



Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Zumpango

Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Zumpango

Ingeniería en Computación

Manual

Prácticas Laboratorio

Cálculo Numérico

Elaborado por:

M. en C. Rafael Rojas Hernández

M. en C. Valentín Trujillo Mora

Dr. Asdrúbal López Chau

Fecha: Septiembre de 2017





Índice general

Presentación	1
Código de honor	2





Índice de Tablas





Índice de figuras





Presentación

Este manual de prácticas de laboratorio para la unidad de aprendizaje Cálculo Numérico tiene como objetivo principal que el alumno aprenda a programar y utilizar los métodos o algoritmo para la encontrar la solución numérica a problemas como: cálculo de raíces de ecuaciones, cálculo de sistemas de ecuaciones lineales, aproximaciones a derivadas de primer orden y ecuaciones diferenciales; las cuales serán una herramienta indispensable durante su preparación y en el ejercicio profesional en algunas áreas del conocimiento. Para la realización de las prácticas es necesario utilizar un lenguaje de programación para el manejo de matrices y vectores de forma simple, así como la posibilidad de general gráficas en 2 y 3 dimensiones. Dentro de las opciones se pueden utilizar herramientas de programación de en modo de simulación matemática como Matlab y Octave, y compiladores en lenguajes C, Java, PHP, Processing, entre otros. En cuanto al sistema operativo es independiente de cada una de las herramientas mencionadas anteriormente por lo que queda a criterio del profesor(a) que imparta la unidad de aprendizaje.

Este manual cuenta con 19 prácticas y está organizado de tal forma que cubre los contenidos del **Programa de estudio por competencias de Cálculo Numérico de la UAEM**. El contenido de este manual y su **relación con los aprendizajes** que se espera desarrolle el alumno es el siguiente.

Prácticas 1 a 4: Corresponden a los conceptos para la obtención de raíces de ecuaciones no lineales. **Se espera que el alumno aplique los métodos aprendidos para determinar el mejor con base en las características y parámetros conocidos.** Prácticas 5 a 9: Incluyen los métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. **Útiles para que el alumno determine el mejor método a utilizar.** Prácticas 10 a 12: Conjunto de métodos para la interpolación de funciones. **Se espera que el alumno tenga herramientas para programar gráficas de funciones utilizando parámetros específicos.** Prácticas 13 a 15: Contienen los métodos para evaluar integrales mediante la aplicación de fórmulas. **Se pretende que el alumno aprenda los diversos métodos para encontrar la integral numérica a una función.** Práctica 16: Diferenciación numérica. **El alumno encontrara un valor aproximado la derivada de una función.** Prácticas 17 a 19: Conciernen a los métodos para resolver ecuaciones diferenciales. **Para que el alumno pueda resolver ecuaciones diferenciales o sus aproximaciones.**

Se recomienda ampliamente al alumno practicar varias horas a la semana, realizando el pseudocódigo de los algoritmos y métodos vistos en clase; así como investigar en la bibliografía las aplicaciones directas y las conexiones entre métodos.

En clase, se exhorta poner atención a los conceptos, métodos, algoritmos y ejemplos; así como también a participar activamente, preguntando cuando sea necesario para aclarar





sus dudas. Los ejercicios propuestos en este manual de prácticas serán útiles en la medida en que el alumno genere una o varias aplicaciones aplicando los métodos y algoritmos del tratamiento de imágenes, proponiendo proyectos o soluciones a problemas determinados, creando así su propio conocimiento.

Código de honor

Todo lo siguiente es permitido, y se anima a los alumnos a realizarlo: Trabajar en equipo, a preguntar a estudiantes de nivel más avanzado, a consultar páginas Web, libros y revistas, solicitar ayuda a otros profesores. Sin embargo, todo trabajo presentado deberá ser realizado por el alumno, y no se permitirá ningún tipo de plagio. Asimismo, este código de ética prohíbe estrictamente proporcionar el código fuente a otros estudiantes, incluso cuando ya se haya cursado esta unidad de aprendizaje. El **plagio está gravemente penalizado** en este y en todos los cursos de la carrera de Ingeniería en Computación, por lo que se debe de evitar a toda costa, ya que ser descubierto será motivo de no acreditar la unidad de aprendizaje.





Práctica 1

Método de Bisección



DESCRIPCIÓN: Esta es la primera práctica para encontrar la solución de ecuaciones no lineales, en ella se introduce al alumno en el proceso del uso de métodos numéricos para resolución de problemas.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de ecuaciones no lineales “Bisección”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de ecuaciones no lineales.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Bisección para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de Bisección para solución de ecuaciones no lineales, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

El uso de la computadora para resolver problemas matemáticos que involucran procesos iterativos es de gran apoyo dentro de la rama de la ingeniería; con el desarrollo de métodos para el cálculo numérico es posible determinar aproximaciones a la solución de dichos problemas. En el caso de resolver o encontrara la solución para una ecuación no lineal, denominado raíces o ceros los métodos numéricos diseñados resultan ser muy poderosos aunque cada uno tiene sus limitaciones y defectos. Como punto inicial se parte con el método de Bisección, que resulta ser el más simple, aunque también es el más seguro y sólido para encontrar una raíz dentro de un intervalo dado, donde se sabe que existe dicha raíz. Suponga que el intervalo entre $x = a$ y $x = c$ denotado por $[a, c]$ o equivalente a $a \leq x \leq c$ tiene una sola raíz, como se muestra en la figura ???. El método de bisección se basa en el hecho de que, para que un intervalo $[a, c]$ tenga una raíz, basta que los signos de $y(x)$ en los dos extremos sean opuestos, o bien que $f(a)$ o $f(c)$ se anulen; es decir, $f(a)f(c) \leq 0$.

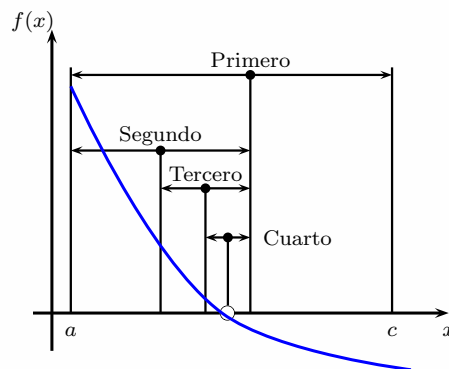


Figura 1.1: Método de Bisección

El primer paso para utilizar este método es bisectar el intervalo $[a, c]$ en dos mitades; a saber, $[a, b]$ y $[b, c]$, donde $b = (a + c)/2$. Al verificar los signos de $f(a)f(b)$ y $f(b)f(c)$, se localiza la mitad del intervalo que contiene la raíz. Así, si $f(a)f(b) \leq 0$, el intervalo $[a, b]$ que incluye a $x = a$ y $x = b$ contiene a la raíz: en caso contrario, el intervalo $[b, c]$ tiene la raíz. El nuevo intervalo que contiene a la raíz se bisecta de nuevo. Al repetir este proceso, el tamaño del intervalo con la raíz se vuelve cada vez más pequeño. En cada caso, se toma el punto medio del intervalo como la aproximación más exacta a la raíz. La iteración se detiene cuando la mitad del intervalo está dentro de una tolerancia dada ϵ .

El tamaño del intervalo después de n pasos de la iteración es

$$\frac{(c - a)_0}{2^n} \tag{1.1}$$





donde el numerador es el tamaño del intervalo inicial. Esto también representa el máximo error posible cuando la raíz se aproxima mediante el n -ésimo punto medio. Por lo tanto, si la tolerancia del error está dada por ϵ , el número de pasos de iteración necesarios es el mínimo entero que satisface

$$\frac{(c - a)_0}{a^n} < \epsilon \tag{1.2}$$

o, en forma equivalente

$$c \geq \log_2 \frac{(c - a)_0}{\epsilon} \tag{1.3}$$

Por ejemplo, si $(c - a)_0 = 1$ y $\epsilon = 0.0001$, entonces $n = 14$.

Hemos supuesto que el intervalo inicial tiene sólo una raíz y que $f(a)f(b) \leq 0$. Sin embargo, $f(a)f(b) \leq 0$ se satisface siempre que el intervalo tenga un número de raíces impares. En este caso, el método de bisección encontrará una de las raíces separadas en el intervalo dado, figura ???. El método de bisección no puede encontrar una pareja de raíces dobles, debido a que la función toca el eje x de manera tangencial en las raíces dobles, figura ???.

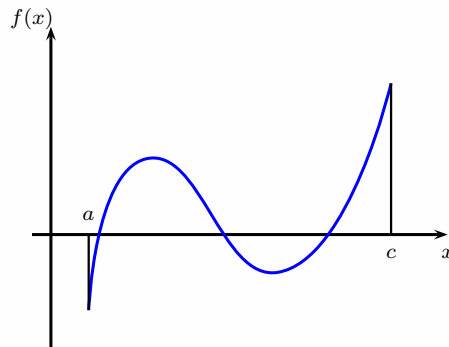


Figura 1.2: Número impar de raíces en un intervalo dado.

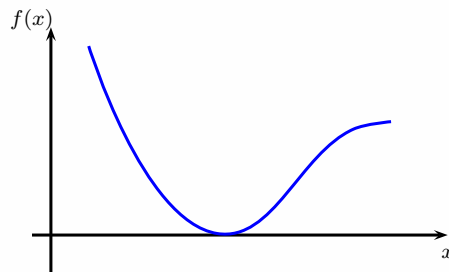


Figura 1.3: Función que toca el eje x en un punto.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.



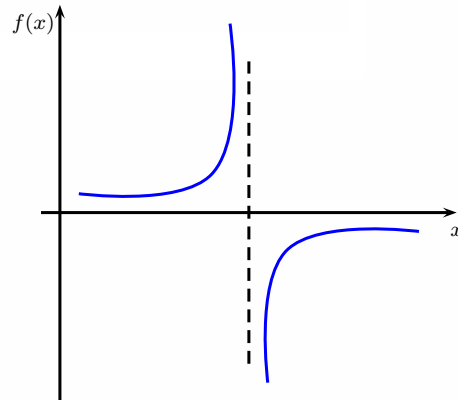


Figura 1.4: Función con una singularidad.

Algoritmo de Bisección

Para obtener una solución a $f(x) = 0$ dada la función f continua en el intervalo $[a, b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos:

ENTRADA: extremos de a, c ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 .

SALIDA: solución aproximada p o mensaje de error.

1. Tome $i = 1$;

$$FA = f(a)$$

2. Mientras $i \leq N_0$ haga los pasos 3 a 6.

3. Tome $b = \frac{a+c}{2}$; (calcule b_i).

$$FB = f(b)$$

4. Si $FB = 0$ o $\frac{c-a}{2} < TOL$ entonces
SALIDA(b) "Procedimiento terminado satisfactoriamente",
PARAR.

5. Tome $i = i + 1$.

6. Si $FA \cdot FB \leq 0$ entonces tome $c = b$;
si no tome $a = b$, $FA = FB$.

7. SALIDA "El elemento fracasó después de N_0 iteraciones, N_0 ".
PARAR

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.





IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 2

Método de la Regla Falsa



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se continua con el problema de encontrar la solución de ecuaciones no lineales, mostrando al alumno en el proceso del uso de métodos numéricos para resolución de problemas.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de ecuaciones no lineales “Regla Falsa”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de ecuaciones no lineales.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de la Regla Falsa para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de la Regla Falsa para solución de ecuaciones no lineales, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

El método de la Regla Falsa, basado en la interpolación lineal, es análogo al método bisección, puesto que el tamaño del intervalo que contiene a la raíz se reduce mediante cada iteración. Sin embargo, en vez de biseccionar en forma monótona el intervalo, se utiliza una interpolación lineal ajustada a dos puntos extremos para encontrar una aproximación de la raíz. Así, si la función está bien aproximada por interpolación lineal, entonces las raíces estimadas tendrán una buena precisión y, en consecuencia, la iteración convergerá más rápido que cuando se utiliza el método de bisección.

Dado un intervalo $[a, c]$ que contenga a la raíz, la función lineal que pasa por $(a, f(a))$ y $(c, f(c))$ se escribe como:

$$y = f(a) + \frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) \tag{2.1}$$

o despejando x ,

$$x = a + \frac{c - a}{f(c) - f(a)}(y - f(a)) \tag{2.2}$$

La coordenada x en donde la línea intersecta al eje x se determina al hacer $y = 0$ en la ecuación ??; es decir,

$$b = a - \frac{c - a}{f(c) - f(a)}f(a) = \frac{cf(a) - af(a)}{f(c) - f(a)} \tag{2.3}$$

Después de encontrar b , el intervalo $[a, c]$ se divide en $[a, b]$ y $[b, c]$. Si $f(a)f(b) \leq 0$, la raíz se encuentra en $[a, b]$; en caso contrario, está en $[b, c]$. Los extremos del nuevo intervalo que contiene la raíz se renombran a y c . El procedimiento de interpolación se repite hasta que las raíces estimadas convergen.

La desventaja de este método es que pueden aparecer extremos fijos, como lo muestra la figura ??, en donde uno de los extremos de la sucesión de intervalos no se mueve del punto original, por lo que las aproximaciones a la raíz, denotadas por b_1, b_2, b_3, \dots convergen a la raíz exacta solamente por un lado. Los extremos fijos no son deseables debido a que hacen más lenta la convergencia, en particular cuando el intervalo inicial es muy grande o cuando la función se desvía de manera significativa de una línea recta en el intervalo. El método de la regla falsa modificado que se explica a continuación elimina esta dificultad.

En este método, el valor de f en un punto fijo se divide a la mitad si este punto se ha repetido más de dos veces. El extremo que se repite se llama *extremo fijo*. La excepción es que para $i = 2$, el valor de f en un extremo se divide entre 2 de inmediato si no se mueve.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Algoritmo de Regla falsa

Para obtener una solución a $f(x) = 0$ dada la función f continua en el intervalo $[a, b]$, donde



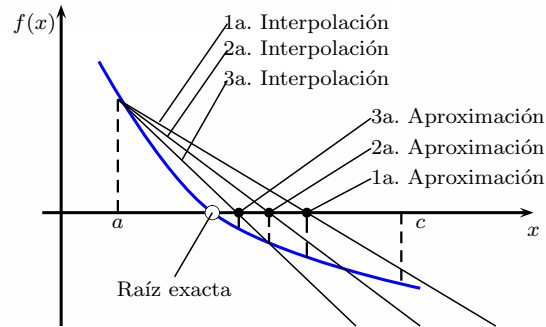


Figura 2.1: Método de Regla Falsa.

