Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Zumpango

Ingeniería en Computación

Geometría Analítica

Dr. Arturo Redondo Galván

CU Z

GEOMETRÍA ANÁLITICA

UNIDAD I

Álgebra vectorial

OBJETIVOS:

- Obtener la suma y resta de vectores y su multiplicación por un escalar Aplicar los conceptos de paralelismo y ortogonalidad de vectores. Obtener vectores unitarios y ortogonales y obtener el producto escalar de vectores.
- Descomponer vectores en direcciones dadas. Obtener proyecciones y componentes y ángulos entre vectores y obtener el producto vectorial para vectores en el espacio.
- Usar las características de los vectores para realizar movimientos entre puntos, entendiendo a éstos como lugares en el plano o el espacio.
- Plantear y resolver problemas que involucren el uso de los conceptos anteriores, generando conclusiones pertinentes de los resultados obtenidos.

INTRODUCCIÓN (1/1)

- Las magnitudes físicas como fuerza, velocidad, aceleración, campo eléctrico y magnético no pueden determinarse sólo con un número sino que deben tener asociada una dirección y un sentido. A estas magnitudes se les llama vectoriales.

- El ente matemático que las define recibe el nombre de vector.

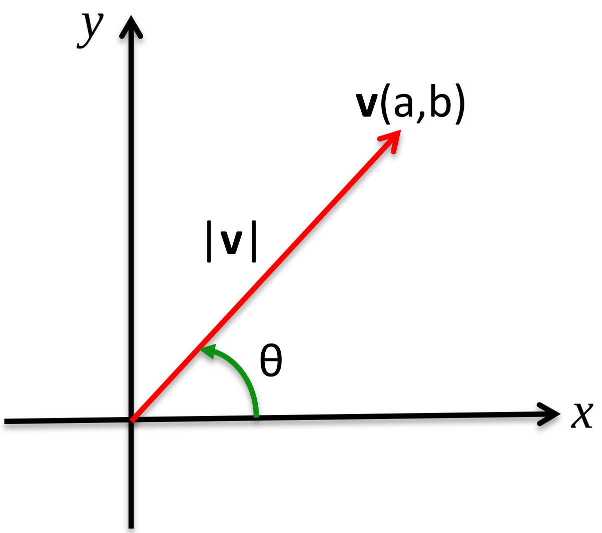
VECTORES (1/6)

- Un **vector** geométricamente es todo segmento de recta dirigido. Es una entidad que tiene **magnitud**, **dirección** y **sentido**.

- La **magnitud** es la longitud del vector.

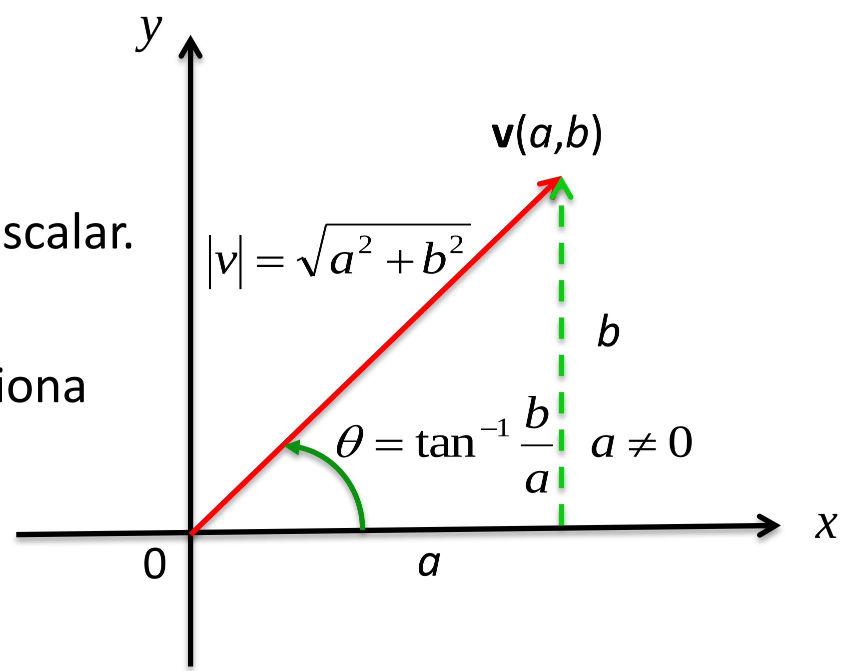
- La **dirección** es el ángulo que forma el vector con el eje *x* positivo.

