LA ECUACIÓN DIFERENCIAL Y LA BIOLÓGICA (PARTE I)

Dr. en C. A. Pedro Del Aguila Juárez

UA: Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales a la Biología

Lic de Biología

PROPÓSITO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE:

El discente

1. Identificará en clase y vinculará los conceptos del cálculo diferencial integral y de ecuaciones diferenciales con problemas biológicos.

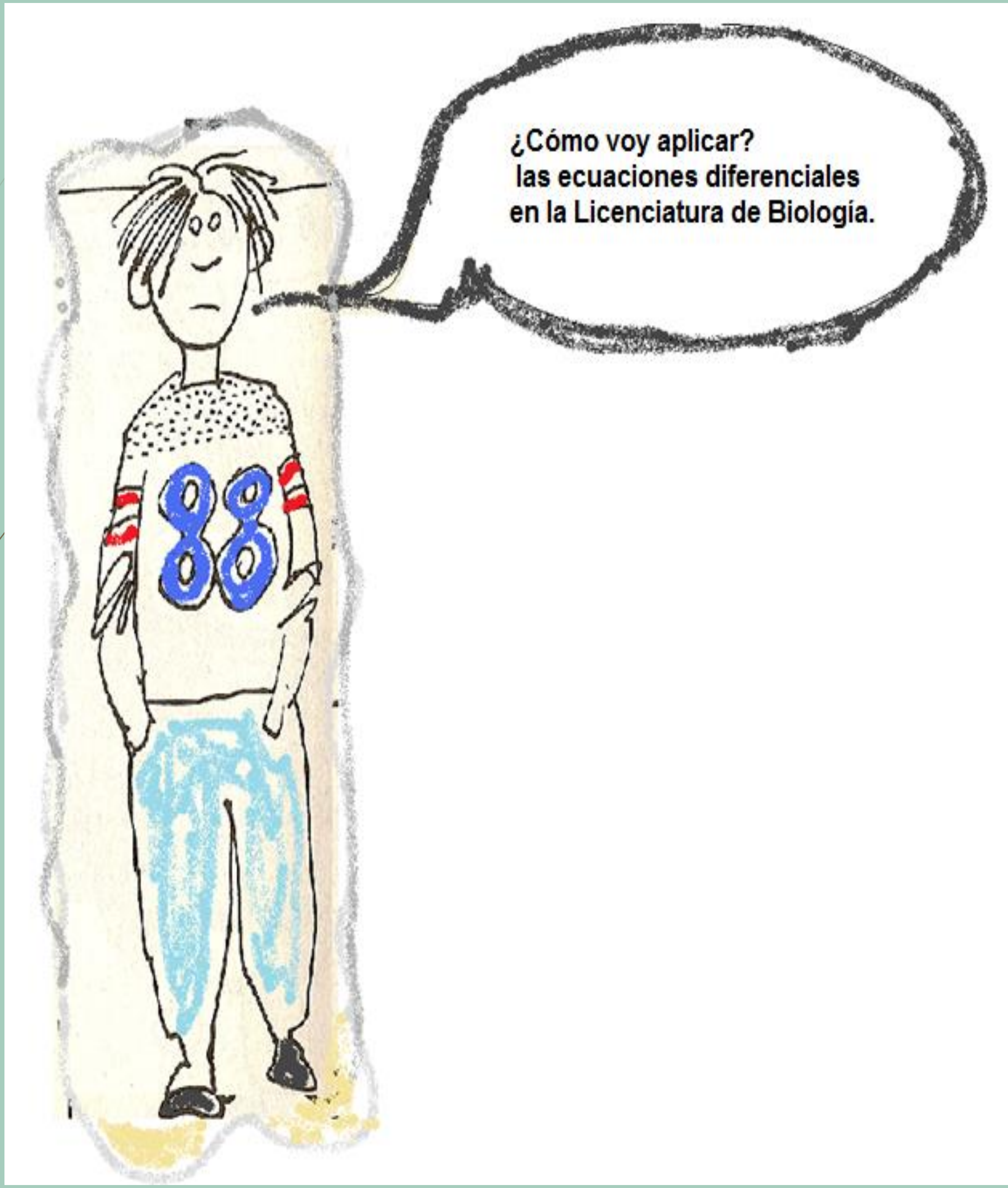
2. Se planteará series de ejercicios que refuercen lo visto en clase, así como prácticas de campo que enseñen al discente el uso de la herramienta matemática.

COMPETENCIAS GENÉRICAS

El discente será capaz de :

1. Conocer y utilizar los conceptos del cálculo diferencial e integral y de las ecuaciones diferenciales para utilizarlos en problemas biológicos.

2. Disposición del discente en realizar actividades en equipo y el reconocimiento de liderazgo.

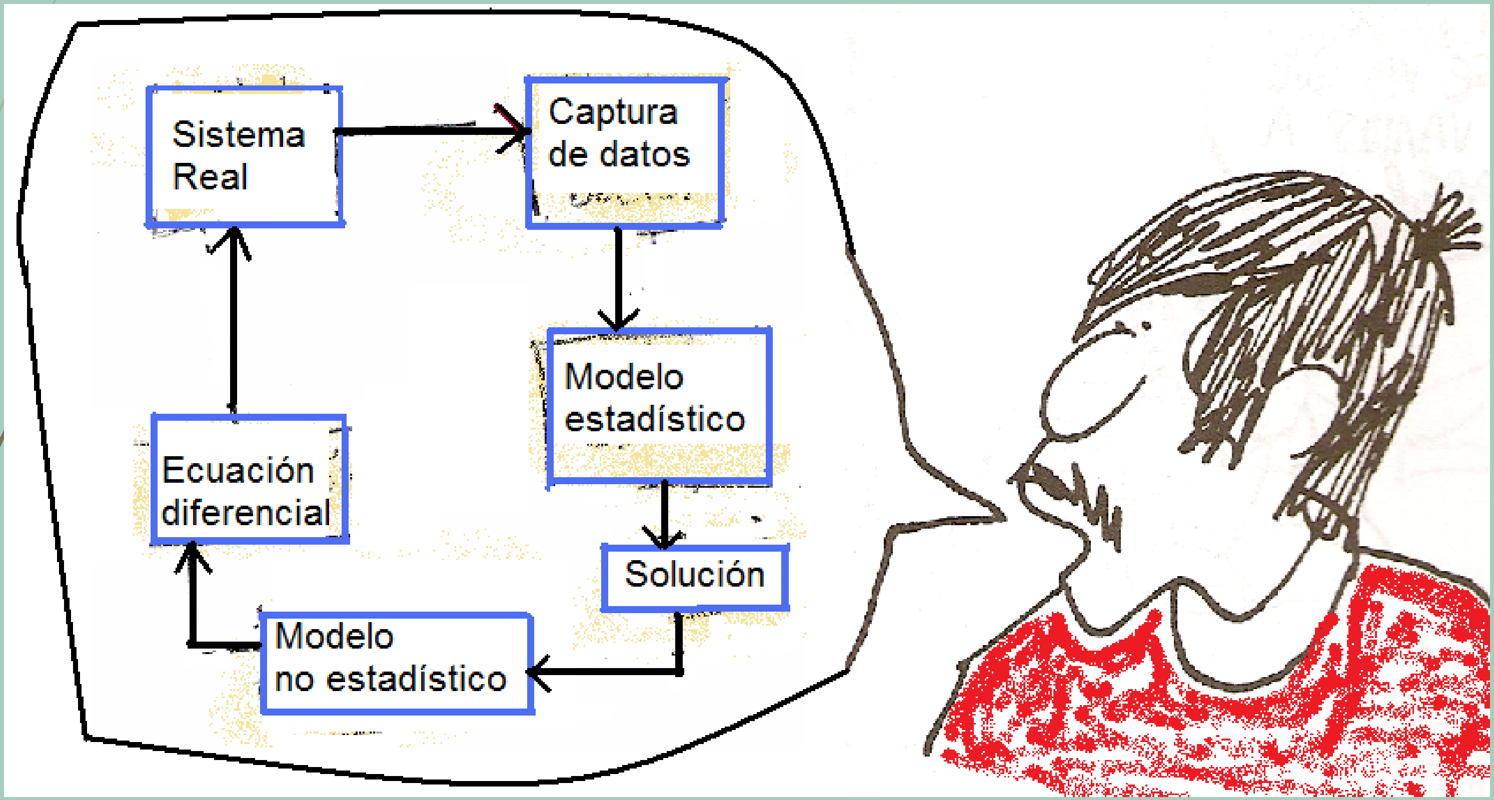

¿Cómo voy aplicar?
las ecuaciones diferenciales
en la Licenciatura de Biología.