$f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos:

ENTRADA: extremos de a, c ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N_0 .

SALIDA: solución aproximada p o mensaje de error.

1. Calcule

$$b = \frac{a + c}{2}$$

2. Calcule

$$FA = f(a), FB = f(b)$$

3. Si $FA \cdot FB > 0$ entonces
SALIDA(No existen raíces)
PARAR

4. Tome $i = 1, KL = 0, KR = 0$

5. Mientras $i \leq N$ haga los pasos 5 a 8.

6. Calcule

$$b = a - \frac{FA(c - a)}{FC - FA}, \quad FB = f(b)$$

7. Si $b - a < TOL$ entonces
SALIDA(b) "Procedimiento terminado satisfactoriamente"
PARAR

8. Si $FA \cdot FB < 0$ entonces
 $a = b, FA = FB$
 $KL = 0, KR = KR + 1$
Si $KR > 1$ entonces $FC = FC/2$

Si no

$$c = b, FC = FB$$

$$KR = 0, KL = KL + 1$$





Si $KL > 1$ entonces $FA = FA/2$

9. Tome $i = i + 1$

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá $\frac{1}{2}$ investigar y probar su funcionamiento con diferentes ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 3

Método de Newton-Raphson



DESCRIPCIÓN: En esta práctica sigue el problema de encontrar la solución de ecuaciones no lineales, mostrando al alumno en el proceso del uso de métodos numéricos para resolución de problemas.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de ecuaciones no lineales “Newton-Raphson”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de ecuaciones no lineales.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Newton-Raphson para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de Newton-Raphson para solución de ecuaciones no lineales, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

El método de Newton-Raphson (o método de Newton) es una de las técnicas numéricas para resolver un problema de búsqueda de raíces $f(x) = 0$ más poderosas y conocidas. Hay muchas formas de introducirlo. La más común consiste en considerarlo gráficamente. Otra posibilidad consiste en derivarlo como una técnica que permite lograr una convergencia más rápida que la que ofrecen otros tipos de iteración funcional. Una tercera forma de introducir el método de Newton se basa en los polinomios de Taylor.

Supongamos que $f \in [a, c]$. Sea $\bar{x} \in [a, c]$ una aproximación de b tal que $f'(\bar{x}) \neq 0$ y $|b - \bar{x}|$ es pequeño. Consideremos el primer polinomio de Taylor para $f(x)$ expandiendo alrededor de \bar{x} ,

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(x)) \tag{3.1}$$

donde $\xi(x)$ está entre x y \bar{x} . Dado que $f(b) = 0$ esta ecuación, con $x = b$, da

$$0 = f(\bar{x}) + (b - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(b - \bar{x})^2}{2} f''(\xi(b)) \tag{3.2}$$

Derivamos el método de Newton suponiendo que, como $b - \bar{x}$ es tan pequeño, el término que contiene $(b - \bar{x})^2$ es mucho menor y que

$$0 \approx f(\bar{x}) + (b - \bar{x})f'(\bar{x}) \tag{3.3}$$

Despejando b de esta ecuación obtenemos

$$b \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \tag{3.4}$$

Esto nos prepara para introducir el método de Newton, el cual comienza con una aproximación inicial b_0 y genera la sucesión $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ definida por

$$b_i = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f'(b_{i-1})}, \quad \text{para } i \geq 1 \tag{3.5}$$

La figura muestra gráficamente cómo se obtienen las aproximaciones usando tangentes sucesivas. Comenzando con la aproximación inicial b_0 , la aproximación b_1 es la intersección con el eje x de la línea tangente a la gráfica de f en $(b_0, f(b_0))$. La aproximación b_2 es la intersección x de la tangente a la gráfica de f en $(b_1, f(b_1))$ y así sucesivamente. Las desigualdades de las técnicas de paro dadas con el método de bisección son aplicables al método de Newton. Es decir, seleccione una tolerancia $\epsilon > 0$ y construya $b_1 \dots b_i$ hasta que

$$|b_i - b_{i-1}| < \epsilon \tag{3.6}$$



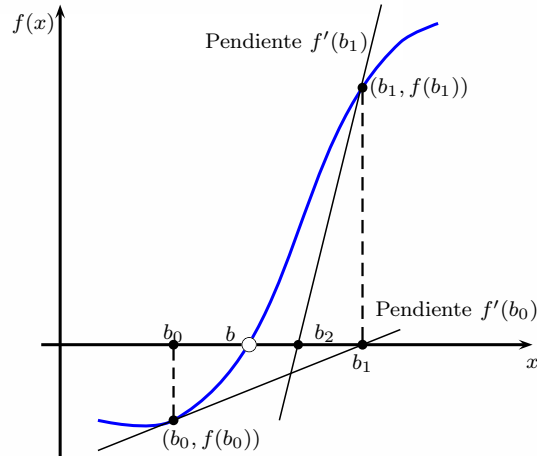


Figura 3.1: Aproximaciones usando tangentes sucesivas

$$\frac{|b_i - b_{i-1}|}{|b_i|} < \epsilon, \quad b_N \neq 0 \quad (3.7)$$

o bien

$$|f(b_i)| < \epsilon \quad (3.8)$$

Una forma de la desigualdad ?? se usa en el paso 4 del algoritmo. Obsérvese que tal vez la desigualdad ?? no proporcione mucha información sobre el error real $|b_N - b|$.

El método de Newton es una técnica de iteración funcional de la forma $b_N = g(b_{N-1})$, para la cual

$$g(b_{i-1}) = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f'(b_{i-1})}, \quad \text{para } i \geq 1 \quad (3.9)$$

De la ecuación ?? inferimos que no es posible continuar con el método de Newton si $f'(b_{n-1}) = 0$ para alguna n . De hecho, veremos que el método más efectivo cuando f' está acotada lejos de cero y cerca de b .



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Algoritmo Método de Newton-Raphson.

Para obtener una solución a $f(x) = 0$ dada la función diferenciable f y una aproximación inicial b_0 :

ENTRADA: aproximación inicial b_0 ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N .

SALIDA: solución aproximada b o mensaje de fracaso.

1. Tome $i = 1$.
2. Mientras $i \leq N$ haga pasos 3 a 6.





3. Tome $b_i = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f'(b_{i-1})}$. (Calcule b_i).
4. Si $|b_i - b_{i-1}| < TOL$ entonces
SALIDA(b); (Procedimiento terminado satisfactoriamente.)
PARAR.
5. Tome $i = i + 1$.
6. Tome $b_0 = b$. (Redefina b_0).
7. SALIDA ('El método fracasó después de N iteraciones'); (Proceso terminado sin éxito)
PARAR.

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá $\frac{1}{2}$ investigar y probar su funcionamiento con diferentes ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 4

Método de la Secante



DESCRIPCIÓN: En esta práctica finalizamos con el problema de encontrar la solución de ecuaciones no lineales, mostrando al alumno en el proceso del uso de métodos numéricos para resolución de problemas.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de ecuaciones no lineales “Secante”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de ecuaciones no lineales.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de la Secante para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de la Secante para solución de ecuaciones no lineales, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Este método es muy similar al de Newton-Raphson. La principal diferencia con el método de Newton es que f' se aproxima utilizando los dos valores de las iteraciones consecutivas de f . Esto elimina la necesidad de evaluar tanto a f como a f' en cada iteración. Por lo tanto, el método de la Secante es más eficiente, particularmente cuando f es una función en la que invierte mucho tiempo al evaluarla. El método de la Secante también está intimamente ligado con el método de la regla falsa, ya que ambos se basan en la fórmula de interpolación lineal, pero el primero utiliza extrapolaciones, mientras que el segundo utiliza únicamente interpolaciones, figura ??.

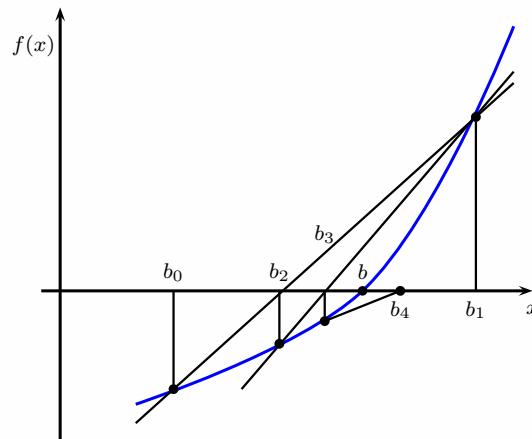


Figura 4.1: Método de la Secante.

Las aproximaciones sucesivas para la raíz en el método de la Secante están dadas por:

$$b_i = b_{i-1} - f(b_{i-1}) \frac{b_{i-1} - b_{i-2}}{f(b_{i-1}) - f(b_{i-2})}, \quad i = 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

donde b_0 y b_1 son dos suposiciones iniciales para comenzar la iteración.

Si los b_{i-1} y $f(b_i)$ consecutivos son muy cercanos, entonces también $f(b_{i-1})$ y $f(b_i)$ están muy cercanos, por lo que aparece un error de redondeo significativo en la ecuación ???. Este problema se puede evitar de dos formas: a) cuando $|f(b_i)|$ es menor que un valor fijado de antemano, b_{i-2} y $f(b_{i-2})$ en la ecuación ?? quedan fijos (o congelados) de ahí en adelante, o b) b_{i-2} y $f(b_{i-2})$ se remplazan por $b_{i-2} + \xi$ y $f(b_{i-2}) + \xi$, donde ξ es un número pequeño prescrito pero lo suficientemente grande como para evitar serios errores de redondeo. El método de la Secante puede converger en una raíz no deseada o puede no converger del todo si la estimación inicial no es buena.





DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Algoritmo Método de la Secante.

Para encontrar la solución para $f(x) = 0$ dadas las aproximaciones iniciales b_0 y b_1 :

ENTRADA: aproximaciones iniciales b_0 y b_1 ; tolerancia TOL ; número máximo de iteraciones N .

SALIDA: solución aproximada b o mensaje de fracaso.

1. Tome $i = 2$.

$$q_0 = f(b_0)$$

$$q_1 = f(b_1)$$

2. Mientras $i \leq N$ haga los pasos 3 al 6.

3. Tome $b = b_1 - q_1 \frac{b_1 - b_0}{q_1 - q_0}$. (Calcule b_i).

4. Si $|b - b_1| < TOL$ entonces
SALIDA(b); (Procedimiento terminado satisfactoriamente.)
PARAR.

5. Tome $i = i + 1$.

6. Tome (Redefina b_0, q_0, b_1, q_1)

$$b_0 = b_1$$

$$q_0 = q_1$$

$$b_1 = b$$

$$q_1 = f(b)$$

7. SALIDA ('El método fracasó después de N iteraciones'); (Proceso terminado sin éxito)
PARAR.

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 5

Método de Gauss



DESCRIPCIÓN: Esta es la primera práctica para encontrar la solución a sistemas de ecuaciones, en ella se introduce al alumno en el proceso del uso de métodos numéricos para resolución de problemas.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de sistemas de ecuaciones de “Gauss”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Gauss para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de Gauss para solución de sistemas de ecuaciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan en muchos problemas de ingeniería y de las ciencias, así como en aplicaciones de las matemáticas a las ciencias sociales y al estudio cuantitativo de problemas de administración y economía.

Ahora se examinarán métodos directos con que se resuelven el sistema lineal

$$\begin{aligned}
 E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 &\vdots \\
 E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Para x_1, \dots, x_n , dadas las a_{ij} con $i, j = 1, 2, \dots, n$. Estas técnicas son métodos directos que proporcionan una respuesta en un número fijo de pasos y sólo están sujetos a los errores de redondeo. La eliminación de Gauss es el método que se utiliza en forma más amplia para resolver un conjunto de ecuaciones lineales. Tomando el conjunto de ecuaciones en ??, el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones, que es la forma más usual de un conjunto de ecuaciones lineales. Si estos números son distintos, pueden existir las soluciones, pero esto debe estudiarse con más cuidado.

Cuando al menos uno de los términos libres de la ecuación ?? es distinto de cero, se dice que el conjunto es no homogéneo. La eliminación de Gauss se aplica sólo al caso de los conjuntos no homogéneos de ecuaciones. No siempre puede ser fácil la solución de un conjunto de ecuaciones lineales, debido al hecho de que quizá no tenga una solución única. Aunque tuviera una solución única, la solución calculada puede ser inexacta en el caso de un problema mal condicionado.

Sin embargo, para simplificar la exposición, consideremos un problema ideal en el que el conjunto de ecuaciones tiene una solución única y no aparece ninguna dificultad en el proceso de solución. La eliminación de Gauss consiste en: a) la eliminación hacia adelante, y b) la sustitución hacia atrás. La eliminación hacia adelante se lleva a cabo de la siguiente manera.

La primera ecuación se multiplica por $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ y se le resta a la segunda ecuación para eliminar el primer término de la segunda; de la misma forma, el primer término de las ecuaciones restantes, $i > 2$, se elimina restando la primera ecuación multiplicada por $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Así las ecuaciones deberían verse así:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
 a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\
 &\vdots \\
 a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n &= b'_n
 \end{aligned} \tag{5.2}$$





donde $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}$.

Conviene observar que la primera ecuación no ha cambiado.

En seguida, el segundo término de cada una de las ecuaciones, desde la tercera hasta la última, $i > 2$, se elimina restando la segunda ecuación multiplicada por $\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$. Después de terminar este paso, se eliminan los terceros términos de las demás ecuaciones, desde la cuarta hasta la última. Al finalizar este proceso de eliminación hacia adelante, el conjunto de ecuaciones se verá de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n^{n-1} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Los términos principales de cada una de las ecuaciones anteriores reciben el nombre de *pivote*. Se podría normalizar cada una de las ecuaciones, dividiendo entre el coeficiente principal, pero esto no se utiliza en la eliminación de Gauss; la razón fundamental es que la normalización de las ecuaciones aumenta el tiempo total de cálculo.