- El **sentido** indica hacia que lado de la línea se dirige el vector. Se indica mediante la punta de la flecha.



VECTORES (2/6)

- Algebraicamente un **vector v** en el plano *xy* es un par ordenado de números reales (*a*,*b*). Los elementos *a* y *b* son las componentes del vector v.



La magnitud de v es un escalar.

Θ, en radianes, se selecciona tal que 0≤ *Θ* < 2π.

VECTORES (3/6)

Ejemplos:

Determinar la magnitud y dirección de los siguientes vectores:

a) $v=(3,3)$

b) $v=(-1,0)$

c) $v=(-\sqrt{3},-1)$

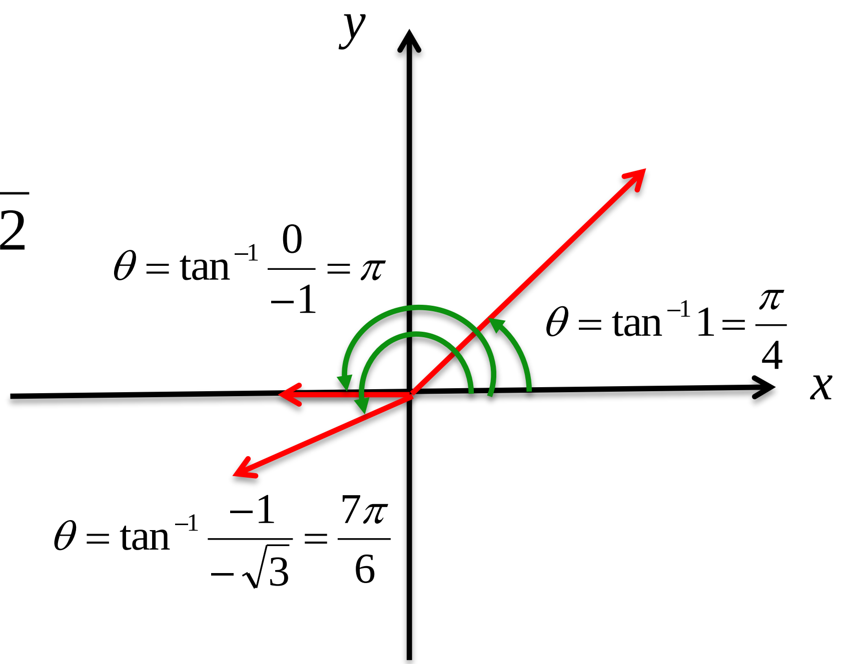
VECTORES (4/6)

Resultados:

a) $|v| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

b) $|v| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

c) $|v| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$



VECTORES (5/6)

Ejercicios:

Determinar la magnitud y dirección de los siguientes vectores:

a) $v=(1,\sqrt{3})$

b) $v=(-4,4)$

c) $v=(10,0)$

VECTORES (6/6)

Ejercicios:

Determinar el vector v que tenga la magnitud y dirección dadas.

a) $|v|=3,\ \theta=\pi/6$

b) $|v|=8,\ \theta=\pi/3$

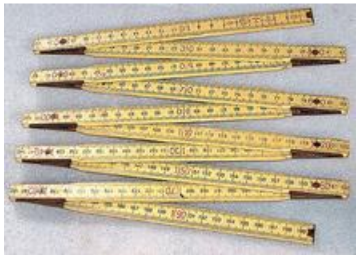
c) $|v|=7,\ \theta=-2\pi/3$

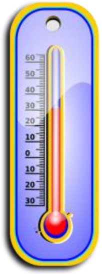
ESCALARES (1/1)

- Los **escalares** son **magnitudes físicas** que son expresadas por un número real y una unidad de medida.

- Ejemplos de escalares son: longitud, tiempo temperatura, volumen, masa, presión, etc.

$\mathbb{R}$





SUMA DE VECTORES (1/3)

- La suma de dos vectores en un espacio vectorial es un tercer vector en el mismo espacio.