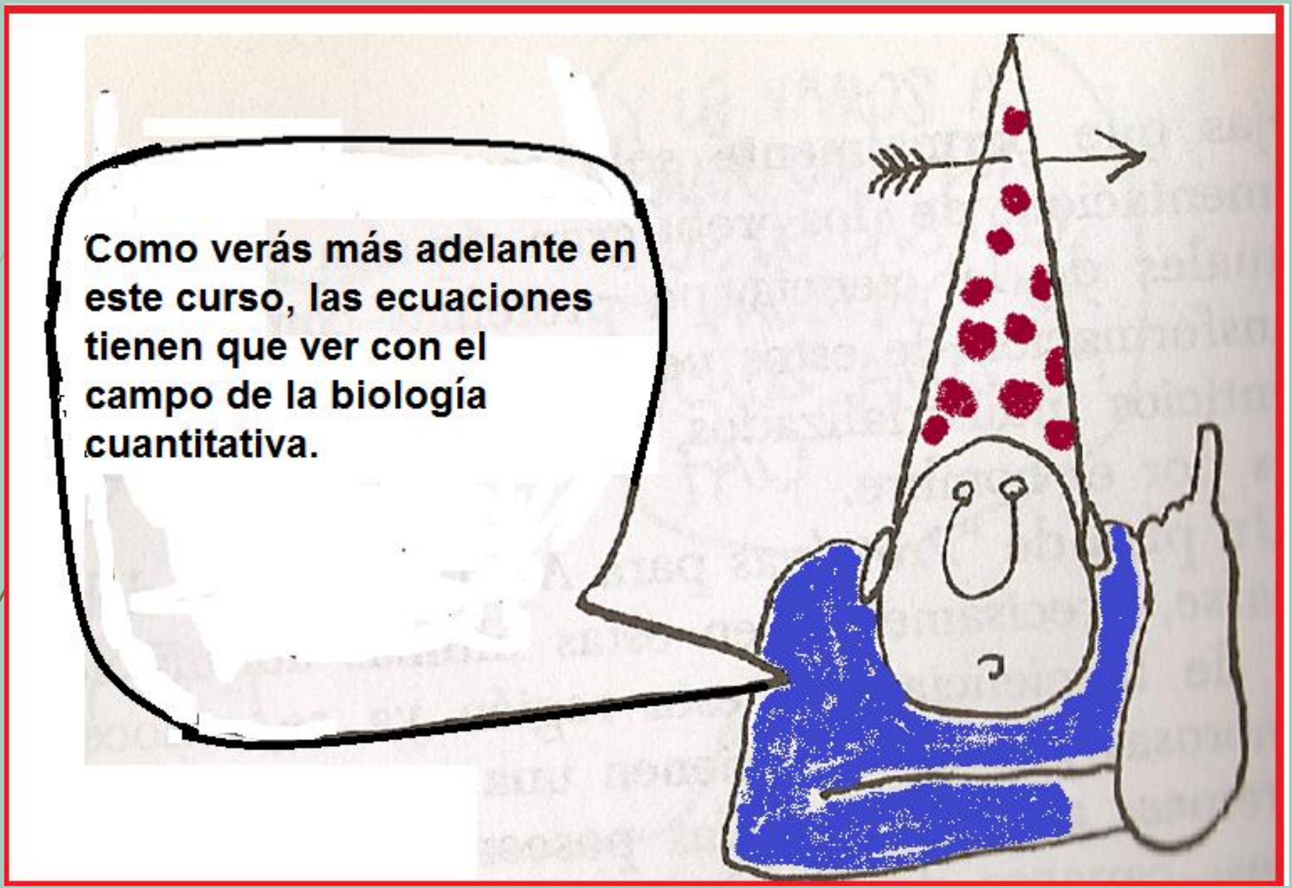
ED-03

¿En qué campo de la biología? Se aplican o se usan las ecuaciones diferenciales

1. Modelos de ecología.
2. Modelos en bioquímica: cinética de reacciones.
3. Modelos en contaminación ambiental.
4. Modelo alométricos.

¿De qué? manera puedo aplicarlo en la Naturaleza.




Como verás más adelante en este curso, las ecuaciones tienen que ver con el campo de la biología cuantitativa.

ED-06

¿Cómo está constituida una ecuación diferencial?

Una escuación diferencial está conformada por:

$$\boxed{Y' = f(x, y)}$$

i) Es una función de dos variables "x" y "y"

ii) Contiene derivadas

¿Qué significa resolver una ecuación diferencial

Encontrar la relación que existe de y en función de "x" o viceversa

$$\boxed{y \rightleftarrows x}$$

¿Existen diferentes tipos de ecuaciones diferenciales?

Una ecuación diferencial se clasifica en dos tipos

i) Ecuación diferencial ordinaria $\boxed{\dfrac{md^2u(t)}{dt^2}}$

ii) Ecuación diferecial parcial

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -\mu(a)n$$

Una ecuación diferencial presenta un orden

¿Como se determina el orden de una ecuación diferencial?

Sea y = f(t) es una función diferenciable de la variable independiente "t" y de y´, y", ..., $y^{(n)}$ que denota las derivadas de y con respecto a t , el orden "n" denota la derivada mayor de una ecuación diferencial

EJEMPLOS

(i) $(dy/dt) + 2y = 0$ Es una ecuación diferencial de primer orden

(ii) $(d^2y/dt^2) - \sin(ty) = 0$ Es una ecuación de segundo orden

(iii) $(d^4y/dt^4) - t^2(d^3y/dt^3) = \cos t$ Es una ecuación de cuarto orden


¿Cómo puedo saber si una ecuación diferencial es lineal?

Se puede demostrar la linealidad de una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial
¿Es lineal o no lineal?

Se dice que una ecuación diferencial es lineal cuando la función F es una función lineal de:

variables $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Representación de una ecuación diferencial lineal

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = R(x)$$

i) $a_0(x)$, $a_1(x)$ y a_n son funciones de x

ii) R(x) es función de x

iii) a(x) puede estar representada por y=x o y=k

¿Qué diferencias encuentras entre una ecuación diferencial lineal y no lineal

Actividad 1: determine en las siguientes ecuaciones si son lineales o no lineales

$$\boxed{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \boxed{x}\frac{dy}{dx} + \boxed{2}y = \boxed{e^x}$$ ____________________

$$(1+y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \boxed{e^x}$$ ____________________

x

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$ ____________________

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \boxed{x}\,y^2 = 0$$ ____________________

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x$$ ____________________

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + \boxed{(\cos^2 x)}\,y = \boxed{x^3}$$ ____________________

¿Qué otro elemento se debe de considerar en una ecuación diferencial?

ED-16

¿Están presentes? los coeficientes constantes en una ecuación diferencial

- Una ecuación diferencial presenta coeficientes constantes , si el coeficiente que multiplica a “y” y a las derivadas son independientes de x

Ejemplo

(i) $2(dy/dt) + 5y = sent$ Es una ecuación diferencial de 1er orden con coeficientes constantes

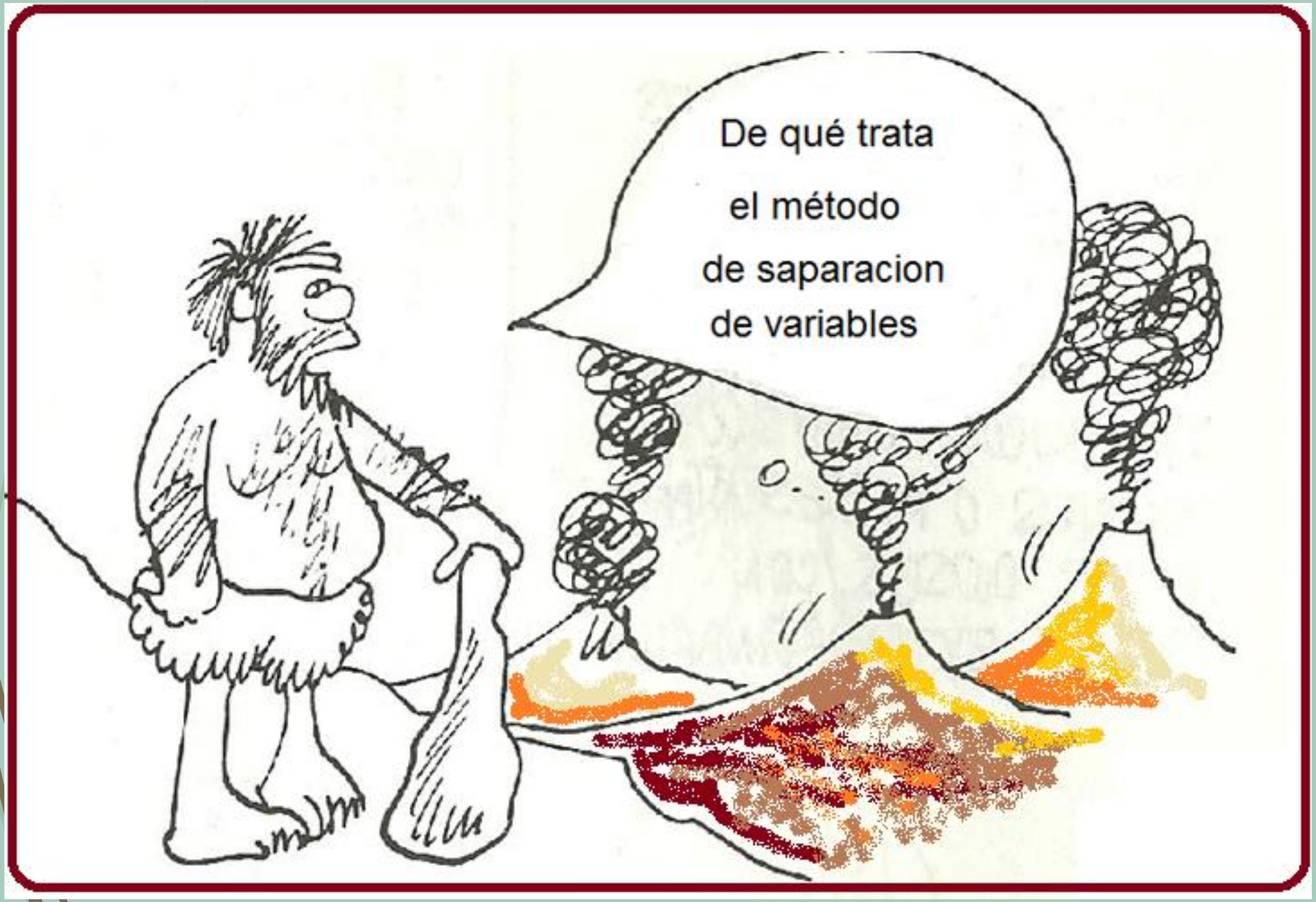
(ii) $(d^4y/dt^2) - 2\,(d^2y/dt^2) + 2y = e^t$ Es una ecuación lineal de 4to. orden con coeficientes constantes

(iii) $(d^2y/dt^2) + t^2y = 1$ Es una edcuación diferencial de 2do. orden pero no presenta coeficientes constantes

¿Cuáles son los métodos? para resolver una ecuación diferencial de primer orden

ED-18

El método de separación de variables es útil para resolver problemas biológicos



ED-19

Camino a seguir para resolver una ecuación diferencial: por el método de separación de variables

El método de Separación de Varibles consiste en que:

La ecuación toma la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad (1)$$

Donde f(x) es una función de la variable independiante "x" unicamente, porque la función g(y) es una función de la variable dependiente unicamente.

$$f(x) = \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} \quad ,$$

Integrando con respecto a x se obtiene:

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{g(y)} dy \quad ,$$

Se puede iniciar el desarrollo del método de separación de variables con un ejemplo ¿Cómo cuál?

