. *Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con cualquier continuo arco-conexo como espacio factor,*

5. *Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con algún continuo arco-conexo como espacio factor,*

6. *Las funciones f y g son pseudo-homotópicas con algún espacio factor tal que a, b en él pueden ser unidos por un arco (donde a y b son como en la definición de pseudo-homotopía).*

Otra respuesta parcial a la pregunta anterior es la siguiente. Por ejemplo, si Y es un espacio ANR y X es un espacio métrico compacto, entonces cualesquiera dos funciones pseudo-homotópicas $f, g \in C(X, Y)$ resultan ser homotópicas. La prueba se basa, entre otras cosas, en el hecho de que el espacio $C(X, Y)$ es ANR si y sólo si Y es ANR.

Otro ejemplo en donde cualesquiera dos funciones pseudo-homotópicas resultan ser homotópicas se da en el capítulo 6.

Es importante destacar que aún queda trabajo por realizar en torno a la pregunta anterior. De lo dicho anteriormente, se puede plantear lo siguiente:

Pregunta 2. Si X y Y son dendroides, ¿será cierto que si $f, g \in C(X, Y)$ son pseudo-homotópicas entonces son homotópicas?

Otro problema importante es determinar espacios específicos y funciones, también específicas entre ellos, de tal forma que estas resulten ser pseudo-homotópicas o que al ser pseudo-homotópicas estas tengan una propiedad adicional. En este sentido, en [2], se prueba la existencia de una función continua del conjunto de Cantor sobre el pseudo-arco que es pseudo-homotótopica a una constante. Más aún, en [18], se muestra que toda función continua del conjunto de Cantor al pseudo-arco es pseudo-homotópica a una función constante con espacio factor el mismo pseudo-arco y en [15], se muestra que si X es el pseudo-arco y $f, g \in C(X, X)$ son pseudo-homotópicas y f es uno a uno, entonces $f = g$.

En base a esto último podemos formular la siguiente pregunta.

Pregunta 3. Dados dos espacios topológicos X y Y, ¿qué tipo de funciones resultan ser (pseudo-)homotópicas? Resulta particularmente interesante dar una respuesta para las clases de funciones abiertas y de funciones monótonas.

Por otra parte, se puede definir en $C(X, Y)$ una relación, que denotaremos por $\simeq_*$, dada de la siguiente manera: si $f, g \in C(X, Y)$, diremos que f está relacionada con g, y que escribiremos por $f \simeq_* g$, si f y g son pseudo-homotópicas. Mostraremos que la relación $\simeq_*$ es de equivalencia. Cada clase es llamada clase de pseudo-homotopía.

Teorema 9. *La relación $\simeq_*$ es de equivalencia.*

Demostración. Primero, para demostrar que es una propiedad reflexiva, considérese $f \in C(X, Y)$ y C cualquier continuo. Se puede definir $H : X \times C \to Y$ como $H(x, c) = f(x)$. Claramente, H es continua, y para cualquier par de puntos $a, b \in C$, $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = f(x)$.

Ahora, para demostrar que es transitiva, considérese $f, g, h \in C(X, Y)$ tales que $f \simeq_* g$ y $g \simeq_* h$, esto quiere decir que existen continuos C_1, C_2, puntos $a_1, b_1 \in C_1$ y $a_2, b_2 \in C_2$ y funciones continuas $H_1 : X \times C_1 \to Y$, $H_2 : X \times C_2 \to Y$ que cumplen con la definición de pseudo-homotopía. Es posible considerar, sin pérdida de generalidad que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Como $\{b_1\} \subseteq C_1$ es un cerrado, es posible considerar la función $k : \{c\} \to C_1$ dada por $k(b_1) = a_1$. Sea entonces, $C = C_1 \cup_k C_2$ el espacio de adjunción determinado por la unión disjunta $C_1 \cup C_2$ y la función k. Ahora se define la función $H : X \times C \to Y$ como

$$H(x, \hat{c}) = \begin{cases} H_1(x, c) \text{ si } \hat{c} \in \mathcal{C}_1 \setminus \{\{b_1, a_2\}\} \\ H_2(x, c) \text{ si } \hat{c} \in \mathcal{C}_2 \setminus \{\{b_1, a_2\}\} \\ H_1(x, b_1) = H_2(x, a_2) \text{ si } c = \{b_1, a_2\} \end{cases}$$

donde $\mathcal{C}_1 \setminus \{\{b_1, a_2\}\} = \{\{c\} : c \in C_1 \setminus \{b_1\}\}$ y $\mathcal{C}_2 \setminus \{\{b_1, a_2\}\} = \{\{c\} : c \in C_2 \setminus \{a_2\}\}$. Notemos que H está bien definida, pues si $\hat{c} \in (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \setminus \{\{a_2, b_1\}\}$, entonces $\hat{c} = \{c\}$ y si $\hat{c} = \{b_1, a_2\}$, entonces $H(x, \hat{c}) = g(x)$. Por el Lema del pegado, H es continua. Además, $H(x, \hat{a_1}) = H_1(x, a_1) = f(x)$ y $H(x, \hat{b_2}) = H_2(x, b_2) = h(x)$ para toda $x \in X$.

Por último, la prueba de que $\simeq_*$ es reflexiva. Sean $f, g \in C(X, Y)$ tales que $f \simeq_* g$, entonces existe C continuo, $a, b \in C$ y $H : X \times C \to y$ continua tales que $H(x, a) = f(x)$ y $H(x, b) = g(x)$. Dado que la asignación de a y b es indistinta, es posible considerar una función $G : X \times C \to Y$ como la misma función H y así tener que $f \simeq_* g$. Con lo anterior, se puede concluir que $\simeq_*$ es una relación de equivalencia. □

Los siguientes resultados tienen sus análogos para homotopías, (ver [22, 54. Homotopy. Contractibility, p. 360]).

Teorema 10. *Sean X, Y, Z y W espacios topológicos, $f, g \in C(X,Y)$, $h \in C(Y,Z)$ y $k \in C(W,X)$. Si $f \simeq_* g$, entonces $h \circ f \simeq_* h \circ g$ y $f \circ k \simeq_* g \circ k$.*

Demostración. Como $f \simeq_* g$, existen un continuo C, dos puntos $a, b \in C$ y una función continua $H : X \times C \to Y$ tales que $H(x,a) = f(x)$ y $H(x,b) = g(x)$. Primero, defínase una función $G : X \times C \to Y$ dada por $G(x,c) = h(H(x,c))$. Esta función es continua, pues h y H lo son. Nótese que $G(x,a) = h(H(x,a)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x)$, análogamente, $G(x,b) = (h \circ g)(x)$. Ahora, considérese la función $K : W \times C \to X \times C$ definida como $K(w,c) = (k(w), c)$, esto para definir $F : W \times C \to Y$ como $F = H \circ K$, que al ser composición de funciones continuas, es continua. Como $F(w,a) = (H \circ K)(w,a) = H(K(w,a)) = H(k(w),a) = f(k(w),a) = (f \circ k)(w)$, y también $F(w,n) = (g \circ k)(w)$, entonces $f \circ k \simeq_* g \circ k$.

□

Teorema 11. *Sean X, Y y Z espacios topológicos, $f, f' \in C(X,Y)$ y $g, g' \in C(Y,Z)$. Si $f \simeq_* f'$ y $g \simeq_* g'$, entonces $g \circ f \simeq_* g' \circ f'$.*

Demostración. Como $f \simeq_* f'$ y $g \simeq_* g'$, entonces existen dos continuos C_1 y C_2, puntos $a_1, b_1 \in C_1$ y $a_2, b_2 \in C_2$ y dos funciones continuas $H_1 : X \times C_1 \to Y$ y $H_2 : Y \times C_2 \to Z$ que cumplen que $H_1(x, a_1) = f(x)$ y $H_2(x, b_1) = f'(x)$ para todo $x \in X$ y $H_2(y, a_2) = g(y)$ y $H_2(y, b_2) = g'(y)$ para todo $y \in Y$. Considérese el continuo $C = C_1 \times C_2$. Defínase la función $P : X \times C \to Y \times C_2$ como $P(x,c) = (H_1(x,c_1), c_2)$, para cada $c = (c_1, c_2)$ con $c_1 \in C_1$ y $c_2 \in C_2$. Ahora, sea $G : X \times C \to Z$ una función definida como $G = H_2 \circ P$, como H_2 y P son continuas, G lo es. Además, para los puntos $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ en C, $G(x, \mathbf{a}) = H_2(P(x,(a_1,a_2))) = H_2(H_1(x,a_1),a_2) = H_2(f(x),a_2) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, análogamente se llega a que $G(x, \mathbf{b}) = (g' \circ f')(x)$. Por lo que se concluye que $g \circ f \simeq_* g' \circ f'$. □

Teorema 12. *Sean $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos y $f, g \in C\left(X, \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right)$. Las funciones f, g son pseudo-homotópicas si y sólo si $\pi_j \circ f$ es pseudo-homotópica a $\pi_j \circ g$, para cada $j \in \mathbb{N}$, donde π_j representa cada función proyección $\pi_j : \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n \to Y_j$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Dado que $g \simeq_* f$, el Teorema 10 garantiza que $\pi_j \circ f \simeq_* \pi_j \circ g$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

$\Leftarrow$) Sean $f, g \in C\left(X, \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right)$ tales que $\pi_j \circ f \simeq_* \pi_j \circ g$ para cada $j \in \mathbb{N}$. De esta manera, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un continuo C_j, dos puntos $a_j, b_j \in C_j$ y una función continua $H_j \times C_j \to Y_j$ tal que $H_j(x, a_j) = \pi_j \circ f(x)$ y $H_j(x, b_j) = \pi_j \circ g(x)$. Considérese el continuo $C = \prod_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Sean $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en donde $a_n, b_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es posible definir la función $H : X \times C \to \prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ como $H(x, c) = \{H_n(x, c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esta función es continua, pues cada H_n lo es. Además, $H(x, \mathbf{a}) = (H_n(x, a_n))_{n\in\mathbb{N}} = ((\pi_n \circ f)(x))_{n\in\mathbb{N}} = f(x)$ y $H(x, \mathbf{b}) = g(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, f y g son pseudo-homotópicas con espacio factor el continuo C. $\square$

Cabe señalar que si la familia de espacios topológicos $\{Y_j\}_{j\in J}$ es no numerable, siempre se cumple que si $f, g \in C\left(X, \prod_{j\in J} Y_j\right)$ son pseudo-homotópicas entonces $\pi_j \circ f$ es pseudo-homotópica a $\pi_j \circ g$, para cada $j \in J$ y la prueba es prácticamente lo mismo que se usa para la implicación $\Rightarrow$) del teorema anterior.

4. Pseudo-contractibilidad

El concepto de contractibilidad, desde su definición ha inquietado a diversos sectores de la matemática y ha contribuido al desarrollo de algunas áreas de ella; de tal manera que ha sido incluido en la mayoría de los libros de topología y se han escrito un número considerable de artículos relacionados a este concepto. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar una variante de la contractibilidad, llamada pseudo-contractibilidad y probar algunos resultados relacionados a este último y la relación que guarda con otras estructuras y propiedades topológicas. Comencemos entonces con la definición usual de espacio contráctil.

Definición 7. Un espacio topológico X se dice que es *contráctil* si la función identidad $Id_X : X \to X$ es homotópica a una función constante c_{x_0} para algún $x_0 \in X$. Es común llamar a la homotopía *contracción* y a x_0 se le suele llamar *punto de contracción* del espacio X. A veces se abusa del lenguaje y de la notación y se usa el valor constante x_0 en lugar de la función constante c_{x_0}.

Teorema 13. *Sea X un espacio topológico. Si X es contráctil, entonces es conexo por trayectorias.*

Demostración. Como X es contráctil, existe una homotopía $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = c$ para todo $x \in X$ y para algún $c \in X$. Mostraremos que para cada $p \in X$, existe una trayectoria que va de p a c. Defínase $f_p : I \to X$ por $f_p = H|_{\{p\}\times I}$; esto es, $f_p(t) = H(p, t)$. Claramente f_p es continua, pues H es continua y $f_p(0) = H(p, 0) = p$ y $f_p(1) = H(p, 1) = c$. Ahora, si $p, q \in X$, entonces la función $\alpha : I \to X$ definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} f_p(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f_q(-2t + 2), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

es una trayectoria que va de p a q. □

Definición 8. Un espacio topológico X se dice que es *pseudo-contráctil* si la función identidad Id_X es pseudo-homotópica a una función constante. Al igual que en la definición de contracción, a la homotopía que hace esto es llamada *pseudo-contracción*.

Definición 9. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que X es *contráctil con respecto a* Y si cada función continua $f : X \to Y$ es homotópica a una función constante.

Definición 10. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que X es *pseudo-contráctil con respecto a* Y si cada función continua $f : X \to Y$ es pseudo-homotópica a una función constante.

A continuación mostraremos el ejemplo dado por W. Kuperberg en el cual se muestra que las nociones de pseudo-contractibilidad y contractibilidad son diferentes. Por cierto, este ejemplo nunca fue publicado por él. Comencemos diciendo que el ejemplo aquí presentado es una modificación al dado por W. Kuperberg. Al final daremos una explicación en donde radica el cambio. Prosigamos entonces, dando la descripción del ejemplo para después explicar de manera breve sus características. Veremos que el continuo no es conexo por trayectorias, lo que lo hará no contráctil, pues es sabido por el Teorema 13 que todo espacio contráctil es conexo por trayectorias. Finalmente se mostrará que este es pseudo-contráctil.

Ejemplo 1 (W. Kuperberg)**.** *Existe un continuo X tal que es pseudo-contráctil pero no es contráctil.*

Demostración. Comencemos definiendo el continuo. Sean $\mathbb{C}$ el plano complejo, $X_0 = \left\{\frac{t+2}{t+1}e^{it} : t \in [0,\infty)\right\}$ una espiral que se aproxima al círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Definamos $X = X_0 \cup D^2$ (ver Figura 1).

X no es conexo por trayectorias. En efecto, veamos que si $\alpha : I \to X$ es una trayectoria tal que $\alpha(0) \in D^2$, entonces $\alpha^{-1}(D^2) = I$. Para esto, notemos primero que D^2 es cerrado en X y como α es continua, entonces $\alpha^{-1}(D^2)$ es cerrado en I, y es no vacío ya que $0 \in \alpha^{-1}(D^2)$. Probaremos ahora que $\alpha^{-1}(D^2)$ es abierto en I. Sean $(x_0, y_0) \in D^2$ y $t_0 \in I$, tal que $\alpha(t_0) = (x_0, y_0) \in D^2$. La familia $\mathcal{U}_{t_0} = \{B(\alpha(t_0), \delta) \cap X : \delta > 0\}$ es una base local de vecindades para $\alpha(t_0)$ en X y $\mathcal{V}_{t_0} = \{B(t_0, \delta), \varepsilon) \cap I : \varepsilon > 0\}$ es una base local de vecindades para t_0 en I. Sea $U \in \mathcal{U}_{t_0}$, de la continuidad de α y de la definición de V_{t_0} existe $V \in \mathcal{V}_{t_0}$ tal que V es conexo y $\alpha(V) \subset U$. Ahora, como V es conexo en I, entonces $\alpha(V)$ es un conexo en X que contiene a $\alpha(t_0)$. Lo cual implica que $\alpha(V) \subset D^2$ (ver 2). De aquí, $t_0 \in V \subset \alpha^{-1}(D^2)$. Por lo tanto, $\alpha^{-1}(D^2)$ es abierto en I. De la conexidad de I, los únicos abiertos y cerrados de I son él mismo y el vacío. Lo cual implica que $\alpha^{-1}(D^2) = I$, lo que significa que $\alpha(I) \subseteq D^2$. Lo que lleva a que no es posible unir un punto de D^2 con un punto de la espiral X_0 por medio de una trayectoria. Por lo tanto, X no es conexo por trayectorias, lo que implica que X no es contráctil.

Finalmente mostraremos que el espacio X es pseudo-contráctil. Para esto tenemos que encontrar un continuo C, puntos $a, b \in C$, un punto $z_0 \in X$ y una función continua $H : X \times C \to X$, $H(z, a) = z$ y $H(z, b) = z_0$ para todo $z \in X$. (ver 2)/

Construyamos el continuo C. Sean $C = X_0 \cup S^1 \cup X_1,\ a(0, 0)$ y $b(0, 2)$, donde $X_1 = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) = 0 \text{ y } 0 \leq Re(z) \leq 1\}$. Definamos la homotopía $H : X \times C \to X$ como sigue:

1. $H\left(\frac{t+2}{t+1}e^{it}, \frac{t'+2}{t'+1}e^{it'}\right) = \frac{t+t'+2}{t+t'+1}e^{i(t+t')}$ si $t, t' \in [0, \infty)$,
2. $H\left(x, \frac{t+2}{t+1}e^{it}\right) = xe^{it}$ si $|x| \leq 1$ y $t \in [0, \infty)$,
3. $H(x, x') = xx'$ si $x \in S^1$ y $x' \in S^1 \cup X_1$,
4. $H\left(\frac{t+1}{t+2}e^{it}, x\right)$ si $t \in [0, \infty)$, $x' \in S^1 \cup X_1$.