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

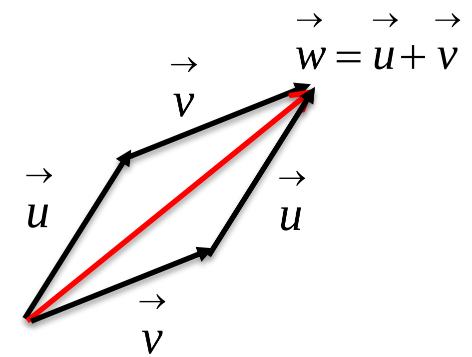
- La suma se realiza sumando las coordenadas de la misma posición de cada vector.

- Gráficamente la suma se realiza dibujando el vector $\vec{u}$ y colocando el origen de $\vec{v}$ en el extremo final del primero. El vector resultante $\vec{w}$ es el segmento trazado del origen de $\vec{u}$ al extremo final de $\vec{v}$.

$$\vec{u} = (1,2) \quad \vec{v} = (2,1)$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (1,2) + (2,1)$$

$$\vec{w} = (1+2, 2+1) = (3,3)$$



LEYES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL: SUMA DE VECTORES (2/3)

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Asociativa	$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$
2. Conmutativa	$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
3. Idéntico aditivo	$\vec{u}+0=0+\vec{u}=\vec{u}$
4. Inverso aditivo	$\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=0$

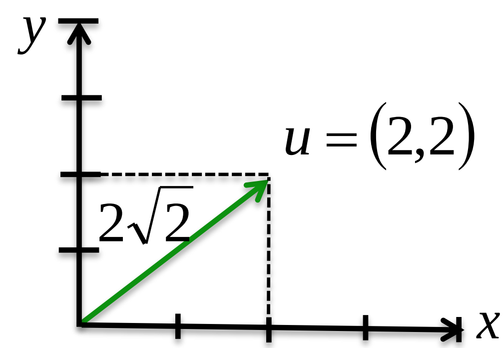
LEYES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL: SUMA DE VECTORES (3/3)

Ejercicios:

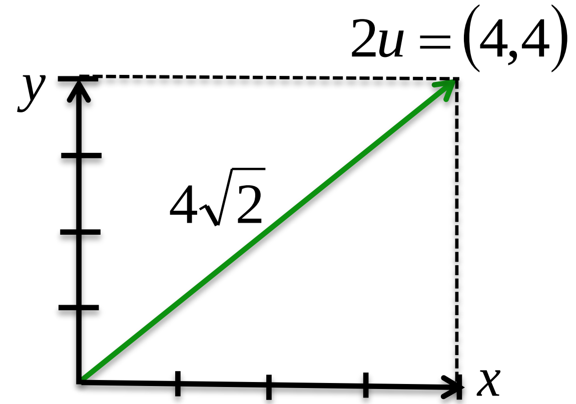
1. Dados los puntos *u*(1, 2), *v*(4, 6) , *w*(3, 2) y *z*(5, 1) determinar:
   a) Las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{uv}$ y $\overrightarrow{wz}$.
   b) La suma y diferencia de los vectores $\overrightarrow{uv}$ y $\overrightarrow{wz}$.
2. Demuestre gráficamente que:
   a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
   b) $\text{si } \vec{u}-\vec{v}=\vec{w}, \text{ entonces } \vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$

MULTIPLICACIÓN ESCALAR (1/5)

- El producto de un escalar α por un vector $\vec{u}$ produce un vector $\alpha\,\vec{u}$, esto es $|\alpha|$ la magnitud de $\vec{u}$.

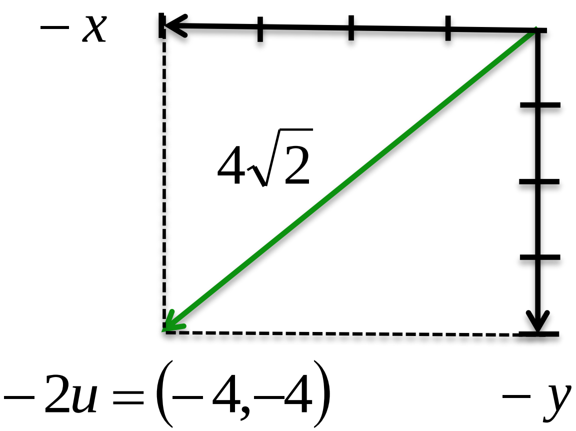


- Si α es positiva el vector $\alpha\,\vec{u}$ tiene la misma dirección de $\vec{u}$.



MULTIPLICACIÓN ESCALAR (2/5)

- Si α es negativa el vector $\alpha \vec{u}$ tiene la dirección opuesta de $\vec{u}$.

