



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

PLANTEL NEZAHUALCÓYOTL

Matemáticas

Trigonometría

Elaborado por: M. en A. Pedro Libien Jiménez

Octubre 2016

Módulo II

Ángulos y Triángulos



Propósito del Módulo:

- ▶ Analiza los ángulos y triángulos para poder identificarlos y relacionarlos con su entorno, a la vez que resuelve situaciones problema.

Tema:

- ▶ **2.6. Triángulos Oblicuángulos**
- ▶ **2.6.1.** Ley de Senos y Ley de cosenos.
- ▶ **2.6.2** Solución de triángulos oblicuángulos y aplicaciones.

Dominio de los aprendizajes:

5

► Conceptual:

- Identifica las leyes de senos y cosenos.

► Procedimental:

- Aplica las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas que involucren triángulos oblicuángulos.

► Actitudinal:

- Valora el uso del triángulo oblicuángulo en su contexto.

Perfil de Egreso

6

Competencia Genérica	Competencia Disciplinar
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a partir de métodos establecidos. 5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo	1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales. 2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

GUÍA EXPLICATIVA

7

DIAPOSITIVA	EXPLICACIÓN
1	Portada
2	Título del Modulo
3	Propósito del Módulo
4	Tema a desarrollar: 2.6. Triángulos Oblicuángulos
5	Dominio de los aprendizajes
6	Perfil de Egreso: Competencias Genéricas y Competencias Disciplinares
7,8,9	Guía explicativa

GUÍA EXPLICATIVA

8

DIAPOSITIVA	EXPLICACIÓN
10	Apertura: Planteamiento de Situación Problema
11	Desarrollo del tema: Explicación general breve
12,13	Casos de Triángulos Oblicuángulos
14	Ley de Senos
15,16,17,18	Caso I. Resolución de ejercicio de aplicación de Triángulo Oblicuángulo (Dados dos ángulos y un lado)
19,20,21,22	Caso II. Resolución de ejercicio de aplicación de Triángulo Oblicuángulo (Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos)
23	Les de Cosenos

GUÍA EXPLICATIVA

DIAPOSITIVA	EXPLICACIÓN
24,25,26,27	Caso III. Resolución de ejercicio de aplicación de Triángulo Oblicuángulo (Dados dos lados y el ángulo comprendido)
28,29,30,31	Caso IV. Resolución de ejercicio de aplicación de Triángulo Oblicuángulo (Dados los tres lados)
32	Cierre de la clase y evaluación de la misma
33,34,35,36	Ejercicios adicionales de aplicación de triángulos oblicuángulos , que se resuelven con la Ley de Senos y la Ley de Cosenos.
37	Fuentes Bibliográficas

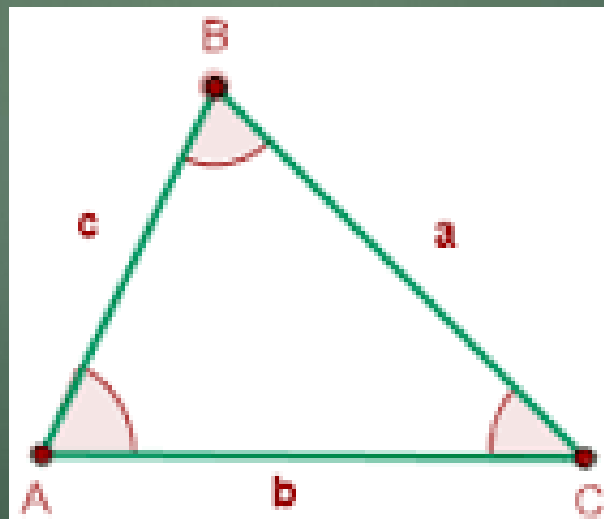
Apertura

Un poste se inclina hacia el Sol a un ángulo de 8° de la vertical y proyecta una sombra de 22 pies. EL ángulo de elevación desde la punta de la sombra a la parte superior del poste es de 43° . ¿Qué tan alto es el poste?