No es difícil ver que H es continua y satisface que $H(x, (2, 0)) = x$ y $H(x, (0, 0)) = (0, 0)$ para toda $x \in X$. De donde se concluye que X es pseudo-contráctil. En resumen X es un continuo pseudo-contráctil no contráctil. Cabe añadir que el espacio factor que uso W. Kuperberg no es el que aparece en esta descripción el que él utilizó era exactamente el mismo continuo X. Notemos que el espacio factor C es un subcontinuo de X, más aún C es un continuo irreducible en X entre $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

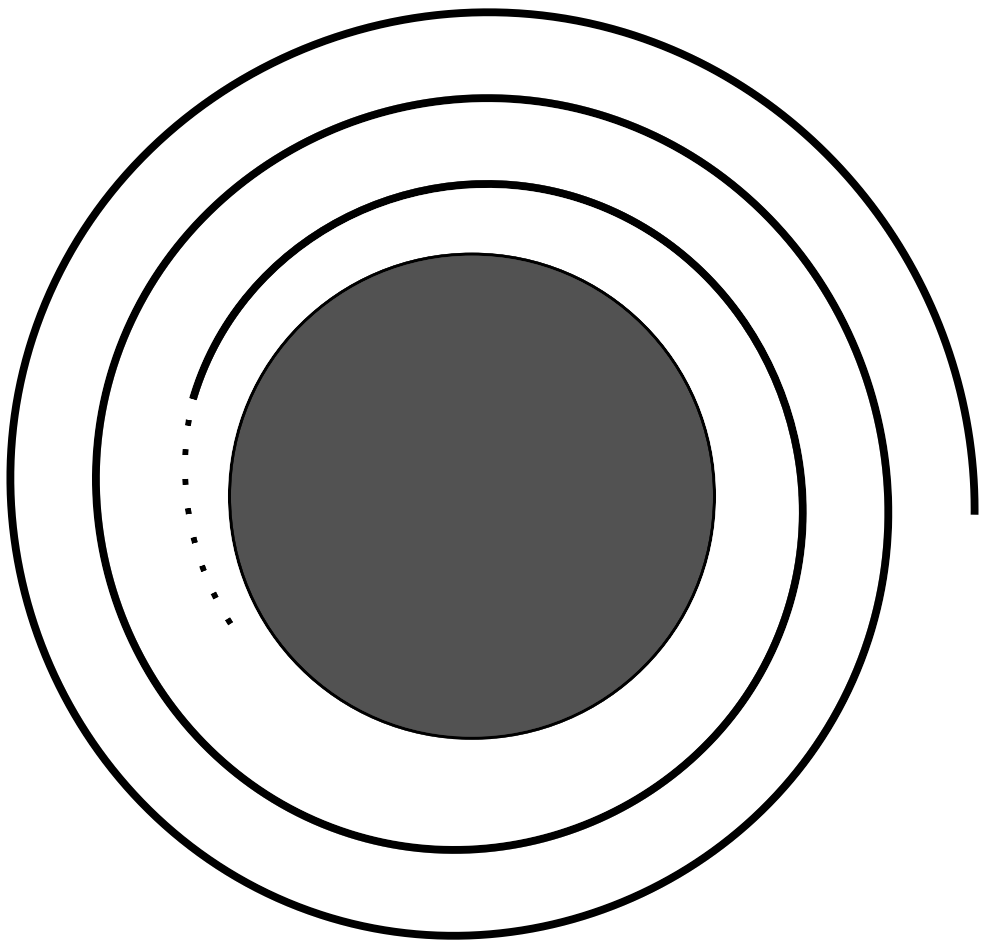

Figura 1: Continuo pseudo-contráctil, no contráctil propuesto por W. Kuperberg.

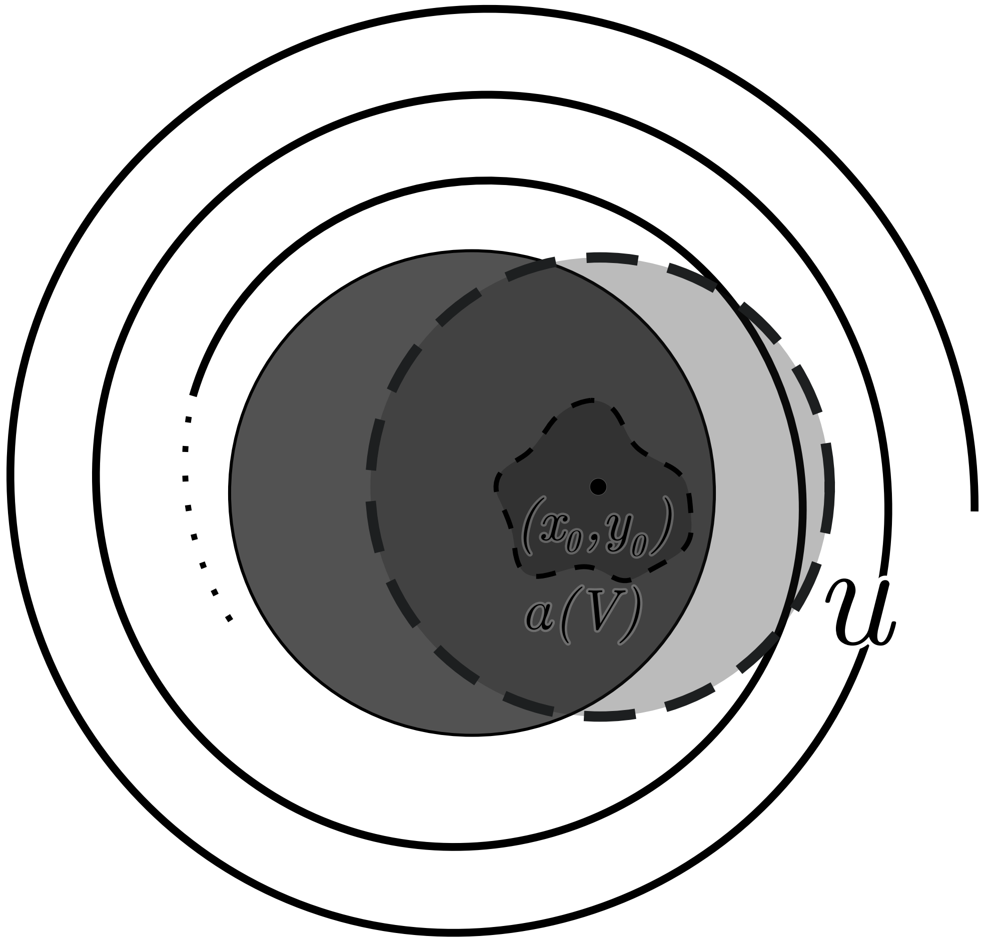

Figura 2: Continuo X, con un abierto U que contiene a (x_0, y_0)

$\square$

Esto último nos hace ver que el espacio factor usado en la homotopía no tiene porque ser único. De hecho, se tiene lo siguiente:

Proposición 14. *Sea C un espacio factor que funciona para la pseudo-contractibilidad. Cualquier subcontinuo $K \subseteq C$ tal que $a, b \in K$ funciona como espacio factor.*

Incluso si hay un continuo C que funcione para la pseudo-contractibilidad y hay un continuo K junto con una función $f : K \to C$ continua tal que $a, b \in f(K)$, entonces K funciona como espacio factor. De hecho esta última propiedad es la que hace que si un espacio es pseudo-contráctil con espacio factor arco-conexo, entonces este es contráctil.

Veamos que al igual que la contractibilidad, la pseudo-contractibilidad es una propiedad topológica, es un invariante pseudo-homotópico y ajo retracciones. Recordemos que una propiedad P es una *propiedad topológica* o *topológicamente invariante* si siempre que un espacio topológico X tiene dicha propiedad, cualquier espacio homeomorfo a X también la tiene.

Teorema 15. *La pseudo-contractibilidad es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos y $\phi : X \to Y$ un homeomorfismo. Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces $Id_X \cong_* c_k$. Por el Teorema 10, tenemos que

$$\begin{aligned}
& Id_X \cong_* c_k \\
\Longleftrightarrow\ & \phi \circ Id_X \circ \phi^{-1} \cong \phi \circ c_k \circ \phi^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & \phi \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \phi^{-1} \cong \phi \circ c_k \circ \phi^{-1} \\
\Longleftrightarrow\ & Id_Y \cong_* \phi \circ c_k \circ \phi^{-1},
\end{aligned}$$

y como, $\phi \circ c_k \circ \phi^{-1}$ es una función constante en $C(Y, Y)$, tenemos que Y es pseudo-contráctil. □

Definición 11. Sean X y Y espacios topológicos. Decimos que X y Y son *pseudo-homotópicamente equivalentes* (o tienen el mismo *tipo de pseudo-homotopía*), si existen dos funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ y dos continuos C y K tales que $f \circ g \cong_C Id_Y$ y $g \circ f \cong_K Id_X$.

Diremos que una propiedad P es un *invariante pseudo-homotópico* o *pseudo-homotópicamente invariante* si para cualquier continuo X que tiene dicha propiedad, cualquier espacio no degenerado pseudo-homotópico a X también la tiene.

Teorema 16. *La pseudo-contractibilidad es un invariante pseudo-homotópico.*

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos pseudo-homotópicamente equivalentes. Supongamos que X es pseudo-contráctil. Entonces $Id_X \cong_* c_{x_0}$, con $x_0 \in X$. Por el Teorema 10, tenemos que

$$
\begin{aligned}
& Id_X \cong_* c_{x_0} \\
\Longleftrightarrow\ & f \circ Id_X \circ g \cong f \circ c_{x_0} \circ g \\
\Longleftrightarrow\ & f \circ (g \circ f) \circ g \cong f \circ c_{x_0} \circ g \\
\Longleftrightarrow\ & (f \circ g) \circ (f \circ g) \cong f \circ c_{x_0} \circ g \\
\Longleftrightarrow\ & Id_Y \cong_* f \circ c_{x_0} \circ g
\end{aligned}
$$

Y como, $f \circ c_{x_0} \circ g$ es una función constante en $C(Y, Y)$, Y es pseudo-contráctil. $\square$

Definición 12. Sean X un espacio topológico y $A \in 2^X$. Decimos que A es un *retracto* de X, si existe una función continua $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para cada $a \in A$, es decir, $r|_A = id_A$. La función r el llamada una *retracción de X en A*

Teorema 17. *Sean X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado de X. Si X es pseudo-contráctil y A es un retracto de X, entonces A es pseudo-contráctil.*

Demostración. Sea $r : X \to A$ una retracción. Por el Teorema 10, $r \circ Id_X \cong_* r \circ c_{a_0}$, con $a_0 \in A$. Así, $Id_A \cong_* c_{a_0}$, lo que implica que A es pseudo-contráctil. $\square$

Por el Teorema 13, si un espacio topológico es contráctil, entonces es conexo por trayectorias. Algo semejante ocurre cuando el espacio es pseudo-contráctil. En efecto, si X es un espacio compacto de Hausdorff y pseudo-contráctil, entonces X es conexo por continuos. Algunas otras propiedades interesantes que comparten los continuos pseudo-contráctiles con los contráctiles es que estos también tienen forma trivial, tienen la Propiedad b) y por lo tanto son unicoherentes.

Para probar lo anterior, iniciamos recordando algunas definiciones.

Definición 13. Sean X, Y espacios métricos, $\varepsilon > 0$ y $f \in C(X, Y)$. Decimos f es una *ε-función* si es suprayectiva y $diam(f^{-1}(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$.

Definición 14. Sea K un subespacio de Y, se dice que K es un *retracto de vecidad* si existe un abierto U de Y tal que $K \subset U$ y una retracción $r : U \to K$.

Definición 15. Un espacio compacto K es llamado *retracto absoluto de vecindad*, escrito como ANR por sus siglas en inglés *(Absolute Neighborhood Retract)*, si para cualquier espacio Y y cada encaje $h : K \to Y$ tal que $h(K) \subset Y$, $h(K)$ es una retracto de vecindad de Y.

Definición 16. Para un continuo X, decimos que tiene *forma trivial* si cada función continua de X a un espacio ANR es homotópica a una función constante.

Definición 17. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de espacios métricos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ una función continua. Entonces la sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ de espacios métricos y funciones es llamanda *sucesión inversa*. Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > m$, entonces $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^n$.

Definición 18. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa de espacios métricos. Definimos el *límite inverso* de $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ denotado por $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ como el subespcacio del espacio producto $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ dado por

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{ \{x_n\} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n | f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

El siguiente resultado se sigue de [20, Theorem 2.1, p. 237], dado por J. Krasinkiewicz, nos será de ayuda para demostrar la Proposición 20, sin embargo, no ahondaremos en su demostración.

Teorema 18. *Sea X un continuo. Las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene forma trivial.*

2. *Si $X = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ donde X_n es ANR para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces para todo entero positivo n existe $m \in \mathbb{N}$ tal que f_n^m es homotópica a una función constante.*

3. *X es homeomorfo a $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ donde X_n es ANR y $X_{n+1} \subseteq X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

4. *$X = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, donde X_n es ANR y $X_{n+1} \subseteq X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

5. X *es contráctil con respecto a cada espacio* ANR.

6. *Si* $X = \varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *donde* X_n *es* ANR *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *entonces cada proyección* $\pi_n : X \to X_n$ *es homotópica a una función constante.*

Proposición 19. *[6, Proposition 44, p. 66] Sea* X *un espacio métrico compacto y sea* Y *un espacio* ANR. *Si* $f, g : X \to Y$ *son pseudo-homotópicas, entonces son homotópicas.*

Como consecuencia inmediata se tiene el siguiente resultado.

Proposición 20. *[6, Proposition 45, p. 66] Sea* X *un espacio métrico compacto y sea* Y *un espacio* ANR. *El espacio* X *es pseudo-contráctil con respecto al espacio* Y *si y sólo si* X *es contráctil con respecto a* Y.

Demostración. Supóngase que X es pseudo-contráctil con respecto a Y. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Por hipótesis, f es pseudo-homotópica a una función constante. Como Y es un espacio ANR, de la Proposición 19, f es homotópica a una función constante. Por lo tanto, X es contráctil con respecto a Y. El regreso es trivial. $\square$

Proposición 21. *Sea* X *un espacio métrico compacto y* Y *un espacio* ANR. *Si* X *es pseudo-contráctil con respecto a* Y *(lo cual implica que* X *es contráctil con respecto a* Y*). Entonces,* Y *es arco-conexo si y solo si el espacio* $C(X, Y)$ *es arco-conexo.*

Demostración. Como X es contráctil con respecto a un espacio ANR, $\square$

Corolario 22. *[6, Corollary 46, p. 67] Sea* X *un espacio* ANR. *Entonces,* X *es pseudo-contráctil si y sólo si* X *es contráctil.*

Corolario 23. *[6, Corollary 47, p. 67] Sea* X *un espacio métrico compacto. Entonces,* X *tiene forma trivial si y sólo si* X *es pseudo-contráctil con respecto a cada espacio* ANR.

Demostración. Supóngase que X es pseudo-contráctil con respecto a cada espacio ANR. Por la Proposición 20, X es contráctil con respecto a cada espacio ANR. Del Teorema 18, X tiene forma trivial. El regreso es inmediato. $\square$

Teorema 24. *Si* X *es un continuo pseudo-contráctil, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *X tiene forma trivial.*

2. *X puede ser escrito como $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, donde X_n es un continuo contráctil y $X_{n+1} \subseteq X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

3. *X puede ser escrito como el límite inverso de continuos contráctiles.*

4. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe un continuo contráctil Y_ε y una ε-función de X a Y_ε.*

Demostración. Por el Teorema 18 basta con probar que X tiene forma trivial. Como X es pseudo-contráctil, por [6, Theorem 48, p. 66] el espacio X es pseudo-contráctil con respecto a cada espacio métrico compacto. En particular X es pseudo-contráctil con respecto a cada espacio ANR. Por lo tanto, por el Corolario 24, X tiene forma trivial. $\square$

El recíproco no es verdad.

Ejemplo 2. *La curva* $\sin(1/x)$ *satisface las condiciones del Teorema 24, pero no es pseudo-contráctil (ver [14]).*

Definición 19. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que X y Y son *homotópicamente equivalentes* (o que tienen el *mimso tipo de homotopía*) denotado por $X \approx^E Y$, si existen dos funciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \cong Id_Y$ y $g \circ f \cong Id_X$.

Definición 20. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que X y Y son *pseudo-homotópicamente equivalentes* (o que tienen el *mimso tipo de pseudo-homotopía*) denotado por $X \approx_P^E Y$, si existen dos funciones continuas $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ y dos continos K y C tales que $f \circ g \cong_K Id_Y$ y $g \circ f \cong_C Id_X$.

Nótese que si $Y \approx_P^E \sin(1/x)$ entonces Y no es pseudo-contráctil.

Es bien sabido que S^1 no tiene forma trivial. Así que S^1 no es pseudo-contráctil. Nótese que siempre que $X \approx^E S^1$, entonces, por el Corolario [6, Corollary 39, p. 65], X no es pseudo-contráctil. Los siguientes continuos son algunos ejemplos de continuos no pseudo-contráctiles porque todos ellos tienen el mismo tipo de pseudo-homotopía que S^1.

1. El anillo $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

2. El toro solido $S^1 \times D^2$.

3. La banda de Möbius.

En general, si X no tiene forma trivial y $Y \approx_P^E X$, entonces Y no es pseudo-contráctil.

Definición 21. Sean X y Y espacios topológicos. Una función continua $f : X \to Y$ se dice ser *(pseudo)-esencial* si f no es (pseudo-)homotópica a ninguna función constante de X a Y. Una función $f : X \to Y$ se dice que es *(pseudo)-inesencial* si f no es (pseudo)-esencial.

De este modo, si $f : X \to Y$ es una función continua (pseudo)-esencial, entonces X no es (pseudo)-contráctil con respecto a Y. Nótese que siempre que Y sea un espacio ANR las nociones de función pseudo-esencial y función esencial coinsiden.

Definición 22. Un continuo X es *tipo círculo* si para cada $\varepsilon > 0$ existe una colección finita $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ de abiertos de X que cubre a X tal que:

1. $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ si y solo si $|i - j| \leq 1$ o $i, j \in \{1, n\}$,

2. $\operatorname{diam}(V_i) < \varepsilon$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

El siguiente teorema permite construir más continuos no pseudo-contráctiles.

Teorema 25. *Si X es un continuo tipo círculo propio, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Demostración. Como X es un continuo tipo círculo propio, por [21, Theorem 3.2, p.158] existe una función esencial de X a S^1. Por lo tanto, X no es pseudo-contráctil. $\square$

En particular, el pseudo-círculo no es pseudo-contráctil porque es un continuo tipo círculo propio.

Definición 23. Se dice que X tiene *Propiedad b)* si para cada función $f : X \to S^1$ existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $f = \exp \circ g$, donde $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ está definida por $\exp(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ y $\mathbb{R}$ denota la recta real. La función g el llamada el *levantamiento* de f.

Teorema 26. *[33, Theorem 6.2] Sea X un espacio métrico compacto. El espacio X es contráctil con respecto a S^1 si y sólo si X tiene la Propiedad b).*

Como consecuencia de las Proposiciones 20 y 21 y del Teorema 26 se tiene lo siguiente.

Corolario 27. *[6, Corollary 53, p. 68] Sea X un espacio métrico compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es pseudo-contráctil con respecto a S^1.*
2. *X es contráctil con respecto a S^1.*
3. *X tiene la Propiedad b).*
4. *$C(X, S^1)$ es arco-conexo.*

Teorema 28. *Sea X un espacio métrico compacto. Si X es pseudo-contráctil entonces X tiene la Propiedad b).*

Demostración. Por el Teorema [6, Theorem 29, p. 64], X es pseudo-contráctil con respecto a S^1. Así, por el corolario anterior, X tiene la Propiedad b). □

Nótese que si X no tiene la Propiedad b) y Y satisface $Y \approx^E X$ entonces Y no es contráctil.

Teorema 29. *[33, Theorem 7.3] Cada continuo X que tiene la Propiedad b) es unicoherente.*

Como consecuencia del Teorema 28 y el Teorema 29 se tiene lo siguiente.