El procedimiento de sustitución hacia atrás comienza con la última ecuación. Se obtiene la solución de x_n en la última ecuación:

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} \tag{5.4}$$

Sucesivamente,

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \frac{[b_{n-1}^{n-2} - a_n^{n-1,n}x_n]}{a_{n-1,n-1}^{n-2}} \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{[b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j]}{a_{11}} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Con esto se completa la eliminación de Gauss.

La eliminación de Gauss se puede realizar escribiendo sólo los coeficientes y los lados derechos de una forma de arreglo. De hecho, esto es precisamente lo que hace un programa de computadora. Incluso para los cálculos a mano, es más conveniente utilizar el arreglo que escribir todas las ecuaciones. La expresión en forma de arreglo de la ecuación ?? es

$$\begin{aligned} a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \cdots \ a_{1,n-1} \ a_{1n} \ b_1 \\ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \cdots \ a_{2,n-1} \ a_{2n} \ b_2 \\ a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ \cdots \ a_{3,n-1} \ a_{3n} \ b_3 \\ \vdots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ a_{n3} \ \cdots \ a_{n,n-1} \ a_{nn} \ b_n \end{aligned} \tag{5.6}$$





Todas las etapas intermedias de la eliminación hacia adelante se escriben en forma de arreglo. El arreglo después de la eliminación hacia adelante queda como

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\
 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\
 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3,n-1} & a''_{3n} & b''_3 \\
 & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{n-2}_{n-1,n-1} & a^{n-2}_{n-1,n} & b^{n-2}_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{n-1}_{nn} & b^{n-1}_n
 \end{array} \tag{5.7}$$



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para resolver el sistema lineal de $n \times n$

$$\begin{array}{l}
 E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\
 E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\
 \vdots \\
 E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}
 \end{array}$$

ENTRADA: número de incógnitas y ecuaciones; matriz aumentada $A = (a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n + 1$.

SALIDA: solución x_1, x_2, \dots, x_n o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

1. Para $i = 1, \dots, n$ haga pasos 2 al 7.
2. Tome $pivote = a_{ii}$
3. Para $j = i, \dots, n + 1$ calcule $a_{ij} = \frac{a_{ij}}{pivote}$
4. Para $k = i, \dots, n$ y si k diferente de i , realice los pasos 4 y 5
5. Tome $c = a_{ki}$
6. Para $j = i, \dots, n + 1$, calcule $a_{kj} = a_{kj} - ca_{ij}$
7. Tome $x_{n-1} = a_{(n-1)(n)}$
8. Para $i = n - 1, \dots, 1$ haga los pasos 9 a 11
9. Tome $s = 0$
10. Para $l = i + 1, \dots, m$ calcule $s = s + a_{il}x_l$
11. Tome $x_i = a_{i,n} - s$
12. SALIDA (x_1, \dots, x_n)
PARAR.





Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 6

Método de Gauss-Jordan



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se continúa con el problema de encontrar la solución a sistemas de ecuaciones, mostrando al alumno en el proceso del uso de métodos numéricos para resolución de problemas.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de sistemas de ecuaciones de “Gauss-Jordan”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Gauss-Jordan para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de Gauss-Jordan para solución de sistemas de ecuaciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

La eliminación de Gauss-Jordan es una variante de la eliminación de Gauss y comparte con ésta el proceso de eliminación hacia adelante, pero difiere en el proceso hacia atrás, el cual recibe el nombre *eliminación hacia atrás*.

Partimos de la ecuación ??, la eliminación hacia atrás convierte en 1 a los coeficientes en la posición de pivoteo y elimina los demás.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\
 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\
 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3,n-1} & a''_{3n} & b''_3 \\
 & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{n-2}_{n-1,n-1} & a^{n-2}_{n-1,n} & b^{n-2}_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^{n-1}_{nn} & b^{n-1}_n
 \end{array} \tag{6.1}$$

Primero se divide el último renglón entre a^{n-1}_{nn} para obtener

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \bar{b}_n \tag{6.2}$$

donde $\bar{b}_n = b^{n-1}_n / a^{n-1}_{nn}$.

Los n -ésimos coeficientes de cada renglón, excepto el último se eliminan restando el último renglón (ecuación ??) multiplicado por el n -ésimo coeficiente al i -ésimo renglón:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 & \bar{b}_1 \\
 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2,n-1} & 0 & \bar{b}_2 \\
 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3,n-1} & 0 & \bar{b}_3 \\
 & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{n-2}_{n-1,n-1} & 0 & \bar{b}_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}_n
 \end{array} \tag{6.3}$$

donde $\bar{b}_i = b^{i-1}_i - a^{i-1}_{i,n} \bar{b}_n$.

La ecuación ?? tiene la misma configuración de la ecuación ?? excepto por el último renglón y la n -ésima columna. Por lo tanto, el $(n - 1)$ -ésimo renglón se puede normalizar y se puede eliminar la $(n - 1)$ -ésima columna, siguiendo un procedimiento análogo. Dividimos el $(n - 1)$ -ésimo renglón entre $a^{n-2}_{n-1,n-1}$.

Entonces, los $(n - 1)$ -ésimos coeficientes de todos los renglones arriba del $(n - 1)$ -ésimo renglón se eliminan restando el $(n - 1)$ -ésimo renglón multiplicado por el $(n - 1)$ -ésimo





coeficiente al renglón que se eliminará:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_1 \\
 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_2 \\
 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_3 \\
 & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \bar{b}'_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}'_n
 \end{array} \tag{6.4}$$

Al repetir el proceso de eliminación, el arreglo queda finalmente

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_1^{n-1} \\
 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_2^{n-2} \\
 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}_3^{n-3} \\
 & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{b}'_{n-1} \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{b}_n
 \end{array} \tag{6.5}$$

Esta es la conclusión de la eliminación hacia atrás. Deben observarse dos aspectos de la ecuación ???. En primer lugar, todos los coeficientes son iguales a cero, excepto los pivotes, que valen 1. En segundo lugar, cada renglón se interpreta como

$$x_i = \bar{b}_i^{n-i}$$

es decir, la columna de la extrema derecha es la solución final.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para resolver el sistema lineal de $n \times n$

$$\begin{array}{l}
 E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1} \\
 E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1} \\
 \vdots \\
 E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}
 \end{array}$$

ENTRADA: número de incógnitas y ecuaciones; matriz aumentada $A = (a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n + 1$.

SALIDA: solución x_1, x_2, \dots, x_n o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

1. Para $i = 1, \dots, n$ haga pasos 2 al 7.
2. Tome $pivote = a_{ii}$
3. Para $j = i, \dots, n + 1$ calcule $a_{ij} = \frac{a_{ij}}{pivote}$
4. Para $k = i, \dots, n$ y si k diferente de i , realice los pasos 5 y 6





5. Tome $c = a_{ki}$
6. Para $j = i, \dots, n + 1$, calcule $a_{kj} = a_{kj} - ca_{ij}$
7. Para $i = 1, \dots, n$ calcule $x_i = a_{i(n+1)}$
8. SALIDA (x_1, \dots, x_n)
PARAR.

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 7

Método de LU



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se continúa con el problema de encontrar la solución a sistemas de ecuaciones, mediante un esquema de descomposición de matrices; mostrando al alumno una manera diferente del uso de métodos numéricos para resolución de problemas.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de sistemas de ecuaciones de “LU”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de LU para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de LU para solución de sistemas de ecuaciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

El método de descomposición LU se basa en la idea de que una matriz A puede ser representada como el producto de dos matrices.

$$A = LU \tag{7.1}$$

con las características de que L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior como se muestra en ??, para un sistema de n ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Al expresar la matriz de esta manera podemos resolver el sistema de ecuaciones $Ax = y$ que será:

$$LUX = y \tag{7.3}$$

Para resolver la ecuación ??, considere:

$$UX = z \tag{7.4}$$

por lo que ?? queda expresada

$$Lz = y \tag{7.5}$$

La solución z en ?? resulta sencilla, debido a la forma triangular de la matriz L , como en ??; una vez obteniendo a z es necesario resolver la ecuación ?? en términos de x , ecuación ??.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

En los casos en los que es necesario resolver sistemas de ecuaciones lineales donde los coeficientes de la matriz resultan iguales pero contiene términos no homogéneos distintos (lado derecho) es más eficiente utilizar el método de descomposición de LU; para evitar que al eliminar términos en un renglón todos se vuelvan cero.

El esquema general para resolver un sistema de n ecuaciones por el método de LU es el siguiente:





a) Con el primer renglón de U ,

$$u_{1,j} = a_{1,j}, \quad j = 1 \dots n \quad (7.8)$$

b) Para la primer columna de L

$$l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{u_{1,1}}, \quad i = 2 \dots n \quad (7.9)$$

c) El segundo renglón de U

$$u_{2,j} = a_{2,j} - l_{2,1}u_{1,j}, \quad j = 2 \dots n \quad (7.10)$$

d) La segunda columna de L

$$l_{i,2} = \frac{a_{i,2} - l_{i,1}u_{1,2}}{u_{2,2}}, \quad j = 3 \dots n \quad (7.11)$$

e) Para el k -ésimo renglón de U

$$u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s}u_{s,j}, \quad j = k \dots n \quad (7.12)$$

f) Para la k -ésima columna de L

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{i,s}u_{s,k}}{u_{k,k}}, \quad i = k + 1 \dots n \quad (7.13)$$

g) Determinar el valor de z

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \\ z_i &= y_i - \left[\sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}z_j \right], \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (7.14)$$

h) Obtención de x

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{z_n}{u_{n,n}} \\ x_i &= \frac{z_i - \left[\sum_{j=i+1}^n u_{i,j}x_j \right]}{u_{i,i}}, \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (7.15)$$



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para resolver el sistema lineal de n ecuaciones por el método de LU. ENTRADA: número de incógnitas y ecuaciones; matriz $A = (a_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, vector de soluciones de las ecuaciones $B = (y_i)$.

SALIDA: solución x_1, x_2, \dots, x_n o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.





1. Para $j = 1, \dots, n$ obtenga

$$u_{1,j} = a_{1,j}$$

2. Asigne $l_{1,1} = 1$

3. Para $i = 2, \dots, n$ obtenga

$$l_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{u_{1,1}}$$

4. Para $k = 2, \dots, n$ realice
Con $j = k, \dots, n$ obtenga

$$u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{k,s} u_{s,j}$$

Asigne $l_{k,k} = 1$

Con $i = k + 1, \dots, n$ obtenga

$$l_{i,k} = \frac{a_{i,k} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{i,s} u_{s,k}}{u_{k,k}}$$

5. Asigne $z_1 = y_1$

6. Para $i = 2, \dots, n$ obtenga

$$z_i = y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} z_j$$

7. Asigne $x_n = \frac{z_n}{u_{n,n}}$

8. Para $i = n - 1, \dots, 1$ obtenga

$$x_i = \frac{z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{i,j} x_j}{u_{i,i}}$$

9. SALIDA (x_1, \dots, x_n)
PARAR.

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 8

Método de Jacobi



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se hace la presentación de un método iterativo para la solución a sistemas de ecuaciones, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas por una nueva variante.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de sistemas de ecuaciones de “Jacobi”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Jacobi para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de Jacobi para solución de sistemas de ecuaciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:





1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Para resolver un sistema de n ecuaciones lineales, reordénesse las filas de manera que, los elementos diagonales tengan magnitudes tan grandes como sea posible, en relación a las magnitudes de otros coeficientes en la misma fila. Definase al sistema reordenando como $Ax = b$. Comenzando con una aproximación inicial al vector solución x^0 , calcule cada componente x_i para $i = 1, 2, \dots, n$, por

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.1)$$

Una condición suficiente para la convergencia es que:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.2)$$

Cuando esto es verdad, x^k convergirá a la solución, sin importar cuál vector inicial sea el que se use.

Mediante el siguiente ejemplo, se muestran los pasos de funcionamiento del método de Jacobi:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \end{aligned} \quad (8.3)$$

1. Resuelve cada ecuación del sistema ?? para cada una de las variables, escogiendo, cuando sea posible, despejar la variable de mayor coeficiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{4} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 \\ x_3 &= 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \end{aligned} \quad (8.4)$$

2. Asigna con alguna aproximación inicial al valor de las variables, el vector $x^0 = [1, 1, 1]^t$ para iniciar el proceso de iteración y con un ϵ para la condición de paro.
3. Usa un super índice como referencia del número de iteraciones y sustituye todos los valores del vector x^0 para obtener:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{4} - \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{4}(1) = 2 \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(1) = 2 \\ x_3 &= 4 - \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{4}(1) = \frac{13}{4} \end{aligned} \quad (8.5)$$

en donde $x^1 = [2, 2, 13/4]^t$.