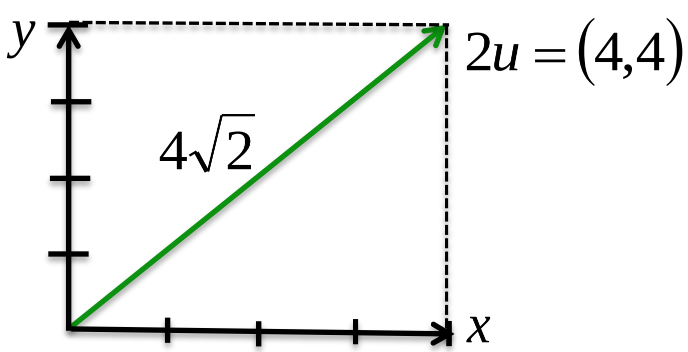


- Si $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \vec{u} = 0$ y se tiene el vector nulo.

MULTIPLICACIÓN ESCALAR (3/5)

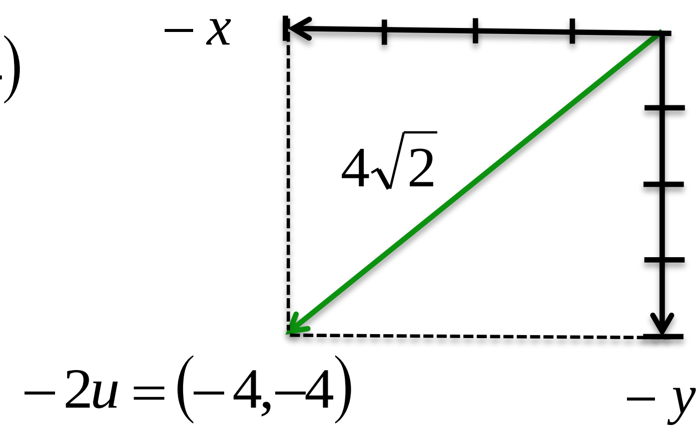
Si $\alpha > 0 \Rightarrow$ dirección de

$\alpha u =$ dirección de u



Si $\alpha < 0 \Rightarrow$ dirección de

$\alpha u =$ dirección de $u + \pi$



MULTIPLICACIÓN ESCALAR (4/5)

Ejemplos:

1. Sea u=(3,2) y v=(-6,4), determinar:

   a) $3u = (6,4)$

   b) $u + v = (-3,6)$

   c) $u - v = (9,-2)$

2. Sea u=-2i + 3j y v=5i + 7j, determinar:

   a) $u + v = 3i + 10j$

   b) $-2u + v = 9i + j$

   c) $3u - 2v = -16i - 5j$

MULTIPLICACIÓN ESCALAR (5/5)

Ejercicios:

1. Sea $u=(2,1)$ y $v=(1,\sqrt{3})$, determinar y bosquejar:

   a) $2v$

   b) $u-v$

   c) $-\sqrt{3}u+v$

2. Sea $u=2i - 3j$ y $v=i + 4j$, determinar y bosquejar:

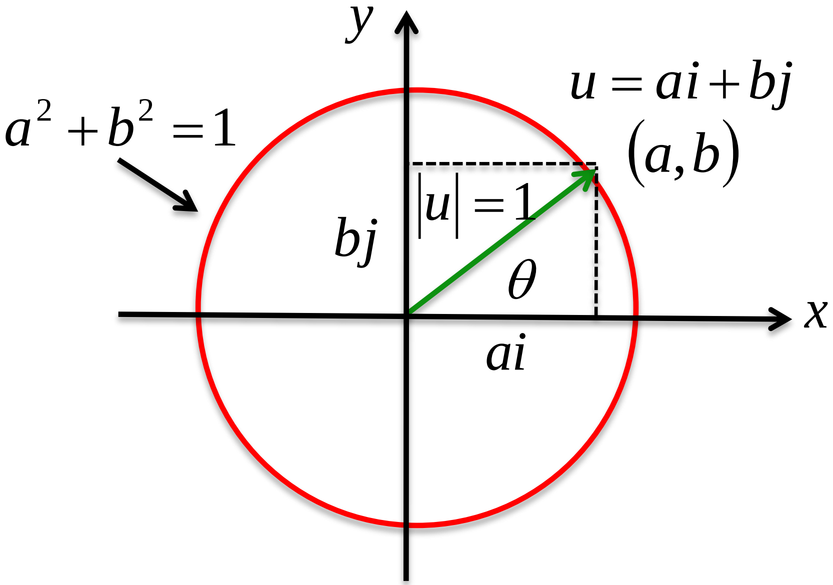
   a) $u+v$

   b) $u+2v$

   c) $4u-5v$

VECTORES UNITARIOS (1/5)

