



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Control óptimo de los parámetros de la inestabilidad
modulacional inducida en la ecuación no lineal de
Schrödinger bajo el efecto de auto dispersión de Ráman .**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

Félix Enrique Méndez Zúñiga



ASESORES DE TESIS:

Dr. Máximo Augusto Agüero

Dr. Leonid Serkin

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO

JULIO 2022

Indice

1 Resumen.....	5
2 Antecedentes.....	8
3 Importancia del problema.....	13
4 Planteamiento del problema.....	21
5 Marco Teorico.....	24
5.1 Ecuación no lineal de Schrödinger y la inestabilidad modulacional.....	24
5.2 Autoenfoco de haces ópticos.....	26
5.3 Inestabilidad modulacional en plasma básico.....	34
5.4 Relajación de haces de electrones de corriente alta e inestabilidad modulacional.....	46
6 Métodos y técnicas de investigación empleadas.....	51
7 Presentación y discusión de resultados.....	62
8 Conclusiones.....	72
9 Referencias de consulta.....	73
10 Anexos.....	77
10.1 Definiciones.....	77

1 Resumen

En esta tesis estudiamos la inestabilidad modulacional que surge en un modelo que contiene un sistema de dos ecuaciones: la ecuación no autónoma no lineal de Schrödinger con la no linealidad corregida por un término que describa la auto-dispersión de Raman y la segunda ecuación para el potencial $Q(Z, T)$:

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{D_2(Z)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + R(Z) \left\{ (1 - \beta) |q|^2 + \beta Q \right\} q = 0, \quad (1.1)$$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Q(Z, T)}{\partial T^2} + 2\gamma\mu \frac{\partial Q(Z, T)}{\partial T} + Q(Z, T) = |q(Z, T)|^2. \quad (1.2)$$

en donde $D_2(Z)$ es el coeficiente de dispersión y $R(Z)$ corresponde a la no linealidad variando sobre la distancia Z .

Descripción del modelo:

La ecuación (1.2) describe una respuesta de un medio en la cual se propaga la onda $q(Z, T)$ y es una ecuación de oscilador para el potencial $Q(Z, T)$ con la fuerza externa $|q(Z, T)|^2$ y un término de relajación $2\gamma\mu(\partial Q(Z, T)/\partial T)$.

Este modelo describe el mecanismo de auto-dispersión de Raman (ADR) y significa que la no linealidad del sistema se modifica y es débilmente perturbada debido al potencial $Q(Z, T)$ en Eq. (1.1) (en caso de un $\beta \ll 1$) el que corresponde a una tardanza de la respuesta del medio o una relajación.

El sistema de las ecuaciones 1.1 y 1.2 es una generalización de la ecuación no lineal de Schrödinger estándar que se aparece en óptica no lineal para tener en la cuenta los efectos de propagación de pulsos ultra-cortos con espectro muy amplio de frecuencias [26].

En esta tesis se usa un modelo estándar de auto-dispersión de Raman que siguen de la ecuación (1.2):

$$T_{Ram} \frac{\partial Q(Z, T)}{\partial T} + Q(Z, T) = |q(Z, T)|^2, \quad (1.3)$$

donde $T_{\text{Ram}} = 2\gamma\mu$ es el tiempo de relajación de la no linealidad de Raman, también conocido como tiempo de respuesta de Raman, que se acepta como un parámetro pequeño, $T_{\text{Ram}} \ll 1$.

Esto significa que el término de no linealidad corregido por el efecto de Raman es una corrección de no linealidad del sistema y puede ser descrita como una perturbación.

Se realiza una revisión de los resultados obtenidos anteriormente en el área de los modelos autónomos. En particular, se extiende la metodología efectuada por Akira Hasegawa para el caso autónomo de la ecuación (1.1), en donde los coeficientes de dispersión y no linealidad toman los valores constantes.

Se analizaron las condiciones necesarias para el surgimiento de la inestabilidad modulacional en el sistema descrito por las ecuaciones (1.1, 1.2) con la ecuación no autónoma no lineal de Schrödinger con el coeficiente de dispersión y el valor de no linealidad dependiente de una distancia Z y con término que describe el efecto de auto-dispersión de Raman.

Se obtuvo la relación de dispersión a lo largo de la distancia Z y del dominio espectral Ω , estableciendo los criterios y encontrando las regiones de variación del parámetro del modelo que corresponden a la presencia del fenómeno de inestabilidad modulacional inducida en el sistema (1.1, 1.2), de acuerdo a las propiedades de dispersión variable, se estudió y demostró al graficar las regiones de inestabilidad modulacional inducida dependiendo de la dispersión variable a lo largo de la distancia Z .

En el primer orden de la teoría de perturbación se puede encontrar que la relación de dispersión (RD) entre el número de onda y frecuencia del pulso, donde el análisis de RD muestra que dependiente de los parámetros del modelo, el número de ondas $K(\Omega)$ va a tener un valor real o imaginario. Las regiones de los parámetros donde el número de ondas $K(\Omega)$ se resulta imaginario corresponde a las condiciones de la inestabilidad modulacional. Estas regiones espectrales dependen de la

dispersión variable y otros parámetros del modelo y es importante establecerlos dependiendo de la dispersión variable a lo largo de la distancia Z .

Los pulsos ópticos solitónicos son objetos cuasi-ideales que gracias a su estabilidad y conservación de forma llevan información. Sin embargo, en muchos procesos físicos ocurren perturbaciones externas que modifican su comportamiento. Por lo tanto, es importante estudiar los efectos que producen estas influencias en contextos de procesos físicos no lineales modelados por la ecuación no lineal generalizada de Schrödinger. Está conocido que la influencia del efecto de Raman es considerable para los pulsos ultra-cortos de unos femtosegundos. Por eso, el estudio de los criterios de la inestabilidad modulacional, especialmente para el caso de funciones de dispersión exponencialmente decrecientes, es relevante al estudiar la dinámica del efecto de IM en plasma, fibras ópticas, láseres de solitones, etc.

La metodología usada es la más adecuada para el sistema (1.1, 1.2), ya que la ecuación (1.1) no es completamente integrable y este método se basa en el estudio de la inestabilidad modulacional a partir de la relación de dispersión obtenida de la NLSE.

2 Antecedentes

La Inestabilidad modulacional (IM) o automodulación conduce a que una onda continua se vuelva inestable debido a una pequeña perturbación alrededor de su amplitud inicial, lo que produce a una modulación en su frecuencia y el incremento exponencial de su amplitud.

[1] En una versión simple, el efecto IM es el resultado de la interacción entre una fuerte portadora onda armónica de frecuencia ω y pequeñas bandas laterales $\omega \pm \Omega$. El crecimiento de las bandas laterales pueden tratarse en términos de amplificación de una modulación débil impuesta a una onda armónica.

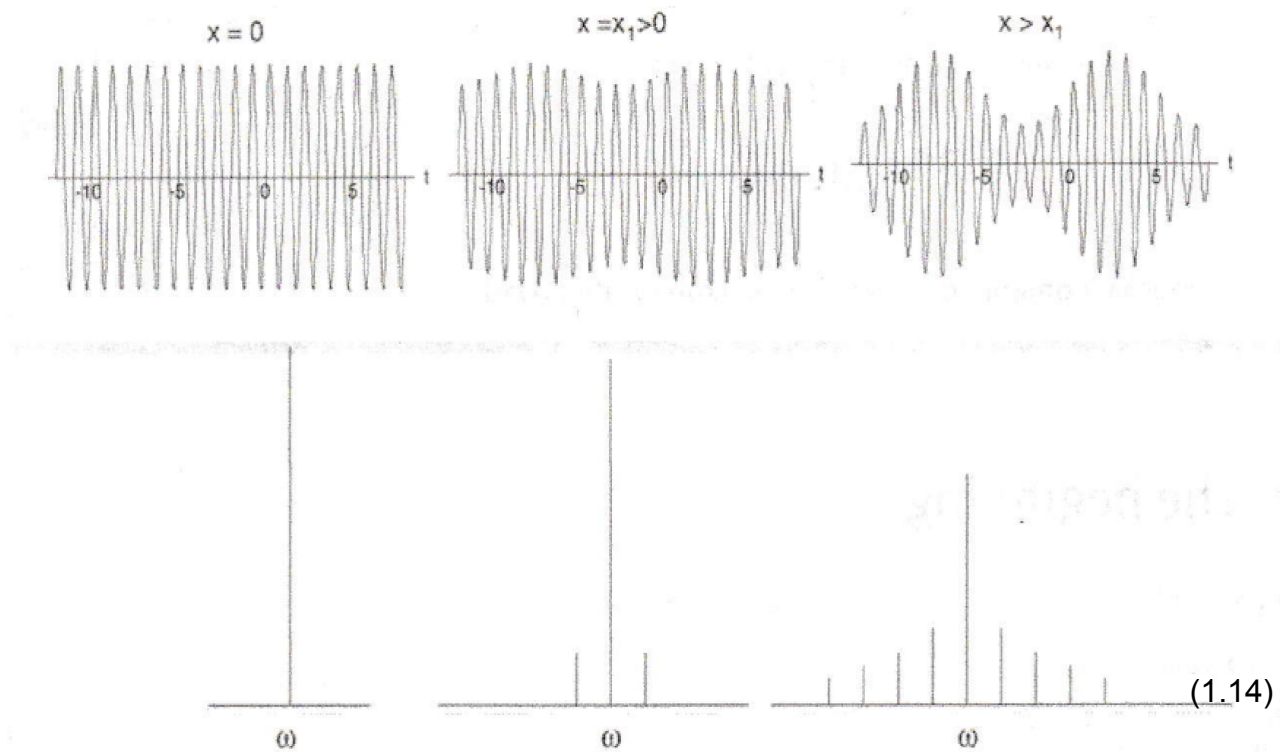


Figura 1: Evolución de un tren de ondas no lineales en la IM y debajo su correspondiente evolución del espectro de frecuencias de la onda[1].

En la física no lineal moderna, la IM es considerada como un proceso básico que clasifica el comportamiento cualitativo de las ondas moduladas y puede inicializar la formación de entidades estables como los solitones envolventes.

Inicialmente, la IM fue observada experimentalmente en los años 60's en láseres

de alta potencia, en disolventes orgánicos [2], en ondas de gravedad las cuales son generadas por la perturbación de un fluido sometido a la fuerza de gravedad [3], en plasma frío cuando un haz de electrones la traspasa [4]. Estudios teóricos de IM han sido desarrollados paralelamente con los primeros estudios de fenómenos no lineales de auto-enfocado de pulsos de láser [5-9], evolución de ecuaciones no lineales [10-13] y fue mostrado que efectos no lineales son responsables para la aparición del efecto IM [12-17].