4. Compara las diferencias entre los elementos correspondientes de los vectores x^0 y x^1 . Si estas diferencias no son menores que ϵ , itera a partir del paso 3 haciendo previamente $x^0 = x^1$. Sigue iterando hasta que los valores sucesivos de las variables estén dentro del ϵ deseado:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left[\frac{15}{16}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right]^t \\ x^3 &= \left[\frac{7}{8}, \frac{63}{32}, \frac{93}{32} \right]^t \\ x^4 &= \left[\frac{133}{128}, \frac{31}{16}, \frac{393}{128} \right]^t \\ x^5 &= \left[\frac{519}{512}, \frac{517}{256}, \frac{767}{256} \right]^t \end{aligned} \tag{8.6}$$

Con un $\epsilon < 0.1$ se obtiene la solución en $x^5 \cong [1, 2, 3]^t$.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para resolver el sistema lineal de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\ &\vdots \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned}$$

ENTRADA: número de ecuaciones, error ϵ , vector de valores inicial $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, número máximo de iteraciones N

SALIDA: solución x_1, x_2, \dots, x_n o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

1. Considere el vector de aproximaciones

$$x^0 = b$$

2. Tome $k = 1$
3. Mientras $|x^k - x^{k-1}| > \epsilon$ realice los pasos 4 al 6
4. Calcule cada componente x_i^k para $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k$$

5. Si $k > N$ SALIDA(No existe solución única) PARAR





6. Asigne $k = k + 1$
7. La solución al sistema de ecuaciones es x^{k-1}

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 9

Método de Gauss-Seidel



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se hace uso de otro método iterativo para la solución a sistemas de ecuaciones, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas por una nueva variante.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método de solución de sistemas de ecuaciones de “Gauss-Seidel”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Gauss-Seidel para solución de ecuaciones no lineales.
3. El alumno(a) debe conocer método de Gauss-Seidel para solución de sistemas de ecuaciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:





1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

En el método de Jacobi, todos los valores de x no se calculan “simultáneamente” cuando se ejecuta el método. Se calcula la segunda estimación de x_1 antes de que calcular el de x_2 , y se tendrán nuevos valores para x_1 y x_2 antes de que se mejore el valor de x_3 . En casi todos los casos los nuevos valores son mejores que los anteriores, y se les debe utilizar de preferencia a los valores peores. Cuando se hace esto, el método se conoce por el nombre de *Gauss-Seidel*. En este método, el primer paso consiste en reordenar el conjunto de ecuaciones, resolviendo cada una de las variables en términos de las otras, exactamente como se hizo en el método de Jacobi. Luego se procede a mejorar cada valor x a su vez, utilizando simple las aproximaciones más recientes de los valores de las otras variables. La rapidez de convergencia es más rápida.

El método usado por Gauss-Seidel converge con menos iteraciones de las requeridas por el método de Jacobi porque cada nuevo componente calculado se usa para calcular el siguiente, sin tener que evaluar todo el sistema antes de volverlos a usar. Para ejemplificar lo anterior, partimos del paso 3 visto en el método de Jacobi, considerando nuevamente las ecuaciones de ??.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{4} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 \\ x_3 &= 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \end{aligned} \tag{9.1}$$

3. Usa un superíndice como referencia del número de iteraciones y sustituye todos los valores del vector x^0 para obtener:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{11}{4} - \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{4}(1) = 2 \\ x_2^1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2) = \frac{5}{2} \\ x_3^1 &= 4 - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{19}{8} \end{aligned} \tag{9.2}$$

en donde $x^1 = [2, 5/2, 19/8]$.

4. Compara las diferencias entre los elementos correspondientes de los vectores x^0 y x^1 . Si estas diferencias no son menores que ϵ , itera a partir del paso 3 haciendo previamente $x^0 = x^1$. Sigue iterando hasta que los valores sucesivos de las variables estén dentro del ϵ deseado:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left[\frac{29}{32}, \frac{125}{64}, \frac{783}{256} \right] \\ x^3 &= \left[\frac{1033}{1024}, \frac{4105}{2048}, \frac{24531}{8192} \right] \end{aligned} \tag{9.3}$$





Para $\epsilon < 0.1$ se obtiene la solución en $x^3 \cong [1, 2, 3]^t$



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para resolver el sistema lineal de n ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\
 E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\
 &\vdots \\
 E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}
 \end{aligned}$$

ENTRADA: número de ecuaciones, error ϵ , vector de valores inicial $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$, número máximo de iteraciones N

SALIDA: solución x_1, x_2, \dots, x_n o mensaje de que el sistema lineal no tiene solución única.

1. Considere el vector de aproximaciones

$$x^0 = b$$

2. Tome $k = 1$
3. Mientras $|x_1 - x_0| > \epsilon$ realice los pasos 4 y 5
4. Calcule cada componente x_i^1 para $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$$

$$k = k + 1$$

5. Si $k > N$ SALIDA(No existe solución única) PARAR

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 10

Método de Interpolación lineal



DESCRIPCIÓN: En esta práctica muestra un método para la obtención de valores no presentes en un conjunto, de una función, a través de la interpolación de datos, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas de graficación de funciones.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método interpolación de funciones de “Interpolación lineal”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Interpolación lineal para funciones.
3. El alumno(a) debe conocer método de Interpolación lineal para funciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Una función de *interpolación* es aquella que pasa a través de puntos dados como datos, los cuales se muestran comúnmente por medio de una tabla de valores o se toman directamente de una función dada.

La interpolación de los datos puede hacerse mediante un polinomio, las funciones *spline*, una función racional o las series de Fourier entre otras posibles formas. La interpolación polinomial (ajustar un polinomio a los puntos dados) es uno de los temas más importantes en métodos numéricos, ya que la mayoría de los demás modelos numéricos se basan en la interpolación polinomial. Por ejemplo, los modelos de integración numérica se obtienen integrando fórmulas de interpolación polinomial, y los modelos de diferenciación numérica se obtienen derivando las interpolaciones polinomiales.

Los datos obtenidos mediante una medición pueden interpolarse, pero en la mayoría de los casos no es recomendable una interpolación directa debido a los errores aleatorios implicados en la medición.

Esta interpolación es base para varios modelos numéricos fundamentales. Al integrar la interpolación lineal, se deduce el modelo de integración llamado *regla del trapecio*. El gradiente de la interpolación lineal es una aproximación a la primera derivada de la función.

La interpolación lineal da como resultado una recta que se ajusta a dos puntos dados. La interpolación lineal que se muestra en la figura ?? esta dado por

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \tag{10.1}$$

donde $f(a)$ y $f(b)$ son valores conocidos de $f(x)$ en $x = a$ y $x = b$ respectivamente.

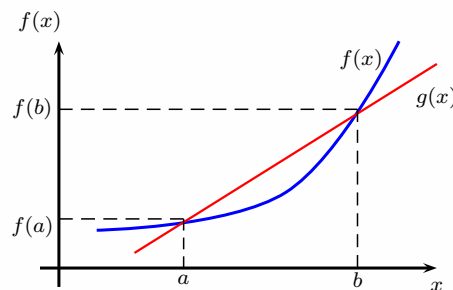


Figura 10.1: Interpolación Lineal.

El error de la interpolación lineal se puede expresar en la forma:

$$e(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b \tag{10.2}$$





donde ξ (una letra griega llamada “xi”) depende de x pero está en algún lugar entre a y b . La ecuación ?? es un poco difícil de manejar ya que no tenemos forma de evaluar a ξ exactamente. Sin embargo, es posible analizar $f(x)$ cuando $f''(x)$ se aproxima mediante una constante en $a \leq x \leq b$.

Si f'' es una función con poca variación, o si el intervalo $[a, b]$ es pequeño, de forma que f'' cambie un poco, podemos aproximar $f''(\xi)$ mediante $f''(x_m)$, donde x_m es el punto medio entre a y b : $x_m = (a + b)/2$. La ecuación ?? indica entonces que:

1. El error máximo aparece aproximadamente en el punto medio entre los datos dados.
2. El error aumenta cuando $b - a$ crece.
3. El error también se incrementa cuando $|f''|$ crece.

Una excepción a estas tendencias es cuando f'' tiene una raíz en el intervalo $[a, b]$ porque la aproximación de que f'' es aproximadamente constante no es válida.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para determinar la interpolación de un conjunto de puntos dentro de un intervalo, mediante el proceso de interpolación lineal, para obtener el doble de puntos realizar:

ENTRADA: Conjunto de puntos $x, f(x)$, número de puntos N

SALIDA: Conjunto de puntos encontrado $y, f(y)$.

1. Tome $j = 0$ e $i = 0$
2. Asigne $y_j = x_i$
3. Para cada punto del conjunto $x_i, f(x_i)$, hasta uno antes del final $x_{N-1}, f(x_{N-1})$
4. Calcule $j = j + 1$ $y_j = \frac{x_{i+1}-x_i}{2} f(y_j) = \frac{x_{i+1}-y_j}{x_{i+1}-x_i} f(x_i) + \frac{y_j-x_i}{x_{i+1}-x_i} f(x_{i+1})$ $j = j + 1, i = i + 1$
 $y_j = x_i$
5. SALIDA: conjunto de puntos $y, f(y)$

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 11

Método de Lagrange



DESCRIPCIÓN: En esta práctica muestra otro método para la obtención la interpolación de funciones, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas de graficación de funciones.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método interpolación de funciones de “Lagrange”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Lagrange para interpolación de funciones.
3. El alumno(a) debe conocer método de Lagrange para interpolación de funciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:





1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Uno de los métodos fundamentales para encontrar una función que pase a través de datos dados es el de usar un polinomio, figura ??.

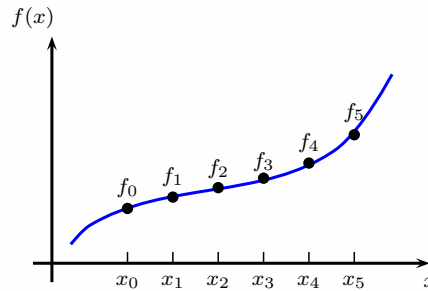


Figura 11.1: Datos ajustados por un polinomio.

La interpolación polinomial se puede expresar en varias formas alternativas que pueden transformarse entre sí. Entre éstas se encuentran las series de potencias, la interpolación de Lagrange y la Interpolación de Newton hacia atrás y hacia adelante.

Como se verá después con más detalle, un polinomio de orden N que pasa a través de $N+1$ puntos es único. Esto significa que, independientemente de la fórmula de interpolación, todas las interpolaciones polinomiales que se ajustan a los mismos datos son matemáticamente idénticas.

Suponga que se dan $N + 1$ puntos como:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_N \\ f_0 & f_1 & \cdots & f_N \end{vmatrix} \tag{11.1}$$

donde x_0, x_1, \dots son las abcisas de los puntos (puntos de la malla) dados en orden creciente. Los espacios entre los puntos de la malla son arbitrarios. El polinomio de orden N que pasa a través de los $N + 1$ puntos se puede escribir en una serie de potencias:

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N \tag{11.2}$$

donde los a_i son coeficientes. El ajuste de la serie de potencias a los $N + 1$ puntos dados da un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_Nx_0^N \\ f_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_Nx_1^N \\ &\vdots \\ f_N &= a_0 + a_1x_N + a_2x_N^2 + \cdots + a_Nx_N^N \end{aligned} \tag{11.3}$$

Aunque los coeficientes a_i pueden determinarse resolviendo las ecuaciones simultáneas por medio de un programa computacional, dicho intento no es deseable por dos razones.





Primera, se necesita un programa que resuelva un conjunto de ecuaciones lineales; y segunda, la solución de la computadora quizá no sea precisa. (Realmente, las potencias de x_i en la ecuación pueden ser números muy grandes, y si es así, el efecto de los errores por redondeo será importante). Por fortuna, existen mejores métodos para determinar una interpolación polinomial sin resolver las ecuaciones lineales.

Para presentar la idea básica que subyace en la fórmula de Lagrange, considere el producto de factores dados por:

$$V_0(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) \quad (11.4)$$

que se refiere a los $N + 1$ puntos dados antes. La función V_0 es un polinomio de orden N de x , y se le anula en $x = x_1, x_2, \dots, x_N$. Si dividimos $V_0(x)$ entre $V_0(x_0)$, la función resultante:

$$V_0(x_0) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_N)} \quad (11.5)$$

toma el valor de uno para $x = x_0$, y de cero para $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_N$. En forma análoga, podemos escribir V_i como:

$$V_i(x_i) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)}{(x_i - x_0)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_N)} \quad (11.6)$$

donde el numerador no incluye $(x - x_i)$ y el denominador no incluye $(x_i - x)$. La función $V_i(x)$ es un polinomio de orden N y toma el valor de uno en $x = x_i$ y de cero en $x = x_j, j \neq i$. Así, si multiplicamos $V_0(x), V_1(x), \dots, V_N(x)$ por f_0, f_1, \dots, f_N , respectivamente y las sumamos, el resultado será un polinomio de orden a lo más N e igual a f_i para cada $i = 0$ hasta $i = N$.

La fórmula de interpolación de Lagrange de orden N así obtenida se escribe como sigue:

$$\begin{aligned} g(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_N)} f_0 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_N)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_N)} f_1 \\ & \vdots \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{N-1})}{(x_N - x_0)(x_N - x_1) \cdots (x_N - x_{N-1})} f_N \end{aligned} \quad (11.7)$$

La ecuación ?? es equivalente a la serie de potencias que se determina resolviendo la ecuación lineal. Parece complicado, pero incluso la memorización no es difícil si se entiende la estructura.

La ecuación ?? es particularmente larga si el orden N es grande. Sin embargo, su escritura en un programa computacional necesita únicamente un número pequeño de líneas: Observando la ecuación ??, se reconoce que el primer término es f_0 veces un producto de:

$$\frac{(x - x_i)}{(x_0 - x_i)} \quad (11.8)$$

para toda i excepto para $i = 0$. El segundo término es f_1 veces un producto de:

$$\frac{(x - x_i)}{(x_1 - x_i)} \quad (11.9)$$





para toda i excepto para $i = 1$. Los otros términos siguen el mismo patrón.

La ecuación ?? es un polinomio de orden mayor o igual que N , ya que cada término del lado derecho es un polinomio de orden N . El orden de un polinomio es menor que N si f_i se obtiene de un polinomio $f(x)$ de orden menor que N . En este caso $g(x)$ es exactamente igual a $f(x)$.

El polinomio de interpolación de orden N que se ajusta a $N + 1$ puntos es único. Esto es importante, ya que indica que todos los polinomios de orden N que se ajustan a un conjunto dado de $N + 1$ puntos son matemáticamente idénticos, aún cuando sus formas son distintas.