Corolario 30. *Sea X un continuo. Si X es pseudo-contráctil entonces es unicoherente.*

De modo que si X es un contiuo que no es unicoherente, entonces cada espacio Y tal que $Y \approx_P^E X$, no es pseudo-contráctil.

Definición 24. Sea X un continuo, se dice que X es:

- *descomponible* si X se puede describir como la unión de dos subcontinuos propios,

- *hereditariamente descomponible* si cada subcontinuo no degenerado de X es descomponible,
- un λ-*dendroide* si X es hereditariamente descomponible y hereditariamente unicoherente.

Es sabido que los dendroides son λ-dendroides (ver [28, p. 226]).

Finalmente, se darán algunos resultados de pseudo-contractibilidad cuando el espacio topológico es una curva.

Teorema 31. *Si X es una curva pseudo-contráctil entonces es hereditariamente unicoherente.*

Demostración. Por el Teorema 24, X tiene forma trivial. De este modo, por [20, Theorem 2.1 (B), p. 237], X es tipo árbol. Entonces, por [8, Theorem 1], X es hereditariamente unicoherente. □

Usando el Teorema 31, se tienen algunos ejemplos de continuos no pseudo-contráctiles. Por ejemplo:

1. La esponja de Menger.
2. La carpeta de Sierpinski.
3. Cualquier compactación del arco con un círculo como residuo.

En general, si X es una curva no hereditariamente unicoherente, entonces cada espacio Y tal que $Y \approx_P^E X$ no es pseudo-contráctil.

Dado que cada continuo hereditariamente descomponible es una curva, se puede deducir el siguiente resultado.

Teorema 32. *Si X es un continuo hereditariamente descomponible pseudo-contráctil, entonces X no es homogéneo.*

Demostración. Si se asume que X es homogéneo, por [24, Lemma 5.2, p. 141], existe una función esencial de X a S^1, una contradicción. □

Pregunta 4. ¿Bajo qué condiciones la pseudo-contractibilidad de espacios topológicos implica la contractibilidad?

Algunas respuestas parciales se tienen cuando el espacio factor es arco-conexo, o el espacio es un espacio métrico compacto ANR y se sabe que el único continuo encadenable que es pseudo-contráctil es el intervalo, en tal caso, es sabido que el intervalo es contráctil. En la siguiente sección mostraremos otro tipo de espacio, llamado hiperespacio de g-crecimiento en donde ambos conceptos coinciden.

De manera más particular se plantea lo siguiente.

Pregunta 5. [9, Pregunta 4.10] ¿Cada dendroide pseudo-contráctil, será contráctil?

Aunque lo primero que uno se debería de preguntarse es, ¿ existen dendroides pseudo-contráctiles?

Pregunta 6. [23, Problem 118] ¿Existen curvas pseudo-contráctiles no contráctiles ?

Pregunta 7. [29, Pregunta 19] ¿ Existen continuos no degenerados (hereditariamente) indecomponibles que sean pseudo-contráctiles?

5. Hiperespacios de g-crecimiento

En este capítulo se hablará de los hiperespacios de g-crecimiento y su relación con la pseudo-contractibilidad. Los hiperespacios de g-crecimiento fueron definidos en [3] por D. Maya et al. Comencemos entonces esta sección con su definición, seguiremos con algunas propiedades y ejemplos de este tipo de espacios y finalmente lo relacionaremos con la pseudo-contractibilidad.

En esta primera parte se estará trabajando con la *función unión* $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\bigcup(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$, misma que es continua (Ver [27, Lema 1.48, p. 100]).

Definición 25. Sean X un continuo y $\mathcal{H} \subseteq 2^X$ no vacío, decimos que $\mathcal{H}$ es un *hiperespacio de g-crecimiento* de X si siempre que $\mathcal{A} \in C(2^X)$ satisface que $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$, entonces $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{H}$.

Teorema 33. *Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Entonces $X \in \mathcal{H}$.*

Demostración. Como $2^X \in C(2^X)$, $2^X \cap \mathcal{H} = \mathcal{H} \neq \emptyset$ y $\mathcal{H}$ es de g-crecimiento, $X = \bigcup 2^X \in \mathcal{H}$. □

Teorema 34. *La intersección de una familia arbitraria de hiperespacios de g-crecimiento de X es un hiperespacio de g-crecimiento de X.*

Demostración. Sean X un continuo y $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ una familia de hiperespacios de g-crecimiento de X. Si $\mathcal{A} \in C(2^X)$ es tal que $\mathcal{A} \cap \left(\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{H}_i \right) \neq \emptyset$, de aquí, $\mathcal{A} \cap \mathcal{H}_i$ para cada $i \in I$ y como cada uno de estos es un hiperespacio de g-crecimiento de X, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{H}_i$ para todo $i \in I$. Por lo que $\bigcup \mathcal{A} \in \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{H}_i$. Así, $\bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{H}_i$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X.

□

Teorema 35. *El hiperespacio 2^X es un hiperespacio de g-crecimiento de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$, tal que $\mathcal{A} \cap 2^X \neq \emptyset$. Como $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X$. Por lo tanto, 2^X es un hiperespacio de g-crecimiento de X. □

Teorema 36. *El hiperespacio $C(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Demostraremos que $\bigcup \mathcal{A}$ es compacto. Como la función $\bigcup : 2^{2^X} \to 2^X$ está bien definida y $C(X) \subseteq 2^{2^X}$, $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto compacto de X. Ahora probaremos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de X. Supongamos que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto disconexo de X. Dado que $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado en X, existen H y K conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos en X tales que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$. Sea $A \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Como A es conexo en X y dado que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$, entonces $A \subseteq H$ o $A \subseteq K$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subseteq H$. Definamos $\mathcal{A}_1 = \{L \in \mathcal{A} : L \subseteq H\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{L \in \mathcal{A} : L \cap K \neq \emptyset\}$. Ya que $A \in \mathcal{A}$ y $A \subseteq H$, $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. Dado que $K \neq \emptyset$ y $K \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Por el Teorema 4, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son subconjuntos cerrados de 2^X. Como H y K son ajenos, $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son ajenos y dado que $\bigcup \mathcal{A} = H \cup K$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Así, $\mathcal{A}$ es disconexo en 2^X, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto conexo de X. $\square$

Proposición 37. *El hiperespacio $C_n(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Si suponemos que $\bigcup \mathcal{A} \notin C_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ tiene al menos $n+1$ componentes distintas, digamos $B_1, \ldots, B_{n+1}$ las cuales son conjuntos no vacíos cerrados ajenos y su unión es $\bigcup \mathcal{A}$. Sea $L \in \mathcal{A} \cap C_n(X)$, entonces existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $L \cap B_i = \emptyset$. Sean $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : A \cap B_i \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : A \cap B_i = \emptyset\}$. Nótese que $\mathcal{A}_0 \neq \emptyset$ porque $B_i \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y $B_i \neq \emptyset$, por lo que debe existir al menos un $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap B_i$, de lo contrario, $B_i \notin \bigcup \mathcal{A}$, lo cual no es posible. $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$ porque contiene a L. Por el Teorema 4, $\mathcal{A}_0$ y $\mathcal{A}_1$ son cerrados y resultan ser ajenos no vacíos en 2^X y $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$, lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{A}$ es conexo. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in C_n(X)$. $\square$

Usando las mismas ideas del demostración de la Proposición 37 se puede probar que el hiperespacio $C_\infty(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X.

Teorema 38. *Sean X un continuo, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Los hiperespacios $2^X_p = \{A \in 2^X : p \in A\}$, $C(X,p) = \{A \in C(X) : p \in A\}$ y $C_n(X,p) = \{A \in C_n(X) : p \in A\}$ son hiperespacios de g-crecimiento de X.*

Demostración. Mostraremos primero que 2^X_p es un hiperespacio de g-crecimiento de X. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap 2^X_p \neq \emptyset$. Sea $p \in A \cap 2^X_p$, como $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y $p \in A$ entonces $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in 2^X_p$.

Para mostrar que $C(X,p)$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap C(X,p) \neq \emptyset$. Consideremos $B \in \mathcal{A} \cap C(X,p)$, entonces $B \in C(X)$ y $p \in B$, esto implica que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \in C(X)$. Ahora como $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, por lo tanto $p \in \bigcup \mathcal{A}$. Así, $\bigcup \mathcal{A} \in C(X,p)$.

Por último sea $\mathcal{A} \in 2^X$ tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X,p)$, esto implica que existe al menos un conjunto $B \in \mathcal{A}$ con $B \in C_n(X,p)$, es decir, B tiene a lo más n componentes y $p \in B$. Dado que $C_n(X,p) \subseteq C_n(X)$, $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$ y por la Proposición 37, $C_n(X)$ es un hiperespacio de g-crecimiento, por lo tanto $\bigcup \mathcal{A} \in C_n(X)$.

□

Teorema 39. *Sea X un continuo y $\varepsilon > 0$. El hiperespacio $\mathcal{D} = \{B \in 2^X : H(X,B) \leq \varepsilon\}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Entonces, existe $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{D}$, por lo que $H(X,B) \leq \varepsilon$. Dado que $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, $H(X, \bigcup \mathcal{A}) \leq H(X,B) \leq \varepsilon$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{D}$. Así, $\mathcal{D}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X. □

Definición 26. Si X es un continuo. Una **función de Whitney** para 2^X, es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que:

1. $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$,
2. Para $A, B \in 2^X$, si $A \subset B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Se sabe por [16, Teorema 13.4, p. 107] que siempre existen las funciones de Whitney y $\mu|_{C(X)}$ es una función de Whitney para $C(X)$. A continuación mostraremos que los conjuntos $\mu^{-1}([t,1])$ son hiperespacios de g-crecimiento de X para toda función de Whitney μ y todo $t \in [0,1]$.

Teorema 40. *Sea X un continuo y μ una función de Whitney de 2^X. Entonces para todo $t \in [0,1]$, el conjunto $\mu^{-1}([t,1])$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \in C(2^X)$ tal que $\mathcal{A} \cap \mu^{-1}([t,1]) \neq \emptyset$. Entonces, existe $B \in \mathcal{A} \cap \mu^{-1}([t,1])$, por lo que $\mu(B) \geq t$. Dado que $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y μ es una función de Whitney, $\mu(\bigcup \mathcal{A}) \geq \mu(B) \geq t$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{A} \in \mu^{-1}([t,1])$. Así, $\mu^{-1}([t,1])$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X. □

Proposición 41. *Sea X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Si μ es una función de Whitney para $C(X)$ y $t \in [0,1]$, entonces $\mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$ si y sólo si $\mu^{-1}([t,1]) \subseteq \mathcal{H}$.*

Demostración. Supongamos que $\mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$. Esto significa que todo continuo $B \in C(X)$ tal que $\mu(B) = t$ pertence a $\mathcal{H}$.

Sea $A \in \mu^{-1}([t, 1])$. Si $\mu(A) = t$, entonces $A \in \mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$. Así que nos enfocaremos en el caso en que $\mu(A) > t$. Nótese que $\mu|_{C(A)}$ es una función de Whitney para $C(A)$. Sea $\mathcal{A} = (\mu|_{C(A)})^{-1}(t)$, es decir, $\mathcal{A} = \{B \in C(A) : \mu(B) = t\}$. Notémos que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ pues $\mu|_{C(A)}$ es continua y $C(A)$ es un continuo, por lo que su imagen es el intervalo $[0, \mu(A)]$ y como $t \in [0, \mu(A)]$, existe al menos un $B \in C(A)$ tal que $\mu(B) = t$. Como $\mu^{-1}(t) \subseteq \mathcal{H}$ y $A \subseteq \mu^{-1}(t)$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Dado que $A = \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{H}$, obtenemos que $A \in \mathcal{H}$. Por lo tanto, $\mu^{-1}([t, 1]) \subseteq \mathcal{H}$. La otra implicación es inmediata. $\square$

Como corolario a la Proposición 41 se puede ver si que X es un continuo y $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, entonces $F_1(X) \subseteq \mathcal{H}$ si y sólo si $C(X) \subseteq \mathcal{H}$

Definición 27. Dados $A, B \in 2^X$ con $A \subset B$, diremos que una función continua $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ es un *arco ordenado* de A a B en $C(X)$, si $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$, cuando $0 \leq s < t \leq 1$.

Teorema 42. *[27, Teorema 1.8, p. 59] Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subseteq B$. Entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si toda componente de B intersecta a A.*

Proposición 43. *Todo hiperespacio de g-crecimiento de un continuo es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea X un continuo y $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Para demostrar que $\mathcal{H}$ es conexo por trayectorias, es suficiente demostrar que la imagen de todo arco ordenado de cualquier elemento de $\mathcal{H}$ a X está contenido en $\mathcal{H}$. De esta manera cualesquiera dos elementos de $\mathcal{H}$ pueden estar conectados por una trayectoria que pasa por X. Sea $G \in \mathcal{H}$, por el Teorema 42, existe un arco ordenado $\alpha : [0, 1] \to 2^X$ de G a X. Ahora, si $t \in [0, 1]$, entonces $\alpha([0, t]) \in C(2^X)$ y satisface que $G \in \mathcal{H} \bigcap \alpha([0, t])$ y $\alpha(t) = \bigcup \alpha([0, t])$. Dado que $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, $\alpha(t) \in \mathcal{H}$; es decir, $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{H}$ para toda $t \in [0, 1]$. Así, $\mathcal{H}$ es conexo por trayectorias. $\square$

Teorema 44. *Sean X, Y y K continuos, y sea $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de Y. Si $G : X \times K \to \mathcal{H}$ es una función continua, entonces la función $\hat{G} : X \times C(K) \to \mathcal{H}$ definida por $\hat{G}(x, B) = \bigcup G(\{x\} \times B)$ satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\hat{G}$ está bien definida y es continua,*

2. *$\hat{G}(x, \{t\}) = G(x, t)$ para cada $(x, t) \in X \times K$,*

3. *Si $t \in T \in C(K)$ y $G(x, t) \in \mathcal{H}'$ para algún hiperespacio de g-crecimiento $\mathcal{H}'$ de Y contenido en $\mathcal{H}$, entonces $\hat{G}(x, T) \in \mathcal{H}'$.*

Demostración. De la continuidad de G junto con [27, Lema 1.48, p. 100] y la definición de hiperespacio de g-crecimiento obtenemos 1. La condición 2 es inmediata a partir de la definición de $\hat{G}$, pues $\hat{G}(x, \{t\}) = \bigcup G(\{x\} \times \{t\}) = G(\{x\}, \{t\}) = G(x, t)$. Para la condición 3, como $G(x, t) \in \mathcal{H}'$, entonces $\mathcal{H}' \cap G(\{x\}) \neq \emptyset$, y como $\mathcal{H}'$ es un hiperespacio de g-crecimiento, entonces $\bigcup G(\{x\} \times T) = \hat{G}(x, T) \in \mathcal{H}'$. □

El siguiente resultado muestra que dos funciones pseudo-homotópicas son homotópicas cuando el contradominio es un hiperespacio de g-crecimiento.

Teorema 45. *Sean X y Y continuos, sea $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de Y y sean $f, g : X \to \mathcal{H}$ funciones continuas. Entonces f y g son pseudo-homotópicas si y sólo si f y g son homotópicas.*

Demostración. Supongamos que f y g son pseudo-homotópicas. Entonces existen un continuo K, puntos $a, b \in K$ y una función continua $G : X \times K \to \mathcal{H}$ tal que $G(x, a) = f(x)$ y $G(x, b) = g(x)$ para cada $x \in X$. Así, por el Teorema 44, la función $\hat{G} : X \times C(K) \to \mathcal{H}$ satisface $\hat{G}(x, \{a\}) = f(x)$ y $\hat{G}(x, \{b\}) = g(x)$ para cada $x \in X$. Dado que $C(K)$ es arco-conexo, se sigue que f y g son homotópicas. La implicación inversa es inmediata. □

Corolario 46. *Sea X un continuo y sea $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X. Entonces $\mathcal{H}$ es pseudo-contráctil si y sólo si $\mathcal{H}$ es contráctil.*

Un subespacio Y de X se dice que es (pseudo-)contráctil en X si la función inclusión de Y en X es (pseudo-)homotópica a una función constante en X.

Es fácil ver que si X es pseudo-contráctil, entonces cualquier subespacio Y de X es pseudo-contráctil en X.

El siguiente resultado muestra una equivalencia para cuando 2^X es contráctil.

Teorema 47. *[19, Lemma 3.1, p. 25] Las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. *$F_1(X)$ es contráctil en 2^X.*
2. *2^X es contráctil.*
3. *$C(X)$ es contráctil.*

El siguiente resultado generaliza el Teorema 47.

Teorema 48. *[3, Theorem 4.2, p. 8] Sea X un continuo y sea $\mathcal{H}$ un hiperespacio de g-crecimiento de X que contiene a $F_1(X)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *2^X es contráctil,*
2. *$F_1(X)$ es contráctil en 2^X,*
3. *$\mathcal{H}$ es contráctil,*
4. *$F_1(X)$ es contráctil en $\mathcal{H}$,*
5. *$\mathcal{H}$ es pseudo-contráctil,*
6. *$F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Por el Teorema 48 las condiciones 1 y 2 son equivalentes. La equivalencia entre 3 y 5 es consecuencia del Teorema 46. Las condiciones 4 y 6 se siguen de 3 y 5 respectivamente.

Ahora, supóngase que $\mathcal{H}$ es contráctil. Como $F_1(X)$ es un subespacio de $\mathcal{H} \subseteq 2^X$, $F_1(X)$ es contráctil en 2^X. Por lo tanto, 3 implica 2.

A continuación se probará que 1 implica 3. Supongamos que 2^X es contráctil. Entonces, existe una función continua $L : 2^X \times [0,1] \to 2^X$ tal que $L(A,0) = A$ y $L(A,1) = X$ para cada $A \in 2^X$. Definimos $M : \mathcal{H} \times [0,1] \to \mathcal{H}$ tal que $M(A,t) = \bigcup L(\{A\} \times [0,t])$ para cada $(A,t) \in \mathcal{H} \times [0,1]$. Probaremos que M está bien definida. Sea $(A,t) \in \mathcal{H} \times [0,1]$. La continuidad de L implica que $L(\{A\} \times [0,t]) \in C(2^X)$. Dado que $A \in L(\{A\} \times [0,t]) \cap \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de g-crecimiento de X, $\bigcup L(\{A\} \times [0,t]) = M(A,t) \in \mathcal{H}$. La continuidad de M se sigue de la continuidad de L y el Teorema [27, lema 1.49, p. 102]. Notemos que $M(A,0) = A$ y $M(A,1) = X$ para cada $A \in \mathcal{H}$. Por lo que $\mathcal{H}$ es contráctil. Por lo tanto, 1 implica 3.