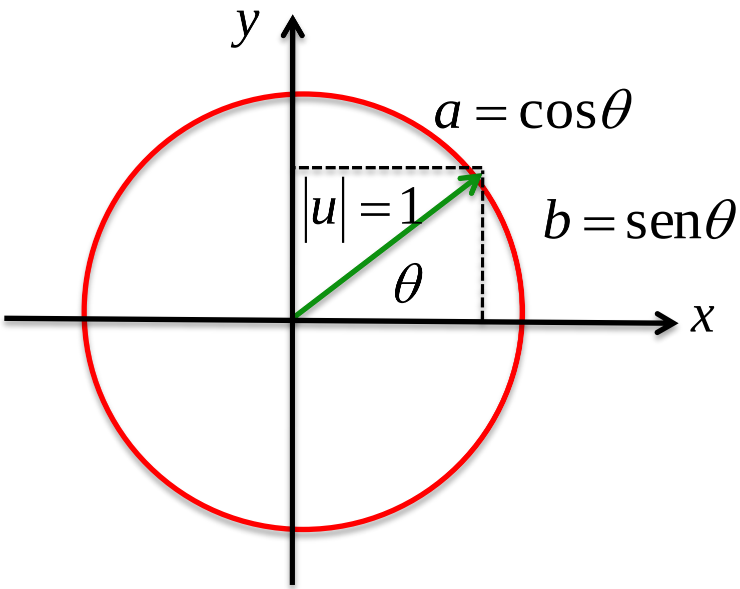
Un vector unitario es aquel que tiene una longitud igual a 1.



VECTORES UNITARIOS (2/5)

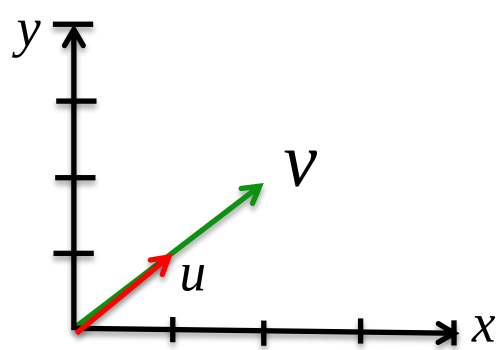
Si θ es la dirección de *u*, entonces *a*= cos θ y *b*= sen θ. Por lo tanto cualquier vector unitario se puede representar como:

$$u = ai + bj = \cos\theta i + \mathrm{sen}\theta j \quad \text{donde} \left|u\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 = a^2 + b^2$$



VECTORES UNITARIOS (3/5)

Sea *v* un vector diferente de cero, entonces $u = \dfrac{v}{|v|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección que *v*.



VECTORES UNITARIOS (4/5)

Ejemplos:

1. Demuestre que el vector $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ es un vector unitario.

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

2. Encuentre un vector *u* que tenga la misma dirección que v= *i* + *j*.

$$|v| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow u = \frac{i + j}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

VECTORES UNITARIOS (5/5)

Ejercicios:

1. Demuestre que los vectores i y i son vectores unitarios.

2. Encuentre un vector *u* que tenga la misma dirección que v= 2*i* - 7*j*.

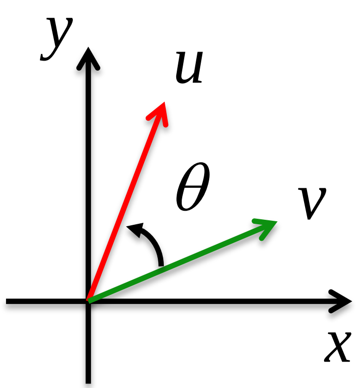
3. Si v= *ai* + *bj*. Demuestre que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ y $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{sen}\theta$ donde θ es la dirección de *v*.