Desarrollo

- ▶ Para resolver un triángulo oblicuángulo, lo primero es identificar que no tenga ángulos rectos.
- ▶ Como sabemos, los ángulos de un triángulo se etiquetan con las letras mayúsculas A, B y C y sus lados opuestos se etiquetan con las letras minúsculas correspondientes a, b y c, como se muestra enseguida:



Casos de Triángulo Oblicuángulo

- Para resolver un triángulo oblicuángulo, se necesita conocer la medida de al menos un lado y otras dos medidas cualquiera del triángulo (pueden ser dos lados, dos ángulo o un ángulo y un lado)

Casos de Triángulo Oblicuángulo

13

- Teniendo por lo tanto los siguientes:

Caso I

- Cuando se conocen dos ángulos y un lado
- Se utiliza la Ley de Senos

Caso II

- Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
- Se utiliza la Ley de Senos

Caso III

- Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
- Se utiliza la Ley de Cosenos

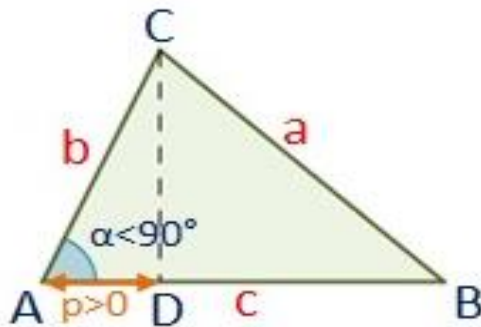
Caso IV

- Cuando se conocen los tres lados.
- Se utiliza la Ley de Cosenos

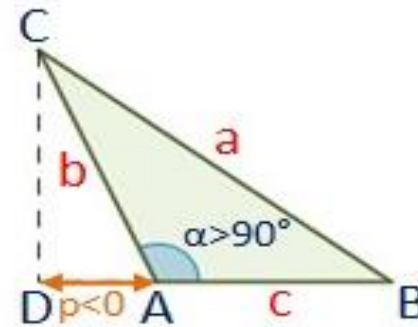
Ley de Senos

- Si ABC es un triángulo con lados a , b y c , entonces los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos correspondientes:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$



Triángulo acutángulo



Triángulo obtusángulo

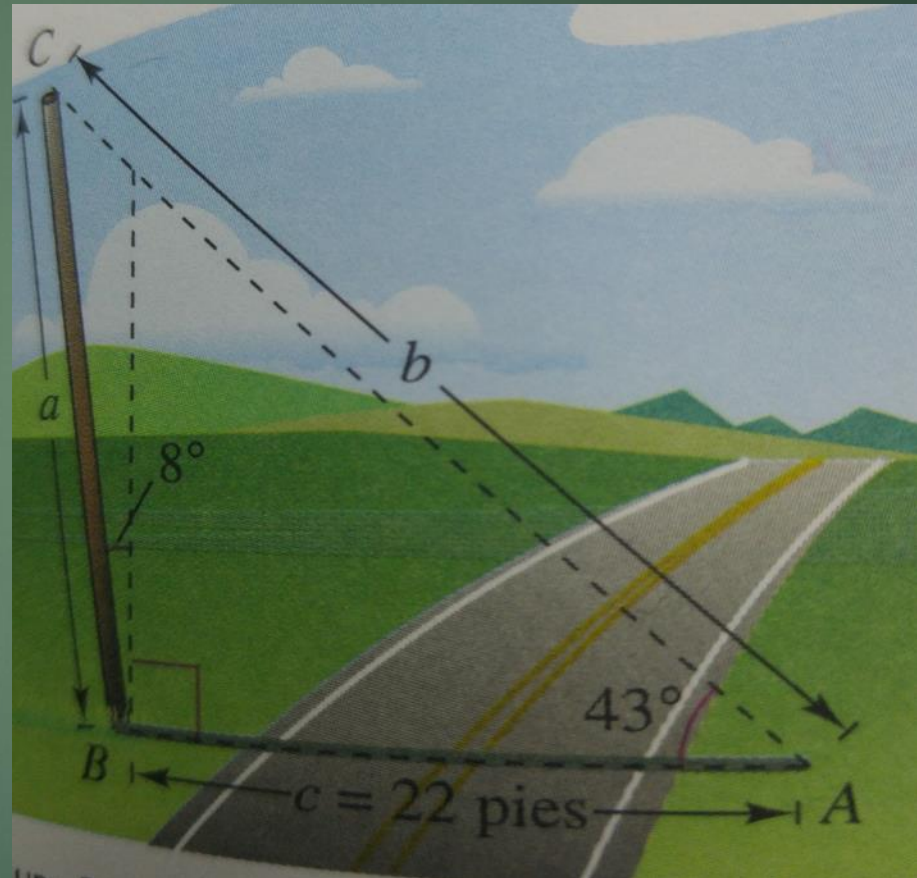
Caso I

► Situación- Problema.