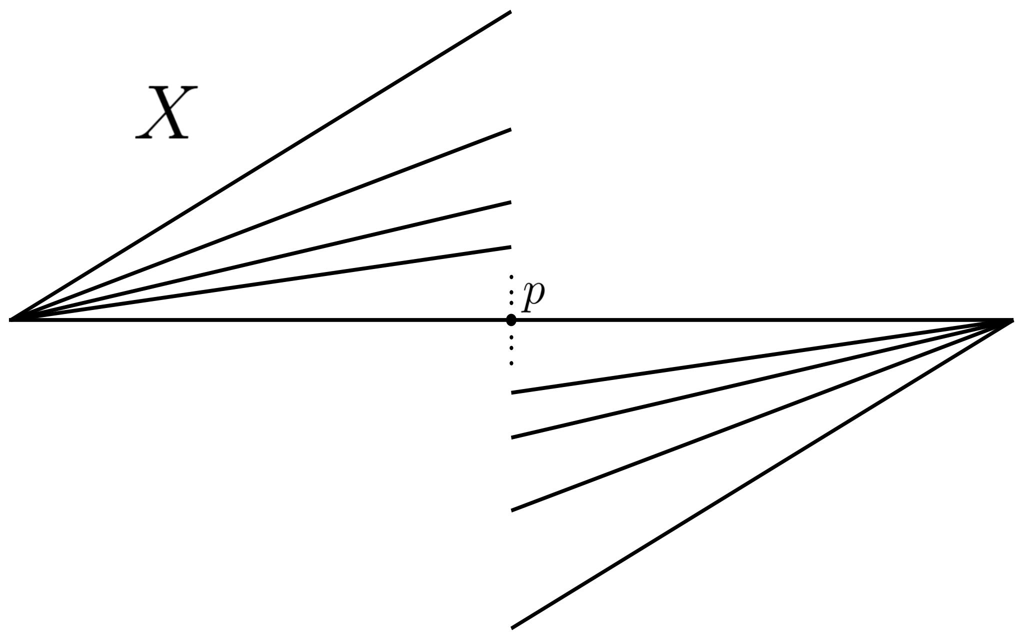

Figura 3: Ejemplo de un continuo cuyo hiperespacio 2^X no es contráctil.

Para la prueba de 6 implica 4, si $F_1(X)$ es pseudo-contráctil en $\mathcal{H}$. Sea $i : F_1(X) \to \mathcal{H}$ la función inclusión, entonces i es pseudo-homotópica a una función constante en $\mathcal{H}$. Por el Teorema 45, tenemos que i es homotópica a una función constante. Por lo que $F_1(X)$ es contráctil en $\mathcal{H}$. Por lo tanto 6 implica 4.

Es inmediato que 4 implica 6. Finalmente, si suponemos 4, entonces $F_1(X)$ es contráctil en 2^X. Por lo tanto, 4 implica 2.

Con ello, todas las proposiciones son equivalentes.

$\square$

Nótese que la condición de que $F_1(X)$ sea subconjunto de un hiperespacio de g-crecimiento es escencial para que la condición de contractibilidad de $\mathcal{H}$ implique la contractibilidad de 2^X.

Por ejemplo, dado un continuo X y $p \in X$ se sabe que $C(X, p)$ es un hiperespacio de g-crecimiento y que siempre es contráctil y además $F_1(X) \nsubseteq C(X, p)$. Por otra parte en la Figura 3 se muestra un continuo X cuyo hiperespacio 2^X no es contráctil (ver [16, p. 158]).

6. Conjuntos rígidos y su relación con la pseudo-contractibilidad

En este capítulo analizaremos algunos tipos especiales de conjuntos que impiden que un continuo sea pseudo-contráctil; estos son los que denominaremos como "conjuntos rígidos bajo (pseudo-)homotopías". Comenzaremos primero con la definición formal y veremos la evolución de este tipo de conjuntos a lo largo del capítulo y la relación que guarda con el concepto de (pseudo)-contractibilidad.

Lema 49. *Sea X un espacio topológico. Si X es contráctil entonces para cada $p \in X$, existe una contracción de X en p.*

Demostración. Sea $p \in X$. Dado que X es contráctil existe una homotopía $H : X \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = p_0$; para toda $x \in X$ y para algún p_0. Como X es contráctil, por el Teorema 13, X es conexo por trayectorias, esto implica que existe una trayectoria $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha(1) = p$.

Sea $H' : X \times I \to X$ definida de la siguiente manera

$$H'(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \alpha(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Por el Lema del Pegado H' es continua, además $H'(x, 0) = H(x, 0) = x$ y $H'(x, 1) = \alpha(2(1) - 1) = \alpha(1) = p$ para todo $x \in X$. Así H' es una contracción de X en p. $\square$

Uno de los primeros resultados que muestra que la rigidez bajo homotopías no permite la contractibilidad de continuos se debe a J.J. Charatonik y Z. Grabowski; ellos probaron en 1976 el siguiente resultado (ver [9]).

Proposición 50. *[9, Proposition 1, p. 230] Si un espacio topológico X contiene 2 conjuntos A, B tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq X$, y para cada deformación $H : X \times I \to X$, $H(A \times I) \subseteq B$, entonces X no es contráctil.*

Demostración. Supóngase que existe una contracción $H : X \times I \to X$ tal que $y \in X$ es un punto de contracción y $H(A \times I) \subseteq B$. Dado que X es contráctil, entonces por el Lema 49, y puede elegirse fuera de B; esto es, $y \in X \setminus B$.

Por otra parte, si $x \in A$, tenemos que $H(x, 1) = y \notin B$, lo que contradice la elección de la homotopía H. $\square$

Definición 28. Si un conjunto A satisface las hipótesis de la proposición 50, con $A = B$, se dice que A es *homotópicamente fijo*.

Por lo que, haciendo uso de la Proposición 50 y de esta definición, si un espacio contiene un conjunto homotópicamente fijo, entonces no es contráctil. En este mismo artículo introducen el concepto de R-arco, [9, Definition 4, p. 230], muestran que si un dendroide contiene un R-arco, entonces el R-arco es homotópicamente fijo y por lo tanto el dendroide no es contráctil (Ver [9, Theorem 5, p. 231] y [9, Corollary 6, p. 232]). De esta manera, los R-arcos son de los primeros conjuntos rígidos bajo homotopías que impiden la contractibilidad.

Para fines de este trabajo, se definirán los siguiente conjuntos y se mostrarán los resultados arriba citados.

Definición 29. Sea X un espacio y $\{A_n\}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X, definimos el *límite inferior* de $\{A_n\}$ y el *límite superior* de $\{A_n\}$, respectivamente, como los conjuntos:

$$\text{Li } A_n = \left\{ x \in X : \begin{array}{l} \text{para todo abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U, \text{existe} \\ N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq N \end{array} \right\}$$

y,

$$\text{Ls } A_n = \left\{ x \in X : \begin{array}{l} \text{para todo abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U, \text{existe} \\ J \subset \mathbb{N} \text{ infinito, tal que } U \cap A_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in J \end{array} \right\}$$

Si existe $A \subseteq X$ tal que $\text{Li } A_n = A = \text{Ls } A_n$, entonces A es llamado el *límite* de la sucesión $\{A_n\}$ y se denota por:

$$\text{lím } A_n.$$

Sea X un dendroide. Considérese un arco ab en X y $x \in X$. Si para algún número $\varepsilon > 0$, $x \in \overline{N(\varepsilon, ab)}$ y la intersección $xa \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ no es conexa, entonces se denota por $x(\varepsilon)$ al primer punto del arco xa ordenado de x a a que cae en $Fr(N(ab, \varepsilon))$; es decir, $x(\varepsilon) \in xa \cap N(\varepsilon, ab)$ y $xx(\varepsilon) \cap Fr(N(\varepsilon, ab)) = \{x(\varepsilon)\}$.

A continuación definiremos lo que es un R-arco.

Definición 30. Un arco ab contenido en un dendroide X es llamado un R-arco si:

1. Hay dos sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ de puntos finales de X tales que:
$$\lim u_n = a \quad \text{y} \quad \lim v_n = b;$$
2. Existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para casi todos los enteros positivos n los conjuntos $u_n b \cap \overline{N(ab, \varepsilon)}$ y $v_n a \cap \overline{N(ab, \varepsilon)}$ no son conexos (pues los puntos $u_n(\varepsilon)$ y $v_n(\varepsilon)$ están bien definidos) y los conjuntos $u_n u_n(\varepsilon) \setminus \{u_n(\varepsilon)\}$ y $v_n v_n(\varepsilon) \setminus \{v_n(\varepsilon)\}$ no contiene puntos de ramificación de X;
3. $\lim u_n u_n(\varepsilon) \cap \lim v_n v_n(\varepsilon) = ab$

Un R-arco degenerado también es posible considerarlo bajo esta definición.

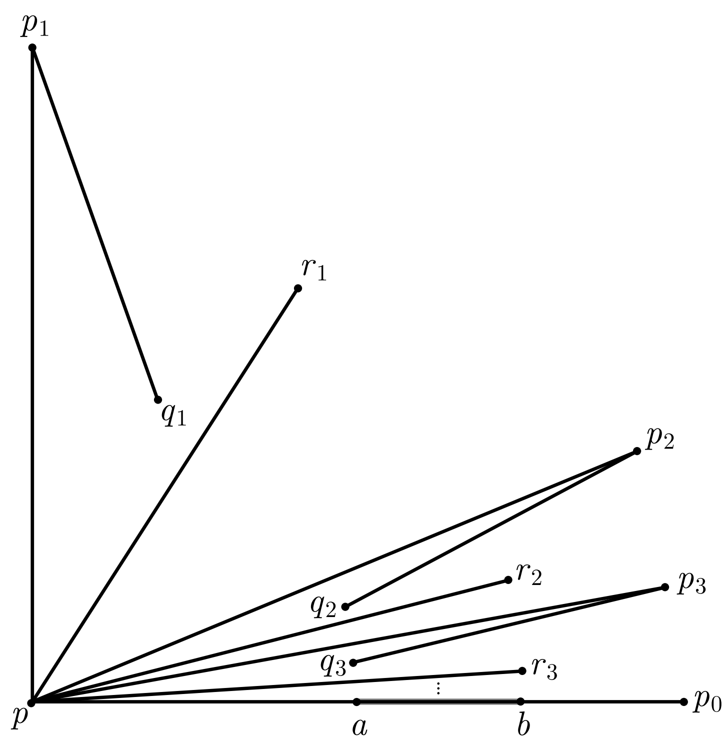

Figura 4: Continuo donde el arco ab que es un R-arco

Ejemplo 3. *[9, Example 8, p. 233] En un sistema de coordenadas polares, sean p el origen, $p_0 = (1, 0)$, y*

$$p_n = (1, 2^{1-2n}), \quad q_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \cdot 2^{1-2n}\right), \quad r_n = \left(\frac{3}{4}, 2^{-2n}\right), \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

y sea,

$$X = pp_0 \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (pp_n \cup p_n q_n) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} pr_n$$

Así, X es un rehilete con centro p y extremos p_n y con un abanico armónico entrelazado tal como se muestra en la Figura 4. Nótese que para $a = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $b = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ y las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$, dadas por $u_n = q_n$ y $v_n = r_n$, se cumplen las condiciones necesarias para afirmar que el arco ab es un R-arco.

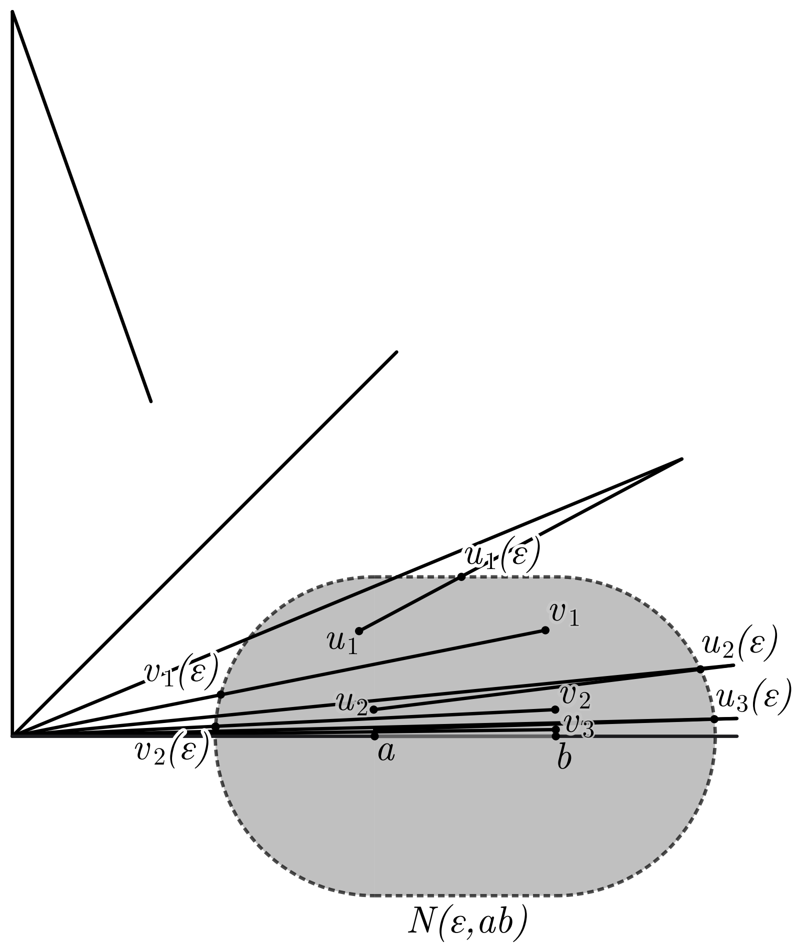

Figura 5: Continuo que contiene al arco ab que es un R-arco

Posteriormente en 1978, S. T. Czuba en [12] define los R-continuos, generalizando con ello la noción de R-*arco*, dando seguimiento al estudio de determinar la no contractibilidad de los dendroides; mostrando que todo R-continuo es homotópicamente fijo [12, Theorem 3, p. 300] y como consecuencia todo dendroide con un R-continuo es no contráctil ([12, Corollary 4, p. 302]). Adicionalmente, Czuba muestra un dendroide con un R-continuo que no es R-arco mostrando con ello que estos conceptos son diferentes (Ver Figura: 6)

Definición 31. Un subcontinuo $K \neq X$ de un un dendroide X es llamado

R-continuo si existe un número $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de $N(K, \varepsilon)$ tal que $\operatorname{Ls} C_n^1 \cap \operatorname{Ls} C_n^2 = K$.

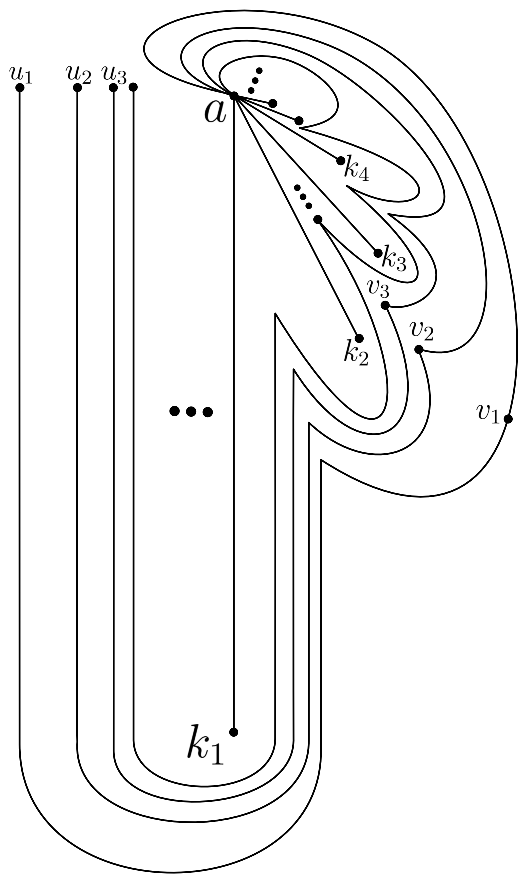

Figura 6: Continuo que contiene un R-continuo

Ejemplo 4. *Sea X el dendroide ilustrado en la Figura 6. Obsérvese que al tomar $\frac{1}{2}d(a, k_3) > \varepsilon > 0$ y las sucesiones $\{C_n^2\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de $N(\varepsilon, a)$ tales que $u_n \in C_n^1$ y $v_n \in C_n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces el continuo $K = \{a\}$ cumple con las condiciones de la Definición 31.*

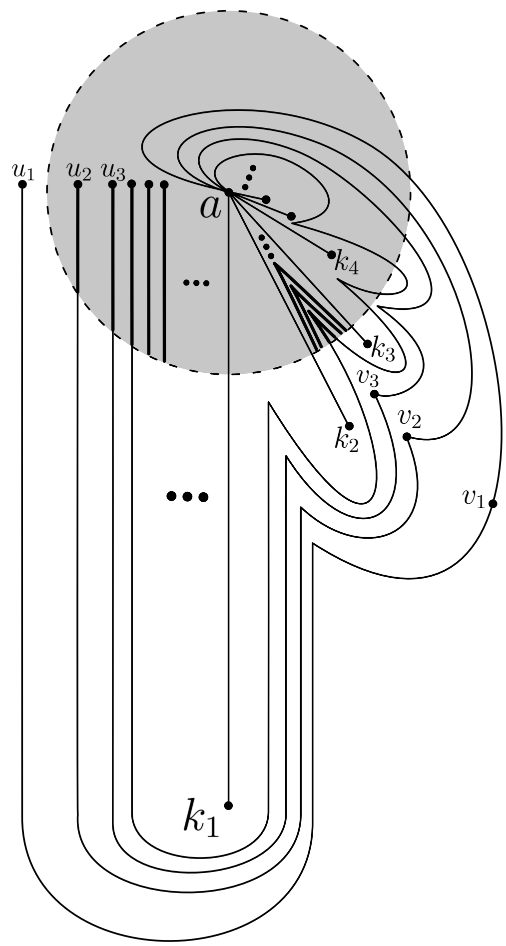

Figura 7: Visualización de las componentes C_n^1 y C_n^2 tales que $\mathrm{Ls}C_n^1 \cap \mathrm{Ls}C_n^2 = K$

Teorema 51. *Si un dendroide X contiene un R-continuo K, entonces K es homotópicamente fijo.*

Demostración. Sea X un dendroide y $K \subset X$ un R-continuo. Supóngase, por el contrario, que existe una deformación $H : X \times I \to X$ para la cual $H(K \times I) \setminus K \neq \emptyset$; es decir, para la cual existe un numero $t' \in I$ tal que

$$H(K \times \{t'\}) \setminus K \neq \emptyset.$$

Sea $\varepsilon > 0$ que cumple con la definición de R-continuo.

$$t_p = \sup \left\{ t \in I : H(\{p\} \times [0,t]) \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right) \right\}$$

Para cada punto $p \in K$ considérese $t_0 = \text{ínf}\{t_p : p \in K\}$.