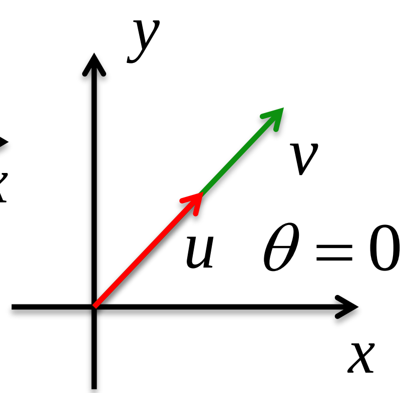
4. Encuentre un vector unitario que tenga la dirección opuesta a v= 2*i* – 3*j*.

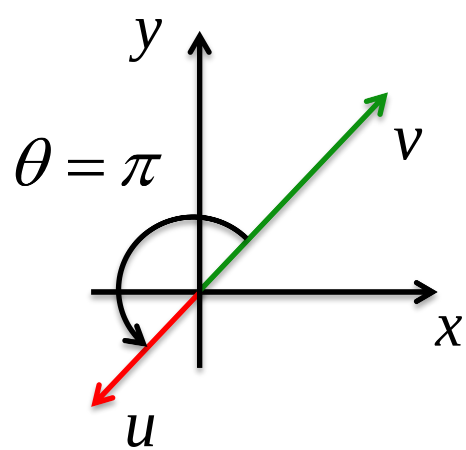
ÁNGULO ENTRE VECTORES (1/3)

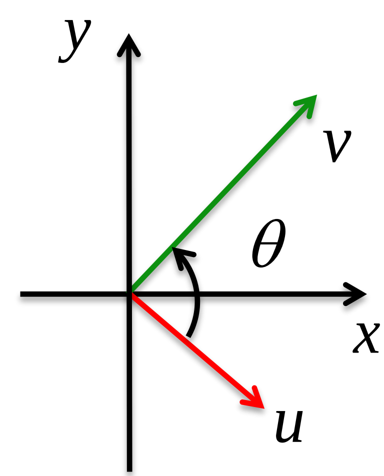
El ángulo entre dos vectores *u* y *v* no nulos, se define como el ángulo no negativo menor que forma la intersección de los dos vectores. Si θ es el ángulo entonces:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$









ÁNGULO ENTRE VECTORES (2/3)

Ejemplos:

1. Determine el ángulo entre los vectores *u*=(3, 4) y *v*= (2, 2).

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(3)(2)+(4)(2)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{14}{\sqrt{25}\sqrt{8}} = \frac{14}{10\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = 8.13^\circ$$

2. Calcule el ángulo entre los vectores *u*= i + j y *v*= -4i – 2j.

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(1)(-4)+(1)(-2)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}} = \frac{-6}{\sqrt{2}\sqrt{20}} \therefore \theta = 161.56^\circ$$

ÁNGULO ENTRE VECTORES (3/3)

Ejercicios:

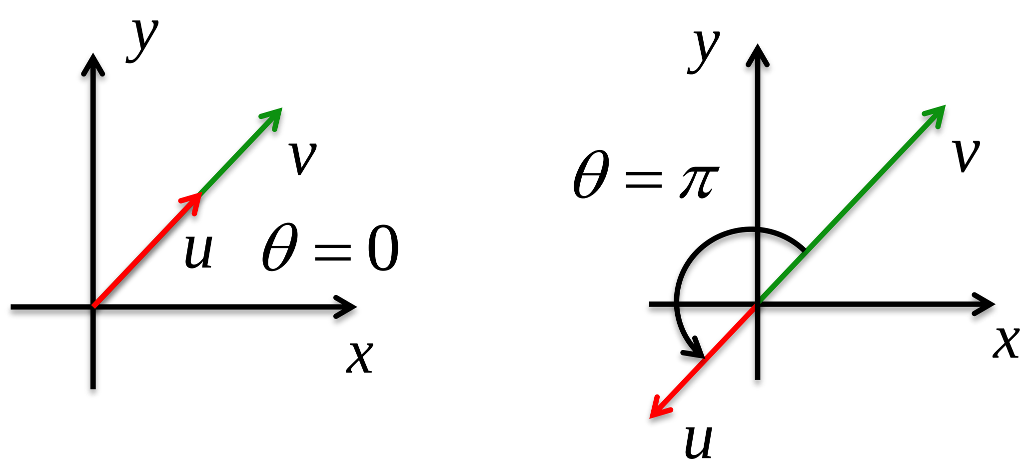
1. Determine el ángulo entre los vectores:
   a) u=i + j y v= i - j.
   b) u= (4, 5) y v= (5, -4).