En los últimos años, se encontró una nueva aplicación para IM, la cual realiza nuevos métodos de aceleración de partículas cargadas [18,19]. Alcanzar colisiones de mayor energía para futuros experimentos de física de partículas más allá del gran colisionador de hadrones (LHC) en CERN requiere una tecnología de aceleración novedosa, y disparar un haz de protones de alta energía en un plasma podría ser un primer paso prometedor. Estos experimentos avanzados se realizan, en particular, dentro de la colaboración internacional que se llama “The Advanced WAKE field Experiment (AWAKE)” [20-24]. AWAKE es un experimento donde se forma un campo de estela de plasma impulsado por protones de 400 GeV del Super Proton Synchrotron (SPS) del CERN.

La aceleración de estela es un método para acelerar un grupo de electrones en un plasma perturbado por el paso de un haz primario (conductor) de electrones, protones o radiación láser. La idea de la aceleración de la estela es que el conductor, al atravesar el plasma, separa los electrones de la luz, mientras que los iones permanecen casi inmóviles. Como resultado, se forman ondas de densidad de carga en el plasma detrás del conductor, creando un campo eléctrico de enorme fuerza (hasta 100 GV/m), que es inaccesible en una instalación de laboratorio debido a posibles averías eléctricas. Si, después del conductor, se lanza un haz acelerado en la fase deseada de la onda del plasma, entonces es posible obtener una tasa de aceleración muy superior a la alcanzada en otros aceleradores lineales. Hasta la fecha, las posibilidades de aceleración de estelas se están estudiando en instalaciones experimentales [18-24].

Los plasmas, que son gases de iones y electrones libres, pueden soportar grandes campos eléctricos. Se utilizan protones acelerados para impulsar grandes campos de ~ 100 GV/m en un objetivo de plasma de rubidio de 10 m de largo. El haz de los protones rápidos se llama un “driver” o un conductor. Para la producción de campos tan grandes, AWAKE emplea el fenómeno de inestabilidad modulacional [20-24].

La interacción de partículas cargadas en plasma tiene un carácter significativamente no lineal, ya que la no linealidad y la dispersión son condiciones necesarias para la producción del fenómeno de IM. Una de las más importantes condiciones es la dispersión anómala en la velocidad de grupo en la cual pulsos con menor longitud de onda viajan con mayor velocidad de grupo que pulsos con mayor longitud de onda. Estas circunstancias conllevan a un “reforzamiento de la onda” y en la inevitable ruptura de la forma de onda en un tren de pulsos, lo cual se observa en plasmas, fibras ópticas y, posiblemente, causa la creación de olas gigantes en el mar [25,26].

Las ecuaciones de movimiento de partículas en plasma pueden ser reducidas aproximadamente a la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE), la cual tiene la forma igual a la ecuación que se aparece en el problema de auto-enfocado de pulsos de láser en óptica no lineal. Entonces, la NLSE surge para el modelado de sistemas no lineales, donde se presenta el fenómeno de inestabilidad modulacional, el fenómeno observado en la propagación de ondas electromagnéticas, en fibras ópticas, en los condensados de Bose-Einstein, en plasmas o en ondas gravitacionales, etc.

Un mecanismo de inestabilidad modulacional inducida para generar los pulsos solitarios que se llaman solitones, como trenes de pulsos en fibras ópticas y láseres de solitones fue propuesto por Akira Hasegawa del laboratorio AT&T [14]. Estos trenes de pulsos fueron observados posteriormente en experimentos realizados [15].

En una dispersión de velocidad de grupo (DVG) anómala, los pulsos con longitu-

des de onda más cortas viajan con velocidades de grupo más altas, que los pulsos con mayor longitud de onda. Esta condición asume una no linealidad de Kerr, por lo que el índice de refracción aumenta con la intensidad óptica [25,26]. Por lo tanto, una onda continua inicial (cw) en este régimen anómalo de dispersión se vuelve inestable para una pequeña perturbación alrededor de la amplitud inicial y ocurren variaciones en la frecuencia y un crecimiento exponencial de la amplitud. Este proceso depende en gran medida de la frecuencia de la perturbación. En el dominio espectral de frecuencias, el proceso de IM se expresa en enriquecimiento del espectro con las frecuencias laterales (side bands) [14,15,25,26].

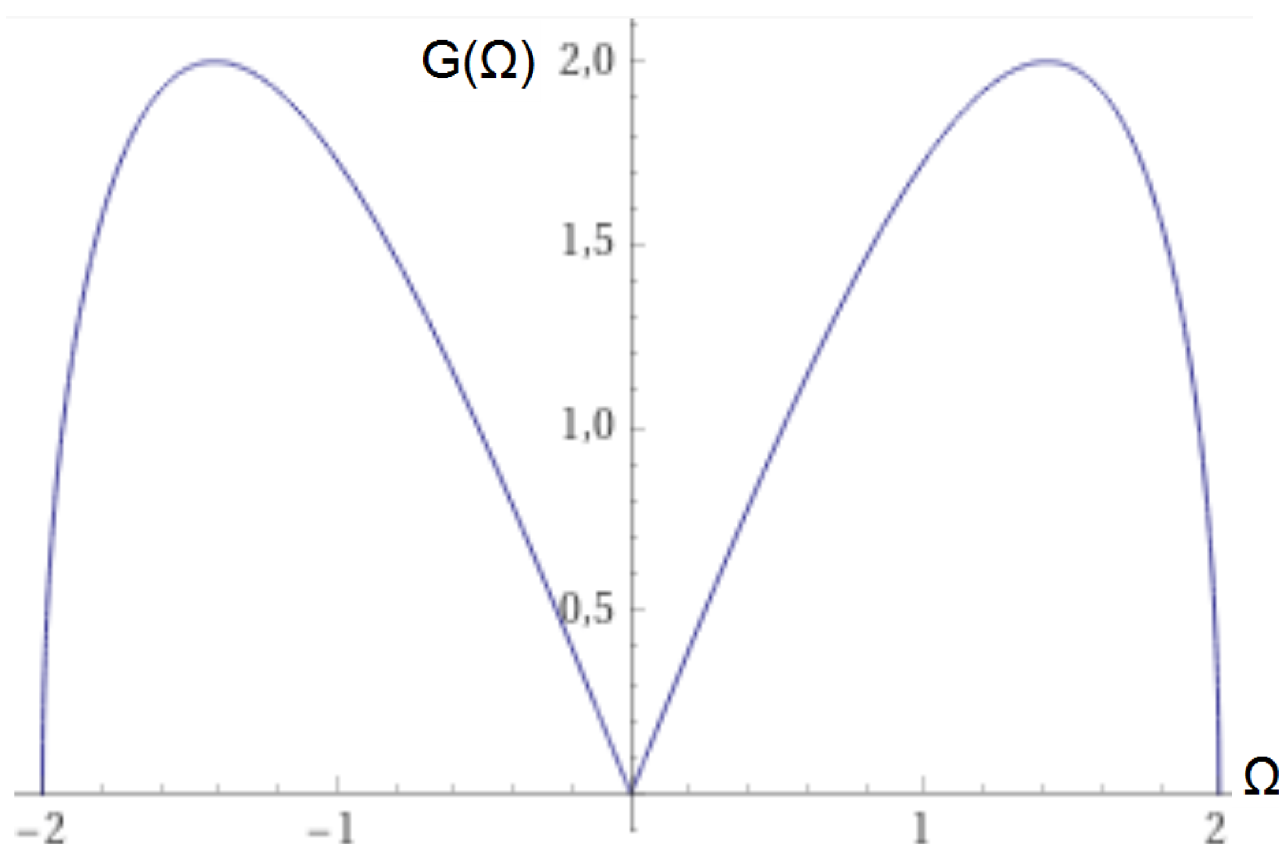


Figura 2: Ejemplo de espectro de inestabilidad modulacional generada en un sistema descrito por la ecuación NLSE estándar con valores $\rho_0 = 1$, $R=D_2=1$.

En la figura 2 se representa el espectro de IM en un sistema descrito por la ecuación no lineal de Schrödinger estándar donde la función del coeficiente del espectro de ganancia es

$G(\Omega) = 2 \text{Im}(K) = D_2 |\Omega|(\Omega_{cr}^2 - \Omega^2)^{1/2}$, la inestabilidad modulacional aparece en la región espectral que satisface $|\Omega| < \Omega_{cr}$, donde $\Omega_{cr} = 2 (\rho_0 R/D_2)^{1/2}$, R y D_2 son núme-

ros positivos.

Donde en la figura 2 se escogio $q_0 = 1$, $R=D_2=1$, entonces $|\Omega| < 2$ por lo que se observa la simetria del espectro de IM respecto a Ω y tiene los maximos en frecuencias $\Omega_{opt} = \pm\Omega_{cr}/\sqrt{2} = \pm(2q_0R/D_2)^{1/2}$ con $G_{max}(\Omega_{opt}) = 2q_0R$.

3 Importancia del problema.

Como ya se había mencionado la IM, puede realizar nuevos métodos de aceleración de partículas cargadas. Los aceleradores de campo de estela de plasma (ACEP), así como otros conceptos de aceleradores avanzados basados en plasma, se han estudiado intensamente durante las últimas dos décadas, principalmente debido a gradientes de aceleración muy altos que pueden ser logrados en un plasma[18]. En los ACEP el campo en el plasma es impulsado por un haz de electrones (conductor); esto puede ser un solo corto grupo de electrones (con respecto al período wakefield $2\pi c/\omega_p$), múltiples grupos cortos, o un solo grupo largo de una manera específica. El "conductor" en el plasma experimenta fuerzas longitudinales (desaceleración) y transversales (enfoque o desenfoque), pero, debido al alto factor relativista $\gamma_b \gg 1$ del "conductor", solamente la fuerza transversal puede cambiar significativamente la forma del "conductor". Por ejemplo, si los electrones del plasma se tratan como un fluido, los iones del plasma están inmóviles y el conductor es un conjunto de macropartículas, considerándose cualesquier ejes simétricos o haces planos con $\gamma_b = 1000$, radio (o ancho medio) $a \sim c/\omega_p$ y densidad inicial $n_b \sim 0.1n_i$, donde $\omega_p = (4\pi n_i e^2/m)^{1/2}$ es la frecuencia del plasma, n_i es la densidad de iones del plasma, e y m son las respectivas carga y masa del electrón. El período de oscilaciones de betatrón para todos los haces considerados es de aproximadamente $500\omega_p^{-1}$, mientras que la desaceleración del "conductor", incluso en las regiones del campo de la desaceleración más fuerte, ocurre en tiempos $\gtrsim 5000\omega_p^{-1}$.