Obsérvese que $t_0 > 0$, pues si $t_0 = 0$ entonces existe una sucesión $\{p_n\}$ de puntos de K tales que la sucesión de los números correspondientes $\{t_{p_n}\}$ tienden a cero. Se sigue de la compacidad de K que la sucesión $\{p_n\}$ contiene una subsucesión $\{p_{n_k}\}$ que converge a un punto $p_0 \in K$. De la definición de t_0, si $t_p < 1$ entonces $H(p, t_p) \in \text{Fr}(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right))$. Como $\{t_{p_{n_k}}\}$ tiende a cero como sucesión de $\{t_{p_n}\}$, se asume que $t_{p_{n_k}} < 1$ para k lo suficientemente grande, y por lo tanto $H(p_{n_k}, t_{p_{n_k}}) \in \text{Fr}(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right))$. Como la función H es continua y el conjunto $\text{Fr}(N\left(K, \frac{\varepsilon}{2}\right))$ es cerrado. Se concluye que $H(p_0, 0) \in \text{Fr}(N\left(K, \frac{\varepsilon}{2}\right))$. Lo cual contradice $p_0 \in K$. Así, la desigualdad $t_0 > 0$ se cumple.

Se sigue de la definición de t_0 que $H(K \times [0, t']) \subset \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)}$. Supóngase que existe un numero $t' \in [0, t_0]$ tal que $H(K \times \{t'\}) \setminus K \neq \emptyset$. De hecho, si $t_0 = 1$, entonces la afirmación se sigue de la suposición hecha en el principo de esta prueba. Si $t_0 < 1$, entonces se puede tomar $t' = t_0$. De hecho, existe una sucesión de puntos $p_n \in K$ tales que $t_0 \leq t_{p_n} < 1$ y $\text{lím}\, t_{p_n} = t_0$.

Nuevamente, sea $\{p_{n_k}\}$ una subsucesión de la sucesión $\{p_n\}$ que converge al punto $p_0 \in K$. Aplicando de nuevo es mismo argumento de arriba, $H(p_{n_k}, t_{p_{n_k}}) \in \text{Fr}(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right))$, así que $H(p_0, t_0) \in \text{Fr}(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right))$ y entonces el punto $H(p_0, t_0)$ no está en K.

Como K es un R-continuo, existen $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ sucesiones de componentes de $N(\varepsilon, K)$ tales que $\text{Ls}\, C_n^1 \cap \text{Ls}\, C_n^2 = K$. Como $p_0 \in K$, entonces existen dos sucesiones de puntos $\{p_n'\}$ y $\{p_n''\}$ tales que $p_n' \in C_{k_n}^1$, $p_n'' \in C_{k_n}^2$ y $\text{lím}\, p_n' = p_0 = \text{lím}\, p_n''$. Considérese $q_n' = H(p_n', t_0')$ y $q_n'' = H(p_n'', t_0')$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que existe $q \in K$ tal que $\text{lím}\, q_n' = q = \text{lím}\, q_n''$. Por como se definieron q, q_n' y q_n'', $d(q, K) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $d(q_n', K) \leq \varepsilon$ y $d(q_n'', K) < \varepsilon$, para n lo suficientemente grande. De la continuidad de H y por la conexidad de los conjuntos $\{p_n'\} \times [0, t_0']$ y $\{p_n''\} \times [0, t_0']$, los conjuntos $H(\{p_n'\} \times [0, t_0'])$ y $H(\{p_n''\} \times [0, t_0'])$ son conexos y $\text{lím}\, H(\{p_n'\} \times [0, t_0']) = \text{lím}\, H(\{p_n''\} \times [0, t_0']) = H(\{p_0\} \times [0, t_0']) \subset \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)}$. Así, para n lo suficientemente grande, $H(\{p_n'\} \times [0, t_0']) \cup H(\{p_n''\} \times [0, t_0']) \subset N(\varepsilon, K)$. De esto, $q_n' \in C_{k_n}^1$ y $q_n'' \in C_{k_n}^2$ y además, $q = \text{lím}\, q_n' = \text{lím}\, q_n'' \in \text{Ls}C_n^1 \cap \text{Ls}C_n^2 = K$, pero $q = H(p_0, t_0') \in X \setminus K$. Lo cual contradice la elección de q. Con esta contradicción se finaliza la prueba del teorema, pues surge de suponer que existe una deformación H tal que $H(K \times I) \setminus K \neq \emptyset$. Por lo tanto, K es homotópicamente fijo.

$\square$

Posteriormente en 1980, Czuba introduce en [13, Definition 1.1, 1.2

y 1.3, p. 75], 3 tipos especiales de subconjuntos en dendroides llamados R^i-continuos ($i \in \{1,2,3\}$). Cada uno de ellos generaliza el concepto de R-continuo dado por él mismo. Cabe notar, que los conceptos de R-continuo y R^1-continuo son el mismo.

A continuación se definen los R^i-continuos en cualquier continuo, aunque la definición original fue dada en dendroides.

Definición 32. Sea $K \in C(X) \setminus \{X\}$. Diremos que K es:

1. Un R^1-continuo si existe un abierto U de X que contiene a K y dos sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tales que $\operatorname{Ls} C_n^1 \cap \operatorname{Ls} C_n^2 = K$,

2. Un R^2-continuo si existe un abierto U de X que contiene a K y dos sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tal que $\lim C_n^1 \cap \lim C_n^2 = K$,

3. Un R^3-continuo si existe un abierto U de X que contiene a K y una sucesión $\{C_n\}$ de componentes de U tal que $\operatorname{Li} C_n = K$.

A continuación daremos algunos ejemplos.

Ejemplo 5. *[13, Example 3, p. 75] Sean $q = (0,1)$, $p_1 = (0,0)$, $p_2 = (0,-1)$, $p_3 = (2,0)$, $p_4 = (2,1)$, $p_5 = (2,-1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(-\frac{1}{n}, -1\right)$, $b_n = \left(0, -1-\frac{1}{n}\right)$, $c_n = \left(\frac{1}{n}, -1\right)$, $d_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ $e_n = \left(2-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$, $f_n = \left(2-\frac{1}{n}, -1\right)$, $g_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $h_n = \left(2-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $k_n = \left(2-\frac{1}{n}, 1\right)$ y sean,*

$$X_1 = qp_2 \cup p_1p_3 \cup p_4p_5,$$

$$X_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_nb_n \cup b_nc_n \cup c_nd_n \cup d_ne_n \cup e_nf_n,$$

$$X_3 = \bigcup_{n=1}^{\infty} qg_n \cup g_nh_n \cup h_nk_n$$

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

El arco $K = p_1p_3$ contenido en X es un R^1,R^2 y R^3 (ver Figura 8), pero no es un R-arco, vamos a demostrarlo.

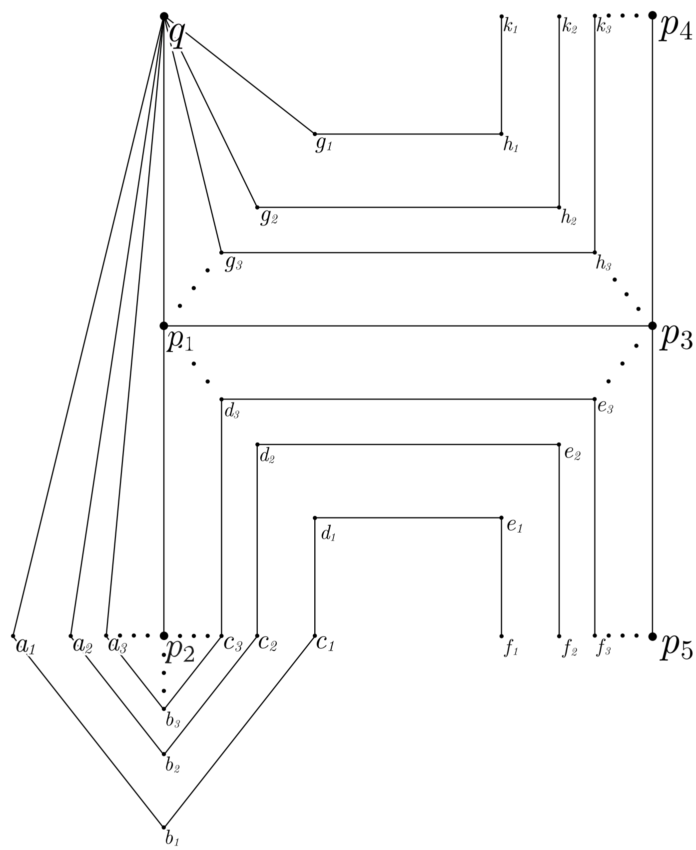

Figura 8: Continuo X

Sea U un abierto tal que $K \subseteq U$, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que $N(\varepsilon, K) \subseteq U$ y dos sucesiones $\{C_n^1\} = \{g_n d_n\}$ y $\{C_n^2\} = \{d_n e_n\}$ (es decir, las sucesiones conformadas por los arcos $g_n h_n$ y $d_n e_n$, respectivamente, ver 9), ahora, $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $C_n^1 \subseteq N(\varepsilon, K)$ y $C_n^2 \subseteq N(\varepsilon, K)$, por lo que claramente, $C_n^1 \cap N(\varepsilon, K) \neq \emptyset$ y $C_n^2 \cap N(\varepsilon, K) \neq \emptyset$. Así, que $\operatorname{Li} C_n^i = \operatorname{Ls} C_n^i = \operatorname{lím} C_n^i = K$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto $\operatorname{Ls} C_n^1 \cap \operatorname{Ls} C_n^2 = K$, $\operatorname{lím} C_n^1 \cap \operatorname{lím} C_n^2 = K$ y $\operatorname{Ls} C_n^1 = K$, por lo que K es un R^1, R^2 y R^3-continuo.

No es complicado convencerse de que K no es un R-arco, basta con resaltar que no existen sucesiones de puntos finales que cumplan la definición de R arco.

Otro ejemplo de R^i-continuo $(i = 1, 2, 3)$ es el continuo mostrado en el Ejemplo 3.

Es evidente, por lo anterior, que las propiedades de R^1, R^2 y R^3-continuo guardan una estrecha relación, incluso, podría parecer que hasta cierto punto, estamos hablando de la misma propiedad, sin embargo, existen diferencias y a lo largo de historia se han buscado ejemplos donde queden claras estas diferencias. A continuación, se darán algunos resultados que muestran la relación que tienen.

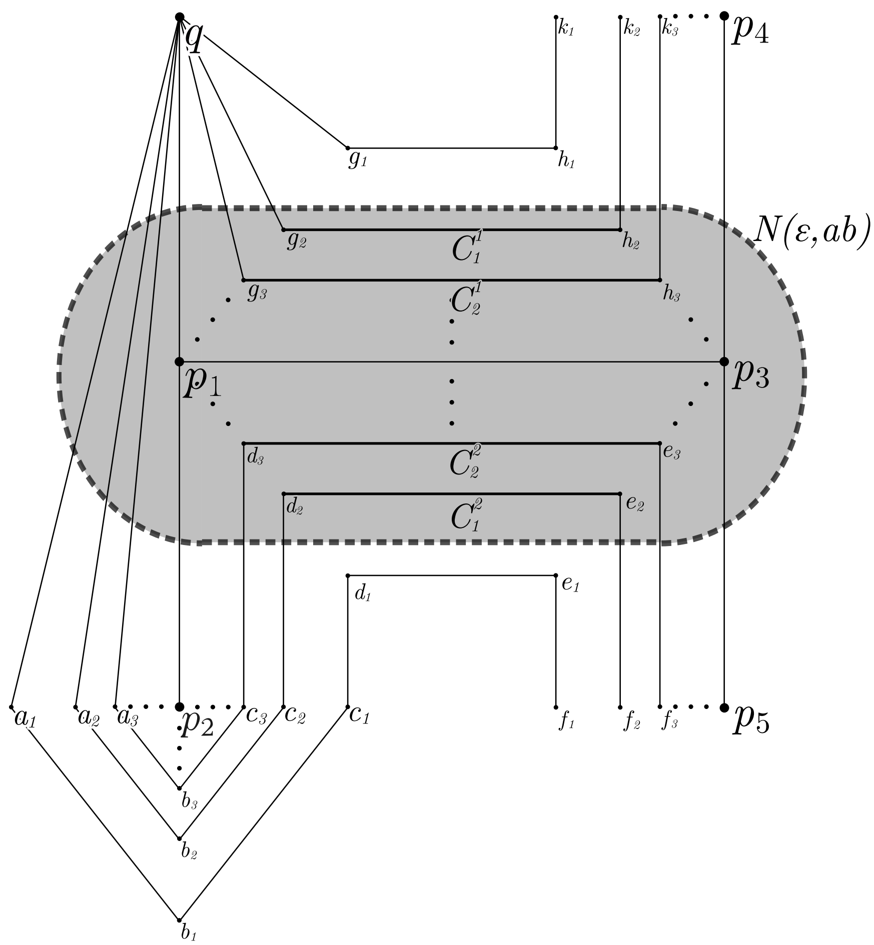

Figura 9: Continuo X

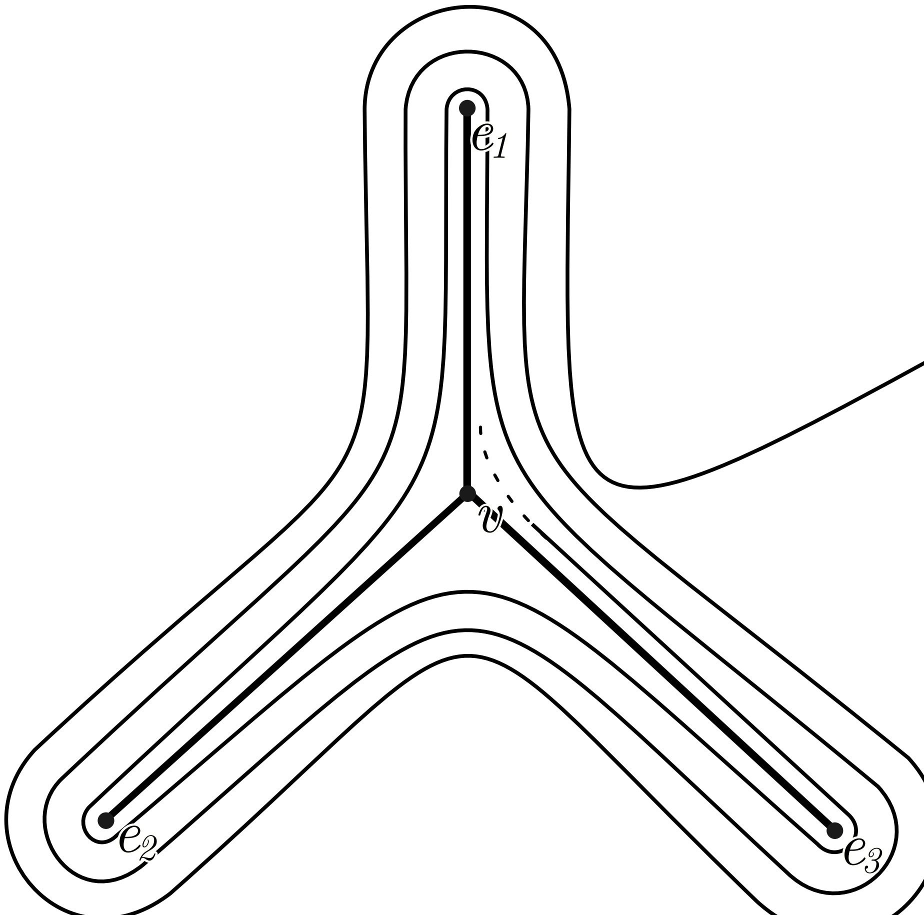

Figura 10: Continuo que contiene un R^3-continuo

Ejemplo 6. *Sea X la compactación del rayo con residuo el* 3*-odo simple con vértice v y extremos e_1, e_2 y e_3 tal como se muestra en la Figura 10. Entonces el conjunto $\{v\}$ es un R^3-continuo.*

Esto se cumple porque para $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de componentes $\{C_n\}$ de $N(\varepsilon, v)$, como se muestra en la Figura 11, tal que $\mathrm{Li}C_n = \{v\}$

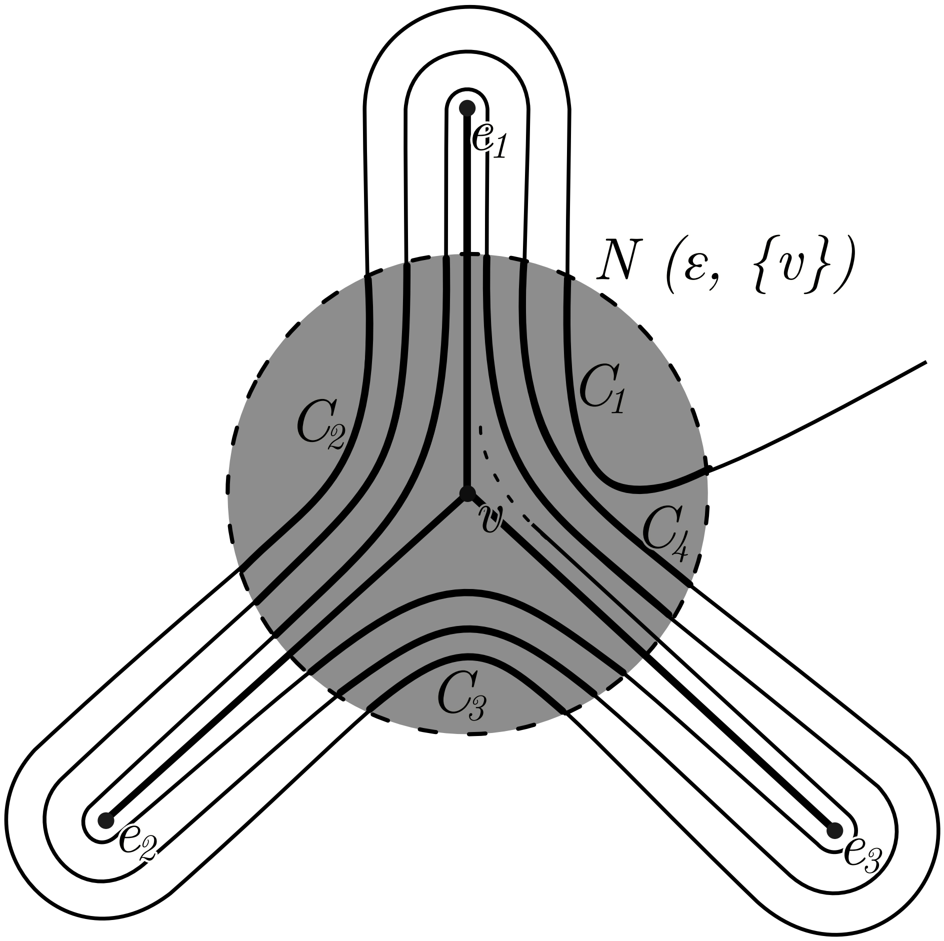

Figura 11: Continuo que contiene un R^3-continuo

Proposición 52. *[13, Proposition 5, p. 77] Cada R^2-continuo es ambos, R^1 y R^3-continuo.*

Demostración. Sea K un R^2-conjunto. Por definición, existe un abierto $U \subseteq X$ que contiene K y dos sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tales que $\lim C_n^1 \cap \lim C_n^2 = K$. Por lo tanto, $\operatorname{Li} C_n^i = \operatorname{Ls} C_n^i = \lim C_n^i$ Para $i = 1, 2$. Así que, $\operatorname{Ls} C_n^1 \cap \operatorname{Ls} C_n^2 = K$, por lo que K es un R^1-continuo.