Iniciemos la actividad resolviendo la siguiente ecuación diferencial y´=ay [1]

- Una de las ecuaciones diferenciales más sencillas es:

$$\frac{dy}{dx} = ay$$

- Realice en clase la solución general

Los pasos para la solución de una ecuación [1] son los siguientes

La ecuación se separa dx y se tiene

$$dy = a y \cdot dx$$

Después, dividiendo por y, la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{y} = a.dx \qquad (y \neq 0) .$$

Aparece la variable y sólo en el lado izquierdo y x solo en el lado derecho. Se dice que se tienen variables separadas.

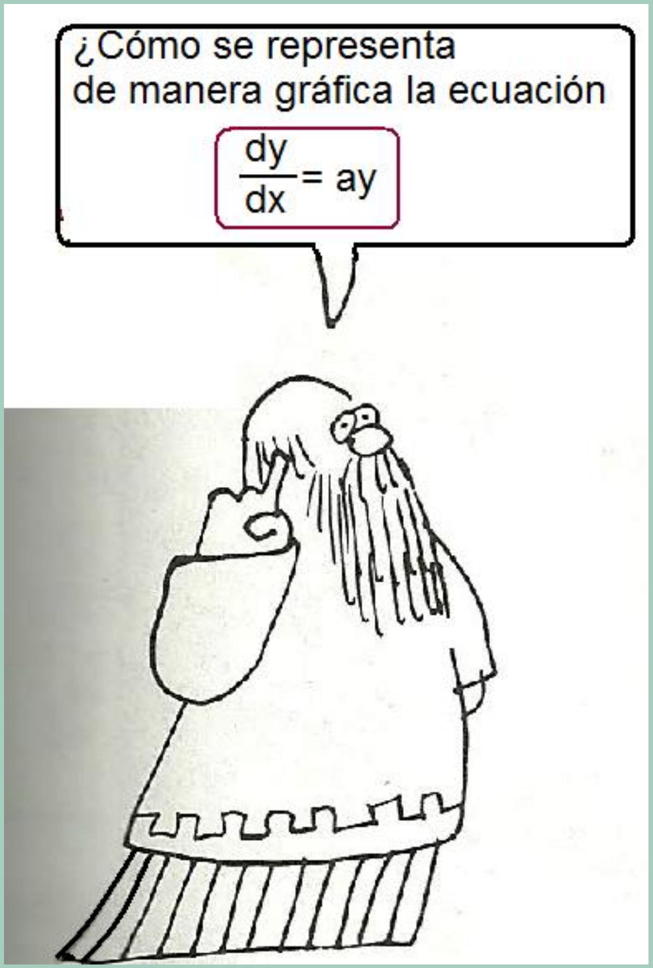
$$\int \frac{dy}{y} = \int a.dx$$

La integración queda como:

$$\ln |y = ax + C \qquad (y \neq 0)$$

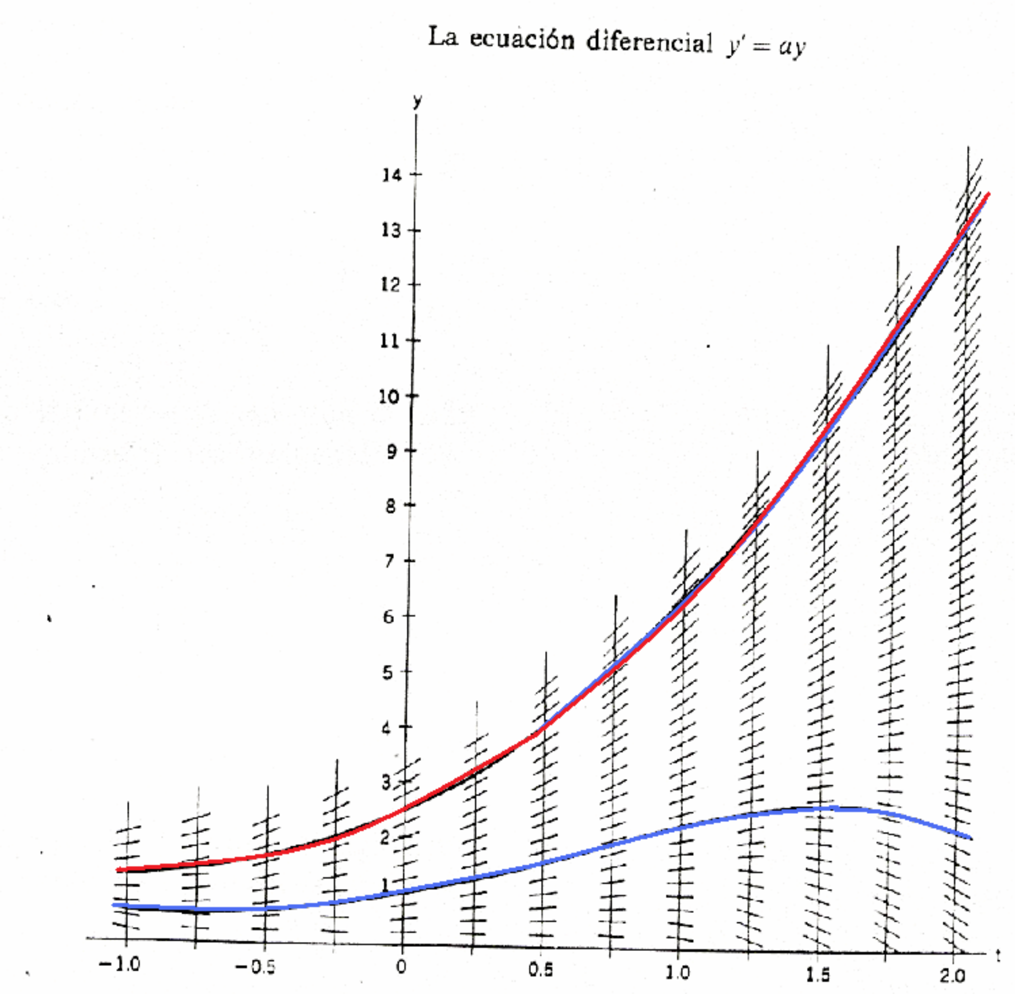
Donde C es una constante arbitraria. Podemos eliminar el logaritmno natural aplicando la función inversa. Por lo tanto, la solución queda como.

¿Cómo puedo conocer el comportamiento de una ecuación diferencial [1]?



ED-24

El comportamiento se muestra mediante la representación grafica de la ecuación [1]



ED-25

Se debe de practicar con más ejemplos para familiarizarse con la ecuación diferencial

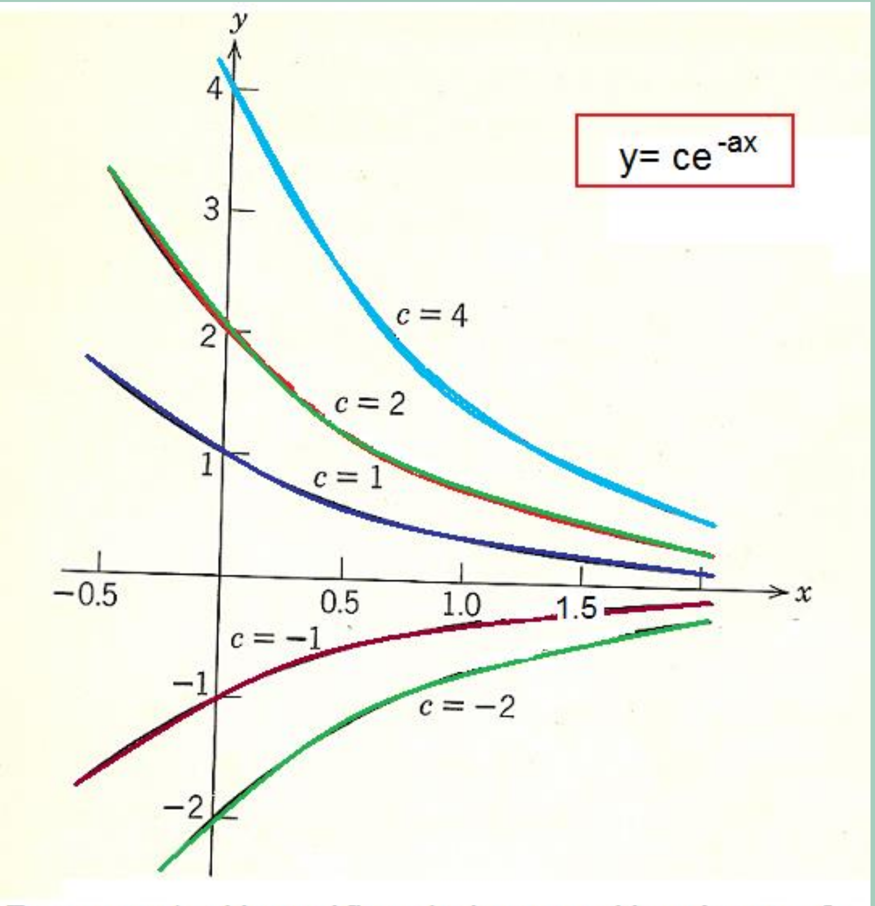
ED-26

El siguiente ejemplo es la ecuación diferencial $y' = -ay$ [2]