Cuando un "conductor" de solo un corto grupo de electrones, al estar siempre enfocado en el plasma y, por lo que, no puede ser destruido rápidamente por su propio campo de estela, por el contrario, un "conductor" de un grupo largo se extiende a lo largo de varios períodos de estela y puede caer en parte en la fase de desenfoque de su propia estela. Para el caso de un grupo de electrones largo con un frente suave y un corte agudo, esto provoca una rápida destrucción del "conductor", esto quiere decir que, las pequeñas perturbaciones iniciales de la fuerza de enfoque provocan una modulación de la densidad del "conductor"; la modulación de densi-

dad da como resultado una mayor modulación de la fuerza de enfoque, y así sucesivamente; Este proceso es conocido como inestabilidad transversal de dos corrientes (TTS por sus siglas en inglés).

El estudio detallado de la inestabilidad revela que la destrucción del "conductor" ocurre cuando varios modos inestables crecen simultáneamente en el sistema. Esto sugiere controlar el TTS agregando una perturbación de la fuerza de enfoque al sistema y bloqueando así la fase de la inestabilidad.

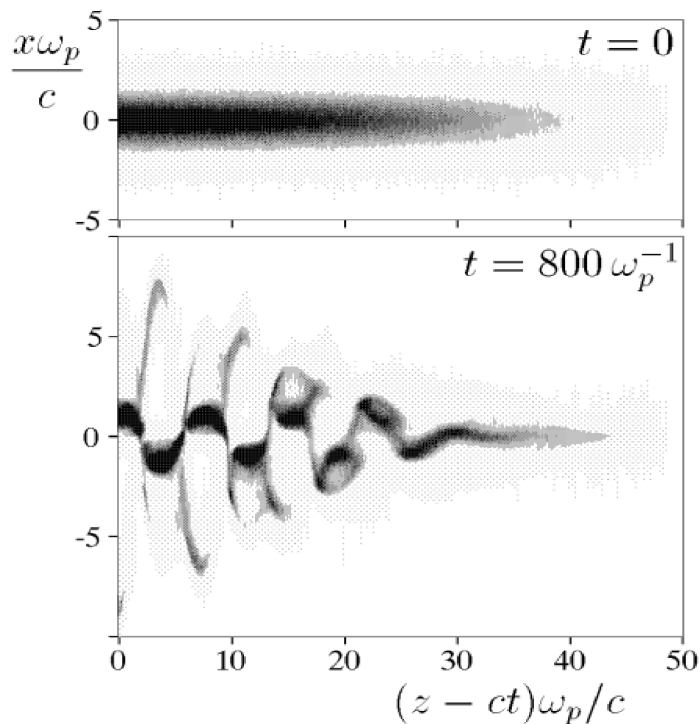


Figura 3: Destrucción de un haz largo por el efecto de inestabilidad TTS[18]

Trenes cortos de electrones se propagan establemente en el plasma hasta que algunas partículas pierden la mayor parte de su energía. Anteriormente, este fenómeno se observaba en simulaciones de ejes simétricos, ahora se encuentra el mismo resultado en la geometría plana. En las simulaciones, es fácil "apagar" la aceleración de partículas y probar si genera inestabilidad. Esto se ha realizado y no se ha observado pérdida de partículas. De donde se concluyo que la estabilidad del tren de grupos y la ausencia de resonancias de grupo a grupo se explica por la diferencia en las frecuencias de las partículas del betatrón en diferentes secciones transversales del conductor, no por el cambio rápido de la energía de la partícula.

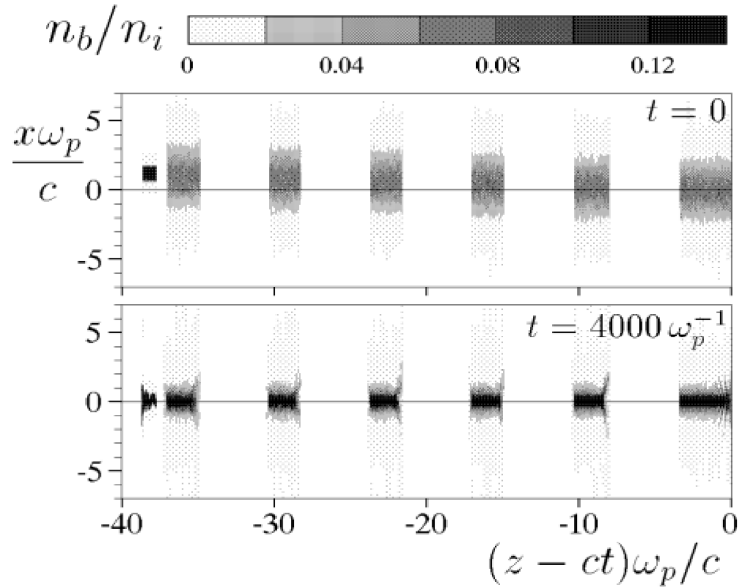


Figura 4: Dinámica de un tren en un plazo largo[18].

En la actualidad, el impresionante progreso en la aceleración del campo de estela láser (LWFA por sus siglas en inglés) de partículas cargadas, da motivos para considerarlo como un método prospectivo de producción de haz de electrones en el rango de energías de GeV [19]. Los electrones de esta energía se pueden utilizar en fuentes de luz avanzadas para aplicaciones futuras. La combinación de la LWFA de electrones y la retrodispersión Compton de un haz de sonda de luz sobre ellos abre la posibilidad de crear una fuente de haces de luz de femtosegundos en rangos de rayos X y gamma. Este tipo de fuente puede tener alta coherencia y polarización, cuasi-monocromática, y sintonizabilidad de los parámetros de radiación. Los experimentos LWFA se desarrollan actualmente en el Instituto de Física Láser (ILP) en colaboración con Budker. Los experimentos se basan en el sistema láser de dos canales, multi-terawatt, femtosegundos, alto contraste y alta estabilidad angular con una tasa de repetición de pulsos de 10 Hz, que se desarrolla en ILP. Tradicionalmente, existen dos esquemas básicos de LWFA. En un esquema, la aceleración ocurre en capilares dieléctricos llenos de plasma. Las energías de electrones más altas se obtienen de esta manera en capilares anchos con plasma preformado que tiene la densidad mínima en el eje. En otro esquema, se usa un chorro de gas supersónico.

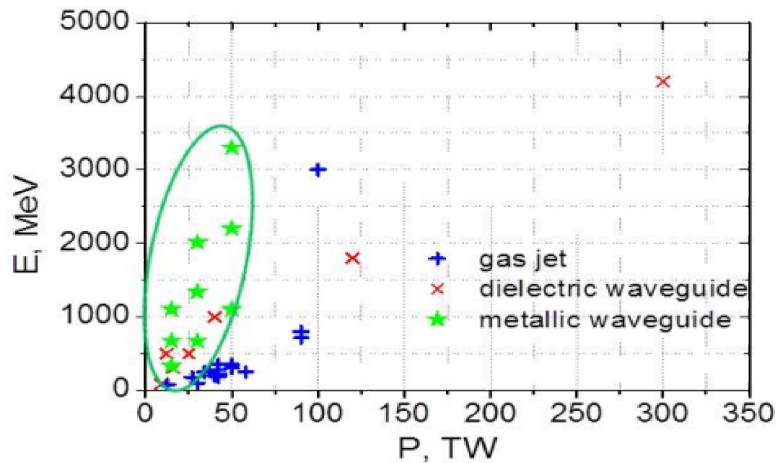


Figura 5: La energía (E) de electrón acelerado por LWFA versus la potencia (P) de pulso del "controlador" [19].

En la actualidad es un problema importante es el alcanzar colisiones de mayor energía para futuros experimentos de física de partículas, más allá del gran colisionador de hadrones (LHC) en CERN que requiere una tecnología de aceleración novedosa, y disparar un haz de protones de alta energía a un plasma han sido experimentos realizados estos últimos años. Estos experimentos avanzados son hechos, dentro de la colaboración internacional llamada "The Advanced WAKE field Experiment (AWAKE)".

El Experimento Avanzado de Aceleración de campo de estela de Plasma Impulsado por Protones (AWAKE) estudia la generación de campo de estela de plasma y la aceleración de electrones impulsada por grupos de protones. Es un experimento de investigación y desarrollo de pruebas del CERN y fue el primer experimento de aceleración de campo de estela de plasma impulsado por protones del mundo. El experimento AWAKE se realiza en las antiguas instalaciones de CNGS y utiliza los haces de protones de 400 GeV/c del Super Proton Synchrotron (SPS)[20].

Los experimentos se centran en la inestabilidad automodulacional de grupos largos de protones (rms ~ 12 cm) en el plasma.

Para impulsar los campos de estela de plasma de manera eficiente, la longitud del grupo de transmisión debe ser del orden de la longitud de onda del plasma λ_{pe} , que corresponde a $\approx 1\text{mm}$ para la densidad de plasma utilizada en AWAKE ($10^{14}\text{--}10^{15}$ electrones/cm³). El haz de protones para AWAKE tiene una longitud de grupo de σ

= 12cm, por lo tanto, el experimento se basa en la inestabilidad automodulacional, que modula el conductor de protones en la longitud de onda del plasma en los primeros metros de plasma.

La inestabilidad automodulacional es una inestabilidad transversal que surge de la interacción entre los componentes transversales de los campos de estela del plasma y los campos de estela impulsados por regiones de diferentes densidades de grupos. El período de modulación $s \cong \lambda_{pe}$ y el grupo modulado impulsa resonantemente los campos de estela de plasma. La aparición de la inestabilidad automodulada puede detectarse caracterizando la estructura longitudinal del haz de protones al salir de la celda de plasma.