La unicidad del polinomio de interpolación se puede demostrar considerando la hipótesis de que la interpolación de Lagrange no es un polinomio único. Si no es único, debe existir otro polinomio de orden N , $k(x)$ que pasa por los mismos $N + 1$ puntos. La diferencia entre la interpolación de Lagrange $g(x)$ y $k(x)$ definida como:

$$r(x) = g(x) - k(x) \tag{11.10}$$

debe ser un polinomio de orden menor o igual que N , ya que $g(x)$ y $k(x)$ son ambos polinomios de orden N . Por otro lado, puesto que $g(x)$ y $k(x)$ coinciden ambos en los $N + 1$ puntos dados, $r(x)$ es un polinomio de orden $N + 1$. Esto contradice el hecho de que $r(x)$ es un polinomio de orden menor o igual que N , lo cual demuestra que la hipótesis es incorrecta.

Cuando una función conocida $f(x)$ se aproxima mediante un polinomio de interpolación, lo que nos interesa es el error del polinomio. El error se define como:

$$e(x) = f(x) - g(x) \tag{11.11}$$

donde $f(x)$ es la función de la cual se muestrean los datos: $f_i = f(x_i)$. La distribución y magnitud de $e(x)$ se ven afectadas por los siguientes parámetros:

- La distribución de las abscisas en los datos.
- El tamaño del dominio de interpolación.
- El orden del polinomio (o equivalentemente el número de puntos utilizados en la interpolación, menos uno).

La distribución de x_i que se elige con más frecuencia es la de los puntos con igual espaciamiento (con intervalos espaciados de manera uniforme entre dos abscisas consecutivas), pero los x_i con espaciamientos no uniformes, también se usan a menudo. Aquí supondremos que las x_i están uniformemente espaciadas. Sin embargo, en una malla con espaciamiento uniforme, la magnitud de $e(x)$, a saber $|e(x)|$, tiende a ser pequeña en los intervalos cercanos al centro del dominio y tiende a crecer rápidamente hacia los extremos.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para determinar la interpolación de un conjunto de puntos dentro de un intervalo, mediante el proceso de interpolación lineal, para obtener el doble de puntos realizar:

ENTRADA: Conjunto de puntos $x, f(x)$, número de puntos N

SALIDA: Conjunto de puntos encontrado $y, f(y)$.





1. Tome $i = 0, j = 0$ y $k = 0$
2. Para cada punto del conjunto $x_i, f(x_i)$, hasta el final $x_N, f(x_N)$ realice los pasos 3 al 6
3. Tome $z = 1$
4. Para cada punto del conjunto,
5. Si i es diferente de j determine:

$$x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$$

$$z = z \cdot \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

6. Tome $y = x$ y $f(y) = z$
7. SALIDA: conjunto de puntos $y, f(y)$

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 12

Método de Diferencias Divididas de Newton



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se muestra un método más para la obtención la interpolación de funciones, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas de graficación de funciones.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método interpolación de funciones de “Diferencias Divididas de Newton”.

Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Diferencias Divididas de Newton para interpolación de funciones.
3. El alumno(a) debe conocer método de Diferencias Divididas de Newton para interpolación de funciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:





1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Hay ocasiones en las que resulta útil construir varios polinomios aproximantes $P_1(x), P_2(x), \dots, P_N(x)$ y, después elegir el más adecuado a nuestras necesidades. Si usamos los polinomios interpoladores de Lagrange uno de los inconvenientes es que no hay relación entre la construcción de $P_{N-1}(x)$ y la de $P_N(x)$; cada polinomio debe construirse individualmente y el trabajo necesario para calcular polinomios de grado elevado requiere hacer muchas operaciones. Vamos ahora a seguir un camino de construcción distinto, en el cual los polinomios interpoladores que se llamaran de Newton, se calculan mediante un esquema recursivo

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) \\
 P_2(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
 P_3(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &\quad \vdots \\
 P_{N-1}(x) &= a_N + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
 &\quad + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots \\
 &\quad + a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{N-1})
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

El polinomio $P_N(x)$ se obtiene a partir de $P_{N-1}(x)$ usando la concurrencia

$$P_N(x) = P_{N-1}(x) + a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{N-1}) \tag{12.2}$$

En este marco se dice que a partir de $P_{N-1}(x)$ dado en la fórmula ?? es un **polinomio de Newton** con N **centros** x_0, x_1, \dots, x_{N-1} . Puesto que $P_N(x)$ involucra sumas de productos de factores lineales siendo

$$a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{N-1}) \tag{12.3}$$

el de mayor grado, está claro que $P_N(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que N .

Ahora supongamos que $P_N(x)$ es el n -ésimo polinomio de Lagrange que concuerda con la función f en los números distintos x_0, x_1, \dots, x_N . Las diferencias divididas de f respecto a x_0, x_1, \dots, x_N se usan para expresar $P_N(x)$ en la forma ?? para las constantes apropiadas a_0, a_1, \dots, a_N .

Para determinar la primera de las contantes, a_0 note que, si $P_N(x)$ está escrito en la forma de la ecuación ??, entonces al evaluar $P_N(x)$ es x_0 queda sólo el término constante a_0 , es decir

$$a_0 = P_N(x_0) = f(x_0) \tag{12.4}$$





De manera similar, cuando se evalúa $P(x)$ en x_1 , los únicos términos no cero en la evaluación de $P_N(x_1)$ son los términos constante y lineal.

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_N(x_1) = f(x_1) \quad (12.5)$$

así que

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (12.6)$$

Ahora es necesario presentar la notación de diferencias divididas. La **primera diferencia dividida** de f respecto a x_i y x_{i+1} se denota $f[x_i]$, es simplemente el valor de f en x_i :

$$f[x_i] = f(x_i) \quad (12.7)$$

El resto de las diferencias divididas se definen en forma inductiva. La **primera diferencia dividida** de f respecto a x_i y x_{i+1} se denota $f[x_i, x_{i+1}]$ y se define así

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad (12.8)$$

La **segunda diferencia dividida** $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ se define como:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \quad (12.9)$$

En forma análoga, después de determinar las primeras $(k - 1)$ diferencias divididas,

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}] \text{ y } f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] \quad (12.10)$$

la **k -ésima diferencia dividida** relativa a $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$ está dada por

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \quad (12.11)$$

Con esta notación, podemos reexpresar la ecuación ?? como $a_1 = f[x_0, x_1]$ y el polinomio interpolante de la ecuación ?? es

$$P_N(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_N(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{N-1}) \quad (12.12)$$

Como cabe suponer tras evaluar a_0 y a_1 , las constantes requeridas son

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] \quad (12.13)$$

para cada $k = 0, 1, \dots, N$. Por tanto, podemos reescribir $P(x)$ como

$$P_N(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^N f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \quad (12.14)$$





Tabla 12.1: Diferencias divididas interpolantes de Newton.

x	f_x	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas	Terceras diferencias divididas
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]-f[x_0, x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3]-f[x_0, x_1, x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3]-f[x_1, x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4]-f[x_1, x_2, x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4]-f[x_2, x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_3, x_4, x_5]-f[x_2, x_3, x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5] = \frac{f[x_4, x_5]-f[x_3, x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4, x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

El valor de $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ es independiente del orden de los números x_0, x_1, \dots, x_k . A esta ecuación se le conoce con el nombre de **fórmula de diferencias divididas interpolantes de Newton**. En la tabla ?? se describen esquemáticamente la determinación de las diferencias divididas obtenida de los puntos tabulados. Con esos datos también es posible determinar dos cuartas diferencias y una quinta diferencia.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO: Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para determinar la interpolación de un conjunto de puntos dentro de un intervalo, mediante el proceso de interpolación lineal, para obtener el doble de puntos realizar:

ENTRADA: Conjunto de puntos $x, f(x)$, número de puntos N

SALIDA: Conjunto de puntos encontrado $y, f(y)$.

1. Tome $i = 0$
2. Para cada punto del conjunto $x_i, f(x_i)$, hasta el final $x_N, f(x_N)$ realice:

$$F[i, 0] = f(x_i)$$

3. Para cada punto del conjunto $x_j, f(x_j)$, con $j = 1$ hasta el final $x_N, f(x_N)$ realice el punto 4
4. Para los elemento $x_i, f(x_i)$, con $i = 1$ hasta $x_{N-j}, f(x_{N-j})$ realice:

$$F[i, j] = (F[i + 1, j - 1] - F[i, j - 1]) / (x_{i+j} - x_i);$$

5. Tome $fx = F[0, 0]$
6. Para los elemento $x_j, f(x_j)$, con $j = 1$ hasta $x_N, f(x_N)$ realice los puntos 7, 8 y 9
7. Tome $p = 1$





8. Para cada elemento $x_i, f(x_i)$, con $i = 0$ hasta $x_j, f(x_j)$ realice:

$$p = p * \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)$$

9. Calcule

$$fx = fx + (F[0, j] * p)$$

10. SALIDA: conjunto de puntos $y, f(y)$

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 13

Método de Newton-Cotes



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se comienza con los métodos de integración funciones, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas para la obtención de la integral definida de funciones.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método integración de funciones de “Newton-Cotes”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la integral de una función.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Newton-Cotes para integración de funciones.
3. El alumno(a) debe conocer método de Newton-Cotes para integración de funciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:





1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Uno de los conceptos fundamentales del análisis matemático es la integral definida, que involucra el cálculo de las áreas limitadas por las curvas. La idea primordial para encontrar la integral de una función involucra la definición del diccionario “unir todas las partes de un todo; unificar; indicar la cantidad total”, que matemáticamente esta definida como:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

donde I representa la integral de la función f con respecto a la variable independiente x , evaluada en el intervalo $x = a$ y $x = b$ ($[a, b]$). La gráfica ?? muestra la representación de este concepto.

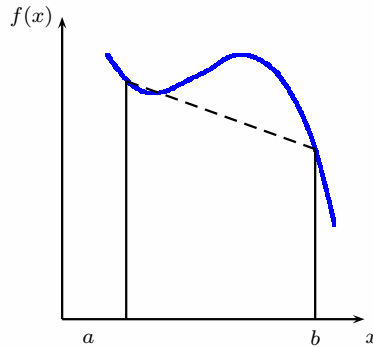


Figura 13.1: Representación gráfica de la integral.

Como sugiere la definición del diccionario la integral será el valor total o sumatoria de la función sobre el intervalo que va de a hasta b ; para ello necesario considerar que es lo que se elementos de van a integrar o sumar; es en este punto donde los métodos numéricos intervienen.

Los métodos de integración se pueden utilizar para integrar funciones dadas, ya sea mediante una tabla o en forma analítica. Incluso en el caso de que sea posible la integración analítica, la integración numérica puede ahorrar tiempo y esfuerzo si sólo se desea conocer el valor numérico de la integral.

En está unidad se analizan los métodos numéricos que se utilizan para evaluar integrales de una variable:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{13.1}$$

así como integrales dobles:

$$I = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y)dydx \tag{13.2}$$





donde las funciones $f(x)$ y $f(x, y)$ pueden estar dadas en forma analítica o mediante una tabla.

Los métodos de integración se obtiene al integrar los polinomios de interpolación. Por consiguiente, las distintas fórmulas de interpolación darán por resultado distintos métodos de integración numérica.

El método de Newton-Cotes es uno de los esquemas más comunes para la integración numérica. Se basa en la estrategia de reemplazar una función o tabla de valores complicados por un polinoimio, el cual es más facil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx \tag{13.3}$$

donde f_n es un polinomio de la forma.

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \tag{13.4}$$

donde n es el orden o grado del polinomio. por ejemplo en la figura ?? se muestran las aproximaciones utilizando diferentes polinomios.

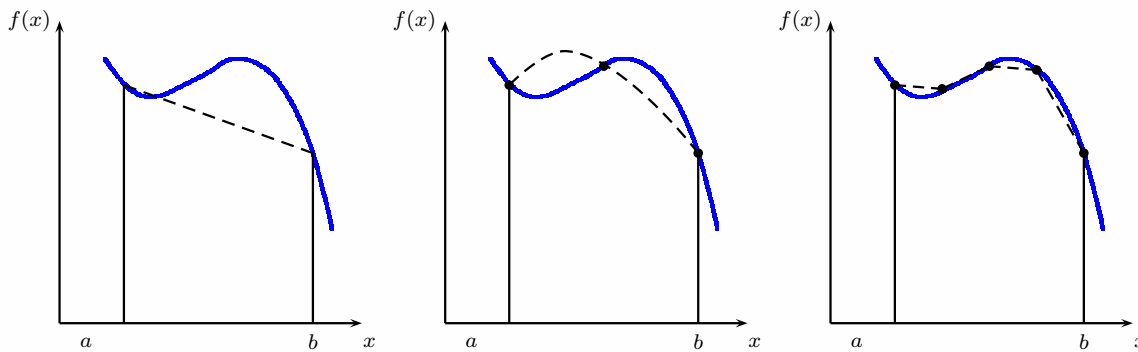


Figura 13.2: Aproximación de la integral por polinomios.