- Donde la solución general es:

$$\boxed{y = ce^{-ax}}$$

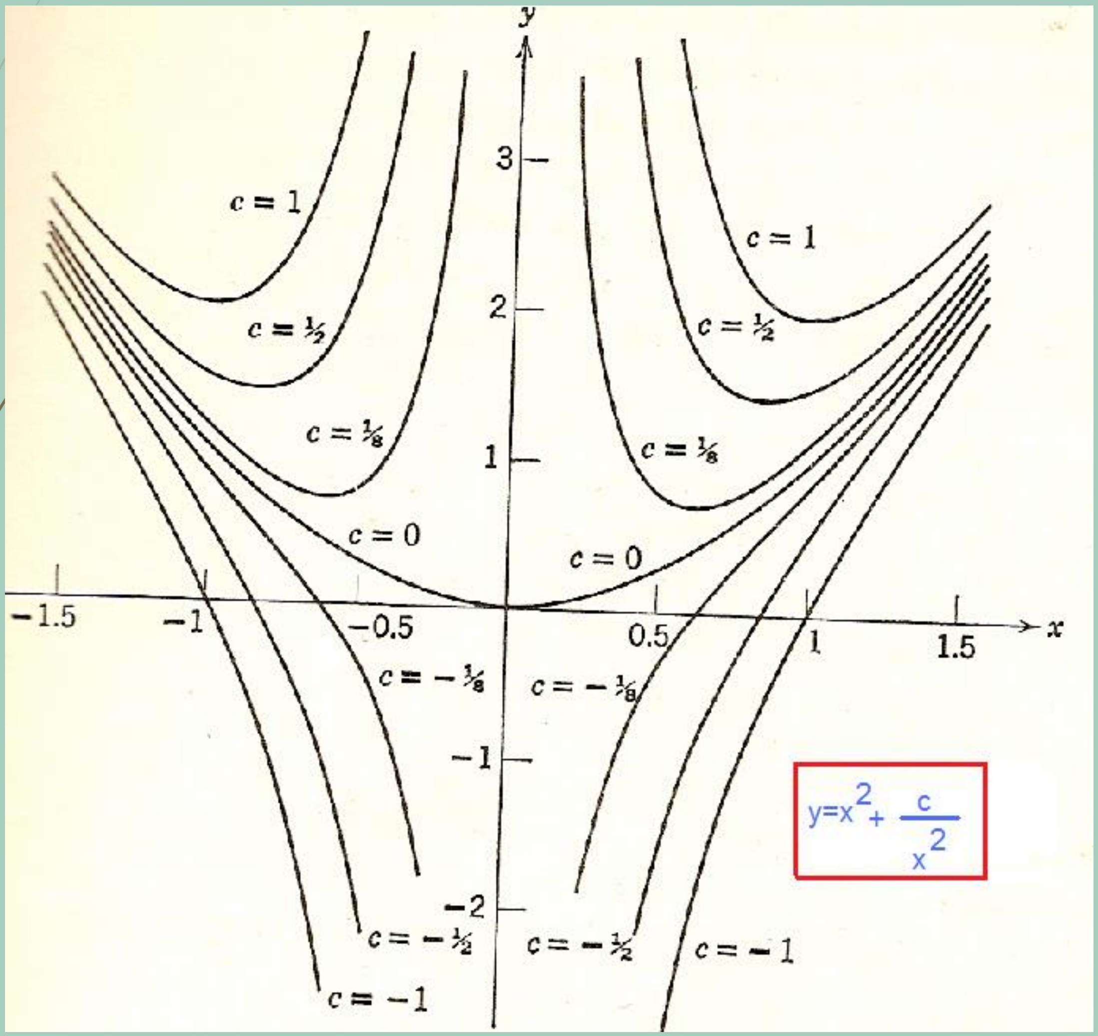
Grafica de la ecuación [2] es:



Representación gráfica de la ecuación y´+ ay =0

Toda una familia de curvas que representa una ecuación diferencial de la forma:

$$xy' + 2y = 4x^2$$



Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en el campo de la Biología

Por ejemplo iniciamos con el crecimiento de un cultivo bacteriano

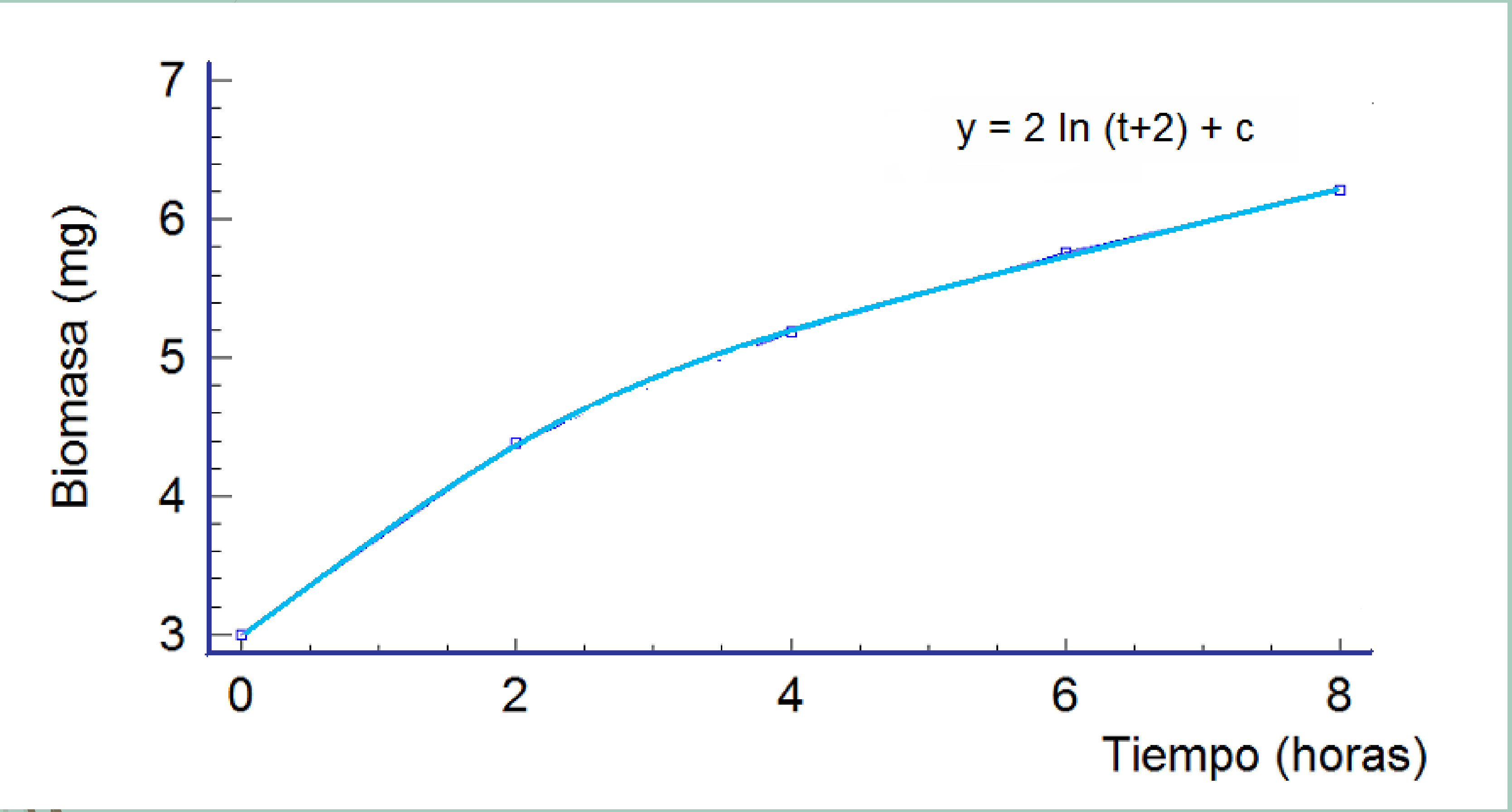
- El modelo del cultivo bacteriano
- Tiene una velocidad de crecimiento
- Que obedece al siguiente
- Modelo:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{2}{t+2} \qquad [3]}$$

- La solución es:

$$y = 2 \ln (t+2) + c$$

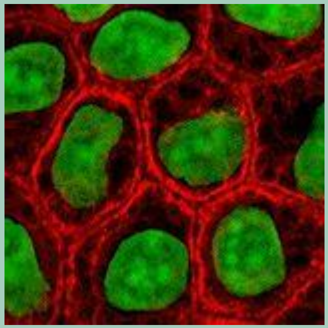
Comportamiento grafico del crecimiento celular de [3] es:



Otro ejemplo como el crecimiento de una célula

- Una célula con masa m_o=0.5 (microgramos) en un medio de cultivo crece.
- Se escribe m=m(t)
- La razón de velocidad de crecimiento es proporcional a la masa en cada instante es decir:

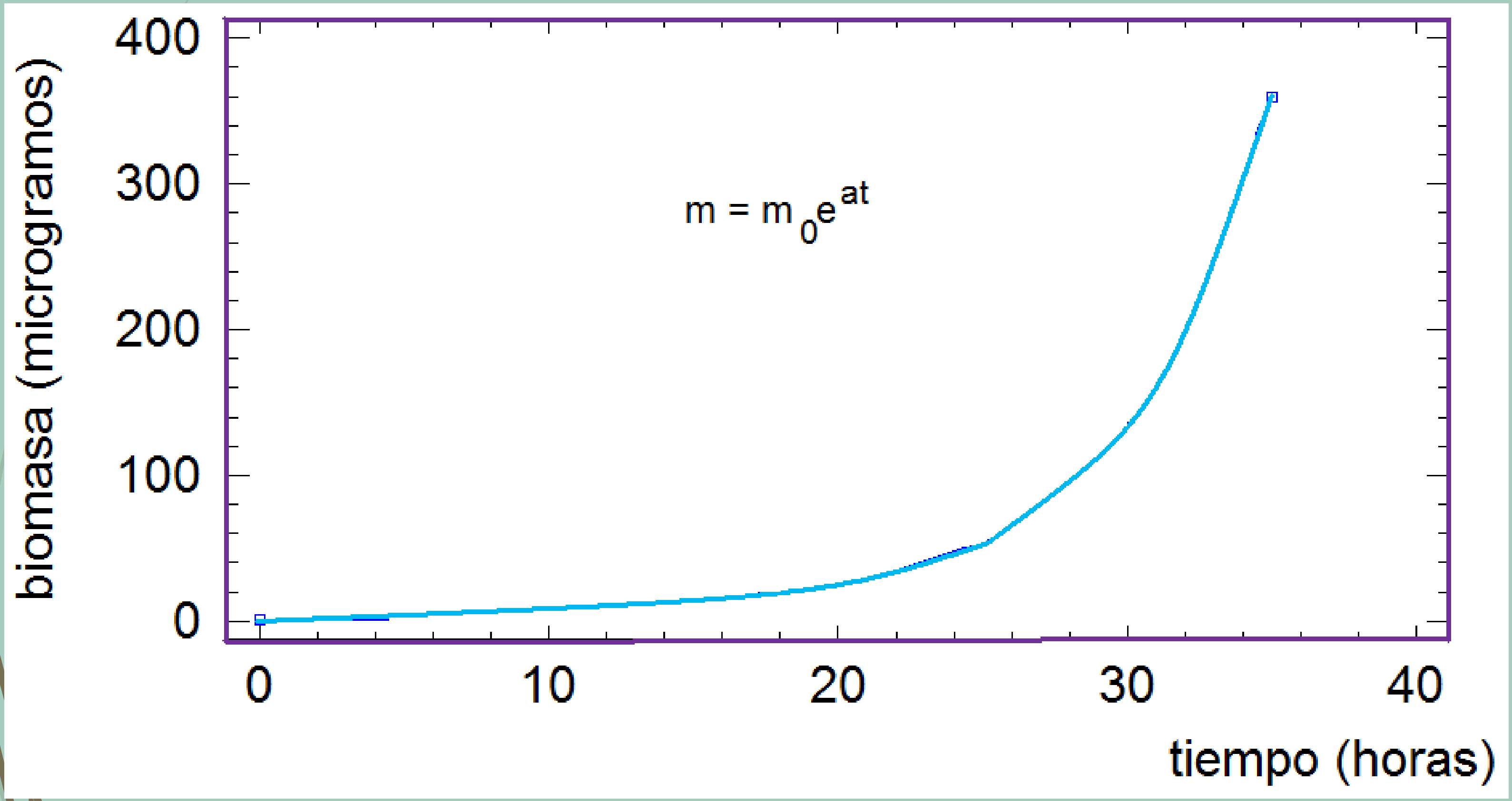
$$\boxed{\frac{dm}{dt} = am \qquad [4]}$$



Células epiteliales en cultivo, en tinción roja para la queratina y verde el ADN

Donde la solución es: $m = m_0 e^{at}$

Representación gráfica del crecimiento de una célula de [4] es:



Modelo de un crecimiento de tipo exponencial y no limitado

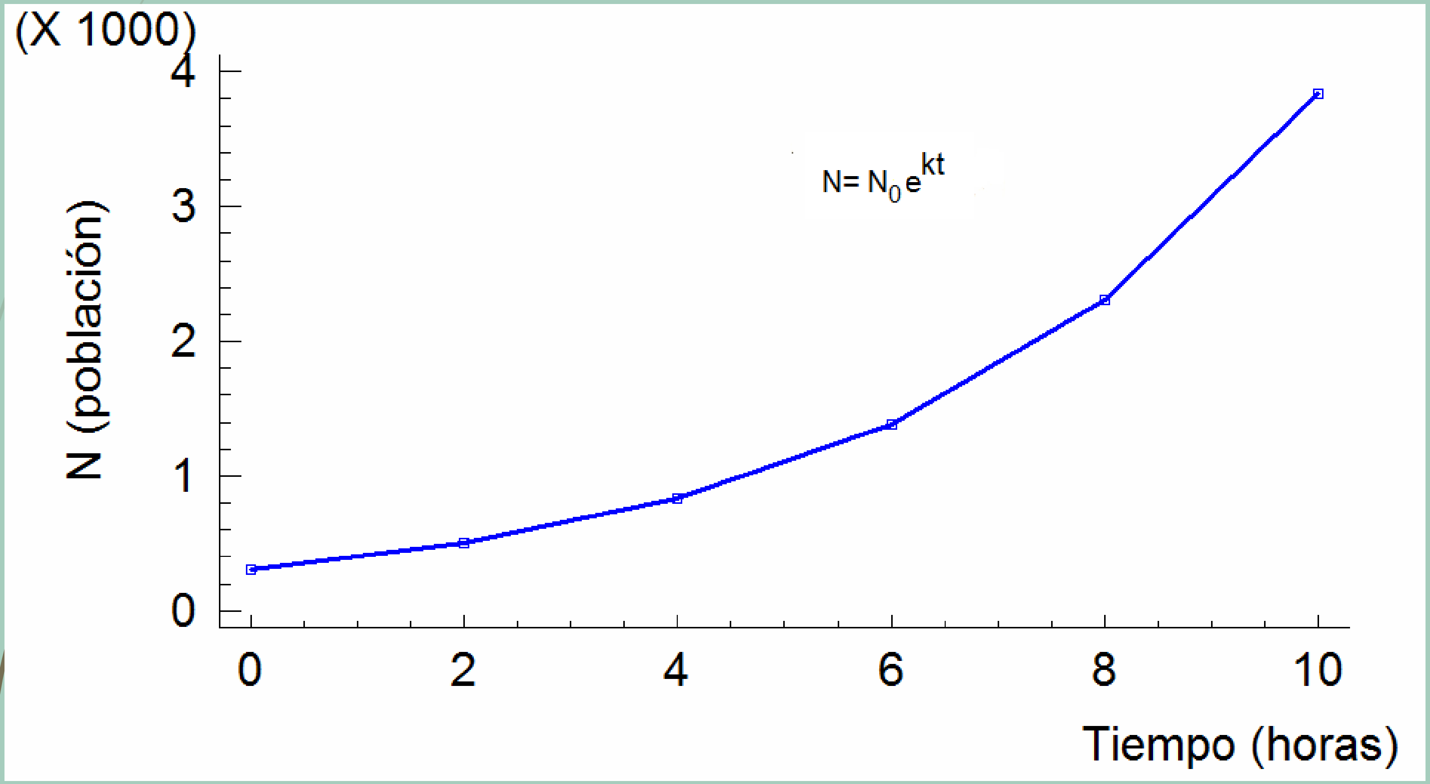
El estado del crecimiento de una poblacion de tipo exponencial se representa mediante la siguiente ecuación diferecial

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = kN,} \qquad [5]$$

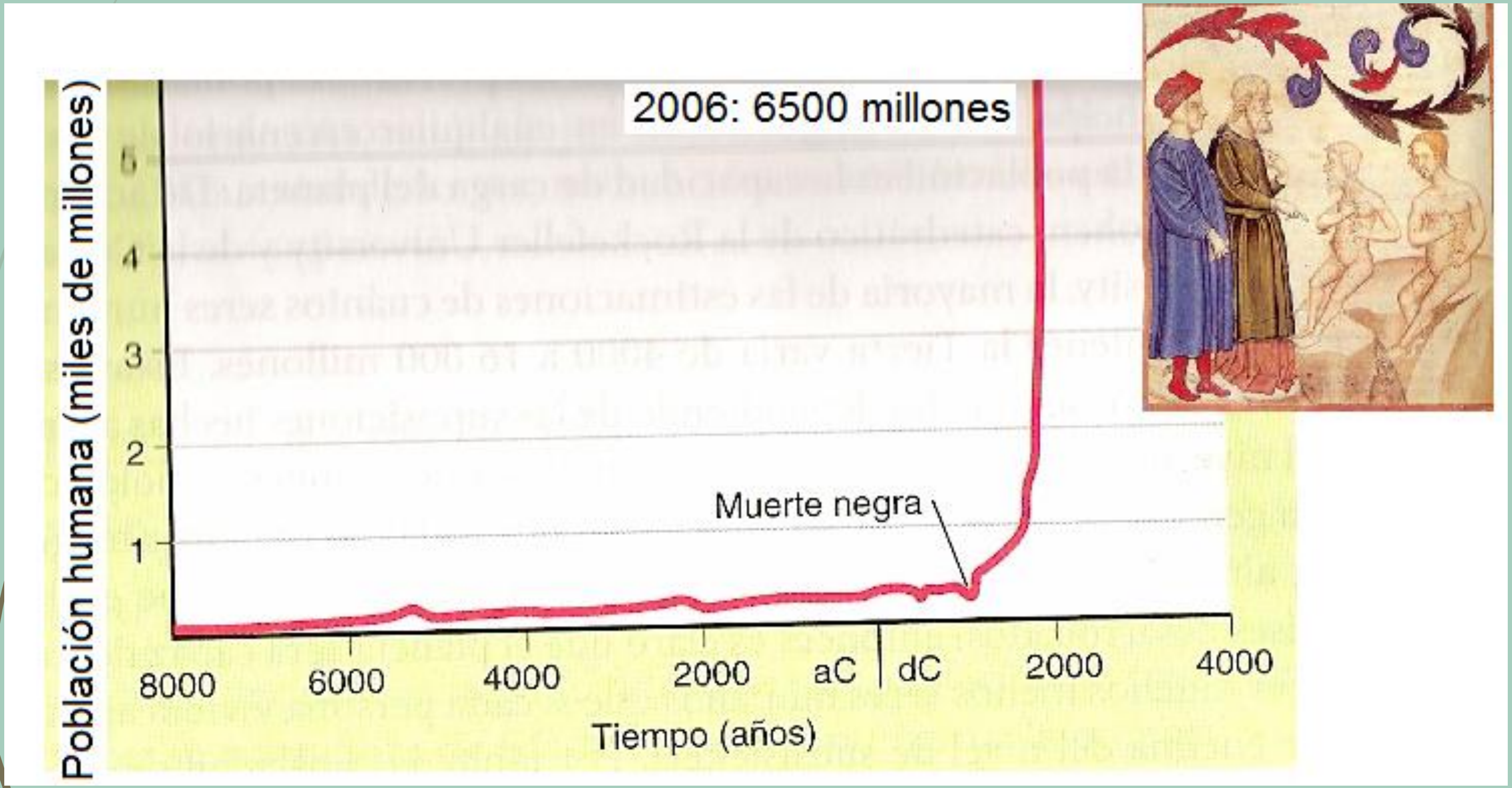
Se denota a dN/dt como la razón de cambio y es proporcional a la poblacion N, donde k es una constante positiva.