Por otro lado, considérese la sucesión $\{C_n\}$ de componentes de U dada por $C_{2n} = C_n^1$ y $C_{2n+1} = C_n^2$. Por construcción, $\operatorname{Li} C_n = K$, por lo que K es un R^3-continuo. $\square$

Proposición 53. *[13, Proposition 2, p. 75] Cada R-arco es un R^1 (R^2 y R^3) continuo.*

Demostración. Sea X un dendroide y sea $ab \subseteq X$ un R-arco. Por definición de R-arco, existe $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones de puntos $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ tales que $\lim u_n = a$ y $\lim v_n = b$, y para casi todo $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $u_n b \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ y $v_n b \cap \overline{N(\varepsilon, ab)}$ son no conexos.

Consideremos el abierto $U = N(\varepsilon, ab)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_n^1 la componente conexa de U que contiene a u_n y sea C_n^2 la componente conexa de U que contiene a v_n. De hecho $C_n^1 = u_n u_n(\varepsilon) \setminus \{u_n(\varepsilon)\}$ y $C_n^2 = v_n v_n(\varepsilon) \setminus \{v_n(\varepsilon)\}$.

Como ab es R-arco, entonces $\lim u_n u_n(\varepsilon) \cap \lim v_n v_n(\varepsilon) = ab$. Pero

$$\lim u_n u_u(\varepsilon) = \lim u_n u_n(\varepsilon) \setminus \{u_n(\varepsilon)\} = \lim C_n^1$$

y

$$\lim v_n v_u(\varepsilon) = \lim v_n v_n(\varepsilon) \setminus \{v_n(\varepsilon)\} = \lim C_n^2$$

lo cual implica que $\lim C_n^1 \cap \lim C_n^2 = ab$.

Así ab es un R^2-continuo.

Por la Proposición 52, ab es un R^1 y R^3-continuo.

Por lo tanto, cada R-arco es R^1 (R^2 y R^3)-continuo. □

Proposición 54. *[13, Proposition 10, p. 78] Cada R^1-continuo contiene un R^2-continuo.*

Demostración. Sea X un continuo y K un R^1-continuo. Por definición existen un abierto $U \subseteq X$ que contiene K y dos sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tales que $\operatorname{Ls} C_n^1 \cap \operatorname{Ls} C_n^2 = K$.

Sea $x \in K$. Entonces existen subsucesiones $\{C_{n_k}^i\}$ de $\{C_n^i\}$, $i = 1, 2$ tales que $x \in \operatorname{Li} C_{n_k}^1 \cap \operatorname{Li} C_{n_k}^2$. Como $\operatorname{Li} C_{n_k}^i \subseteq \operatorname{Ls} C_{n_k}^i$ para cada i, entonces $K' = \operatorname{Li} C_{n_k}^1 \cap \operatorname{Li} C_{n_k}^2 \subseteq K$. Por lo tanto, K' es un R^2-continuo contenido en K. □

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de las propiedades anteriores.

Corolario 55. *[13, Corollary 11, p.78] Cada R^1-continuo contiene un R^3-continuo y si es un solo punto, entonces es ambos R^2 y R^3 continuo.*

Es de notar que W. J. Charatonik en un afán por generalizar los resultados anteriores a espacios más generales, afima que lo anterior se cumple en R^i-continuos en general dándo la siguiente proposición.

Proposición 56. *[10, Proposition 1, p.208] Si un continuo contiene un R^i-continuo, para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces contiene un R^3-continuo.*

En 1994, C. J. Rhee et al, se dan cuenta que la prueba en [10, Proposition 1, p. 208] no es correcta. Dan entonces en [31, Example C, p. 112] un ejemplo para mostrar la falsedad. Desafortunadamente, este ejemplo es incorrecto y P. Pellicer et al. en [30] muestran que [31, Example C, p. 112] no es correcto, para finalmente mostrar con un ejemplo ([30, Example 4.14, p. 17]) la falsedad de [10, Proposition 1, p. 208], mismo que expondremos a continuación.

Para el siguiente ejemplo, se utilizará la siguente notación:

Definición 33. Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Defínese el conjunto $A + x$ como
$$A + x = \{a + x : a \in A\}.$$

Definición 34. Sea $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\eta(x, y) = (x, y, 0)$. Para cada $A \in \mathbb{R}^2$ defínase $\|A\| := \eta(A)$.

Ejemplo 7. *[30, Example 4.14, p. 112] En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$, considérese el conjunto usual ternario de Cantor C contenido en $[0, 1] \times \{0\}$. Defínase*
$$K := \{(p, q) \in C \times C : p \neq q \text{ y } pq \cap C = \{p, q\}\}$$
Nótese que cada par $(p, q) \in K$ representa los puntos finales de los intervalos adyacentes al conjunto de Cantor. Para cada $(p, q) \in K$ sea $S(p, q)$ la circunferencia $\mathbb{R}^2$ donde el centro es $\frac{p+q}{2}$ y con radio $\frac{d(p,q)}{2}$.

Sea
$$Y := C \cup \bigcup_{(p,q) \in K} S(p, q).$$
Para cada punto $(p, q) \in K$ defina
$$S(p, q)^+ := \{(x, y) \in S(p, q) : y \geq 0\} \text{ y } S(p, q)^- := \{(x, y) \in S(p, q) : y < 0\}.$$
Es decir, las semicircunferencias superior e inferior de $S(p, q)$ respectivamente.

También, considérese los siguientes conjuntos:

$$K_1 := \{(p,q) \in K : d(p,q) = \frac{1}{2^{2m-1}} \text{ } \textit{para algún } m \in \mathbb{N}\},$$
$$K_2 := \{(p,q) \in K : d(p,q) = \frac{1}{2^{2m}} \text{ } \textit{para algún } m \in \mathbb{N}\},$$
$$A := C \cup \bigcup_{(p,q)\in K} S(p,q)^+,$$
$$B := C \cup \bigcup_{(p,q)\in K} S(p,q)^-,$$
$$D := C \cup \bigcup_{(p,q)\in K_1} S(p,q)^+ \cup \bigcup_{(p,q)\in K_2} S(p,q)^- \text{ } y$$
$$E := C \cup \bigcup_{(p,q)\in K_1} S(p,q)^- \cup \bigcup_{(p,q)\in K_2} S(p,q)^+.$$

Considérese los siguientes puntos en $\mathbb{R}^3$:

$$d := (0,0,0), \quad v_1 := (2,0,0), \quad a := (1,0,0) \quad y \quad v_0 := (-1,0,0)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean:

$$a_n := \left(1, \frac{1}{n}, 0\right), \quad b_n := \left(1, -\frac{1}{n}, 0\right), \quad d_n := \left(0, 0, \frac{1}{n}\right), \quad y \quad e_n := \left(0, 0, -\frac{1}{n}\right).$$

En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, defínase para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos:

$$A_n := \left\| A + \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\| + a_n \cup a_n v_1,$$
$$B_n := \left\| B + \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\| \cup b_n v_1,$$
$$D_n := (\|B\| + d_n) \cup d_n v_0 \text{ } y$$
$$E_n := (\|E\| + e_n) \cup e_n v_0.$$

Finalmente defínase el continuo X como:

$$X := \|Y\| \cup dv_0 \cup av_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n \cup D_n \cup E_n).$$

Ver Figura 12.

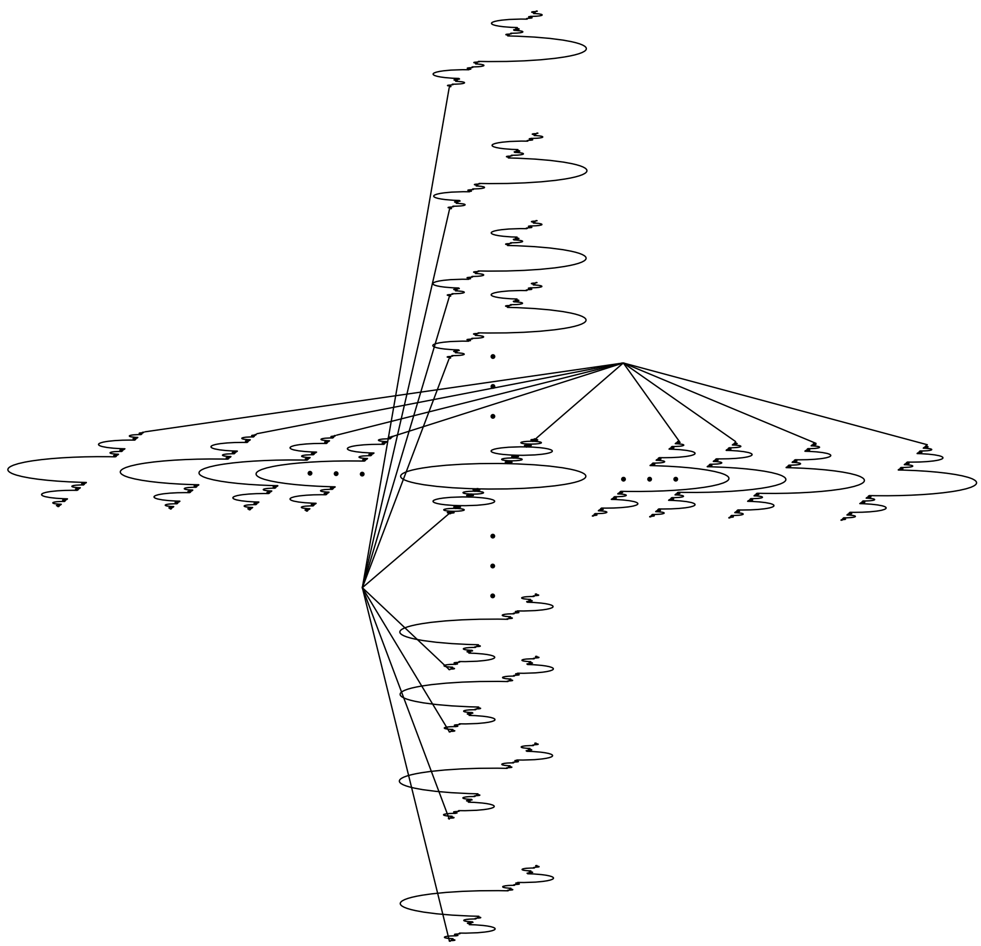

Figura 12: Ejemplo propuesto en [30, Example 4.14, p. 112]

La importancia de este ejemplo radica en que el conjunto $\overline{Y}$ es un R^1-continuo de X (el abierto que sirve para demostrar esto es $X \setminus \{v_0, v_1\}$), y $\overline{Y}$ no contiene ningún R^3-continuo. Esto, como se mencionó anteriormente, contradice la Proposición 56

Posteriormente en 1997, B. S. Baik et al, definieron en [1] los R^i-conjuntos $i \in \{1, 2, 3\}$, generalizando de esta manera las nociones de los R^i-continuos de Czuba. Aquí, en lugar de considerar en la definición de R^i-continuos un continuo K, lo sustituyen por un subconjunto cerrado cumpliendo las mismas condiciones que satisfacen los R^i-continuos, no incluiremos la definición.

Algunos resultados importantes en relación a los R^i-conjuntos son los siguientes:

Proposición 57. *[1, Theorem 2.3, p. 310] Cada R^2-conjunto es ambos: R^1-conjunto y R^3-conjunto.*

Demostración. Sea X un continuo y K un R^2-conjunto. Por definición existen un abierto $U \subseteq X$ que contiene K y dos sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tales que $\lim C_n^1 \cap \lim C_n^2 = K$. Por lo tanto, $\operatorname{Li} C_n^i = \operatorname{Ls} C_n^i = \lim\ C_n^i$ Para $i = 1, 2$.

Es inmediato que $\operatorname{Ls} C_n^1 \cap \operatorname{Ls} C_n^2 = K$, por lo que K es un R^1-conjunto.

Por otro lado, considérese la sucesión $\{C_n\}$ de componentes de U dada por

$$C_n = \begin{cases} C^1_{(n+1)/2}, & \text{si } n = 2m - 1 \text{ para algún } m \in \mathbb{N}, \\ C^2_{n/2}, & \text{si } n = 2m \text{ para algún } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Por construcción, $\operatorname{Li} C_n = K$, por lo que K es un R^3-conjunto. □

Proposición 58. *[1, Theorem 2.4, p. 310] y [1, Corollary 2.5, p. 310] Cada R^1-conjunto contiene un R^2-conjunto y como consecuencia, cada R^1-conjunto contiene un R^3-conjunto.*

Demostración. Sea X un continuo y K un R^1-conjunto. Por definición existen un abierto $U \subseteq X$ que contiene K y dos sucesiones $\{C_n^1\}$ y $\{C_n^2\}$ de componentes de U tales que $\operatorname{Ls} C_n^1 \cap \operatorname{Ls} C_n^2 = K$.

Sea $x \in K$. Entonces existen subsucesiones $\{C^i_{n_k}\}$ de $\{C_n^i\}$, $i = 1, 2$ tales que $x \in \operatorname{Li} C^1_{n_k} \cap \operatorname{Li} C^2_{n_k}$. Como $\operatorname{Li} C^i_{n_k} \subseteq \operatorname{Ls} C^i_{n_k}$ para cada i, entonces

$K' = \operatorname{Li} C^1_{n_k} \cap \operatorname{Li} C^2_{n_k} \subseteq K$. Por lo tanto, K' es un R^2-conjunto contenido en K. $\square$

Proposición 59. *[1, Example A, p. 310] y [1, Example B, p. 311] Existe un continuo con un R^1-conjunto conexo que no es un R^3-conjunto y existe un continuo con un R^3-conjunto no conexo que no es un R^1-conjunto.*

Ejemplo 8. *[1, Example A, p.310] Sea* $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$, $a = (0,1)$, $u = \left(0, \frac{3}{4}\right)$, $v = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *y* $p = (0,1)$. *Para cada número natural considérense los puntos*

$$a_n = \left(\frac{1}{n+3}, \frac{n+5}{2n+6}\right),$$

$$b_n = \left(\frac{n+5}{2n+6}, \frac{1}{n+3}\right),$$

$$p_n = \left(\frac{n+4}{2n+6}, 0\right),$$

$$c_n = \left(\frac{n+5}{2n+6}, -\frac{1}{n+3}\right),$$

$$d_n = \left(\frac{1}{n+3}, -\frac{n+5}{2n+6}\right),$$

$$f_n = \left(\frac{1}{n+3}, -\frac{3}{4}\right).$$

Y los conjuntos:

$$D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n+3}\right)^2 + \left(\frac{n+5}{2n+6}\right)^2, \frac{1}{n+3} \leq x \leq \frac{n+6}{2n+6}, \quad y \geq 0\right\}$$

y

$$E_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n+3}\right)^2 + \left(\frac{n+5}{2n+6}\right)^2, \frac{1}{n+3} \leq x \leq \frac{n+6}{2n+6}, \quad y \leq 0\right\}.$$

Sea

$$Y_1 = S \cup av \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} aa_n \cup D_n \cup b_np_n \cup p_nc_n \cup E_n \cup d_nf_n$$

y sea Y_2 la imagen simétrica de Y_1 bajo la función de simetría s con respecto al origen y sea $X = Y_1 \cup Y_2$. Entonces X es R^1-conjunto y X no es R^3-conjunto.

Para demostrar esto último, sea $U = X \setminus \{a, -a\}$ y, para cada n natural sea C_n^1 la componente de U que contiene a p_n, y C_n^2 la componente de U que contiene al punto $-p_n$.

Definamos $U' = \{(x,y) \in X : -\frac{9}{10} < x < \frac{9}{10}, \quad -\frac{9}{10} < y < \frac{9}{10}\}$ y para cada número natural n sea C_{2n+1} la componente de U' que contiene a $-a_n$ y C_{2n} la componente de U' que contiene a $-c_n$. Entonces $K = LsC_n^1 \cap LsC_n^2 = uv \cup (-u)(-v)$ es un R^1-conjunto. Pero K no es un R^3-conjunto.

Proposición 60. *[1, Example C, p. 312] Existe un continuo con un conjunto cerrado no conexo que es ambos: un R^1-conjunto y R^3-conjunto, pero no es un R^2-conjunto.*

A pesar de que las afirmaciones la Proposición 59 son ciertas, P. Pellicer en [30] muestra que [1, Example A, p. 310] y [1, Example B, p. 311] no son correctos, pues no satisfacen las propiedades requeridas. Sin embargo, P. Pellicer muestra que [30, Example 4.1, p. 13] y [30, Example 4.6, p. 14] son ejemplos correctos que cumplen con la Proposición 59.

Con respecto a la contractibilidad, en [1] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 61. *[1, Theorem 3.2, p. 315] Si un continuo X contiene un R^i-conjunto K, entonces K es homotópicamente fijo.*

Demostración. Sea $K = \mathrm{Ls}C_n^1 \cap \mathrm{Ls}C_n^2 \subseteq U$ un R^1-conjunto, donde $U = N(\varepsilon, K)$ y C_n^i son componentes de U. Supóngase, por el contrario, que existe una deformación $h : X \times [0,1] \to X$ tal que $h(K \times [0,1]) \setminus K \neq \emptyset$, es decir, una deformación para la cual existe un número $t' \in [0,1]$ tal que $h(K \times \{t'\}) \setminus K \neq \emptyset$.