Para este método existen fórmulas para casos abiertos y cerrados. Las fórmulas cerradas son aquellas en donde los puntos al principio y al final de los límites de integración se conocen. El caso abierto tiene los límites extendidos más allá del rango de los datos, dicho caso en general, no es utilizado para integración definida. Sin embargo, se usa extensamente en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las fórmulas cerradas de Newton-Cotes son de la forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha h [w_0f_0 + w_1f_1 + w_2f_2 + \dots + w_{N-1}f_{N-1} + w_Nf_N] \tag{13.5}$$

donde α y las w son constantes cuyos valores para N desde 1 hasta 10 se presentan en la tabla ??, f_n , x_n y h estan dadas de la siguiente manera:

$$f_n = f(x_n) \tag{13.6}$$





Tabla 13.1: Contantes para las fórmulas cerradas de Newton-Cotes

N	α	$w_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$	E
1	$\frac{1}{2}$	1 1	$-\frac{1}{12}h^3 f''$
2	$\frac{1}{3}$	1 4 1	$-\frac{1}{90}h^5 f^{iv}$
3	$\frac{1}{4}$	1 3 3 1	$-\frac{3}{80}h^5 f^{iv}$
4	$\frac{1}{5}$	7 32 12 32 7	$-\frac{949}{840}h^7 f^{vi}$
5	$\frac{1}{6}$	19 75 50 50 75 19	$-\frac{275}{12096}h^7 f^{vi}$
6	$\frac{1}{7}$	41 216 27 272 27 216 41	$-\frac{9}{8133}h^9 f^{viii}$
7	$\frac{1}{8}$	751 3577 1323 2989 2989 1323 3577 751	$-\frac{1400}{518400}h^9 f^{viii}$
8	$\frac{1}{9}$	989 5888 - 928 10496 - 4540 10946 - 928 5888 989	$-\frac{2368}{467775}h^{11} f^{x}$
9	$\frac{1}{10}$	2857 15741 1080 19344 5788 5788 19344 1080 15741 2857	$-\frac{467775}{14620}h^{11} f^{x}$
10	$\frac{1}{11}$	16067 106300 - 48525 272400 - 260550 427368 -	$-\frac{1346350}{326918592}h^{13} f^{xii}$
		260550 272400 - 48525 106300 16067	

Tabla 13.2: Contantes para las fórmulas abiertas de Newton-Cotes

N	α	$w_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$	E
1	$\frac{1}{3}$	0 1 1 0	$-\frac{1}{4}h^3 f''$
2	$\frac{1}{4}$	0 2 -1 2 0	$-\frac{28}{90}h^5 f^{iv}$
3	$\frac{1}{5}$	0 11 1 1 11 0	$-\frac{95}{144}h^5 f^{iv}$
4	$\frac{1}{6}$	0 11 -14 26 -14 11 0	$-\frac{41}{144}h^7 f^{vi}$
5	$\frac{1}{7}$	0 611 -453 562 562 -453 611 0	$-\frac{140}{5297}h^7 f^{vi}$
6	$\frac{1}{8}$	0 460 -954 2196 -2459 2196 -954 460 0	$-\frac{3956}{14175}h^9 f^{viii}$

$$x_n = a + nh \quad (13.7)$$

$$h = \frac{b - a}{N} \quad (13.8)$$

Para las fórmulas abiertas es necesario extender la integración hasta un intervalo a la izquierda del primer dato y un intervalo a la derecha del último dato, y las fórmulas se escriben como:

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha h [w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_N f_N + w_{N+1} f_{N+1} + w_{N+2} f_{N+2}] \quad (13.9)$$

con el valor de h dado por:

$$h = \frac{b - a}{N + 2} \quad (13.10)$$

Las contantes α y w se enlistan en la tabla ??, donde se observa que $w_0 = 0$ y $w_{N+2} = 0$.

Como puede observarse al comparar una fórmula abierta con una cerrada se utilizan el mismo número de datos (N), y el error de la fórmula abierta es significativamente mayor con respecto a la fórmula cerrada.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para determinar la integral de una función f en el intervalo $[a, b]$, por medio del método de Newton-Cotes con fórmulas cerradas, con N intervalos realizar:

ENTRADA: Función f , valores extremos a, b , número de intervalos N

SALIDA: Integral de la función I .

1. Calcule $h = \frac{b-a}{N}$





2. Para $n = 1$ hasta N , realice los pasos 4 a 6:
3. Obtenga el valor w_n de acuerdo a la tabla de fórmulas cerradas
4. Calcule $x_n = a + nh$
5. Calcule $i = i + w_n f(x_n)$
6. Obtenga el valor α de acuerdo a la tabla de fórmulas cerradas
7. Obtenga $I = i * h * \alpha$
8. SALIDA: integral de la función I

Para determinar la integral de una función f en el intervalo $[a, b]$, por medio del método de Newton-Cotes con fórmulas abiertas, con N intervalos realizar:

ENTRADA: Función f , valores extremos a , b , número de intervalos N

SALIDA: Integral de la función I .

1. Calcule $h = \frac{b-a}{N+2}$
2. Obtenga el valor α de acuerdo a la tabla de fórmulas cerradas
3. Para $n = 1$ hasta $N + 2$, realice los pasos 4 a 6:
4. Obtenga el valor w_n de acuerdo a la tabla de fórmulas cerradas
5. Calcule $x_n = a + nh$
6. Calcule $i = i + w_n f(x_n)$
7. Obtenga $I = i * h * \alpha$
8. SALIDA: integral de la función I

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 14

Regla del Trapecio



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se muestra una variante para la integración funciones, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas para la obtención de la integral definida de funciones.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método integración de funciones “Regla del Trapecio”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la integral de una función.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructura y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Regla del Trapecio para integración de funciones.
3. El alumno(a) debe conocer método de Regla del Trapecio para integración de funciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:





1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Esta regla es un método de integración numérica que se obtiene al integrar la fórmula de interpolación lineal. Se escribe en la forma siguiente:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + E \quad (14.1)$$

donde el primer término del lado derecho es la regla del trapecio (fórmula de integración) y E representa su error. En la figura ?? se muestra gráficamente la integración numérica por medio de la ecuación ?? . El área sombreada por debajo de la recta de interpolación (la cual puede denotarse como $g(x)$) es igual a la integral calculada mediante la regla del trapecio, mientras que el área debajo de la curva $f(x)$ es el valor exacto. Por lo tanto, el error de la ecuación ?? es igual a la diferencia del área entre $g(x)$ y $f(x)$.

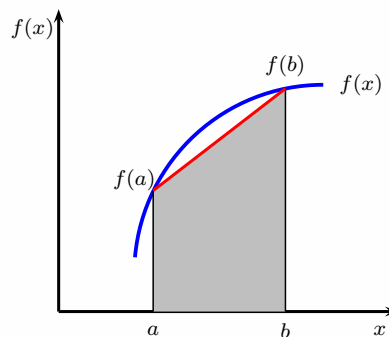


Figura 14.1: Regla del trapecio.

La ecuación ?? se puede extender a varios intervalos y se puede aplicar N veces en el caso de N intervalos con una separación uniforme h (como se muestra en la figura ??) para así obtener la regla extendida del trapecio:

$$I = \int_a^b f(x) = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b) \right] + E \quad (14.2)$$

donde $h = (b-a)/N$. La ecuación anterior se puede escribir en la siguiente forma equivalente:

$$I = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) + E \quad (14.3)$$

donde $f_0 = f(a)$, $f_1 = f(a + h)$, y $f_i = f(a + ih)$.

El error de la regla del trapecio se define como:

$$E = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \quad (14.4)$$



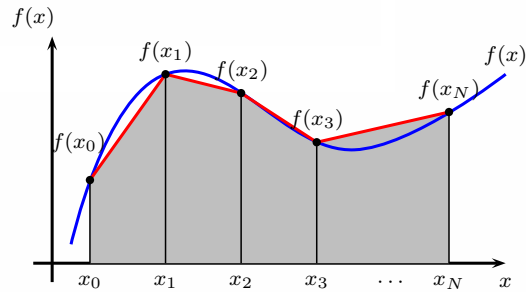


Figura 14.2: Regla extendida del trapecio.

donde el primer término es la integral exacta y el segundo es la regla del trapecio.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para determinar la integral de una función f en el intervalo $[a, b]$, por medio del método Regla del Trapecio, en N intervalos realizar:

ENTRADA: Función f , valores extremos a , b , número de intervalos N

SALIDA: Integral de la función I .

1. Calcule $h = \frac{b-a}{N}$
2. Calcule $y_a = f(a)$
3. Calcule $y_b = f(b)$
4. Para $i = 1$ hasta $N - 1$, realice los pasos 5 y 6:
5. Calcule $x = a + ih$
6. Calcule $y = y + f(x)$
7. Obtenga $I = \frac{h}{2}(y_a + 2y + y_b)$
8. SALIDA: integral de la función I

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.





CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 15

Regla de Simpson



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se muestran 2 variantes para la integración funciones, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas para la obtención de la integral definida de funciones.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método integración de funciones “Regla Simpson de $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{8}$ ”.

Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la integral de una función.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno método de Regla del Simpson para integración de funciones.
3. El alumno(a) debe conocer método de Regla del Simpson para integración de funciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:





1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$

La regla de Simpson $\frac{1}{3}$ se basa en la interpolación polinomial cuadrática (de segundo grado). El polinomio de Newton hacia adelante ajustado a tres puntos, x_0, x_1, x_2 , está dado por:

$$g(x_0 + sh) = f_0 + s(f_1 - f_0) + \frac{s(s-1)}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0) \quad (15.1)$$

Al integral la ecuación ??, haciendo el cambio de variable adecuado desde $x_0 = a$ hasta $x = b$ se obtiene la regla de 1/3 de Simpson:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(\bar{x}) + f(b)] + E \quad (15.2)$$

donde $h = (b-a)/2$ y $\bar{x} = (a+b)/2$, la ecuación ?? se puede escribir en la forma equivalente

$$I = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] \quad (15.3)$$

donde $f_i = f(x_i) = f(a + ih)$. Se mostrará posteriormente que el error es

$$E \cong -\frac{h^5}{90} f^{iv}(\bar{x}) \quad (15.4)$$

El error se anula si $f(x)$ es un polinomio de orden menor o igual que 3. La regla extendida de Simpson es una aplicación repetida de la ecuación ?? para un dominio dividido en un número par de intervalos. Si denotamos el número total de intervalos por N (par), la regla extendida de Simpson $\frac{1}{3}$ se escribe como

$$I = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i=1, \text{impar } i}^{N-1} f(a + ih) + 2 \sum_{i=1, \text{par } i}^{N-1} f(a + ih) + f(b) \right] + E \quad (15.5)$$

donde $h = (b-a)/N$; la primera suma es únicamente sobre las i impares y la segunda es sólo sobre las pares. La ecuación ?? se puede escribir en la forma equivalente:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N] + E \end{aligned} \quad (15.6)$$

El término del error está dado por

$$E \cong -\frac{N h^5}{2 \cdot 90} f^{iv}(\bar{x}) = -(b-a) \frac{h^4}{180} f^{iv}(\bar{x}) \quad (15.7)$$





donde $\bar{x} = (a + b)/2$.

Para un dominio fijo $[a, b]$, el error es proporcional a h^4 .

Regla de Simpson de $\frac{3}{8}$.

La regla de $\frac{3}{8}$ de Simpson se obtiene al integrar una fórmula de interpolación polinomial de tercer grado. Para un dominio $[a, b]$ dividido en tres intervalos, se escribe como

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8}h [f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] + E \quad (15.8)$$

donde $h = (b - a)/3$, $f_i = f(a + ih)$ y E representa el error. El término del error se escribe como:

$$E \cong -\frac{3}{80}h^5 f'''(\bar{x}) \quad (15.9)$$

donde $\bar{x} = (a + b)/2$.

La regla extendida de $\frac{1}{3}$ se aplica a un número par de intervalos, mientras que la regla extendida de $\frac{3}{8}$ se aplica a un número de intervalos que sea múltiplo de tres. Cuando el número de intervalos es impar pero sin ser múltiplo de tres, se puede utilizar la regla de $\frac{3}{8}$ para los primeros tres o los últimos tres intervalos, y luego usar la regla de $\frac{1}{3}$ para los intervalos restantes, que son un número par. Puesto que el orden de la regla de $\frac{3}{8}$ es el mismo que el de la regla de $\frac{1}{3}$, no se gana mayor exactitud que con la regla de $\frac{1}{3}$ cuando uno puede elegir con libertad entre ambas reglas.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción del método y el algoritmo que a continuación lo describe, realice el código para ser implementado.

Para determinar la integral de una función f en el intervalo $[a, b]$, por medio de la Regla de Simpson de $\frac{1}{3}$, en N intervalos realizar:

ENTRADA: Función f , valores extremos a, b , número de intervalos N

SALIDA: Integral de la función I .

1. Calcule $h = \frac{b-a}{2N}$
2. Calcule $y_a = f(a)$
3. Calcule $y_b = f(b)$
4. Para $i = 2$ hasta $2N - 2$, en incremento de 2, realice los pasos 5 y 6:
5. Calcule $x_{impar} = a + ih$
6. Calcule $sn = sn + f(x_{impar})$
7. Para $n = 1$ hasta $2N - 1$, en incremento de 2, realice los pasos 8 y 9:
8. Calcule $x_{par} = a + ih$
9. Calcule $sp = sp + f(x_{par})$





10. Obtenga $I = \frac{h}{3}(y_a + 4sn + 2sp + y_b)$

11. SALIDA: integral de la función I

Para determinar la integral de una función f en el intervalo $[a, b]$, por medio de la Regla de Simpson de $\frac{3}{8}$, en N intervalos realizar:

ENTRADA: Función f , valores extremos a , b , número de intervalos N

SALIDA: Integral de la función I .

1. Calcule $h = \frac{b-a}{3N}$

2. Calcule $y_a = f(a)$

3. Calcule $y_b = f(b)$

4. Para $i = 1$ hasta $3N - 1$, realice los pasos 5 y 6:

5. Calcule $x = a + ih$

6. Calcule $sp = sp + f(x)$

7. Obtenga $I = \frac{3h}{8}(y_a + 3x + y_b)$

8. SALIDA: integral de la función I

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 16

Extrapolación de Richardson



DESCRIPCIÓN: En esta práctica se considera ahora la diferenciación numérica de funciones, para el caso del cálculo diferencial, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos para resolución de problemas para la obtención de derivadas de funciones.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar los métodos diferenciación de funciones “Aproximación por diferencias hacia adelante”, “Aproximación por diferencias hacia atrás”, “Aproximación por diferencias central”, y “Extrapolación de Richardson”.

Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la integral de una función.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno los métodos de Aproximación por diferencias hacia adelante, hacia atrás, centralz extrapolación de Richardson para diren-ciación de funciones.
3. El alumno(a) debe conocer los métodos de Aproximación por diferencias hacia adelante, hacia atrás, centralz extrapolación de Richardson para diferenciación de funciones, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:





1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Las formulas para la derivación numérica son de suma importancia para el desarrollo de algoritmos para la solución de problemas del valor límite, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Para evaluar las derivadas de una función es necesario realizar la aproximación por diferencias. Matemáticamente la derivada, representa la razón de cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente. Como se muestra en la figura ??, la definición matemática de derivada comienza con una aproximación de diferencias.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) + f(x_i)}{\Delta x} \tag{16.1}$$

donde y y $f(x)$ son representaciones alternativas de la variable dependiente y x es la variable independiente. Si Δx puede aproximarse a cero (figura ??), las diferencias se convierten en la derivada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow \Delta x} \frac{f(x_i + \Delta x) + f(x_i)}{\Delta x} \tag{16.2}$$

donde $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (y' o $f'(x)$) es la primera derivada de y con respecto a x evaluada en x_i ; como se observa en la figura ??, la derivada representa una recta tangente a la curva en x_i .