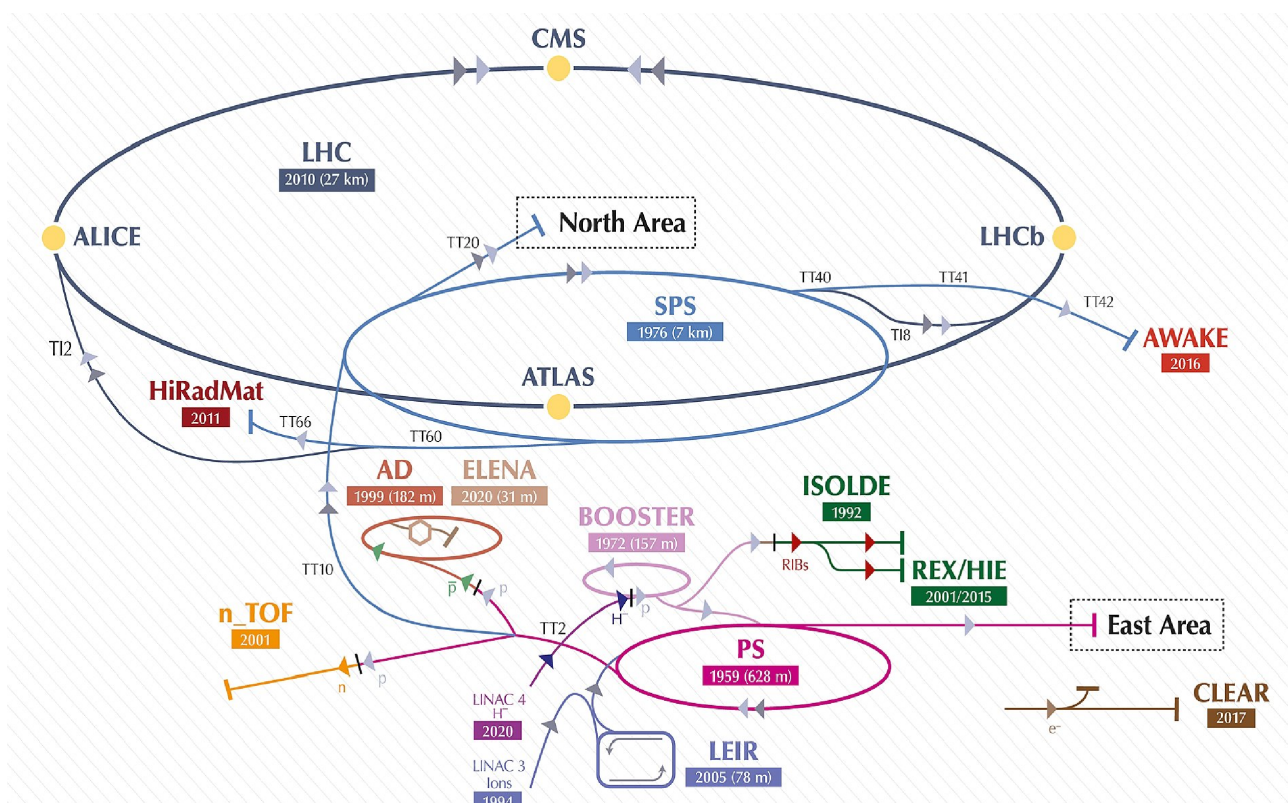


Figura 6: Complejo acelerador del CERN.

En el diseño de referencia de AWAKE en el CERN, se extraen grupos de protones de 400 GeV/c (con una intensidad de $\approx 3 \times 10^{11}$ protones/grupo) del SPS del CERN y se envían a lo largo de la línea de haz de protones de 750m de largo hacia una celda plasmática. La instalación AWAKE está instalada en el área, que anteriormente se usaba para Neutrinos, la instalación Gran Sasso CERN (CNGS). El haz

de protones se enfoca a $\sigma_{x,y} = 200\mu\text{m}$ cerca de la entrada de la celda de plasma de vapor de rubidio de 10m de largo con una densidad ajustable en el rango de 10^{14} – 10^{15} electrones/cm³. Cuando el grupo de protones, con un r.m.s. longitud del grupo de $\sigma_z = 12$ cm (0,4 ns), entra en la célula de plasma, se somete a la inestabilidad automodulada. La longitud y el período efectivos del haz modulado se establecen mediante la longitud de onda del plasma (para AWAKE, normalmente $\lambda_{pe} = 1\text{mm}$). Un pulso láser de alta potencia (≈ 4.5 TW), copropagado y coaxial con el haz de protones, se utiliza para ionizar el gas neutro en la celda de plasma y también para generar la Automodulación del grupo de protones.

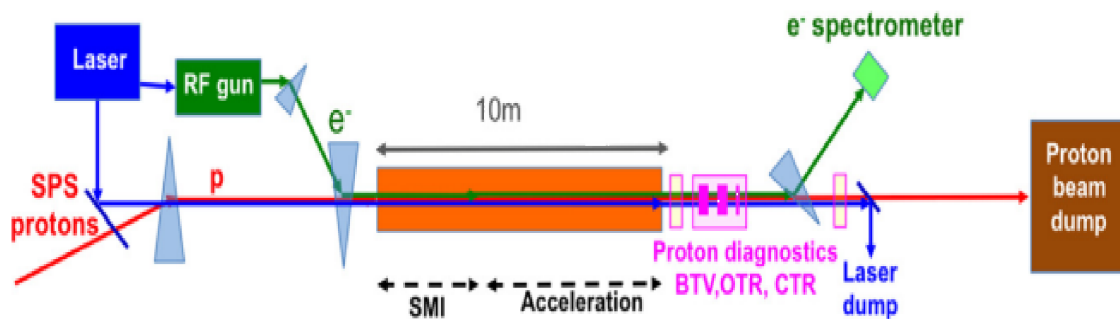


Figura 7: Diseño de referencia del experimento AWAKE[20].

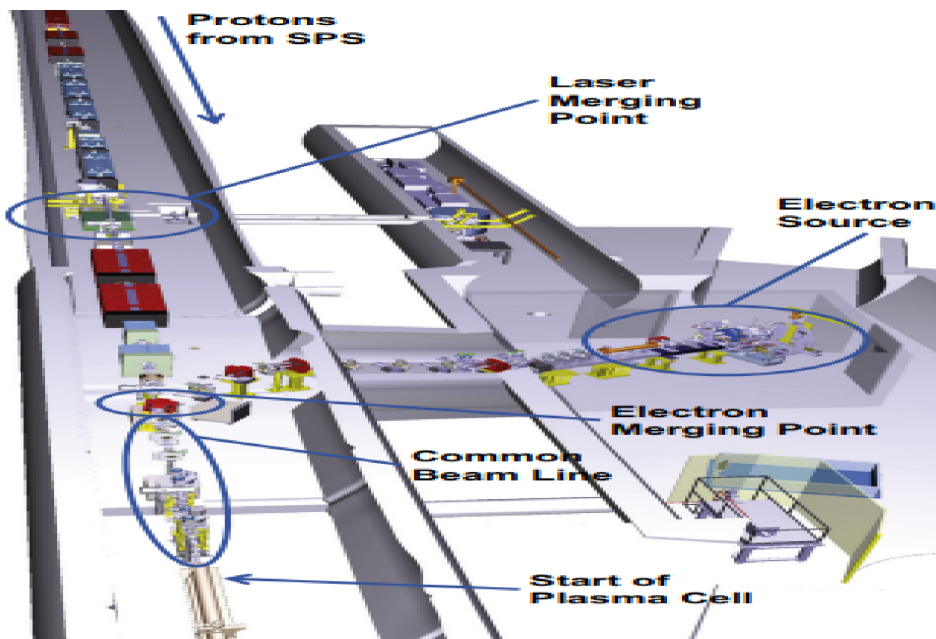


Figura 8: La integración de AWAKE las líneas de haz (protón, electrón y láser) en la instalación AWAKE (anteriormente CNGS)[20].

El experimento AWAKE impulsa campos de estela de plasma con grupos de protones relativistas (p^+) para acelerar electrones (e^-), en estos campos de estela[21] el grupo p^+ ($\sigma_z = 6-12$ cm) es mucho más largo que el período de los campos de estela ($\lambda_{pe} = 3-1$ mm) en un plasma con suficiente densidad de e^- ($n_e = (1-10) \times 10^{14}$ cm^{-3}) para sostener la amplitud de los campos de aceleración de GV/m. El experimento se basa en un proceso de automodulación que forma un tren de grupos de p^+ con un período igual al de los campos de estela. Este tren puede entonces impulsar resonantemente los campos de estela a grandes amplitudes. El proceso de modulación es detonado por la ionización repentina de vapor de rubidio (Rb) por un pulso láser de femtosegundos que viaja dentro del grupo de p^+ . Este proceso siembra la inestabilidad automodulacionada.

Experimentalmente, el proceso de la siembra de la inestabilidad automodulacionada es obtenida de un frente de ionización de plasma relativista, en las simulaciones la siembra se obtiene de un fuerte aumento del borde de la distribución de carga del grupo de los p^+ . Por lo tanto, el grupo cortado de p^+ se propaga en un plasma preformado de densidad constante. Esto es para disminuir el tiempo de cálculo de la simulación.

Se ha estudiado la automodulación de grupos largos de partículas cargadas relativistas para aprovechar los grupos que transportan grandes cantidades de energía (kilojulios) para impulsar campos de estela de gran amplitud (> 1 GV/m) en plasma largo[23]. En el proceso de automodulación, el componente transversal de los campos de estela de ruido del plasma o grupo, o un componente transversal impuesto externamente como sembrador, crece y transforma el grupo largo en un tren de microgrupos a través del enfoque y desenfoque periódicos. En un plasma neutro con densidad de electrones n_{e0} la periodicidad de los microgrupos Δt viene dado por la frecuencia angular del electrón del plasma: $\Delta t = 2\pi/\omega_{pe}$, donde $\omega_{pe} = (n_{e0}e^2/\epsilon_0 m_e)^{1/2}$; Los microgrupos son más cortos que Δt . Resultados demostraron que la frecuencia de modulación observada después de que el plasma es igual a la frecuencia de electrones del plasma deducida de la densidad de vapor de rubidio (Rb) ionizado individualmente, y que el proceso de automodulación crece tanto a lo largo del gru-

po como del plasma, todo como se esperaba de la teoría. Una posible solución que se ideó para el caso de un pulso largo de láser automodulador en un plasma es un gradiente de densidad de plasma para manipular la velocidad de fase de los campos de estela efectivos. Se han propuesto gradientes de densidad de plasma para superar las limitaciones de desfase en la ganancia de energía en los aceleradores de estela láser. Se puede esperar que un gradiente de densidad de plasma también afecte el proceso de automodulación de un grupo de partículas, lo que quizás conduzca a campos de estela de mayor amplitud después de la saturación. Se ha demostrado que el tren resuelto en el tiempo de microgrupos resultantes del proceso de automodulación se convierte en más largo o más corto y que la carga relativa por microgrupo que sale del plasma aumenta o disminuye a medida que el gradiente se hace más positivo o negativo, en la práctica con una densidad mayor o menor a la salida del plasma que a su entrada. Los cambios en la carga y la frecuencia de modulación son consistentes con el cambio en la velocidad de fase de los campos de estela, la carga más grande o más pequeña medida con un gradiente positivo o negativo es consistente con la velocidad de fase de los campos de estela, siendo más lento que el de los protones, o negativo en el marco de referencia de los protones en un plasma de densidad constante.