Primero se mostrará que existe $t_0 > 0$ tal que $h(K \times [0,t_0]) \subseteq \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)}$ y $(p_0, t') \in K \times [0, t_0]$ tal que $h(p_0, t') = q \in X \setminus K$. Para cada punto $p \in K$, sea $t_p = \sup\{t \in [0,1] : h(\{p\} \times [0,t]) \subseteq N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)\}$, y sea $t_0 = \inf\{t_p : p \in K\}$. Nótese que $t_0 > 0$. De hecho, si $t_0 = 0$, entonces existe una sucesión $\{p_n\}$ de puntos de K tales que la sucesión $\{t_{p_n}\}$ de números correspondientes contiene una subsucesión $\{t_{p_{n_k}}\}$ que converge a cero. De la compacidad de K, la sucesión $\{p_n\}$ contiene una subsucesión $\{p_{n_k}\}$ que converge a $p_0 \in K$. Por la definición de t_0, si $t_p < 1$, entonces $h(p, t_p) \in \mathrm{Fr}\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)\right)$. Como

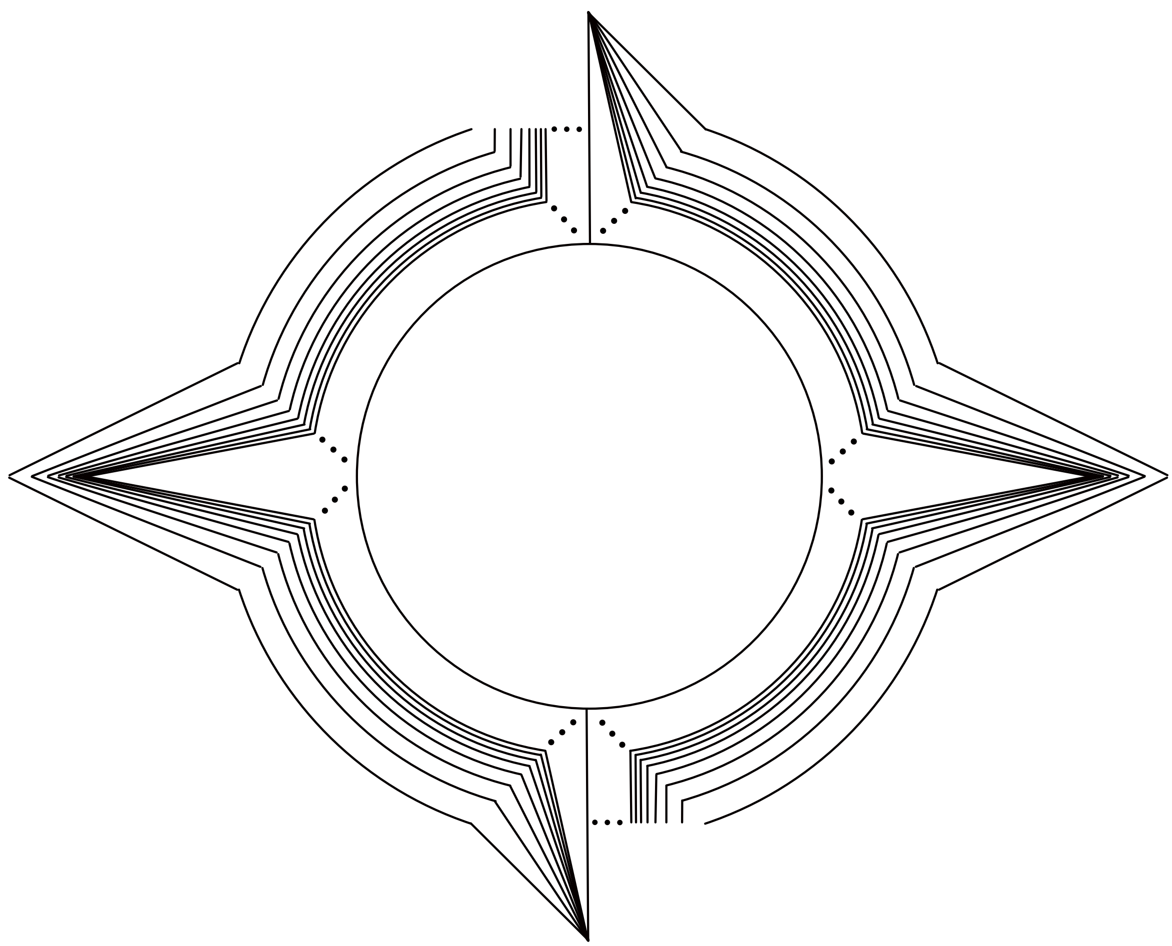

Figura 13: R^1-conjunto que no es R^3-conjunto

la función h es continua y el conjunto $\operatorname{Fr}\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)\right)$ es cerrado, se concluye que $h(p_0, 0) \in \operatorname{Fr}\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)\right)$. Pero como h es una deformación, $h(p_0, 0) = p_0$, $p_0 \in \operatorname{Fr}\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)\right)$ lo cual contradice $p_0 \in K$. Así la desigualdad $t_0 > 0$ está establecida. Por la definición de t_0 se sigue que $h(K \times [0, t_0]) \subseteq \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)}$.

Ahora se probará que existe un número $t' \in [0, t_0]$ tal que $h\left(K \times \{t'\}\right) \setminus K \neq \emptyset$. Para verlo, si $t_0 = 1$, entonces $h(K \times [0,1]) \subseteq \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)}$ así que existe $t' \in [0,1]$ tal que $h(p_0, t') = q \in \overline{N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)} \cap (X \setminus K)$. Si $t_0 < 1$, entonces se toma $t' = t_0$. De aquí, existe una sucesión de puntos $\{p_n\}$ de K tal que $t_0 < t_{p_n} < 1$ y $t_0 = \lim t_{p_n}$. Como antes, sea $\{p_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{p_n\}$ que converge a $p_0 \in K$. Aplicando una vez más el mismo argumento de arriba, $h(p_{n_k}, t_{p_{n_k}}) \in \operatorname{Fr}\left(N\left(\frac{\varepsilon}{2}, K\right)\right)$ y así el punto $k \notin K$. Por lo tanto, sea $t' = [0, t_0]$ cualquier número tal que $h\left(K \times \{t'\}\right) \setminus K \neq \emptyset$ y sea $p_0 \in K$ tal que $h(p_0, t') \notin K$. Póngase que $h(p_0, t') = q$ y defínase $t_0' = \inf\{t' \in [0, t_0] : h(p_0, t') = q\}$. Por la continuidad de h, $h(p_0, t_0) = q \in X \setminus K$. Sea K un R^1-conjunto, y además $p_0 \in K$ y $t_0' \in [0, t_0]$ son tales que $h(p_0, t_0) = q \in X \setminus K$. Sea $\{p_n^i\} \in C^i_{K_n}$, las sucesiones tales que $\lim p_n^i = p_0$ para algún $i = 1, 2$. Y sea $q_n^i = h(p_n^i, t_0^i)$ para $i = 1, 2$. Entonces $\lim p_n^i = p_0$ para cada. Por la definición de q y q_n^i, $d(q, K) < \frac{\varepsilon}{2}$ para n lo suficientemente grande y para cada $i = 1, 2$. De la continuidad de h y la compacidad de los conjuntos $\{p_n^i\} \times [0, t_0]$, $i = 1, 2$, los conjuntos $h(p_n^i[0, t_0'])$, $i = 1, 2$, son conexos y $\operatorname{Ls} h(\{p_n^i\} \times [0, t_0]) = h(\{p_0 \times [0, t_0']\}) \subseteq \overline{N(\varepsilon, K)}$, para $i = 1, 2$. Para n lo suficientemente grande $h(\{p_n^i\} \times [0, t_0]) \subseteq N(\varepsilon, K)$. Como $p_n^i = h(p_n^i, 0) \in C^i_{k_n}$ y $h(\{p_n^i\} \times [0, t_0'])$ es un subconjunto conexo de $N(\varepsilon, K)$, $q_n^i \in C^i_{k_n}$ y $q = \lim q_n^i \in K$, pero $q \in X \setminus K$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, K es homotópicamente fijo.

$\square$

Como consecuencia de ello, un continuo que contiene un R^i-conjunto es no contráctil (Ver [1, Corollary 3.3, p. 317]).

En 2018, F. Capulín et al, generalizan este resultado para pseudo-contractibilidad dando el siguiente resultado:

Teorema 62. *[7, Theorem 4.3, p. 366] Sea X un continuo. Si X contiene un R^i-conjunto, $i = 1, 2, 3$, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Demostración. Como cada R^2-conjunto es un R^3-conjunto y cada R^1-conjunto contiene un R^3-conjunto, entonces es suficiente hacer la demostración para R^3-conjuntos. Sea K un R^3-conjunto de X. Por definición, existen un abierto $U \subseteq X$ que contiene a K y una sucesión $\{C_n\}$ de componentes de U tal que $\operatorname{Li} C_n = K$. Como $K \subseteq U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $H(K, X \setminus U) > \varepsilon$.

Supóngase que existen Y un continuo, $a, b \in Y$ y $H : X \times Y \to X$ que cumplen con la definición de pseudo-contractibilidad; es decir, que $H(x, a) = x$, y $H(x, b) = x_0$ para un $x_0 \in X$ y para todo $x \in X$. Como H es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $\operatorname{diam}(K) < \delta$, entonces $\operatorname{diam}(H(K \times \{y\})) < \varepsilon$, para cada $y \in Y$.

Ahora, considérese el conjunto $P = \{c, c_1, c_2, \ldots\} \subseteq U$ donde $c \in K$ y $c_i \in C_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\lim c_i = c$. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que $\operatorname{diam}(P) < \delta$. Sea $V = \{y \in Y | H(P \times \{y\}) \subseteq U\}$. El conjunto V satisface lo siguiente:

- $V \neq \emptyset$, pues $a \in V$.
- $V \neq Y$, pues si $V = Y$, entonces $b \in V$ y $H(P \times \{b\}) = \{x_0\} \subseteq U$. Si C es la componente de U tal que $x_0 \in C$, entonces considérese las componentes C_j de U tales que $C_j \neq C$. Como $c_j \in C_j$, $H(\{c_j\} \times Y) \subseteq U$ y $H(\{c_j\} \times Y)$ es un conjunto conexo que contiene a x_0 y c_j, lo cual es una contradicción.
- V es abierto en Y, por la continuidad de H.

Sea V_0 una componente de V tal que $a \in V_0$. Como $H(\{c_i\} \times V_0)$ es un conjunto conexo que contiene a c_i, entonces $H(\{c_i\} \times V_0) \subseteq C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En otras palabras, $H(c_i, y) \in C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $y \in V_0$.

Como $\lim H(c_i, t) = H(c, t)$, entonces $H(c, t) \in \lim C_i = K$ para todo $y \in V_0$.

Por otro lado, si $y_0 \in \operatorname{Fr}(V_0)$, existe una sucesión $\{y_n\} \subseteq V_0$ tal que $\lim y_n = y_0$. Así que, $\lim H(c, y_n) = H(c, y_0) \in K$, pues K es un conjunto cerrado.

Por último, como V_0 es una componente del conjunto V, por el Teorema 6, $\overline{V_0} \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset$. Sea $y' \in \overline{V_0} \cap (Y \setminus V)$. Entonces $y' \in \operatorname{Fr}(V_0) \setminus V$, es decir, $H(P \times \{y'\}) \nsubseteq U$; de modo que, existe $d \in P$ tal que $H(d, y') \notin U$, pero $H(c, y') \in K$. Por lo tanto $d(H(c, y'), H(d, t')) > \varepsilon$, una contradición, pues $c, d \in P$ y $\operatorname{diam}(P) < \varepsilon$. Así, X no es pseudo-contráctil.

$\square$

Finalmente, D. Maya et al, introducen el concepto de R^4-continuo, mostrando, entre otras cosas, la relación que tiene con los R^i-conjuntos y con la pseudo-contractibilidad.

Veamos con un poco más detenimiento este nuevo concepto y alguna de sus relaciones con otros "personajes topológicos".

Primero presentaremos algunas definiciones y notaciones previas para definir lo que es un R^4-continuo.

Definición 35. Sea $p \in X$, un elemento $A \in C(p, X)$ es *admisible* en p, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cada $y \in B(\delta, p)$ está en algún subcontinuo B de X con $H(A, B) < \varepsilon$.

Definición 36. Para cada $x \in X$, la colección

$$a(x) = \{A \in C(x, X) : A \text{ es admisible en } x\}$$

es llamada la *fibra admisible* en x.

Para un subcontinuo R, un punto $p \in R$ y $\varepsilon > 0$ definimos el siguiente conjunto.

$$\Delta(p, R, \varepsilon) = \left\{ \delta > 0 : \begin{array}{c} \text{cada } q \in B(\delta, p) \text{ está en algún } M \in a(q) \\ \text{que cumple que } H(R, M) < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Es de notarse que si $\delta \in \Delta(p, R, \varepsilon)$, entonces $(0, \delta) \subseteq \Delta(p, R, \varepsilon)$ y que $\Delta(p, \{p\}, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Esto último porque para $p, q \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $q \in B(\varepsilon, p)$ podemos considerar $M = \{q\}$, que es un subcontinuo de X tal que $\{q\} \in a(q)$, pues para cada $\varepsilon' > 0$, existe $\delta' = \varepsilon'$ tal que cada $y \in B(\delta', q)$ está en el subcontinuo $\{y\}$ de X y $H(\{p\}, \{y\}) = d(p, y) < \delta' = \varepsilon'$. Así que si $\delta = \varepsilon$, entonces $\delta \in \Delta(p, \{p\}, \varepsilon)$.

Ahora consideremos U un subconjunto abierto de X y $p \in U$. Definimos

$$\mathcal{A}(p, U) = \{R \in C(p, X) : R \subseteq U \text{ y } \Delta(p, R, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ para cada } \varepsilon > 0\}.$$

El siguiente resultado muestra una manera de determinar cuando un elemento pertenece a $\mathcal{A}(p, U)$

Teorema 63. *[4, Theorem 3.1, p. 3] Sean U un abierto de X y $p \in U$. Sea $B \in C(p, X)$ tal que $B \subseteq U$. Entonces $B \in \mathcal{A}(p, U)$ si y sólo si para cada sucesión que converge a p, existe una sucesión creciente $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ y una sucesión $\{B_k\} \subseteq C(X)$ tal que $B_k \subseteq a(q_{n_k})$ y la sucesión $\{B_k\}$ converge a B.*

Lema 64. *[4, Lemma 3.2, p. 3] Sean U un subconjunto abierto de X y $p \in X$. Sea $K \in 2^X$ tal que $K \subseteq U$. Si cada $D \in \mathcal{A}(p, U)$ satisface que $D \subseteq K$, entonces $\mathcal{A}(p, U)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$.*

A continuación definiremos lo que es un R^4-continuo.

Definición 37. Un subcontinuo K de X es llamado R^4-*continuo* si existen un abierto $U \subset X$ y $p \in U$ tal que $p \in K \subseteq U$ y K es un elemento maximal en el conjunto ordenado $(\mathcal{A}(p, U), \subseteq)$.

A continuación se muestra que existe un continuo con un R^4-continuo que no es un R^3-conjunto ni tiene R^i-conjuntos y un continuo que contiene un R^3-conjunto que no es un R^4-continuo.

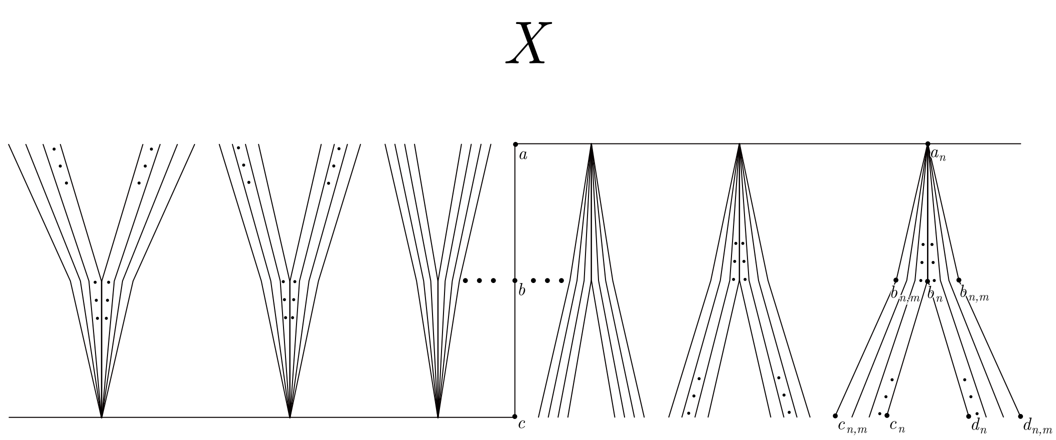

Figura 14: El conjunto unipuntal $\{b\} \subseteq X$ es un R^4-continuo y X no tiene R^i-conjuntos $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ejemplo 9. *[4, Example 3.12, p. 7] En el plano Euclidiano, sean*

$$a = (0, 1),$$

$$b = (0, 0),$$

$$c = (0, -1)$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$, sean

$$a_n = (2^{-3n}, 1),$$

$$b_n = (2^{-3n}, 0),$$

$$c_n = (2^{-(3n+1)}, -1),$$

$$d_n = (2^{-(3n-1)}, -1).$$

Para $n, m \in \mathbb{N}$, sean

$$b_{n,m} = (2^{-3n}(1 - 2^{-(m+3)}), 0),$$

$$b'_{n,m} = (2^{-3n}(1 + 2^{-(m+3)}), 0),$$

$$c_{n,m} = (2^{-(3n+1)}(1 - 2^{-(m+3)}), -1),$$

$$d_{n,m} = (2^{-(3n-1)}(1 + 2^{-(m+3)}), -1).$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$; además, para cada n fijo $\lim\limits_{m\to\infty} b_{n,m} = b_n$, $\lim\limits_{m\to\infty} b'_{n,m} = b_n$, $\lim\limits_{m\to\infty} c_{n,m} = c_n$ y $\lim\limits_{m\to\infty} d_{n,m} = d_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$Q_n = a_n b_n c_n \cup b_n d_n \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} a_n b_{n,m} c_{n,m} \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} a_n b'_{n,m} d_{n,m} \right).$$

Donde $a_n b_n c_n$ representa la línea quebrada que conecta a a_n, b_n y c_n. Así, defínase $Y = aa_1 \cup ac \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n \right)$ y sea Y' la imagen simétrica de Y con respecto al origen b. Finalmente podemos definir $X = Y \cup Y'$ (ver Figura 14). Para todo $U \subseteq X$ abierto y cada sucesión de componentes$\{C_n\}$ de U, $(Li\, C_n) \setminus U \neq \emptyset$. Por lo que X no tiene R^i-conjuntos.