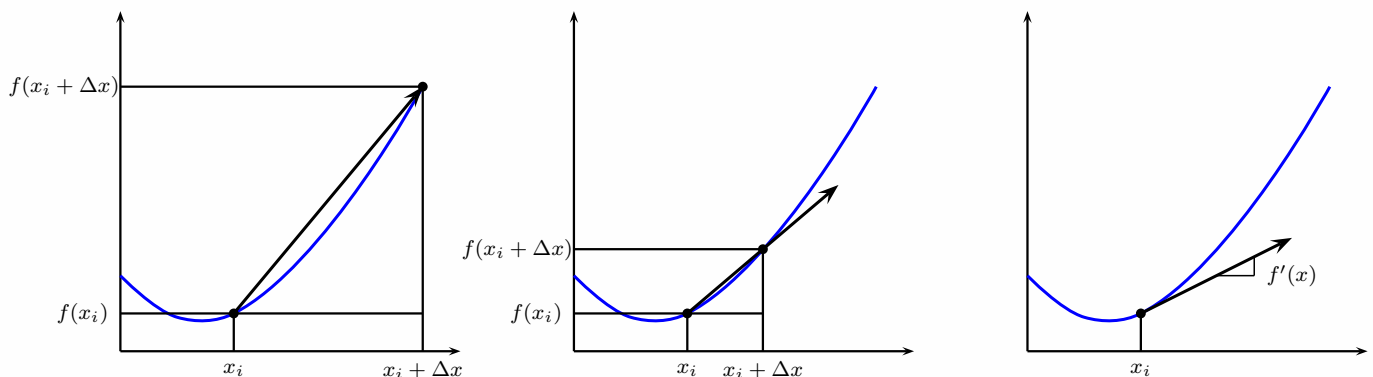


Figura 16.1: Definición grafica de la derivada (a) diferencia Δx , (b) aproximación a cero de Δx y (c) la diferencia cambia a derivada.

La figura ?? muestra la diferenciación numérica de una función $f(x)$, suponiendo que se desea evaluar la primera derivada de $f(x)$ en $x = x_0$, será necesario conocer los valores en $x_0 - h$, x_0 y $x_0 + h$, donde h es el tamaño del intervalo entre dos puntos consecutivos en el eje x , para aproximar $f'(x_0)$. Lo anterior por medio interpolación lineal, para obtener las aproximaciones por diferencias *hacia adelante*, *hacia atrás* y *central*, cuyas fórmulas matemáticas son como sigue:





- Aproximaciones por diferencias hacia adelante

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (16.3)$$

- Aproximaciones por diferencias hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (16.4)$$

- Aproximaciones por diferencias central

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (16.5)$$

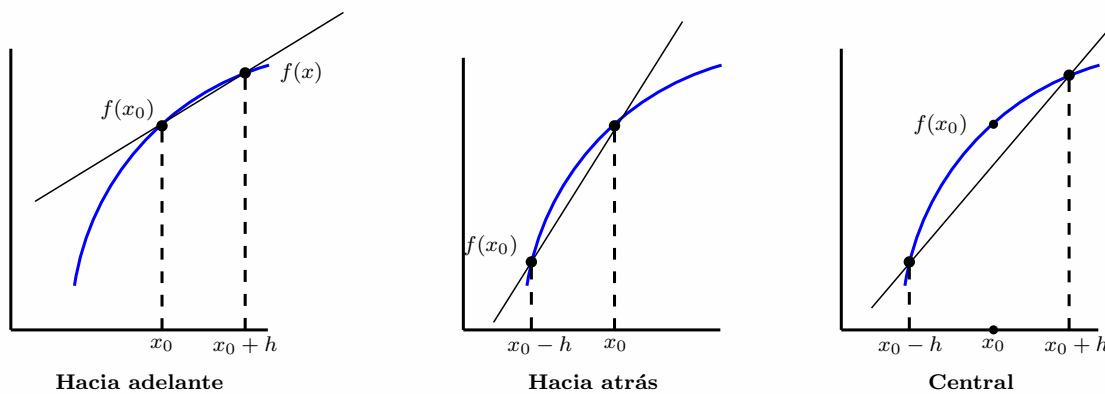


Figura 16.2: Aproximaciones por diferencias de $f'(x_0)$.

Al representar una función de forma numérica mediante puntos discretos, es posible aproximarla por medio de interpolaciones; con esta idea, es posible obtener fórmulas de diferenciación numérica al diferenciar fórmulas de interpolación, las cuales se muestran en las tablas ??, y reciben el nombre de aproximaciones por diferencias hacia adelante, hacia atrás y central respectivamente.

El término $O(h)$ indica que el error es aproximadamente proporcional al intervalo h , el error mínimo se obtiene al tener $O(h^4)$.

Interpolación de Richardson

La interpolación de Richardson proporciona un método mejorado para obtener una integral mediante la fórmula:

$$I = I(h_2) + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right)^2} [I(h_2) - I(h_1)] \quad (16.6)$$

donde $I(h_1)$ e $I(h_2)$ son integrales obtenidas usando dos secciones h_1 y h_2 , que usualmente es escrita también como:

$$I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \quad (16.7)$$

De manera similar, las derivadas pueden escribirse como:

$$D = \frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1) \quad (16.8)$$





Tabla 16.1: Aproximación por diferencias hacia adelante

	Error
Primera derivada	
$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Segunda derivada	
$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Tercera derivada	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Cuarta derivada	
$f^{iv}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f^{iv}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

Tabla 16.2: Aproximación por diferencias hacia atrás

	Error
Primera derivada	
$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 2f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Segunda derivada	
$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \frac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Tercera derivada	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i) - 18f(x_{i-2}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Cuarta derivada	
$f^{iv}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f^{iv}(x_i) = \frac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$





Tabla 16.3: Aproximación por diferencias central

	Error
Primera derivada	
$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2}))}{12h}$	$O(h^4)$
Segunda derivada	
$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1}))}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2}))}{12h^2}$	$O(h^4)$
Tercera derivada	
$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2}))}{2h^3}$	$O(h)^2$
$f'''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})+f(x_{i-3}))}{8h^3}$	$O(h^4)$
Cuarta derivada	
$f^{iv}(x_i) = \frac{f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+6f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2}))}{h^4}$	$O(h)^2$
$f^{iv}(x_i) = \frac{-f(x_{i+3})+12f(x_{i+2})-39f(x_{i+1})+66f(x_i)-39f(x_{i-1})+12f(x_{i-2})-f(x_{i-3}))}{6h^4}$	$O(h^4)$

donde $D(h)$ son las derivadas obtenidas por el método de aproximación hacia adelante, hacia atrás o central. Para el caso de la aproximación por diferencias central con $O(h^2)$.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción de los métodos y los algoritmos que a continuación lo describen, realice el código para ser implementado.

Para determinar la 1ra., 2da., 3ra. y 4ta. derivadas de una función $f(x)$ dada en una tabla de valores, por medio del método de aproximación por diferencias hacia adelante, en el punto x_0 , con un intervalo entre puntos h : ENTRADA: Valores de x , función $f(x)$, punto a evaluar x_i , intervalo entre puntos h , n -ésima derivada n , $1 \leq n \leq 4$.

SALIDA: Derivada de la función D .

1. Determine la derivada a obtener f^n con base en la tabla ??
2. Evalúe $f^n(x_i)$
3. SALIDA: derivada n -ésima de la función $f^n(x_i)$

Para determinar la 1ra., 2da., 3ra. y 4ta. derivadas de una función $f(x)$ dada en una tabla de valores, por medio del método de aproximación por diferencias hacia atrás, en el punto x_0 , con un intervalo entre puntos h : ENTRADA: Valores de x , función $f(x)$, punto a evaluar x_i , intervalo entre puntos h , n -ésima derivada n , $1 \leq n \leq 4$.

SALIDA: Derivada de la función D .

1. Determine la derivada a obtener f^n con base en la tabla ??
2. Evalúe $f^n(x_i)$
3. SALIDA: derivada n -ésima de la función $f^n(x_i)$





Para determinar la 1ra., 2da., 3ra. y 4ta. derivadas de una función $f(x)$ dada en una tabla de valores, por medio del método de aproximación por diferencias central, en el punto x_0 , con un intervalo entre puntos h : ENTRADA: Valores de x , función $f(x)$, punto a evaluar x_i , intervalo entre puntos h , n -ésima derivada n , $1 \leq n \leq 4$.

SALIDA: Derivada de la función D .

1. Determine la derivada a obtener f^n con base en la tabla ??
2. Evalúe $f^n(x_i)$
3. SALIDA: derivada n -ésima de la función $f^n(x_i)$

Para determinar la 1ra., 2da., 3ra. y 4ta. derivadas de una función $f(x)$ dada en una tabla de valores, por medio del método de interpolación de Richardson, en el punto x_0 , con los intervalos h_1 y h_2 y el método de interpolación a utilizar $k \in \{\text{hacia adelante, hacia atrás, central}\}$: ENTRADA: Valores de x , función $f(x)$, punto a evaluar x_i , intervalos h_1 y h_2 , n -ésima derivada n , $1 \leq n \leq 4$, método de aproximación a utilizar k

SALIDA: Derivada de la función I .

1. Determine la derivada a obtener f^n con base en la tabla ??, ?? o ??.
2. Evalúe $D(h_1) = f^n(h_1)$
3. Evalúe $D(h_2) = f^n(h_2)$
4. Obtenga $D = \frac{4}{3}D(h_2) - \frac{1}{3}D(h_1)$
5. SALIDA: derivada n -ésima de la función D

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 17

Método de Euler



DESCRIPCIÓN: Esta práctica inicia el tema referente a encontrar la solución numérica a problemas que pueden ser modelados a través de las ecuaciones diferenciales ordinarias, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias “Euler”.
Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno el método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.
3. El alumno(a) debe conocer el método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.

Equipo:





1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Las ecuaciones diferenciales son utilizadas dentro de la ingeniería para modelar problemas en los cuales a menudo no se conoce la solución analítica, pero puede obtenerse una aproximación numérica. Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) son utilizadas para aproximar, por ejemplo, algunos sistemas físicos o simulaciones de crecimiento de población y trayectoria de partículas; los EDO por lo general contienen derivadas parciales, además de conocer las condiciones iniciales del problema. Un problema con condiciones iniciales de una EDO de primer orden puede expresarse como:

$$y'(t) = f(y, t) \quad (17.1)$$

$$y(0) = y_0 \quad (17.2)$$

donde $f(y, t)$ es una función de y en tanto que t y la segunda ecuación es una condición inicial. En la primera ecuación la derivada y esta dada como una función conocida de y misma y t , el objetivo es entonces calcular la función incógnita y integrando numéricamente a $f(y, t)$. Los métodos numéricos para resolver las EDO calculan la solución en los instantes $t_n = t_{n+1} + h$, con h siendo el intervalo de tiempo o tamaño de paso. Por lo tanto es posible indicar matemáticamente lo siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (17.3)$$

donde ϕ es llamada función de incremento. Con base en esta ecuación, la pendiente estimada de ϕ es utilizada para extrapolar desde un valor viejo de y_i hasta un valor nuevo y_{i+1} sobre una distancia h . Es en la forma en como encontrar dicha pendiente en como se diferencian los métodos para resolver EDO. Esta fórmula puede ser aplicada paso por paso para trazar la trayectoria de la solución en el futuro. Tales aproximaciones son llamadas métodos de un paso, debido a que el valor de la función en el incremento esta basado en la información de un sólo punto; además, existen métodos multipasos que toman la información de varios puntos. Por otra parte la condición inicial es parte primordial de la definición, y por consiguiente, la solución del problema; debido a que la solución solo es posible de determinar con la condición inicial y de manera única.

Método de Euler Este método consiste en considerar que la pendiente al principio del intervalo es una aproximación de una pendiente promedio en todo el intervalo.

Considerando que la primera derivada proporciona una estimación directa de la pendiente en t_i se tiene que:

$$\phi = f(t_i, y_i) \quad (17.4)$$

donde $f(t_i, y_i)$ es la ecuación diferencial evaluada en y_i y t_i . lo cual puede sustituirse por:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad (17.5)$$

Con esto se tiene que un nuevo valor de y se predice utilizando la pendiente $y'(t)$ para extrapolarla linealmente sobre el intervalo de tamaño h , dicho aproximación se observa graficamente en la figura ??.



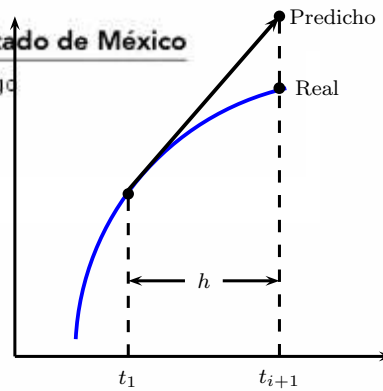


Figura 17.1: Método de Euler



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción de los métodos y los algoritmos que a continuación lo describen, realice el código para ser implementado.

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial ordinaria $y = f(t_i, y_i)$ con condiciones iniciales $t, y(t)$, el intervalo $[a, b]$ y de tamaño del paso h :

ENTRADA: Ecuación diferencial y , intervalo $[a, b]$, tamaño del paso h , valor inicial t_0 , valor de $y(t_0)$, número de pasos n . SALIDA: Solución en $y(t_i)$.

1. Para $i = 0$ hasta n con incrementos h , haga el paso 2
2. Calcule $y_{i+1} = y_{t_i} + hf(t_i, y(t_i))$
3. SALIDA: resultado y_{i+1}

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 18

Método de Runge-Kutta



DESCRIPCIÓN: Esta práctica continua el tema para encontrar la solución numérica a problemas que pueden ser modelados a través de las ecuaciones diferenciales ordinarias, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos.