Un poste se inclina hacia el Sol a un ángulo de 8° de la vertical y proyecta una sombra de 22 pies. EL ángulo de elevación desde la punta de la sombra a la parte superior del poste es de 43° . ¿Qué tan alto es el poste?

Pasos

1. Realizar una figura para visualizar mejor la formación del triángulo oblicuángulo.



Pasos

17

2. A partir de la figura anterior, observe que:

$$A = 43^\circ \text{ y } B = 90^\circ + 8^\circ = 98^\circ$$

Por lo que el tercer ángulo es:

$$C = 180^\circ - A - B$$

$$C = 180^\circ - 43^\circ - 98^\circ$$

$$C = 39^\circ$$

3. Utilizando la Ley de Senos, ya que se identifica que tenemos dos ángulos y un lado y se considera el Caso I, tenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Debido a que $c = 22$ pies, la longitud del poste es:

$$a = \frac{c}{\text{sen } C} (\text{sen } A) = \frac{22}{\text{sen } 39^\circ} (\text{sen } 43^\circ) \approx 23.84 \text{ pies.}$$

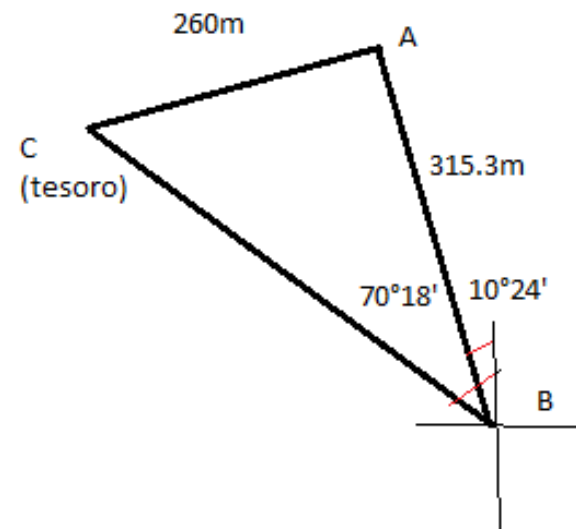
Caso II

► Situación- Problema.

Un viejo mapa señala un tesoro enterrado en el punto C, que está al $N70^{\circ} 18'W$ de cierto árbol T. Para evitar una barranca entre T y C, el mapa dice que hay que caminar 315.3m hacia el $N10^{\circ} 24'W$ y después 260m hacia el lugar del tesoro. Si el descubridor del mapa ha estudiado trigonometría, ¿iría a buscar el tesoro? ¿Por qué?

Pasos

1. Realizar una figura para visualizar mejor la formación del triángulo oblicuángulo.



Pasos

21

2. A partir de la figura anterior, observe que:

$$B = 70^{\circ}18' - 10^{\circ}24' = 59^{\circ}54'$$

Por lo que tendremos que utilizar la ley de Senos debido a que conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos para obtener el segundo ángulo:

$$\frac{260}{\sin 59^{\circ}54'} = \frac{315.3}{\sin C}$$

Despejando: $\sin C = 1.049 > 1$ Por lo tanto no existe

3. Concluimos y respondemos las preguntas realizadas al inicio en la situación problema planteada:

¿Iría a buscar el tesoro? No

¿Por qué? Porque no existe un lugar determinado de acuerdo a las especificaciones que fueron dadas, ya que no se puede formar el triángulo con esas dimensiones.

Ley de Cosenos

- Si ABC es un triángulo con lados a , b y c , entonces el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de los mismo lados por el coseno del ángulo comprendido.