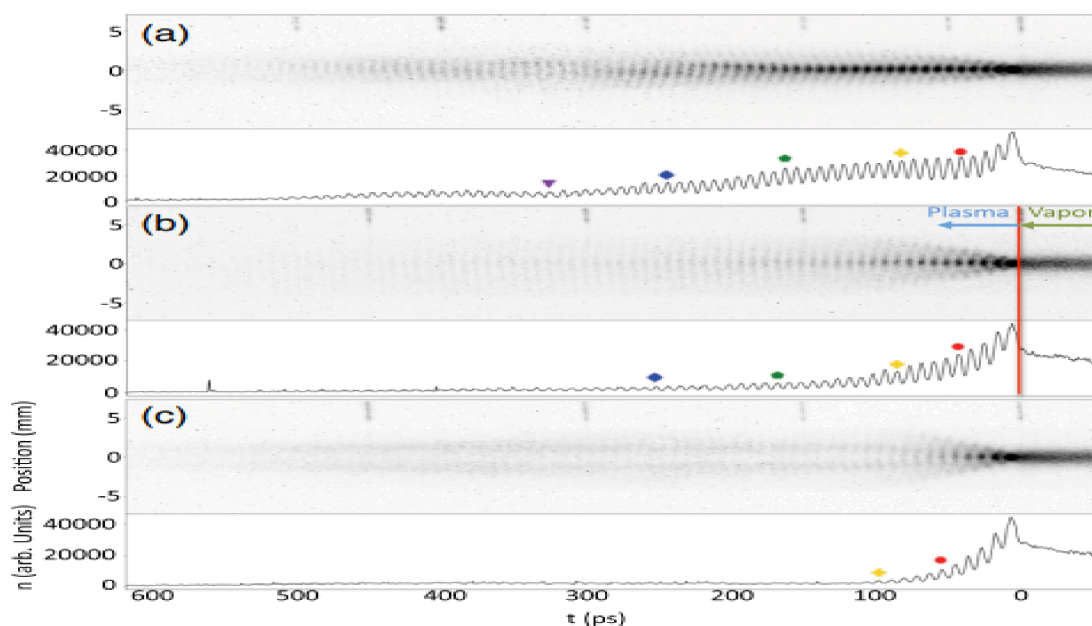


Figura 9: Imágenes de la distribución de densidad transversal del grupo de protones (escala lineal) en función del tiempo para tres valores de gradiente de densidad de plasma a),b),c)[23].

4 Planteamiento del problema.

La inestabilidad modulacional que surge en un modelo que contiene la ecuación no autónoma no lineal de Schrödinger con término de auto-dispersión de Raman que se describe usando un potencial $Q(Z,T)$ que satisface a la segunda ecuación del siguiente sistema de ecuaciones:

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{D_2(Z)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + R(Z) \left\{ (1 - \beta) |q|^2 + \beta Q \right\} q = 0, \quad (4.1)$$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Q(Z, T)}{\partial T^2} + 2\gamma\mu \frac{\partial Q(Z, T)}{\partial T} + Q(Z, T) = |q(Z, T)|^2. \quad (4.2)$$

en donde $D_2(Z)$ es el coeficiente de dispersión y $R(Z)$ corresponde a la no linealidad variando sobre la distancia Z .

Este sistema no es completamente integrable por el método de dispersión inversa[13] por lo que se estudia con métodos numéricos[27]. Si una pequeña modulación se aplica a una onda continua de entrada, entonces la inestabilidad modulacional inducida se podrá desarrollar, descrita por la ecuación (4.1).

La ecuación (4.1) es una generalización de la ecuación no lineal de Schrödinger estándar que aparece en óptica no lineal para tener en cuenta los efectos de propagación de pulsos ultra-cortos con un espectro muy amplio de frecuencias[26].

Se usara un modelo estándar de auto-dispersión de Raman que siguen de la ecuación (4.2):

$$T_{Ram} \frac{\partial Q(Z, T)}{\partial T} + Q(Z, T) = |q(Z, T)|^2 \quad (4.3)$$

donde $T_{Ram} = 2\gamma\mu$ es el tiempo de relajación de la no linealidad de Raman, también conocido como tiempo de respuesta de Raman[27], que se acepta como un parámetro pequeño, $T_{Ram} \ll 1$.

Esto significa que el término de no linealidad corregido por el efecto de Raman es

una corrección de no linealidad del sistema y puede ser descrita como una perturbación.

Se analizarán las condiciones necesarias para el surgimiento de la inestabilidad modulacional en el sistema descrito por las ecuaciones (4.1, 4.2) con la ecuación no autónoma no lineal de Schrödinger con el coeficiente de dispersión y el valor de no linealidad dependiente de una distancia Z y con término que describe el efecto de auto-dispersión de Raman.

Se obtendrá la relación de dispersión a lo largo de la distancia Z y del dominio espectral Ω , estableciendo los criterios y así encontrando las regiones de variación del parámetro del modelo que corresponden a la presencia del fenómeno de inestabilidad modulacional inducida en el sistema (4.1, 4.2), de acuerdo a las propiedades de dispersión variable, se estudiará y demostrara usando un software grafico las regiones de inestabilidad modulacional inducida dependiendo de la dispersión variable a lo largo de la distancia Z .

Hipótesis

En el primer orden de la teoría de perturbación se puede encontrar la relación de dispersión (RD) entre el número de onda y frecuencia del pulso. El análisis de RD muestra que dependiente de los parámetros del modelo, el número de ondas $K(\Omega)$ va a tener el valor real o imaginario. Las regiones de los parámetros donde el número de ondas $K(\Omega)$ se resulta imaginario corresponde a las condiciones de la inestabilidad modulacional. Estas regiones espectrales dependen de la dispersión variable y otros parámetros del modelo y es importante establecerlos dependiendo de la dispersión variable a lo largo de la distancia Z .

Justificación

Los pulsos ópticos solitónicos son objetos cuasi-ideales para llevar la información gracias a su estabilidad y conservación de forma. Sin embargo, en muchos procesos físicos ocurren perturbaciones externas que modifican su comportamiento. Por lo tanto, es importante estudiar los efectos que producen

estas influencias en contextos de procesos físicos no lineales modelados por la ecuación no lineal generalizada de Schrödinger. Está conocido que la influencia del efecto de Raman es considerable para los pulsos ultra-cortos de unos femtosegundos [26]. Por eso, el estudio de los criterios de la inestabilidad modulacional, especialmente para el caso de funciones de dispersión exponencialmente decrecientes, es importante al estudiar dinámica del efecto de IM en plasma, fibras ópticas, láseres de solitones, etc.

5 Marco teorico.

5.1 Ecuación no lineal de Schrödinger y la inestabilidad modulacional.

La ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE), en una de sus formas más generales[29]:

$$i\psi_t = -\Delta\psi + V(x,t)\psi + g(x,t)|\psi|^{2\sigma}\psi, \quad (5.1)$$
$$x \in \mathbb{R}^d, \sigma \in \mathbb{R}$$

es una de las ecuaciones más importantes de la física matemática. La ecuación (5.1) aparece en la modelización de muchos fenómenos físicos con aplicaciones a diferentes campos.

El estudio de este tipo de ecuaciones ha servido como catalizador en el desarrollo de nuevas ideas e incluso de conceptos matemáticos tales como solitones (Zakharov et al., 1975) o singularidades en ecuaciones en derivadas parciales (Sulem & Sulem, 1999).

Cuando $V \equiv 0$ y $g = \text{constante}$, se obtiene la “clásica” ecuación de Schrödinger no lineal homogénea.

$$i\psi_t = -\Delta\psi + A|\psi|^{2\sigma}\psi \quad (5.2)$$

Si esta ecuación posee coeficientes variables se convertirá en una ecuación no autónoma llamada ecuación no autónoma no lineal de Schrödinger

$$i\psi_t = -B(t)\Delta\psi + A(t)|\psi|^{2\sigma}\psi \quad (5.3)$$

Zakharov demostró que ecuaciones

$$y = \eta(x, t) \quad (5.4)$$

$$g\eta + [q_t]_{y=\eta} + \frac{1}{2}[q_x^2 + q_y^2]_{y=\eta} = 0 \quad (5.5)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $y = 0$ corresponde a una superficie no perturbada para ondas débiles no lineales pueden ser reducidas a una ecuación no lineal de Schrödinger para la onda envolvente [30], mediante la aplicación de un tratado Hamiltonico de estas ecuaciones esto mediante una reducción de la forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \phi}, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial \eta} \quad (5.7)$$

donde E es el Hamiltoniano y el cual es el mismo que la energía para este caso. Estas ecuaciones conducen a ecuaciones dinámicas que son expresadas en términos de las componentes de Fourier $a(k)$ las cuales pueden ser consideradas como variables canónicas complejas

$$\eta(k) = \sqrt{\frac{|k|}{2\omega(k)}} [a(k) + a^*(-k)] \quad (5.8)$$

$$q_s(k) = -i\sqrt{\frac{\omega(k)}{2|k|}} [a(k) - a^*(-k)] \quad (5.9)$$

Por lo que la ecuación de Hamilton resultante es

$$\frac{\partial a(k)}{\partial t} = -i\frac{\delta E}{\delta a^*(k)} \quad (5.10)$$

la energía E es entonces representada en serie de potencias de $a(k)$ y $a^*(-k)$ hasta el término cuadrado, y la cual es integrada sobre todo el rango de vectores de onda. Para ondas débiles no-lineales, las amplitudes complejas pueden ser repre-

sentadas en la forma de $a(k) = A(k, t)\exp(-i\omega(k)t)$, donde A es una función que varía lentamente. Para un paquete de ondas con un espectro estrecho se deduce una ecuación no lineal de Schrödinger de la forma

$$\frac{\partial q_s}{\partial t} - \frac{i\lambda}{2} \frac{\partial^2 q_s}{\partial \xi^2} = -w |q_s|^2 q_s \quad (5.11)$$

$$\text{donde } \xi = x - v_{gr}t, \quad v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} \text{ y } \lambda = \frac{d^2\omega}{dk^2}.$$

La ecuación (5.11) tiene una solución en forma de onda armónica con amplitud constante y cuya velocidad de fase depende de esta amplitud.