2. Encuentre el valor de α tal que los vectores u= -3i + 6j y v= 2i + αj formen un ángulo de 45°.

VECTORES PARALELOS (1/3)

- Dos vectores no nulos *u* y *v* son paralelos si el ángulo entre ellos es cero o π. Si el ángulo es de 0° los vectores tiene la misma dirección y si es de 180° tienen direcciones opuestas.

- Si *u*= α*v*, con *v* ≠0, entonces los vectores *u* y *v* son paralelos,



VECTORES PARALELOS (2/3)

Ejemplos:

1. Demuestre si los vectores *u*=(1, -2) y *v*= (-2, 4) son paralelos.

$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u||v|} = \frac{(1)(-2)+(-2)(4)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\sqrt{(-2)^2+4^2}} = \frac{-10}{\sqrt{5}\sqrt{20}} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = 180° \quad \therefore \text{ los vectores son paralelos}$$

2. Determine si los vectores *u*= 2i + 3j y *v*= 6i + 4j son paralelos.

$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u||v|} = \frac{(2)(6)+(3)(4)}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{24}{\sqrt{13}\sqrt{52}} = \frac{24}{26} \Rightarrow \theta = 22.62°$$

$$\therefore \text{ los vectores no son paralelos}$$

VECTORES PARALELOS (3/3)

Ejercicios:

1. Indique si los vectores *u*= (4, 6) y *v*= (3, -2) son paralelos.

2. Determine si los vectores *u*= 7i y *v*= -23j son paralelos.

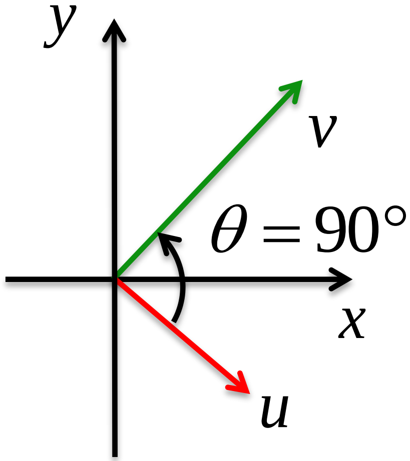
3. Sean *u*= -3i + 6j y *v*= 2i + αj, determine α tal que *u* y *v* sean paralelos.

4. Demuestre que dos vectores no nulos *u* y *v* son paralelos si y sólo si *v*= α*u*.

VECTORES ORTOGONALES (1/3)

- Dos vectores no nulos *u* y *v* son ortogonales (perpendiculares) si el ángulo entre ellos es de 90° (π/2).

- Los vectores *u* y *v* son ortogonales si y sólo si $u \cdot v = 0$.



VECTORES ORTOGONALES (2/3)

Ejemplos:

1. Demuestre si los vectores *u*=(2, -3) y *v*= (3, 2) son ortogonales.

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(2)(-3)+(3)(2)}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{0}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 90° \quad \therefore \text{ los vectores son ortogonales}$$

2. Determine si los vectores *u*= i + 2j y *v*= 4i + 8j son ortogonales.

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(1)(4)+(2)(8)}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{4^2+8^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}\sqrt{80}} = 1 \Rightarrow \theta = 0°$$

$$\therefore \text{ los vectores no son ortogonales}$$

VECTORES ORTOGONALES (3/3)

Ejercicios:

1. Determine si los vectores *u*= 7i y *v*= -23j son ortogonales.

2. Indique si los vectores *u*= (2, 5) y *v*= (2, -5) son ortogonales.

3. Sean *u*= -3i + 6j y *v*= 2i + αj, determine α tal que *u* y *v* sean ortogonales.

4. Demuestre que dos vectores *u* y *v* son ortogonales si y sólo si *u* · *v*= 0.

PROYECCIÓN DE VECTORES (1/4)