La ecuación [1] se resuelve y la relación entre N y el tiempo se representa como $N = N_0 e^{kt}$, donde N_0, denota la población inicial a un tiempo t=0. La ecuación es denominado modelo matemático que describe el crecimiento de una población.

Gráfico de un crecimiento de una población exponencial ilimitado de [5] es:



La Población humana obedece a un crecimiento ilimitado



El crecimiento de una población restringido requiere del siguiente procedimiento

Donde N=N(t), que denota el tamaño de la población en función del tiempo.

Se supone que existe un límite superior de la población que se denomina K (capacidad de carga) y es una constante positiva.

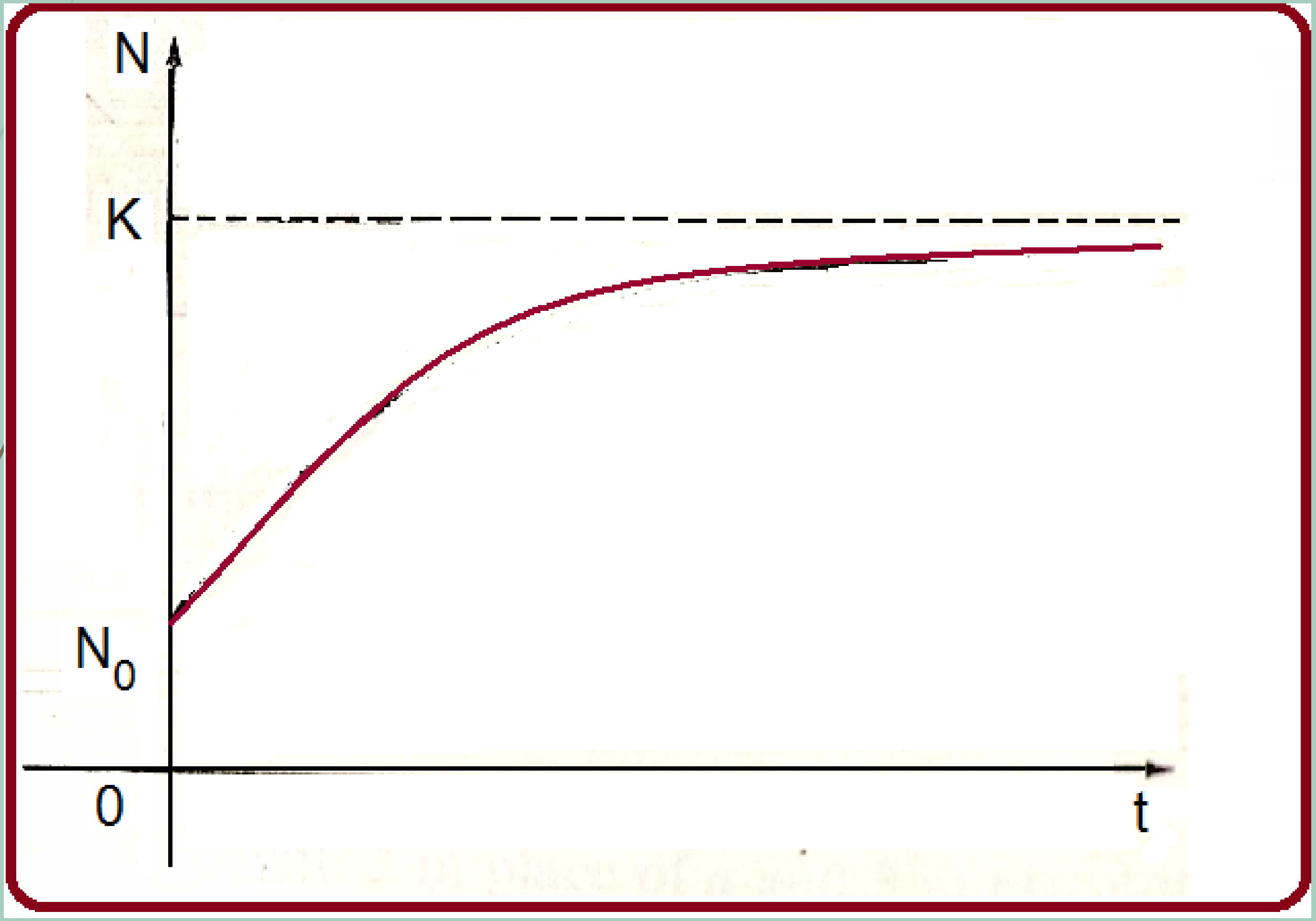
Tambien k es una constante positiva. La $\frac{dN}{dt}$ es proporcional a la población cuando se incrementa a K-N, donde la población tiende a un máximo cuando alcanza el valor de K.

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = k(K - N)} \qquad [6]$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$\boxed{K - N = C\, e^{-kt}}$$

Ejemplo gráfico de una población con crecimiento restringido de[6] es:

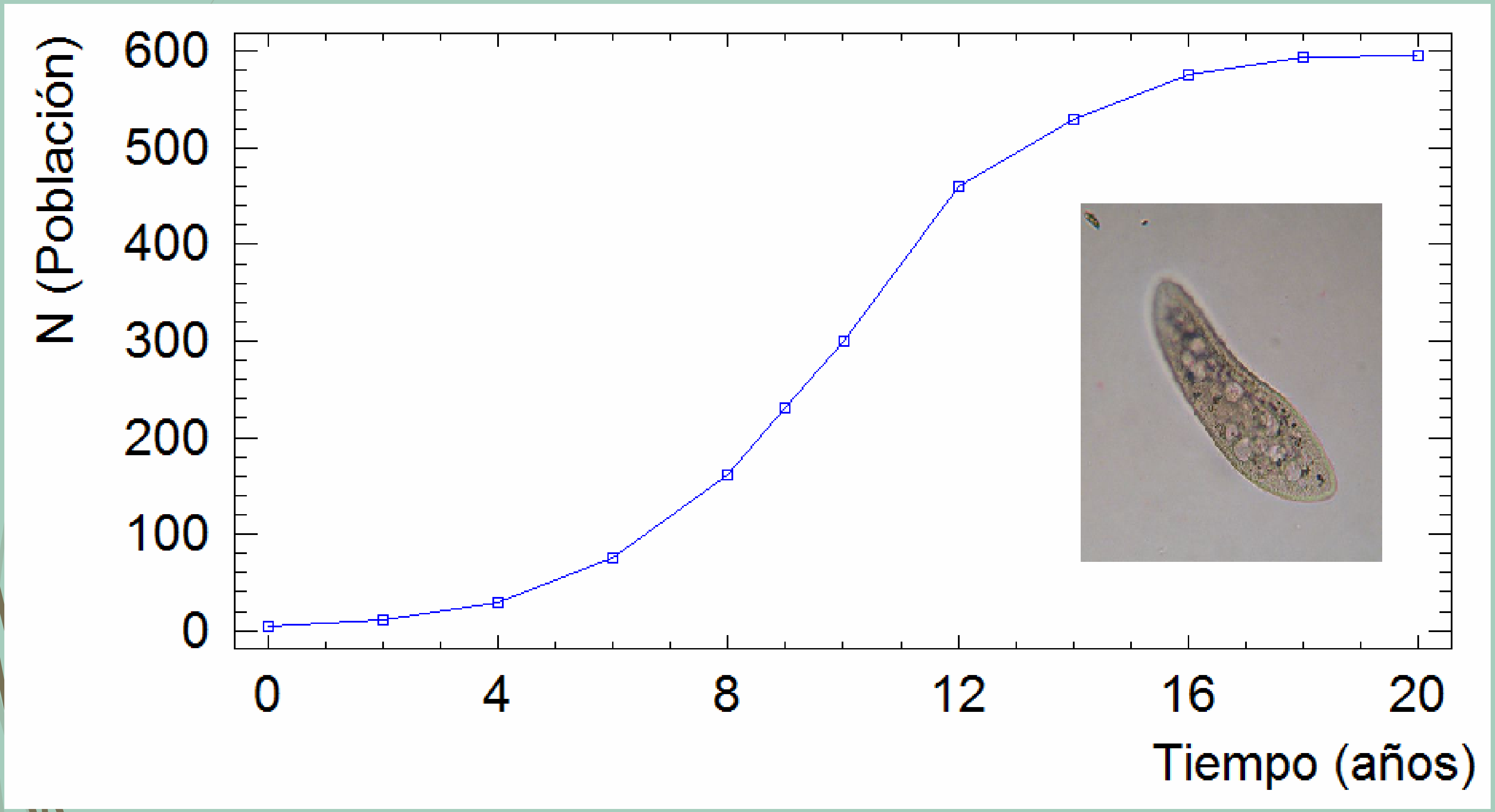


ED-39

Los Protozoos y su comportamiento logístico

- Los **paramecios: género Paramecium** son protozoos ciliados, habituales en aguas dulces estancadas con abundante materia orgánica y los encontramos en charcos y estanques.