Fórmula Estándar	Fórmula Alternativa
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

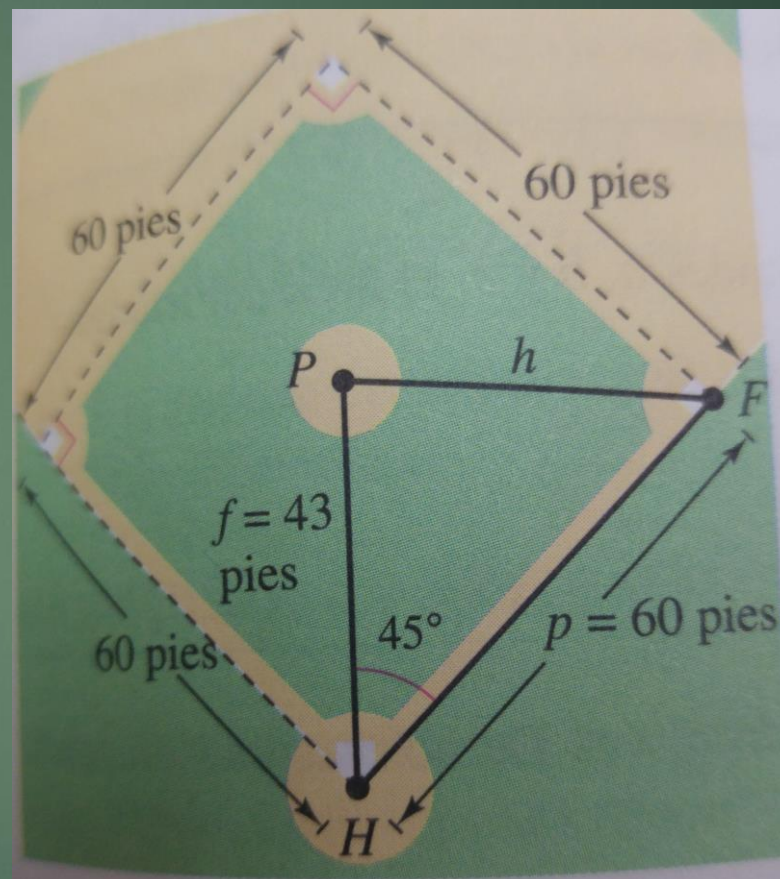
Caso III

► Situación- Problema.

El montículo del lanzador en un campo de softball femenino está a 43 pies del plato de home y la distancia entre las bases es de 60 pies. (El montículo del lanzador no está a la mitad entre el plato de home y la segunda base) ¿A qué distancia está el montículo del lanzador de la primera base?

Pasos

1. Realizar una figura para visualizar mejor la formación del triángulo oblicuángulo.



2. En el triángulo HPF, $H = 45^\circ$ (la línea HP bisecta el ángulo recto en H) $f = 43$ y $p = 60$.

Utilizamos la ley de cosenos para el caso de dos lados y el ángulo comprendido y tenemos:

$$h^2 = f^2 + p^2 - 2fp \cos H$$

$$h^2 = 43^2 + 60^2 - 2(43)(60)\cos 45^\circ \approx 1800.3$$

3. Por lo que concluimos que la distancia aproximada del montículo del lanzador a la primera base es de:

$$h \approx \sqrt{1800} \approx 42.43 \text{ pies}$$

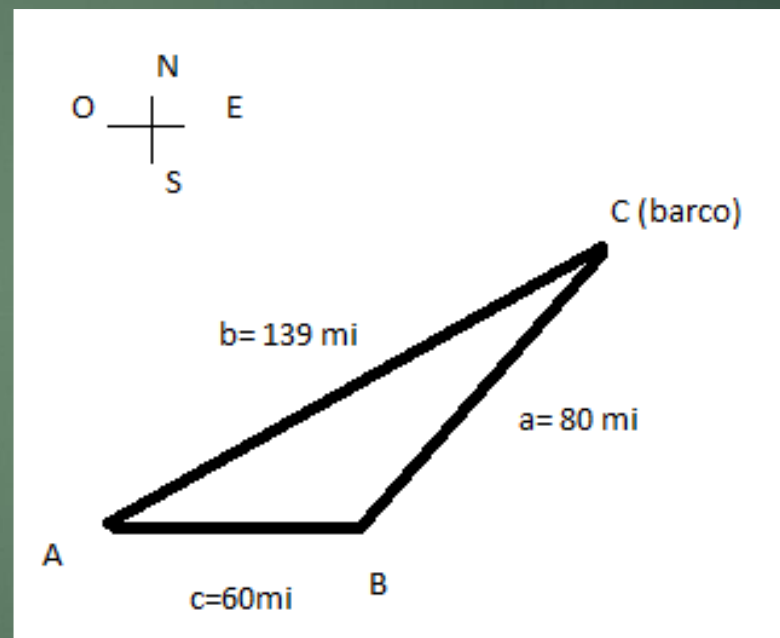
Caso IV

► Situación- Problema.