Históricamente, la inestabilidad modulacional y su relación con la ecuación no lineal de Schrödinger fue dada de esta manera, esta ecuación también puede ser obtenida mediante el estudio de diferentes fenómenos físicos.

5.2 Autoenfoco de haces ópticos[31].

El índice de refracción no lineal es responsable de muchos efectos en la propagación de un haz óptico, incluido el autoenfoco.

Los efectos de auto-acción óptica ocurren cuando un campo electromagnético induce un cambio en el índice de refracción en el medio a través del cual se propaga el campo. El cambio en el índice luego exhibe una acción inversa en el campo para influir en sus características de propagación.

Dos años después de que se propuso el autoenfoco en plasmas en 1962, se desarrolló la teoría del auto-atrapamiento. Se dio una solución numérica para un haz de dos dimensiones transversales, se calculó la potencia crítica, se discutieron mecanismos para la no linealidad y el efecto se utilizó para explicar la ganancia anómala de Raman y el daño óptico. Se estimó que la distancia de autoenfoco, deriva la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) y se usa esta ecuación para obtener resultados numéricos sobre el autoenfoco. En 1966, se presentó la teoría de

la inestabilidad no lineal y se observó el efecto experimentalmente.

5.2.1 Polarización no lineal e índice de refracción no lineal

Los efectos de acción propia surgen de la polarización no lineal de tercer orden. Los movimientos moleculares lentos pueden contribuir a la respuesta no lineal porque la polarización no lineal incluye términos para los cuales la parte del cuadrado de la amplitud del campo que varía lentamente impulsa el sistema material. Esto puede conducir a no linealidades muy fuertes.

En la mayoría de los casos, el índice de refracción aumenta al aumentar la intensidad de la luz. Un ejemplo muy simple ocurre para conjuntos de moléculas anisotrópicas. Dado que las moléculas tienen la energía más baja cuando están alineadas en la(s) dirección(es) de mayor polarizabilidad, experimentan un torqué del cual aumenta la alineación fraccional y el índice de refracción. Densidad creciente de un fluido inicialmente uniforme en la región del haz (electrostricción) o moléculas en movimiento de mayor polarizabilidad que un fluido que circundan un haz también reduce la energía y da como resultado un índice de refracción no lineal positivo.

Despreciando la dispersión, la polarización se puede escribir como:

$$P = \varepsilon_0 \chi E \quad (5.12)$$

donde E es el campo eléctrico y χ es la susceptibilidad eléctrica, incluidos los términos no lineales. Para simplificar, asumimos los diversos componentes de frecuencia y el vector de onda del campo están todos polarizados en la misma dirección. Siendo la susceptibilidad eléctrica:

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(3)} \langle E^2 \rangle \quad (5.13)$$

donde $\langle E^2 \rangle$ es el promedio de E^2 durante algunos ciclos ópticos. Se asume que no hay contribuciones a la polarización en potencias pares del campo y se ha despreciado cualquier contribución por potencias impares más allá del término de tercer

orden. Se puede reemplazar $\chi^{(1)}$ y $\chi^{(3)}$ por el índice de refracción lineal y no lineal, n_0 y n_2 , donde

$$n = n_0 + 2n_2 \langle E^2 \rangle \quad (5.14)$$

El índice de refracción lineal está dado por:

$$n_0 = \sqrt{1 + \chi^{(1)}} \quad (5.15)$$

el índice de refracción no lineal viene dado por:

$$n_2 = \frac{\chi^{(3)}}{4n_0} \quad (5.16)$$

suponiendo que el término no lineal es mucho más pequeño que el término lineal. Se puede escribir la polarización como:

$$P = P^L + P^{NL} \quad (5.17)$$

donde P^L es la polarización lineal y P^{NL} es la polarización no lineal

$$P^L = \varepsilon_0(n_0^2 - 1)E \quad (5.18)$$

$$P^{NL} = 4\varepsilon_0 n_0 n_2 \langle E^2 \rangle E. \quad (5.19)$$

La ecuación (5.19) nos dice la polarización inducida a tercera potencia en el campo eléctrico. Se han omitido términos de polarización que ocurren en la suma de tres frecuencias ópticas y se han mantenido términos que están cerca de al menos una de las frecuencias impulsoras. Esta omisión del tercero de los términos armónicos se puede justificar suponiendo que son pequeños o que no coinciden en fase. Sin embargo, no se asume que las contribuciones debidas a las resonancias materiales en la suma de dos frecuencias impulsoras sean insignificantes; estos términos

contribuyen a n_2 .

5.2.2 La ecuación no lineal de Schrödinger y el autoenfocamiento.

Sea una aproximación a la ecuación de onda escalar no lineal que tiene la forma familiar de una ecuación de Schrödinger, asumiendo una sola frecuencia y usando la aproximación de amplitud que varía lentamente. Teniendo el campo en términos de sus componentes de frecuencia positiva y negativa

$$E = \frac{1}{2}(E^+ + E^-) \quad (5.20)$$

donde $E^- = E^+$. La componente de frecuencia positiva viene dada por

$$E^+(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega t)} \quad (5.21)$$

donde $k = \omega n_0(\omega)/c$ y suponiendo que la onda viaja en la dirección $+z$. En la aproximación de amplitud que varía lentamente, se supone que $|\partial^2 \mathcal{E} / \partial z^2| \ll k |\partial \mathcal{E} / \partial z|$. Esto conduce a la aproximación de la ecuación de onda

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{2k} \nabla_{\perp}^2 \mathcal{E} + k \frac{n_2}{n_0} |\mathcal{E}|^2 \mathcal{E} = 0. \quad (5.22)$$

5.2.3 Mezcla de cuatro ondas, retardo de ondas débiles e inestabilidad.

Desde el punto de vista de un componente de Fourier, la interacción no lineal implica el acoplamiento de tres componentes de campo para producir una polarización no lineal que impulsa un cuarto componente de campo. El proceso básico se puede describir como una mezcla de cuatro ondas de dispersión de luz por luz.

Al separar el campo en partes débiles y fuertes, esto permite linealizar el problema en el campo débil. Cuando un haz óptico fuerte de un láser ingresa inicialmente al medio no lineal y se supone que el campo débil es mucho más pequeño que el campo fuerte. De hecho, el campo débil inicial puede ser el campo de punto cero, de modo que la onda débil se inicie por emisión espontánea.

Se puede escribir la función

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_w \quad (5.23)$$

donde s representa la parte fuerte y w representa la parte débil del campo. Despreciando los términos en el campo débil más allá del término lineal, tenemos la polarización no lineal en el campo fuerte.

$$\mathcal{P}_s^{\text{NL}} = 2\varepsilon_0 n_0 n_2 |\mathcal{E}_s|^2 \mathcal{E}_s \quad (5.24)$$

y para la polarización no lineal de campo débil

$$\mathcal{P}_w^{\text{NL}} = 2\varepsilon_0 n_0 n_2 \left(2 |\mathcal{E}_s|^2 \mathcal{E}_w + \mathcal{E}_s^2 \mathcal{E}_w^* \right) \quad (5.25)$$

Este resultado tiene dos aspectos interesantes. Primero, la onda débil experimenta el doble de cambio de polarización no lineal e índice de refracción (el primer término en la ecuación de la polarización no lineal de campo débil) como el campo fuerte induce sobre sí mismo. El retardo de onda débil puede compensar la ruptura de la coincidencia de fase por difracción. En segundo lugar, las partes positiva y negativa del campo débil están acopladas entre sí (el segundo término de la ecuación de la polarización no lineal de campo débil).

Debido al acoplamiento cruzado, se produce la conjugación de fase y la frecuencia acoplada y las bandas laterales del vector de propagación crecen en el campo fuerte.

Para calcular la ganancia de inestabilidad, se asume una onda plana fuerte junto

con dos componentes débiles que viajan casi paralelamente a la onda fuerte.

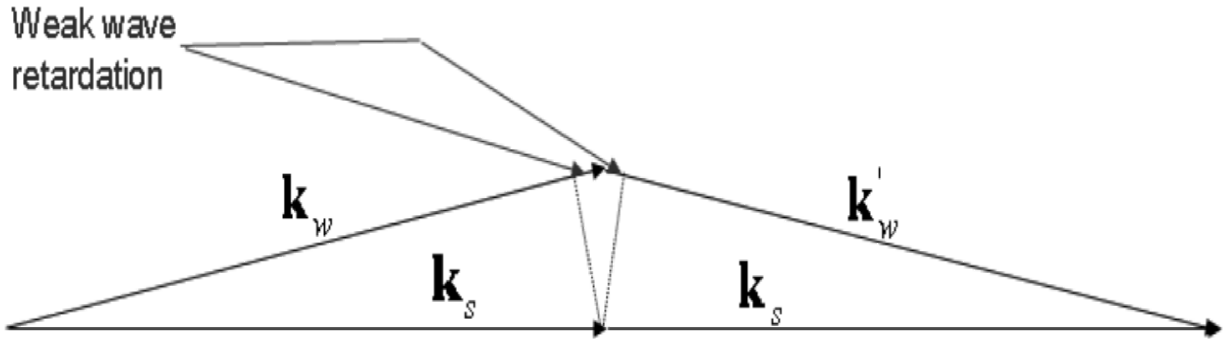


Figura 10: Dispersión luz por luz. Onda frontal fuerte (k_s) interactuando con dos ondas débiles (k_w, k'_w) cuyas magnitudes aumentan por el retardo de onda débil[31].

De la ecuación (5.22) se encuentra que las constantes de crecimiento y decaimiento exponencial para la potencia de onda débil son

$$g = \pm k_{\perp} \left(\frac{4n_2}{n_0} |\mathcal{E}_s|^2 - \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \right)^{1/2} \quad (5.26)$$

donde k_{\perp} es la componente de la onda dispersa que es perpendicular a la onda fuerte. Como $k_{\perp} \ll k$, para todos los casos de interés, k_{\perp} puede ser reemplazado por k_{θ} donde θ es el ángulo entre la onda fuerte y las ondas débiles. Al tener en cuenta que el valor máximo de g es $g_{\max} = 2kn_2|\mathcal{E}_s|^2/n_0$ y el ángulo en que esto ocurre es $\theta_{\text{opt}} = 2(2)^{1/2}n_2|\mathcal{E}_s|^2/n_0$.