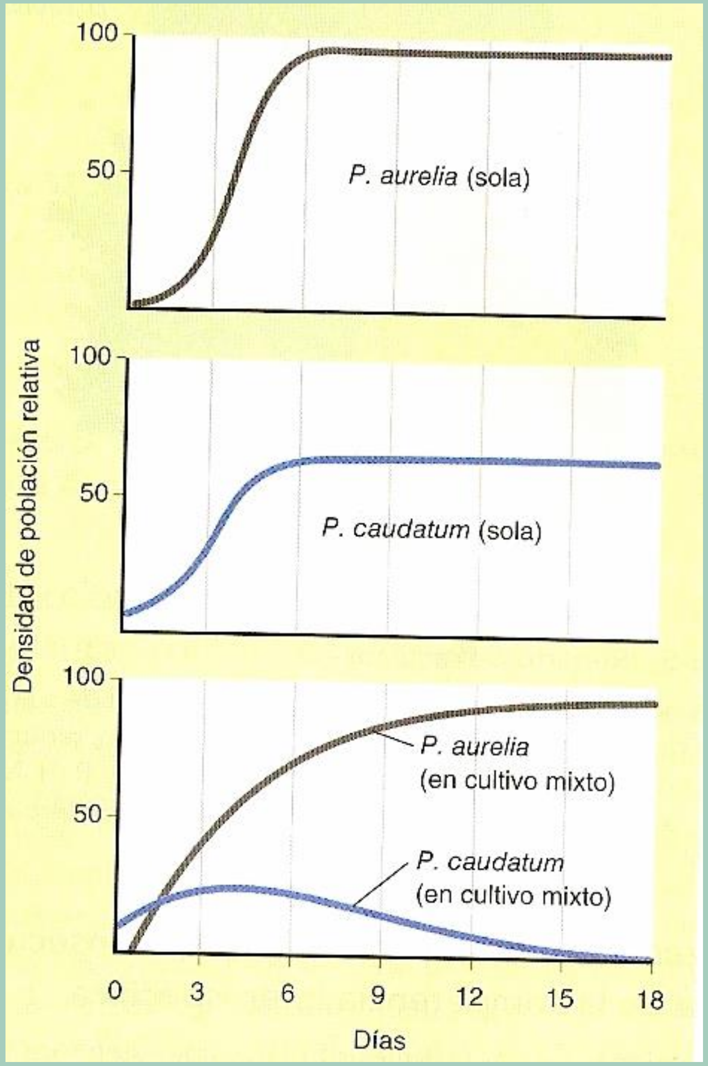
Grafica del Modelo logístico del Protozoos



La competencia entre especies por nichos superpuestos puede causar una exclusión competitiva

No es posible que dos especies ocupen el mismo nicho en la misma comunidad indefinidamente. El principio de exclusión competitiva propone que una especie excluye a la otra de su nicho como resultado de competencia inter específica.

Experimento de Gause, sobre competencia interespecífica



ED-43

La ecuación logística un ejemplo biológico

- Los organismos no viven solos y en la población se presentan incrementos y decrementos.
- Los incrementos se denotan como nacimiento y los decrementos como muertes.

El modelo logístico se describe mediante la siguiente ecuación diferencial

La ecuación logística describe el crecimiento y regula la población

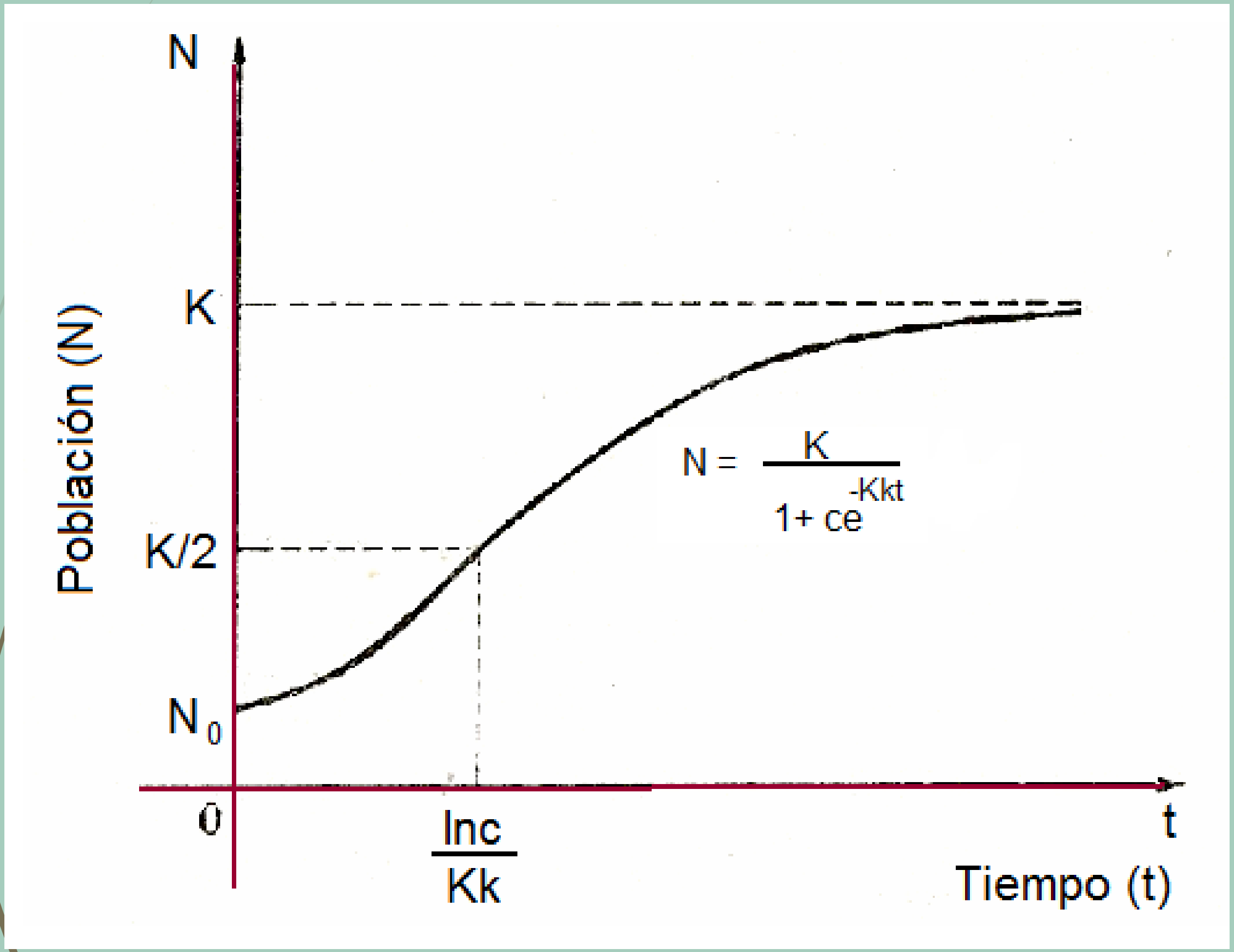
El crecimiento de la población N=N(t), obedece a la ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = kN(K-N)} \qquad [7]$$

La solución de la ecuación logística es:

$$\boxed{N = \frac{K}{1 + ce^{-kt}}}$$

Representación gráfico del modelo logístico de [7]



Factor Integrador

Se presenta la forma general de una ecuación diferencial lineal de primer orden [1]

$$y' + p(x)y = g(x). \qquad [1]$$

Si se selecciona una función μ y se multipla a [1] por $\mu(x)$ del lado izquierdo de la ecuación [1] , entonces se puede escribir como la derivara de la función $\mu(x)y$ el cual queda de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\mu(x)[y' + p(x)y] &= [\mu(x)y]' \\ &= \mu(x)y' + \mu'(x)y.\end{aligned}$$