Un barco recorre 60 millas hacia el este, después ajusta su curso hacia el norte. Después de recorrer 80 millas en esa dirección, el barco está a 139 millas de su punto de partida. Describa el desplazamiento del punto B al punto C.

Pasos

1. Realizar una figura para visualizar mejor la formación del triángulo oblicuángulo.



2. Tenemos los lados $a = 80$, $b = 139$ y $c = 60$. Por lo que, utilizando la forma alternativa de la Ley de Cosenos, se tiene:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos B = \frac{80^2 + 60^2 - 139^2}{2(80)(60)}$$

$$\approx -0.97094$$

3. Por lo que:

$$B = \arccos(-0.97094) = 166.15^\circ$$

Y por lo tanto el emplazamiento medido hacia el norte del punto B al punto C es

$$166.15^\circ - 90^\circ = 76.15^\circ, \text{ o } N76.15^\circ E$$

- ▶ La utilización de triángulos oblicuángulos es importante debido a que se pueden resolver muchos problemas de triángulos utilizando la Ley de Cosenos y de Senos.
- ▶ Resuelve los siguientes ejercicios:
 - a) $a = 8$, $c = 5$, $B = 40^\circ$
 - b) $A = 5^\circ 40'$, $B = 8^\circ 15'$, $b = 4.8$

Ejercicios adicionales:

33

1. Un asta bandera a un ángulo recto a la horizontal se localiza en una pendiente que forma un ángulo de 15° con la horizontal. La sombra del asta bandera es de 16 metros de largo y apunta directamente hacia arriba de la pendiente. El ángulo de elevación de la punta de la sombra al Sol es de 20°
 - ▶ A) Dibuje un triángulo que represente la situación. Muestre las cantidades conocidas en el triángulo y use una variable para indicar la altura del asta bandera.
 - ▶ B) Escriba una ecuación que pueda emplearse para encontrar la altura del asta bandera.
 - ▶ C) Encuentre la altura del asta bandera.

Ejercicios adicionales:

34

2. Se va a construir un puente que atraviese un lago pequeño desde un mirador a un muelle. El emplazamiento del mirador al muelle es $S41^{\circ}O$. A partir de un árbol a 100 metros del mirador, los emplazamientos al mirador y el muelle son $S 74^{\circ}E$ y $S 28^{\circ}E$, respectivamente. Encuentre la distancia del mirador al muelle.

Ejercicios adicionales:

35

3. Juan desea comprar un lote triangular que mide 510 metros por 840 metros por 1120 metros. El precio del terreno es de \$2000 por m^2 ¿Cuánto cuesta el terreno?
4. Un estacionamiento tiene la forma de un paralelogramo. Las longitudes de dos lados adyacentes son de 70 metros y 100 metros. El ángulo entre los dos lados es de 70° . ¿Cuál es el área del estacionamiento?

Ejercicios adicionales:

36

5. Resolver los siguientes triángulos si se conoce lo siguiente:

a) $A = 102.4^\circ$, $C = 16.7^\circ$, $a = 21.6\text{m}$

b) $A = 145^\circ$, $a = 14$, $b = 4$

c) $a = 55\text{km}$, $b = 25\text{km}$, $c = 72\text{km}$

d) $C = 43^\circ$, $a = 4/9$, $b = 7/9$

Fuentes bibliográficas

37

- ▶ Baldor, Aurelio; (2014). Geometría y Trigonometría. Grupo Patria Cultural. México.
- ▶ Larios Osorio, Víctor; (2004). Triángulos y deltoides con Geometría Dinámica. *Educación Matemática*, diciembre, 135-158.
- ▶ Larson, Ron. (2011) Trigonometría. Cengage Learning. Octava edición, México.
- ▶ Niles O. Nathan. (1964) Trigonometría Plana. Segunda Edición. Limusa Noriega. México.
- ▶ Román, Loera Gabriela. (2011) Geometría y Trigonometría. Ed. Trillas. México.