OBJETIVO:

Conocer y desarrollar el método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias “Runge-Kutta”.

Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno el método de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.
3. El alumno(a) debe conocer el método de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

El método de Runge-Kutta a diferencia del de Euler utiliza puntos intermedios en cada intervalo. Para lograr una mayor precisión el tamaño del intervalo h debe reducirse, incrementandose el tiempo de cálculo y provocando errores de redondeo. Existen muchas variantes del método, pero todas pueden generalizarse mediante:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \tag{18.1}$$

donde ϕ es llamada la función de incremento, que puede ser interpretada como la pendiente sobre el intervalo, la cual puede ser escrita como:

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \tag{18.2}$$

donde las a 's son constantes y las k 's son calculadas como:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ &\dots \\ k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{aligned} \tag{18.3}$$

con p 's y q 's como constantes, y las k 's son recurrentes relacionadas; por lo que k_1 se encuentra en k_2 , y éstas dos en k_3 y así sucesivamente.

Cada variante del método cambia sólo en el número de términos n que son tomados de la función incremento. Observando que si $n = 1$ corresponde al método de Euler. Al elegir el orden n los valores de a p y q deben ser determinados; esto se realiza a través de la expansión de series de Taylor. Dentro de los métodos más utilizado se tiene el de segundo y cuarto orden.

Método de Segundo orden de Runge-Kutta. La versión para el método de segundo orden de Runge-Kutta queda como:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \tag{18.4}$$

con

$$k_1 = f(t_i, y_i) \tag{18.5}$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \tag{18.6}$$

considerando que es necesario evaluar a a_1 , a_2 , p_1 y q_{11} mediante series de Taylor se tiene que $a_1 = 1 - a_2$ y $p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$.





Por lo que considerando los valores anteriores, las ecuaciones para el método de Runge-Kutta de segundo orden quedan como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h \quad (18.7)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (18.8)$$

$$k_2 = f(t_i + h, y_i + k_1h) \quad (18.9)$$

Método de Cuarto orden de Runge-Kutta. El método más popular y comunmente usado, tiene además dos versiones principales. La primera toma como base la regla de Simpson de $\frac{1}{3}$ y se escribe como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (18.10)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1\frac{h}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2\frac{h}{2}\right) \\ k_4 &= f(t_i + h, y_i + k_3h) \end{aligned} \quad (18.11)$$

La segunda versión tomando Simpson de $\frac{3}{8}$ se expresa como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)h \quad (18.12)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3}\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3}\right) \\ k_4 &= f(t_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3) \end{aligned} \quad (18.13)$$

$$(18.14)$$



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción de los método y los algoritmos que a continuación lo describen, realice el código para ser implementado. Para encontrar la solución de la ecuación diferencial ordinaria $y = f(t_i, y_i)$ con condiciones iniciales $t, y(t)$, el intervalo $[a, b]$ y de tamaño del paso h .

Método de Runge-Kutta de segundo orden ENTRADA: Ecuación diferencial y , intervalo $[a, b]$, tamaño del paso h , valor inicial t_0 , valor de $y(t_0)$, número de pasos n . SALIDA: Solución en $y(t_i)$.





1. Para $i = 0$ hasta n con incrementos h , haga los pasos del 2 al 5
2. Calcule $k_1 = f(t_i, y_i)$
3. Calcule $k_2 = f(t_i + h, y_i + k_1h)$
4. Calcule $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)h$
5. SALIDA: resultado y_{i+1}

Método de Runge-Kutta de cuarto orden versión Simpson de $\frac{1}{3}$ ENTRADA: Ecuación diferencial y , intervalo $[a, b]$, tamaño del paso h , valor inicial t_0 , valor de $y(t_0)$, número de pasos n . SALIDA: Solución en $y(t_i)$.

1. Para $i = 0$ hasta n con incrementos h , haga los pasos del 2 al 6
2. Calcule $k_1 = f(t_i, y_i)$
3. Calcule $k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1\frac{h}{2})$
4. Calcule $k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2\frac{h}{2})$
5. Calcule $k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3h)$
6. Calcule $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$
7. SALIDA: resultado y_{i+1}

Método de Runge-Kutta de cuarto orden versión Simpson de $\frac{3}{8}$ ENTRADA: Ecuación diferencial y , intervalo $[a, b]$, tamaño del paso h , valor inicial t_0 , valor de $y(t_0)$, número de pasos n . SALIDA: Solución en $y(t_i)$.

1. Para $i = 0$ hasta n con incrementos h , haga los pasos del 2 al 6
2. Calcule $k_1 = f(t_i, y_i)$
3. Calcule $k_2 = f(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3})$
4. Calcule $k_3 = f(t_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3})$
5. Calcule $k_4 = f(t_i + h, y_i + k_1 - k_2 + k_3)$
6. Calcule $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)h$
7. SALIDA: resultado y_{i+1}

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis





Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.



EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Práctica 19

Método Multipasos



DESCRIPCIÓN: Esta práctica se introduce una forma alternativa para encontrar la solución numérica a problemas que pueden ser modelados a través de las ecuaciones diferenciales ordinarias, un método llamado Multipasos, mostrando al alumno el uso de métodos numéricos.



OBJETIVO:
Conocer y desarrollar el método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias “Multipasos”.

Objetivos específicos:

1. Editar, compilar y ejecutar programas en el entorno de desarrollo.
2. Generar funciones o programas individuales para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias



DURACIÓN DE LA PRÁCTICA: 2 horas.

Requisitos:

1. El alumno(a) y el docente deben de tener experiencia en programación estructurada y estructura de datos.
2. El profesor(a) debe haber explicado al alumno el método de Multipasos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.
3. El alumno(a) debe conocer el método de Multipasos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, desarrollar el bosquejo o pseudocódigo del mismo.



MATERIAL Y EQUIPO A UTILIZAR:

Material:

1. Formato de evaluación impreso. Ver anexo.





Equipo:

1. Computadora con sistema operativo Windows o Linux, con el sistema desarrollo instalado o de manera portable, una computadora por cada alumno.



INTRODUCCIÓN:

Los métodos anteriormente vistos para la determinar la soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizan la información sólo de un punto t_i para predecir el valor de la variable dependiente y_{i+1} en el punto t_{i+1} . Una manera alternativa para encontrar la solución es utilizando métodos multipasos basados en la idea de que al iniciar el cálculo, información valiosa de los puntos anteriores puede ser utilizada; ya que la secuencia de estos puntos proporciona información de su trayectoria a la solución. Para ello es necesario utilizar un método predictor-corrector. El predictor estima la solución para un punto nuevo y el corrector mejora su precisión; de esta manera son utilizados los puntos anteriores en lugar de los intermedios.

Método de Adams-Bashforth-Moulton. El método predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton es un método multipasos derivado del teorema fundamental del cálculo:

$$y(t_{i+1}) = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt \tag{19.1}$$

El predictor utiliza el polinomio de aproximación de Lagrange para $f(t, y(t))$ con los puntos (t_{i-3}, f_{i-3}) , (t_{i-2}, f_{i-2}) , (t_{i-1}, f_{i-1}) y (t_i, f_i) . Al realizar la integral en el intervalo $[t_i, f_{i+1}]$ se obtiene el predictor de Adams-Bashforth como sigue:

$$p_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i) \tag{19.2}$$

El corrector se comporta de manera similar, el valor y_{i+1} es calculado sólo cuando se usa. Por lo que es necesario utilizar un segundo polinomio de Lagrange para determinar $f(t, y(t))$ con base en los puntos (t_{i-2}, f_{i-2}) , (t_{i-1}, f_{i-1}) , (t_i, f_i) y el nuevo punto $(t_{i+1}, f_{i+1}) = (t_{i+1}, f(t_{i+1}, p_{i+1}))$. Al integrar este polinomio en el intervalo $[t_i, y_{i+1}]$ produce el corrector de Adams-Moulton:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} (f_{i-2} + 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1}) \tag{19.3}$$

El proceso del predictor y el corrector pueden observarse graficamente en la figura ??.



DESARROLLO O PROCEDIMIENTO:

Con base en la descripción de los método y los algoritmos que a continuación lo describen, realice el código para ser implementado.

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial ordinaria $y = f(t_i, y_i)$ con condiciones iniciales $t, y(t)$, el intervalo $[a, b]$ y de tamaño del paso h .

Método de Adams-Bashforth-Moulton ENTRADA: Ecuación diferencial y , intervalo $[a, b]$, tamaño del paso h , conjunto de puntos $t_i, i = 0 \dots 3$, conjunto de valores de $y(t_i), i = 0 \dots 3$, número de pasos n , intervalo $[a, b]$. **SALIDA:** Solución en $y(t_{i+1})$.



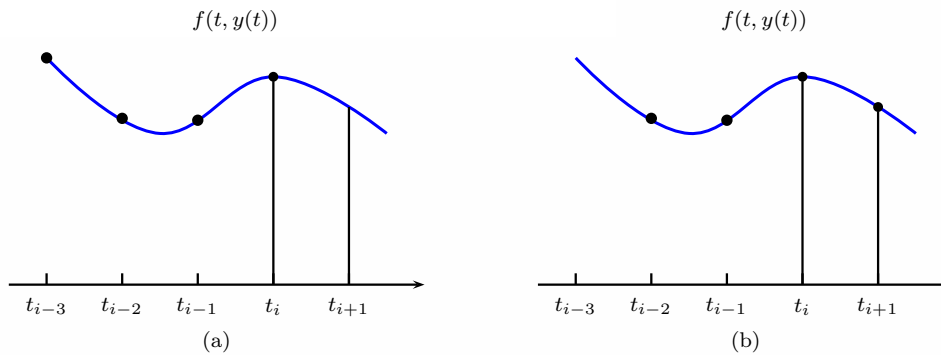


Figura 19.1: (a) Predictor Adams-Bashforth con 4 nodos,
(b) Corrector Adams-Moulton con 4 nodos

1. Para $i = 3$ hasta $n - 1$, haga los pasos 2 al 9
2. Calcule $f_{i-3} = f(t_{i-3}, y(t_{i-3}))$
3. Calcule $f_{i-2} = f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$
4. Calcule $f_{i-1} = f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$
5. Calcule $f_i = f(t_i, y(t_i))$
6. Calcule $p_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(-9f_{i-3} + 37f_{i-2} - 59f_{i-1} + 55f_i)$
7. Calcule $t_{i+1} = i * h$
8. Calcule $f_{i+1} = f(t_{i+1}, p_{i+1})$
9. Calcule $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1})$
10. SALIDA: resultado y_{i+1}

Actividades de comprobación o evaluación

Para corroborar que el alumno ha comprendido las características particulares del método, realice la ejecución con el ejemplo visto en clase.

IMPORTANTE: Se deja al criterio y creatividad del profesor(a) la implementación de más expresiones por parte de los alumnos.

Actividad de síntesis

Una vez desarrollado el método, el alumno deberá investigar y probar su funcionamiento con diferentes sistemas de ecuaciones.



CONCLUSIONES:

Escriba el alumno las conclusiones de esta práctica.





EVALUACIÓN:

La evaluación de esta práctica se realizará usando el formato en el anexo 1. Por lo que el alumno deberá de asistir al laboratorio con el formato impreso.





Bibliografía

Bibliografía Requerida

Estas referencias son útiles para todas las prácticas de laboratorio, por lo que se colocan aquí en lugar de repetirlas en cada una de ellas.

1. Chapra, S. C. y Canale Raymond, P. *Métodos numéricos para ingenieros con aplicaciones en computadoras personales*, 5ta. edición, McGraw-Hill, 2006.
2. Richard, L. B., *Análisis Numérico*, 7ma. edición, Thomson, 2002.
3. Nakamura, S., *Métodos numéricos aplicados con software*, Prentice Hall, 1992.
4. Wilkinson, J. H., *Rounding Errors in Algebraic Processes*, Prentice Hall, 1963.
5. Chapra, S. C., *Applied Numerical Methods with MATLAB*, 3ra edición, McGraw-Hill, 2012.
6. Nieves, A. y Domínguez, F. *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*, compañía editorial Continental S.A. de C.V. (C.E.C.S.A), 1995.
7. Kincaid D., *Análisis Numérico* Addison Wesley Iberoamericana, 1996.
8. Maron J. y López J., *Análisis Numérico: Un enfoque práctico*, Compañía editorial Continental S.A. de C.V. (C.E.C.S.A), 1995.





Anexos

En la sección de anexos se encuentra la propuesta del formato para evaluación de prácticas de laboratorio. Este formato puede ser modificado y enriquecido con otros elementos que el docente que imparta la UA considere convenientes y necesarios. Se anima al alumno a leer los aspectos a evaluar, para cuidar que se cumplan en su totalidad, con la finalidad de alcanzar un mayor puntaje.





Anexo 01

Centro Universitario Zumpango Ingeniería en Computación Cálculo Numérico

Formato para la evaluación de prácticas de laboratorio

Nombre del Alumno:

Número de cuenta:

Fecha:

Profesor(a):

Práctica número:

Nombre de la práctica:

Factor a evaluar	Criterios	Puntaje obtenido
Uso de herramienta conceptual (diagrama de flujo, pseudocódigo) 10 %	Se utiliza herramienta conceptual correctamente para resolver problema (10 %). Se utiliza herramienta conceptual pero no correctamente para resolver problema (5 %). No se utiliza herramienta conceptual para resolver problema (0 %).	
Preentación 10 %	Se especifica de forma adecuada los parámetros solicitados y necesarios (10 %). Se especifica de forma ambigua los parámetros solicitados y necesarios (5 %). No se especifica los parámetros solicitados y necesarios (0 %).	
Funcionamiento 80 %	Se obtiene un resultado aproximado de acuerdo con la tolerancia, y parámetros indicados (80 %). Se obtiene un resultado aproximado sin considerar los parámetros indicados (40 %). Se obtiene un resultado completamente diferente al aproximado (0 %)	
Total		