Debido al acoplamiento cruzado, las componentes normales de Fourier de las ondas dispersas crecen (o decaen) en pares, una en θ y la otra en $-\theta$. La ganancia de inestabilidad está relacionada con la distancia de autoenfoco del haz.

5.2.4 Automodulación de fase espacial y estimación de la distancia de autoenfoco del haz.

Considerando el efecto en un haz de la polarización no lineal, si se desprecia la di-

fracción en la ecuación de onda (5.22) la solución para la acumulación de fase no lineal a partir de un límite de entrada en $z = 0$ es

$$\Phi_{\text{NL}}(\mathbf{r}, z) = kz \frac{n_2}{n_0} |\mathcal{E}(\mathbf{r}, 0)|^2 \quad (5.27)$$

donde \mathbf{r} es el vector de coordenadas transversal a z . Al definir la distancia no lineal, estableciendo la desviación de fase a través del haz $\Delta\Phi_{\text{NL}} = 1$, así que

$$z_{\text{NL}} = \frac{n_0}{kn_2 |\mathcal{E}(0, 0)|^2} = \frac{2}{g_{\text{max}}} \quad (5.28)$$

De la ecuación de onda se ve que también hay una distancia característica para la difracción. Siendo tomado esto como

$$z_{\text{DIF}} = kr_0^2 \quad (5.29)$$

donde r_0 es una distancia característica del radio del haz y z_{DIF} es el rango de Rayleigh o la longitud de Fresnel del haz.

La componente transversal del vector de onda en un punto transversal \mathbf{r} en un haz es

$$\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{r}, z) = \nabla_{\perp} \Phi_{\text{NL}}(\mathbf{r}, z) = kz \frac{n_2}{n_0} \nabla_{\perp} |\mathcal{E}(\mathbf{r}, 0)|^2 \quad (5.30)$$

Para un haz que es simétrico circular, el ángulo que forma el vector de onda con el eje z para ángulos pequeños es

$$\theta(r, z) = z \frac{n_2}{n_0} \frac{\partial |\mathcal{E}(r, 0)|^2}{\partial r} \quad (5.31)$$

este resultado es independiente de la longitud de onda. Suponiendo que el haz es más intenso en el centro, θ es negativo y el haz se enfocará cuando se incluya el término de difracción. Se puede encontrar una estimación de la distancia de enfoque al ajustar $\theta(r, z) = \mathbf{r}/z$, el ángulo con el que un rayo que comienza en \mathbf{r} alcanzará el eje del haz en z cuando $z_{\text{DIF}} \gg z_{\text{NL}}$ esto da una distancia de autoenfoco

$$z_{\text{SF}} = \sqrt{\frac{-n_0 r}{n_2 \partial |\mathcal{E}|^2 / \partial r}} \Big|_{r \rightarrow 0} \quad (5.32)$$

Suponiendo un haz gaussiano con r_0 igual a la intensidad $1/e$ de ancho medio y usando las ecuaciones de z_{DIF} y z_{NL} se puede encontrar

$$z_{\text{SF}} = \sqrt{\frac{z_{\text{NL}} z_{\text{DIF}}}{2}}. \quad (5.33)$$

5.2.5 Singularidad de intensidad de autoenfoco y colapso del haz.

Si un haz tiene simetría circular, se enfocará de forma no lineal sin límite a una singularidad de intensidad. Por otro lado, los haces que están confinadas en una sola dimensión transversal no se enfocarán a una singularidad. Esta diferencia entre el enfoque de una y dos dimensiones es fácil de entender mediante argumentos simples. De la NLSE, se observa que en ambos casos el término de difracción escala como el inverso del ancho del haz al cuadrado. En el caso de confinamiento transversal bidimensional, el término no lineal también se escala como el recíproco del ancho del haz al cuadrado, ya que este término es proporcional a la intensidad y la potencia se conserva. Debido a que la escala de los dos términos es la misma, el término dominante seguirá siendo dominante y, en esta situación, el haz llegará a un foco catastrófico cuando domine el término no lineal.

Para conexión en una dimensión transversal, el término no lineal escala como el inverso del ancho del haz porque se conserva la potencia por unidad de distancia en la dirección no conectada. Dado que el término no lineal es solo proporcional a la inversa de la primera potencia del ancho del haz, el término no lineal crecerá más lentamente con la disminución del radio que el término de difracción. El término de difracción entra en equilibrio con el término de enfoque y hay autoenfoco sin una singularidad de intensidad.

Aunque hay varias formas de analizar el problema, es usual resolver numérica-

mente la NLSE para la simetría cilíndrica usando un método de diferencia finita. El método se puede utilizar para acercarse a la singularidad inicial de una manera muy eficiente desde el punto de vista computacional. Con el método de paso dividido también se evita la aproximación paraxial usando la ecuación de Helmholtz no lineal para calcular directamente la contribución del término de difracción transversal al factor de fase axial en el espacio de Fourier.

Además de la singularidad de la intensidad, es posible demostrar que los haces que experimentan colapso de autoenfoco en la aproximación de la NLSE. El colapso ocurre cuando todo el haz se encoge hasta un punto. En el caso de simetría cilíndrica, la ecuación para el radio promedio del haz es:

$$\frac{d\langle r^2 \rangle}{dz^2} = 2 \frac{\int \left(\frac{1}{k^2} |\nabla_{\perp} \mathcal{E}|^2 - \frac{2n_2}{n_0} |\mathcal{E}|^4 \right) r dr \Big|_{z=0}}{\int |\mathcal{E}|^2 r dr \Big|_{z=0}} \quad (5.34)$$

donde el numerador es el término hamiltoniano y el denominador es la no normalizada densidad de probabilidad. Al realizar las integraciones para un haz inicialmente gaussiano se encuentra

$$\langle r(z)^2 \rangle = r_0^2 + \left(\frac{1}{k^2 r_0^2} - \frac{n_2 |\mathcal{E}(0,0)|^2}{2n_0} \right) z^2 \quad (5.35)$$

Cuando $n_2 |\mathcal{E}(0,0)|^2 / 2n_0 > 1/k^2 r_0^2$ el haz colapsará. A partir de esta ecuación, se puede obtener la distancia de colapso

$$z_{\text{COL}} = \sqrt{\frac{2 z_{\text{NL}} z_{\text{DIF}}}{1 - \frac{2 z_{\text{NL}}}{z_{\text{DIF}}}}} \quad (5.36)$$

Cuando $z_{\text{DIF}} \gg z_{\text{NL}}$ se encuentra que $z_{\text{COL}} = (2 z_{\text{NL}} z_{\text{DIF}})^{1/2}$, un factor de 2 veces mayor que la distancia de autoenfoco dada en la ecuación anterior de z_{COL} .

5.3 Inestabilidad modulacional en plasma básico[16].

Las modulaciones débiles de onda larga de un tren de ondas no lineal periódico pueden crecer exponencialmente bajo ciertas condiciones. La IM es una inestabili-

dad omnipresente en la naturaleza y no se limita a la hidrodinámica. También ocurre en física de plasma, electrodinámica y óptica no lineal. IM es relevante porque es un mecanismo para generar flujos zonales (FZ) en plasmas confinados magnéticamente, en atmósferas y océanos. El sistema de turbulencia de deriva de plasma es casi bidimensional y anisotrópico, exhibe cascadas directas e inversas, contiene una mezcla de dinámicas de ondas y vórtices y tiende a formar flujos zonales de gran escala de forma espontánea. En consecuencia, las propiedades lineales y no lineales básicas de este sistema se pueden modelar mediante la ecuación diferencial parcial no lineal, la ecuación de Charney Hasegawa-Mima (CHM). La ecuación CHM es el modelo no lineal útil más simple, describiendo tanto las ondas de Rossby en la atmósfera como las ondas de deriva en un plasma confinado magnéticamente. A pesar de su simplicidad, exhibe un comportamiento notable, y la ecuación CHM concibió muchas ideas conceptuales sobre las interacciones entre la turbulencia y los FZs. Estas ideas brindan una comprensión cualitativa de la dinámica en los dispositivos de fusión, en particular la transición de confinamiento de bajo a alto (LH por sus siglas en inglés). En plasmas, el modelo de siguiente nivel es el modelo de Extended Hasegawa-Mima (EHM) que mejora la descripción de la respuesta electrónica, seguida por el modelo Hasegawa Wakatani (HW) que incorpora la inestabilidad disipativa por deriva.

5.3.1 MODELOS NO LINEALES BÁSICOS

Modelo Charney-Hasegawa-Mima

La ecuación de Hasegawa Mima es la descripción de fluido único más simple de un plasma fuertemente magnetizado y se deriva de los primeros principios, comenzando con la continuidad de los iones y permitiendo un acoplamiento entre los potenciales promedio de superficie de flujo y las fluctuaciones de densidad. Se supone que las densidades de iones y electrones tienen una distribución de Boltzmann y son adiabáticas debido a una variación lenta de la potencial en la dirección paralela. Entonces la ecuación CHM tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - F\psi) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} = 0 \quad (5.37)$$

donde dentro del contexto del plasma $\Psi = \Psi(x,y,t)$ es el potencial electrostático, $F = 1/\rho^2$ con ρ siendo el radio de Larmor del ion a la temperatura del electrón y β es una constante proporcional al gradiente medio de densidad plasmática. En los plasmas de fusión, ρ suele ser una cantidad a pequeña escala.

Se considera por simplicidad un sistema en una caja doblemente periódica de tamaño L y al tomar la transformada espacial de Fourier de la función de corriente, $\hat{\psi}_{\mathbf{k}} = \int \psi(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} d\mathbf{x}$. Ya que Ψ_x es real, $\psi_{-\mathbf{k}} = \bar{\psi}_{\mathbf{k}}$, donde la barra superior denota el complejo conjugado.

En el espacio de Fourier la ecuación CHM es

$$\partial_t \hat{\psi}_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \hat{\psi}_{\mathbf{k}_1} \hat{\psi}_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \quad (5.38)$$

Donde

$$\omega_{\mathbf{k}} = -\frac{\beta k_x}{k^2 + F} \quad (5.39)$$

es la relación de dispersión anisotrópica para las soluciones de onda lineal, $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (2\pi m/L, 2\pi n/L)$ es el vector de onda ($m, n \in \mathbb{Z}^2$), $k = |\mathbf{k}|$ y

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2)_z (k_2^2 - k_1^2)}{k^2 + F} \quad (5.40)$$

es el coeficiente de interacción no lineal que se anula para una onda monocromática. Por lo tanto, las ondas de Rossby monocromáticas y las ondas de deriva son soluciones exactas de la ecuación CHM no lineal completa.