Consideremos el abierto $U = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap X$, U es un abierto de X que contiene a b. Para probar que $\mathcal{A}(b, U) = \{\{b\}\}$, supongamos que existe $D \in C(b, X)$ con $\{b\} \subset D \subseteq U$. Sin pérdida de generalidad, D intersecta a $bc \setminus \{b\}$. Como $\{b_n\}$ converge a b y para cada b_n la fibra admisible $a(b_n)$ consiste en subcontinuos contenidos en $a_n b_n$ o que contienen a a_n. Si se toma una sucesión convergente $\{D_k\}$ con $D_k \in a(b_{n_k})$ para todo $k \in \mathcal{N}$, entonces $\lim D_k$ contiene a a o está contenido en ab. Por lo que, por [4, Theorem 3.1, p. 4], $D \notin \mathcal{A}(b, U)$. Así $\mathcal{A}(b, U) = \{\{b\}\}$ y $\{b\}$ es un elemento maximal. Por lo tanto, $\{b\}$ es un R^4-continuo.

Ejemplo 10. *[4, Example 3.13, p. 6] En el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^3$ sean $w = (0, 2^{-1}, 0)$, $e = ((0, -2^{-1}, 0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $w_n = (0, 2^{-1}, -n^{-1})$ y $e_n = (0, 2^{-1}, n^{-1})$. Entonces $\lim w_n = w$ y $\lim e_n = e$. Sea X el continuo descrito en Ejemplo 9. Denotamos por $\hat{x}$ al punto $(x_1, x_2, 0)$. El continuo*

$$W = (X \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{a} e_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{c} w_n \right)$$

es una dendrita, donde a y c son como en el Ejemplo 9 (ver Figura 15).

Sea $K = ew$. Para probar que K es un R^3-conjunto, consideremos el abierto $U = ((-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1)) \cap W$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

- $C_{2n-1} = (\hat{c} w_n) \setminus \{\hat{c}\}$ *(el segmento que une a $\hat{c}$ con w_n sin el punto $\hat{c}$).*
- $C_{2n} = (\hat{a} e_n) \setminus \{\hat{a}\}$ *(el segmento que une a $\hat{a}$ con e_n sin el punto $\hat{a}$).*

Estos conjuntos son componentes de U porque $\hat{c}$ y $\hat{a}$ no están en U y para cualquier punto $x \in K$, cualquier abierto que contenga a x intersecta a casi todos los C_n, por lo que $Li\, C_n = K$. Por tanto, K es un R^3-conjunto.

Para demostrar que K no es un R^4-continuo, sea V un abierto propio tal que $K \subseteq V$ y sea $q \in K$. Sin pérdida de generalidad, sea $q \in \hat{a}\hat{b}$. Existe una sucesión $\{q_n\}$ en W que converge a q tal que $q_n \in \hat{a}\hat{b}$ para cada n.

Para cada q_n, la fibra admisible $a(q_n)$ consiste de subcontinuos contenidos en $\hat{a}_n \hat{b}_n$ y subcontinuos que contienen a $\hat{a}_n$. Ahora, sea $\{n_k\}$ una sucesión creciente en $\mathbb{N}$, si $\{D_k\}$ es una sucesión convergente en $C(W)$ con D_K tal que $D_K \subseteq a(q_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, si $\lim D_k \subseteq \hat{a}_{n_k} \hat{b}_{n_k}$, entonces $\lim D_k \subseteq \hat{a}\hat{b}$, pero $\hat{a}\hat{b}$ no está contendio en K, así que $\hat{a} \in (\lim D_k) \setminus K$ si D_k contiene a $\hat{a}_{n_k}$, entonces $\lim D_k$ contiene a $\hat{a}$, así que en ambos casos $\hat{a} \in (\lim D_k) \setminus K$. De aquí y de [4, Theorem 3.1, p. 4] se siguese sigue que $K \notin \mathcal{A}(q, V)$.

Por último, por el Teorema 65 se puede garantizar que K contiene R^4-continuos, pero, como K no es un R^4-continuo, cada R^4-continuo de W es un subconjunto propio de K.

Por lo tanto, K es un continuo con un R^3-conjunto que no es un R^4-continuo.

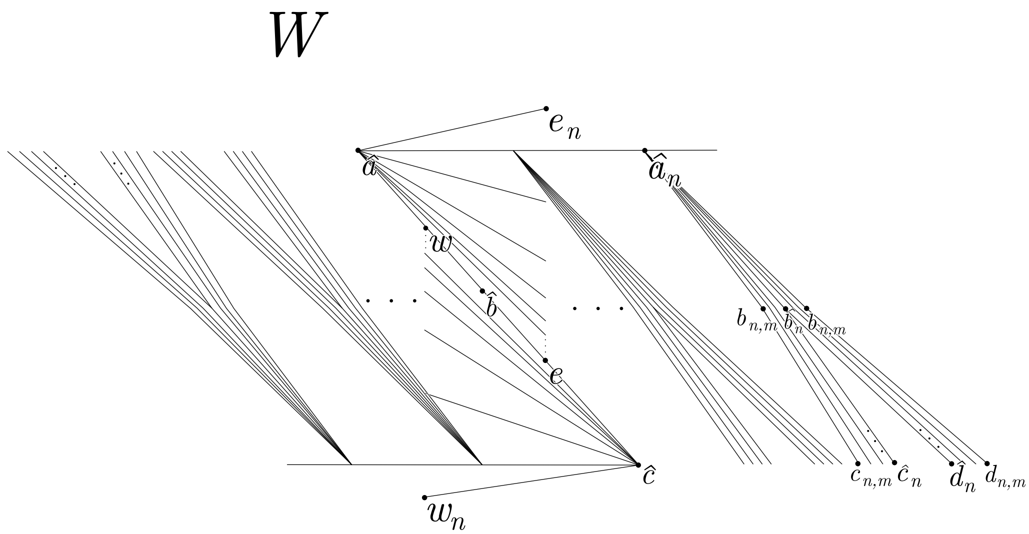

Figura 15: Ejemplo de un continuo con un R^3-conjunto que no es un R^4-continuo.

El siguiente resultado muestra una relación entre los R^3-conjuntos y los R^4-continuos

Teorema 65. *[4, Theorem 3.9, p.4] Si K es un R^3-conjunto, entonces $K \subseteq X$ contiene un R^4-continuo de X*

Demostración. Sea U un subconjunto abierto de X y sea $\{C_n\}$ una sucesión de componentes de U tal que $K = \mathrm{Li}\,(C_n)$ y $K \subseteq U$. Tomemos $p \in K$ y $L \in \mathcal{A}(p, U)$. Demostremos que $L \subseteq K$.

Sea $z \in L$ y W un subconjunto abierto de X tal que $z \in W$. Dado que $L \subseteq U$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $N(\varepsilon, L) \subseteq U$ y $B(\varepsilon, z) \subseteq W$. El hecho de que $L \in \mathcal{A}(p, U)$ implica la existencia de $\delta \in \Delta(p, L, \varepsilon)$, esto significa que para cada $q \in B(\varepsilon, p)$ existe $M \in a(q)$ tal que $H(L, M) < \varepsilon$. Como $p \in \mathrm{Li}\, C_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\delta, p) \cap C_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Tomemos $m \geq N$ y $y \in B(\delta, p) \cap C_m$, como $\delta \in \Delta(p, L, \varepsilon)$, existe $B \in a(y)$ tal que $H(B, L) < \varepsilon$. Por esto último, $B \subseteq N(\varepsilon, L)$ y $L \subseteq N(\varepsilon, B)$.

Como B es conexo y $B \subseteq U$ (pues $B \subseteq N(\varepsilon, L)$ y $N(\varepsilon, L) \subseteq U$), dado que $B \cap C_m \neq \emptyset$ y C_m es una componente conexa de U, entonces B está contenido en C_m.

Como $z \in L$ y $L \subseteq N(\varepsilon, B)$, entonces $B(\varepsilon, z) \cap B \neq \emptyset$. Pero, $B \subseteq C_m$, así que $B(\varepsilon, z) \cap C_m \neq \emptyset$. Y como $B(\varepsilon, z) \subseteq W$ se concluye que $W \cap C_m \neq \emptyset$ y dado que $m \geq N$, entonces $z \in \mathrm{Li}\, C_n = K$. Por el Lema 64, obtenemos que $\mathcal{A}(p, U)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$ y aplicando [16, Maximum-Minimun Theorem, p. 110] se concluye que existe un elemento maximal de $\mathcal{A}(p, U)$. Dado que $L \in \mathcal{A}(p, U)$ está contenido en K, X contiene un R^4-continuo contenido en K.

□

Como consecuencia inmediata, si K es un R^3-conjunto degenerado, entonces K es un R^4-conjunto ([4, Corollary 3.10, p. 4]) y si X contiene un R^i-conjunto, $i \in \{1, 2, 3\}$ entonces X contiene un R^4-continuo ([4, Corollary 3.11, p. 4]).

De lo anterior podemos formular las siguientes preguntas.

Pregunta 8. ¿Existirá un abanico con un R^3-conjunto conexo que no sea un R^4-continuo?

Pregunta 9. ¿Existirá un abanico con un R^4-continuo sin R^i-conjuntos?

Esto equivale a las siguientes preguntas.

Pregunta 10. ([4, Question 3.14, p. 7]) ¿Cada R^4-continuo en un abanico es un R^3-conjunto?

Pregunta 11. ([4, Question 3.15, p. 7]) ¿Cada R^3-continuo en un abanico es un R^4-continuo?

Lema 66. *[4, Lemma 4.2, p. 8] Sean T un continuo, $a \in T$, $k \in C(X)$ y $M \in C(a, T)$. Si $h : X \times T \to X$ en una función continua tal que $h(x, a) = x$ para cada $x \in X$, entonces la función $G : X \to C(X)$ definida por $G(x) = h(\{x\} \times M)$ es una función continua tal que $G(x) \in a(x)$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Por [16, Lemma 13.3, p. 106] la función h induce a la función $C(h) : C(X \times T) \to C(X)$ definida por $C(h)(L) = h(L)$. Definamos ahora una función $f : X \to C(X \times T)$ dada por $f(x) = x \times M$. No es difícil converserse de que f es continua. De esta manera, $G = C(h) \circ f$ es continua.

Por otra parte, observemos que como $h(x, a) = x$ y $a \in M$, entonces $G(x) \in C(x, X)$ para cada $x \in X$. De la continuidad de G, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in B(\delta, x)$, entonces $H(G(q), G(x)) < \varepsilon$, lo que prueba que $G(x) \in a(x)$ para cada $x \in X$. □

Ahora probaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 67. *[4, Theorem 4.3, p. 9] Si un continuo X contiene un R^4-continuo, entonces X no es pseudo-contráctil.*

Demostración. Sean K un R^4-continuo de X, U un subcontinuo abierto de X y $p \in U$ tales que $p \in K \subseteq U$ y K es el elemento máximo del conjunto ordenado $(\mathcal{A}(p, U), \subseteq)$.

Para la prueba procedamos por contradicción. Supongamos que X es pseudo-contráctil y que el punto z al cual se pseudo-contrae está en $X \setminus K$. De aquí, existe un continuo T, puntos $a, b \in T$ y una función continua $h : X \times T \to X$ tal que $h(x, a) = x$ y $h(x, b) = z$ para toda $x \in X$.

Definamos el conjunto $\mathcal{B} = \{B \in C(a, T) : h(\{p\} \times B\}) \subseteq K\}$. Observemos que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pues $h(\{p\} \times \{a\}) \subseteq K$. Mostraremos primero que $\mathcal{B}$ es abierto y cerrado en $C(a, T)$. Para mostrar que $\mathcal{B}$ es cerrado en $C(a, T)$, sea $\{B_n\}$ una sucesión en $\mathcal{B}$ que converge a $L \in C(X)$. Como cada $B_n \in \mathcal{B}$, entonces $a \in L$ y $h(\{p\} \times B_n) \subseteq K$. Aplicando [22, Formula 2, p. 339] se sigue que $h(\{p\} \times L) \subseteq K$. De donde se concluye que $\mathcal{B}$ es cerrado. Para probar ahora que $\mathcal{B}$ es abierto, tomemos $B \in \mathcal{B}$. Esto implica que $\{p\} \times B \subseteq h^{-1}(U)$. Por el Lema del Tubo [26, Lemma 26.8, p. 191], existe un abierto V de T tal que $B \subseteq V$ y $\{p\} \times V \subseteq h^{-1}(U)$. Así, existe $r > 0$ tal que $N(r, B) \subseteq V$. Sea $M \in B_H(r, B) \cap (a, T)$. Tomemos una función $G : X \to C(X)$ definida por $G(x) = h(\{x\} \times M)$. Mostraremos que $G(p) \in \mathcal{A}(p, U)$. Notemos primero que $G(p) \subseteq U$. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Lema 66, existe $\delta > 0$ tal que si $q \in B_\delta(p)$, entonces $G(q) \in a(q)$ y es tal que $H(G(p), G(q)) < \varepsilon$. De esta manera, $G(p) \in \mathcal{A}(p, U)$.

Del hecho de que K es el máximo de $\mathcal{A}(p, U)$, se sigue que $G(p) \subseteq K$. Por lo que $\mathcal{B}$ es un conjunto abierto de $C(a, T)$. Por la conexidad de $C(a, T)$, tenemos que $C(a, T) = \mathcal{B}$. De esta manera, $h(\{p\} \times T) \subseteq K$. Así, $Z = h(p, b) \in K$, lo cual contradice la elección de Z. Por lo que estuvo mal suponer que X es pseudo-contráctil. Por lo tanto, X no es pseudo-contráctil. $\square$

Referencias

[1] B. S. Baik, K. Hur, Ch. J. Rhee, R^i-sets and contractibility, *J. Korean Math. Soc.* **34**(2) (1997) 309–319.

[2] D. P. Bellamy, A null pseudo-homotopic map onto a pseudo-arc, *Topol. Proc.* **11** (1986) 1–5.

[3] F. Capulín, E. Castañeda-Alvarado, L. Juárez-Villa, D. Maya, Pseudo-homotopies between maps on g-growth hyperspaces of continua, *Colloq. Mat.* **170** (2022) 41 – 64.

[4] F. Capulín, M. Flores-González, D. Maya, F. Orozco-Zitli, R^4-continua and pseudo-contractibility, *Topol. Appl* **334** (2023).

[5] F. Capulín, D. Maya, F. Orozco-Zitli, Connectedness of $C(X,Y)$ and its interrelation with the pseudo-contractibility, *Preprint* (2024).

[6] F. Capulín, L. Juárez-Villa, F. Orozco-Zitli, General properties of pseudo-contractibility, *Topol. Appl.* **247** (2018) 57–71.

[7] F. Capulín, L. Juárez-Villa, F. Orozco-Zitli, Ri-sets, pseudo-contractibility and weak contractibility on hyperspaces of continua, *Glas. Mat.* (2018).

[8] J. H. Case, R.E. Chamberlin, Characterizations of tree-like continua, *Pac. J. Math.* **10** (1960) 73 – 84.

[9] J. J. Charatonik, Z. Grabowski, Homotopically fixed arcs and the contractibility of dendroids, *Fund. Math.* **100** (1976) 229–237.

[10] J. J. Charatonik, R^i-continua and hyperespaces, *Topol. Appl.* **23**(3) (1986) 207–216.

[11] W. J. Charatonik, R.P. Roe, Inverse limits of continua having trivial shape, *Houst. J. Math.*, **53**(4) (2012) 1307 – 1312

[12] S. T. Czuba, R-continua and contractibility of dendroids, *Polska Akademia Nauk,* **27**(3-4) (1978) 299–302.

[13] S. T. Czuba, R^i-continua and contractibility, *Proc. Inter. Conf. on Geo. Topol.* (1980) 75–79.

[14] W. Debski, Pseudo-contractibility of the $sin(1/x)$ curve, *Houston J. Math.* **20**(2) (1994) 965–367.

[15] A. Illanes, Pseudo-homotopies of the pseudo-arc, *Comm. Math. Univ. Carol.* **53**(4) (2012) 629–635.

[16] A. Illanes, S. B. Naddler, Hyperespaces: Fundamentals an Recent Advances, *Marcel Dekker, Inc.* (1999).

[17] H. Katsuura, Pseudocontraction and homotopy of the $\sin(1/x)$ curve, (1992).

[18] K. Kawamura, Each map from the Cantor set to the pseudo-arc is null pseudo-homotopic, *Topol. Proc.* **14** (1987) 239–247.

[19] J. L. Kelley, Hyperspaces of a continuum, *Trans. Amer. Math. Soc* (1942).

[20] J. Krasinkiewicz, Curves which are continuous images of tree-like continua are movable *Fundam. Math.* **89**(3) (1975) 233 – 260.

[21] J. Krasinkiewicz, On the hyperspaces of snake-like and circle-like continua *Fundam. Math.* **84** (1974) 155 – 164.

[22] K. Kuratowski, Topology: Volume I (Vol. 1), *Elsevier* (2014).

[23] W. Lewis, Continuum theory problems, Proceedings of the 1983 topology conference, *Topol. Proc.* **8**(2) (1983) 361–394.

[24] S. Macías, S. B. Nadler Jr., On hereditary decomposable homogeneous continua, *Topol. Proc.* **33** (2009) 131 – 145.

[25] E. Michael, Topologies on spaces of subsets, *University of Chicago* (1951) 152 – 182.

[26] J. R. Munkres, Topology, vol.2, *Prentice Hall, Upper Saddle River* (2000).

[27] S. B. Nadler, Hyperespaces of sets, *Monogr. Textbooks Pure Appl. Math.* **49** (1978).

[28] S. B. Nadler, Continuum Theory: An Introduction, *Marcel Dekker, Madison Avenue, New York, USA* (1992).

[29] E. M. Pearl, Open Problems in Topology II, *Elsevier* (2011).

[30] P. Pellicer-Covarrubias, C. Solís-Said, P. Vázquez-Cárdenas, Examples and corrections concerning R^i-sets, *Topol. Appl.* **338** (2023).

[31] C. J. Rhee, W-regular convergence of R^i-c *Topol. Appl.* **64**(1) (1995) 75–83.

[32] M. Sobolewski, Pseudo-contractibility of chainable continua, *Topol. Appl.* (2007) 2983–2987.

[33] G. T. Whyburn, Pseudo-contractibility of chainable continua, *Topol. Appl.* **154**(16) (2007) 2983 – 2987.