De esta manera $\mu(x)$ satisface

$$\mu(x)p(x)y = \mu'(x)y.$$

Asumiendo que $\mu(x) > 0$ se obtiene

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x).$$

Por lo que $\mu(x)/\mu(x)$ es la derivada de $\ln \mu(x)$ por lo que se tiene

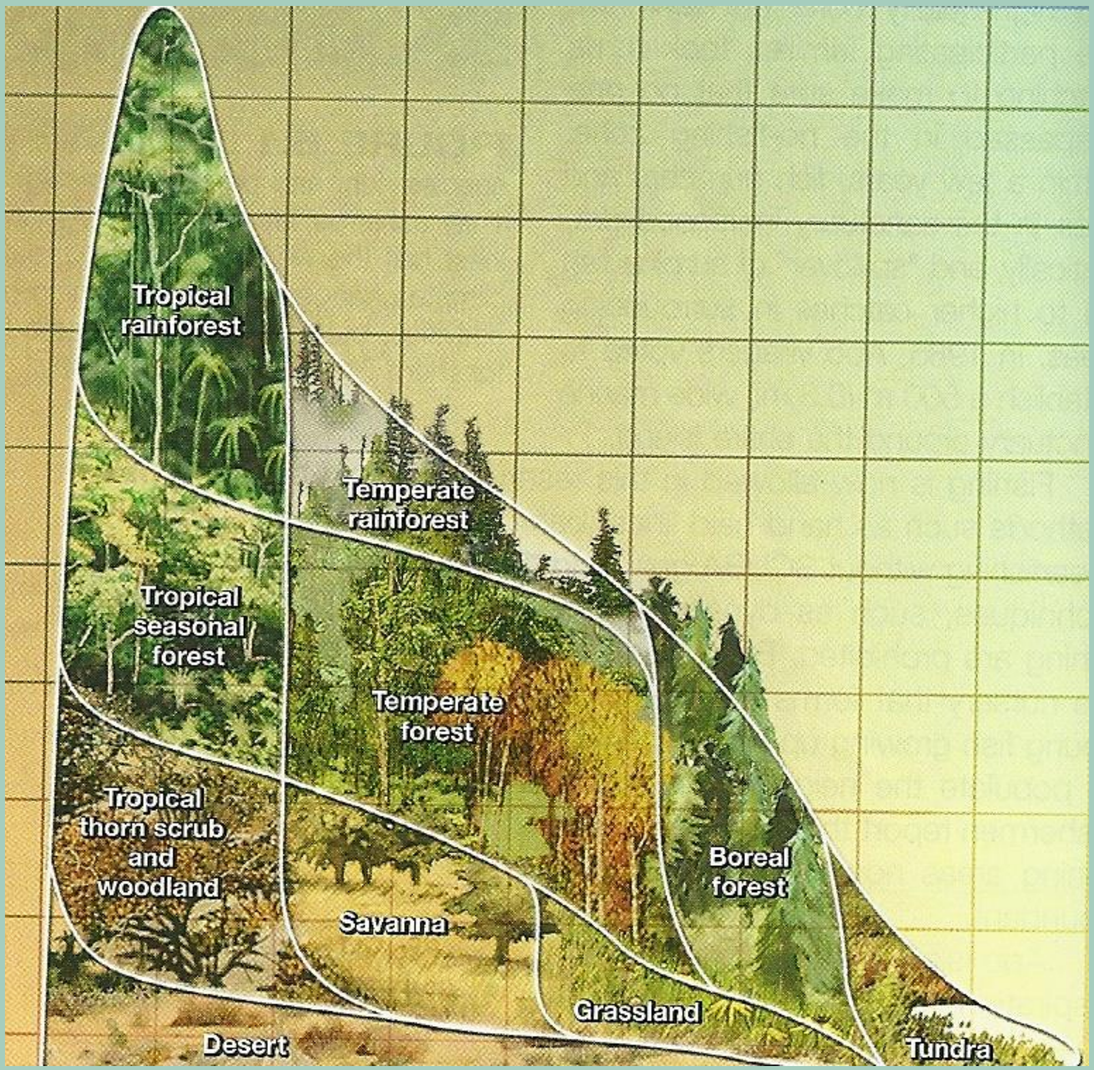
$$\ln \mu(x) = \int^x p(t)\, dt,$$

Finalmente se tiene el factor integrador

$$\boxed{\mu(x) = e^{\int^x p(t)\, dt}}$$

Modelo que relaciona el estudio de los Recursos Naturales Renovables

Existen muchos recursos naturales renovables que los seres humanos utilizamos con frecuencia y en grandes cantidades, por ejemplo: los árboles, las flores, el salmón, entre otros.



Estudio de un modelo propuesto para conocer el uso sustentable del recurso

La Población esta expresada en función de la biomasa o de la cantidad de individuos, en el tiempo.

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = P\left[r - \frac{r}{K}P\right] = F(P)}$$

Presentación de la ecuación diferencial y características de cada variable

$$\frac{dP}{dt} = P\left[r - \frac{r}{K}P\right] = F(P) \qquad [8]$$

En donde :

P: representa a la población

T: tiempo

r> o: tasa de crecimiento intrínseco

K: capacidad portadora del ambiente (nivel de saturación o población limite).

Los valores de las constantes **r** y **K,** se determinan experimentalmente.

Desarrollo analítico del modelo propuesto

La ecuación [8] se basa en la **separación de variables.**

Como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{r}{k}(P - P_1)(P - P_2)$$

Que se convierte en:

$$\frac{dP}{(P-P_1)(P-P_2)} = -\frac{r}{k}\,\mathrm{dt}$$

Continuación del desarrollo analítico del modelo propuesto

Por el método de integración de fracciones parciales se resuelve y se obtiene:

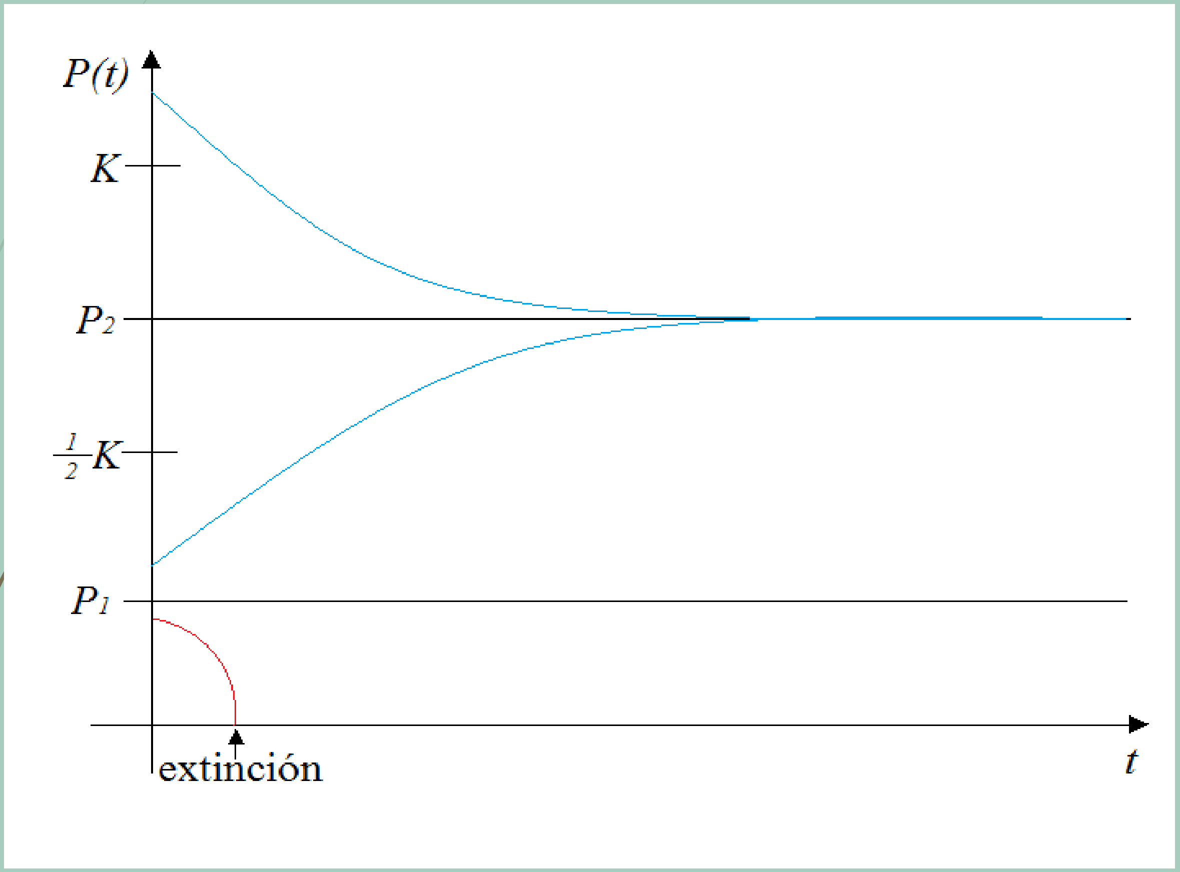
$$\frac{1}{P_{2-} \quad P_1} \ln \frac{P - P_2}{P - P_1} = -\frac{r}{k} t + c$$

Si establecemos condiciones iniciales, $P(o) = Po$, lo sustituimos en la ecuación anterior y despejamos a $P(t)$.

La ecuación que se obtiene, se representada de la siguiente manera:

$$\frac{P(P - P_1) - P_1(P - P_2)e^{-\propto t}}{P - P_1 - (P - P_2)e^{-\propto t}}$$

Representación gráfica del modelo de [8] es:



Finalmente se dice que las funciones de la grafica indican que P(t) tiende a P_2 cuando aumenta el tiempo (t).

Bibliografía

1. Zill. Dennis(1999). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. México .Ed. Thompson. 6° ed. 133-135 pp/ 520 pág.
2. Batschelet, E. 1978. Matemáticas básicas para biocientíficos. Ed. DOSSAT, S.A. España. 645 p.
3. Boy,W.E., DiPrima, R.C. 1977. Elementary differential equations and boundary value problems. 3er. Edition. United State of America.574 p.
4. Brow, D., Rothery, P. 1993. Models in Biology: Mathematics, Statistics and Computing. John Wiley &Sons. Great Britain.669 p.
5. Dudley B. A.C. 1977. Mathematical and biological interrelations. John Wiley & Sons. 401p

Bibliografía