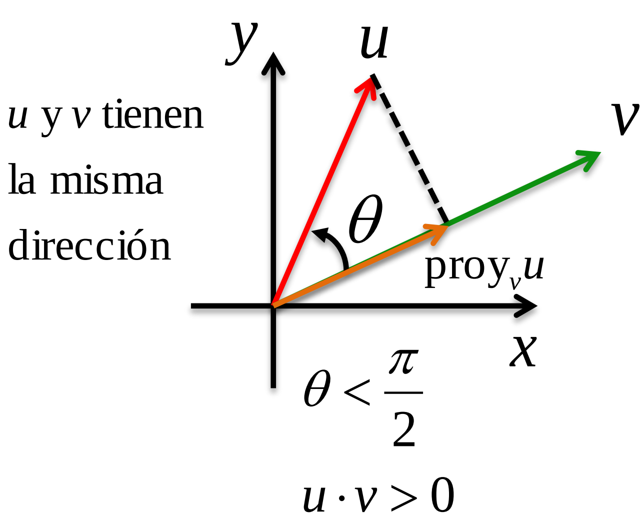
- Sean *u* y *v* dos vectores no nulos, la proyección de *u* sobre *v* es un vector definido por:

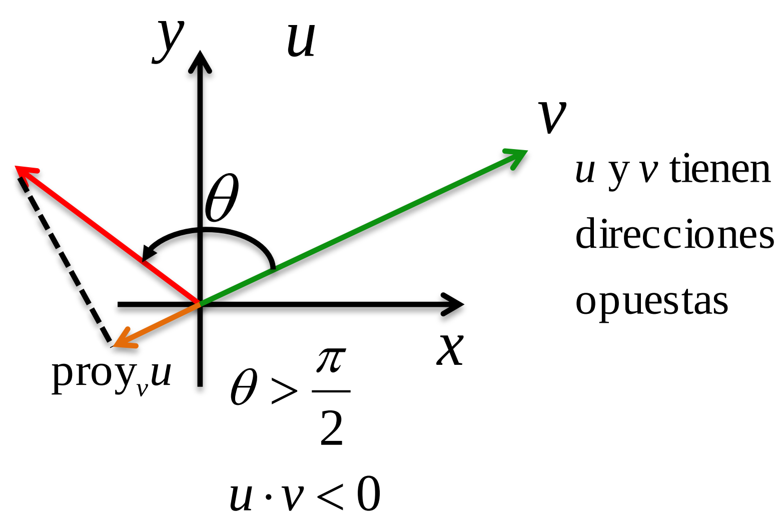
$$\mathrm{proy}_{\mathrm{v}} u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

- La componente de u en la dirección de v es el escalar $\frac{u \cdot v}{|v|}$.

- $\frac{v}{|v|}$ es un vector unitario en la dirección de v.

PROYECCIÓN DE VECTORES (2/4)





1. Si u y v son ortogonales $\text{proy}_v u = 0$.
2. $\text{proy}_v u$ es paralelo a v.
3. $u - \text{proy}_v u$ es ortogonal a v.

PROYECCIÓN DE VECTORES (3/4)

Ejemplos:

1. Determine la $\text{proy}_v u$ si u=(1, 1) y v= (2, 2).

$$\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v = \frac{(1)(2)+(1)(2)}{\left(\sqrt{2^2+2^2}\right)^2}(2i+2j) = \frac{1}{2}(2i+2j) = i+j$$

2. Calcule la $\text{proy}_v u$ si u= 2i - 3j y v= i + j.

$$\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v = \frac{(2)(1)+(-3)(1)}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2}(i+j) = -\frac{1}{2}(i+j)$$

PROYECCIÓN DE VECTORES (4/4)

Ejercicios:

1. Determine la $\text{proy}_v u$ si u= 2i y v= i + j.

2. Calcule la $\text{proy}_v u$ si u= i + j y v= 2i – 3j.

3. Obtenga la $\text{proy}_v u$ si u= αi + βj y v= i + j.

4. Establezca una condición sobre a_1, b_1, a_2 y b_2 que asegure que v y $\text{proy}_v u$ tengan la misma dirección. Los vectores son u= a_1i + b_1j y v= a_2i + b_2j.

REFERENCIAS (1/1)

1. Arcos Quezada, J. I. Geometría Analítica para estudiantes de ingeniería. Toluca, México. Editorial Kali.
2. Filloy, Hitt, Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México.
3. Haaser, LaSalle, Sullivan. Análisis Matemático volúmenes I y II. México. Editorial Trillas.
4. Lehmann. Geometría Analítica. Limusa. México.
5. Riddle, D. F. Geometría Analítica. 6ª ed. México. International Thomson Editores.
6. Solis y Nolasco, Geometría Analítica, Editorial Limusa, México.
7. Wooton, Beckenbach y Fleming. Geometría Analítica Moderna. Publicaciones Cultural. México.