Modelo extendido de Hasegawa-Mima

En el contexto del plasma, los modos con $k_x = 0$ deben ser especiales porque para estos modos falla la relación entre el potencial del plasma y las fluctuaciones de

densidad (la llamada respuesta de Boltzmann). Por tal hecho, de estos modos la densidad y los campos potenciales se desacoplan. Este efecto se tiene en cuenta en la ecuación extendida (o modificada) de Hasegawa-Mima (EHM) en la que se elimina el acoplamiento entre los potenciales promediados de la superficie de flujo y las fluctuaciones de densidad. La ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - F(\psi - \delta_{s,1}\bar{\psi})) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} = 0 \quad (5.41)$$

donde la notación \bar{f} denota el promedio zonal de una función, f ,

$$\bar{f}(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y, t) dx \quad (5.42)$$

y $\delta_{x,y}$ es una delta de Kronecker al incluir un parámetro de cambio s , al tomar $s = 1$ da la ecuación EHM y si $s = 0$ da la ecuación CHM. En el espacio de Fourier la ecuación EHM tiene la misma forma que la que toma la ecuación CHM en dicho espacio, pero el coeficiente de interacción se modifica

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2)_z [\rho^2(k_2^2 - k_1^2) + \delta_{s,1}(\delta_{\mathbf{k}_{2x},0} - \delta_{\mathbf{k}_{1x},0})]}{(1 + \rho^2 k^2 - \delta_{\mathbf{k}_x,0}\delta_{s,1})} \quad (5.43)$$

La “extensión” del modelo (términos que involucran δ) actúan solo sobre modos con componente $k_x = 0$. Esto aumenta el acoplamiento a los modos zonales y mejora el crecimiento de los flujos zonales en el modelo EHM en relación con el modelo CHM. Donde se observa que la diferencia entre CHM y EHM desaparece cuando $\rho \rightarrow \infty$.

Modelos CHM y EHM de disipación forzada

Ni el modelo CHM ni EHM pueden generar ondas espontáneamente, esta deficiencia se soluciona en el modelo de campo más complejo, conocido como el modelo Hasegawa Wakatani en plasma. Este modelo contiene forzamiento por mecanismo primario de inestabilidad disipativa por deriva. Sin embargo, se podría tratar de imitar tales inestabilidades simplemente agregando a los modelos CHM o EHM de un

campo términos lineales adicionales que producen la misma distribución de espacio k de las tasas de disipación y crecimiento lineal que las predichas por los modelos de dos campos. Esto se hace modificando la relación de dispersión en los respectivos modelos CHM y EHM, es decir, tomando la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi - F\psi) + \beta \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} = 0 \quad (5.44)$$

con ω_k como:

$$\omega_k = \frac{-\beta k_x}{1 + \rho^2 k^2} + i\lambda_k \quad (5.45)$$

En relación con el modelo no forzado, la parte imaginaria adicional produce inestabilidad de tipo forzada ($\lambda_k > 0$) y disipación ($\lambda_k < 0$).

Modelo Hasegawa-Wakatani y su versión extendida

El modelo Hasegawa Wakatani (HW) es más realista físicamente que el CHM, ya que espontáneamente genera ondas al nivel de la dinámica lineal a través de una inestabilidad intrínseca. Esto es porque relaja la relación adiabática entre la densidad y el potencial y, en cambio, supone que la respuesta de la densidad está acoplada al potencial a través de la dinámica del electrón en la dirección paralela al campo magnético. Por lo tanto, la inestabilidad puede surgir por la conversión de energía potencial almacenada en gradientes de densidad en energía cinética almacenada en fluctuaciones del potencial eléctrico. El modelo HW es un par de ecuaciones acopladas para la densidad, $n(x,y,t)$ y el potencial $\psi(x,y,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x} = \alpha (\psi - n) \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \kappa \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial n}{\partial x} = \alpha (\psi - n) \quad (5.47)$$

Donde α es un parámetro de acoplamiento y κ es el gradiente de densidad medio. En el espacio de Fourier, los modelos HW original y extendido se pueden escribir:

$$\partial_t \hat{\psi}_{\mathbf{k}} = -\frac{\alpha z}{k^2} (\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{n}_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \hat{\psi}_{\mathbf{k}_1} \hat{\psi}_{\mathbf{k}_2} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} & \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \\ \partial_t \hat{n}_{\mathbf{k}} = & -i\kappa k_y \hat{\psi}_{\mathbf{k}} + z\alpha (\hat{\psi}_{\mathbf{k}} - \hat{n}_{\mathbf{k}}) - \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} R(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \\ & \times \hat{n}_{\mathbf{k}_1} \hat{\psi}_{\mathbf{k}_2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde $z = 1 - \delta_{s,1} \delta_{\kappa y,0}$ y s es el parámetro de conmutación como antes si $s=0$ da el caso HW y $s=1$ da el caso EHW. Los coeficientes de interacción son:

$$R(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2)_z, \quad (5.50)$$

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2)_z (k_2^2 - k_1^2)}{k^2} \quad (5.51)$$

En el límite, cuando $\alpha \gg 1$ el sistema HW/EHW tiende al conocido sistema CHM/EHM, mientras que en el límite $\alpha \ll 1$ se convierte en la ecuación de Euler de 2D para la función de corriente ψ y la ecuación de advección pasiva para n . Se debe tener en cuenta que para HW/EHW se ha intercambiado los ejes x e y con respecto a las notaciones de CHM/EHM. Esto se debe a que HW/EHW son modelos puramente de plasma y es para que coincida con las convenciones de la literatura sobre plasma.

5.3.2 INESTABILIDAD MODULACIONAL EN CHM Y EHM

Dado que la ecuación (5.38) admite una solución exacta en forma de onda monocromática con una amplitud arbitraria, es natural el preguntarse cuán estables son estas ondas con pequeñas perturbaciones.

Truncamiento de cuatro modos

Al seguir la configuración tradicional del problema IM, una onda primaria meridional, \mathbf{p} , una pequeña perturbación o modulación zonal, \mathbf{q} y las dos bandas laterales acopladas $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \mathbf{q}$ son los cuatro modos excitados que se utilizan para el análisis.

Sin embargo, se ha demostrado que para una no linealidad pequeña, solo se requieren tres modos para describir el crecimiento de IM, pero el uso de cuatro modos es más sólido para todos los niveles de no linealidad.

Así, al truncar el sistema (5.48, 5.49) permitiendo que los vectores de onda k , k_1 y k_2 tomen sólo los valores \mathbf{p} , \mathbf{q} , $\mathbf{p}_\pm = \mathbf{p} \pm \mathbf{q}$ y sus negativos (teniendo en cuenta que $\psi_{-k} = \psi_k$). Es conveniente introducir variables de representación de interacción $\Psi_k(t) = \psi_k(t)e^{i\omega_k t}$. Entonces, en lugar de la Ecuación diferencial se tiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi_{\mathbf{p}} &= T(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{p}_-) \Psi_{\mathbf{q}} \Psi_{\mathbf{p}_-} e^{i \Delta_- t} \\ &+ T(\mathbf{p}, -\mathbf{q}, \mathbf{p}_+) \bar{\Psi}_{\mathbf{q}} \Psi_{\mathbf{p}_+} e^{i \Delta_+ t} \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi_{\mathbf{q}} &= T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}_-) \Psi_{\mathbf{p}} \bar{\Psi}_{\mathbf{p}_-} e^{-i \Delta_- t} \\ &+ T(\mathbf{q}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_+) \bar{\Psi}_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}_+} e^{i \Delta_+ t} \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\partial_t \Psi_{\mathbf{p}_-} = T(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}, -\mathbf{q}) \Psi_{\mathbf{p}} \bar{\Psi}_{\mathbf{q}} e^{-i \Delta_- t} \quad (5.54)$$

$$\partial_t \Psi_{\mathbf{p}_+} = T(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \Psi_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{q}} e^{-i \Delta_+ t} . \quad (5.55)$$

donde $\Delta_\pm = \omega_{\mathbf{p} \pm \mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p} \pm}$. Este sistema se llamará como el truncamiento de cuatro modos (4MT) de los modelos CHM/EHM.

Estrictamente hablando, los cuatro modos elegidos ($\Psi_{\mathbf{p}}$, $\Psi_{\mathbf{q}}$, $\Psi_{\mathbf{p}_+}$, $\Psi_{\mathbf{p}_-}$) están acoplados a otros modos y no forman un sistema cerrado. De hecho, el problema lineal solo se cierra estrictamente con la inclusión de todos los $\pm \mathbf{q} + m\mathbf{p}$ donde m es un número entero. Sin embargo, al considerar la inestabilidad lineal, es tradicional truncar el sistema a los cuatro modos solamente con la justificación de que los $\pm \mathbf{q} + m\mathbf{p}$ de orden superior están menos excitados en los vectores propios lineales, lo que resulta ser una muy buena aproximación para ondas primarias débiles y bastante razonable para las fuertes (Gill 1974).

Dinámica lineal de modulaciones

Al linealizar la ecuación (5.38) sobre la solución de onda primaria pura. Al introducir la notación vectorial $\Psi = (\Psi_{\mathbf{p}}, \Psi_{\mathbf{q}}, \Psi_{\mathbf{p}_+}, \Psi_{\mathbf{p}_-})$, una onda primaria monocromática

viene dada por $\Psi_0 = (\Psi_0, 0, 0, 0)$ donde Ψ_0 es una constante compleja que representa la amplitud inicial de la onda primaria, es decir, $\Psi_0 = \Psi_p|_{t=0}$ y es una solución exacta de la ecuación diferencial. La idea es determinar qué tan estable es esta solución a pequeñas perturbaciones, compuesta por los modos \mathbf{q} , \mathbf{p}_+ y \mathbf{p}_- , tomando $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1$ donde $\Psi_1 = (0, \tilde{\psi}_q, \tilde{\psi}_{p_+}, \tilde{\psi}_{p_-})$. Las ecuaciones de linealización para el modelo de truncamiento de cuatro modos en primer orden en ε dan

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\psi}_q &= T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}_-) \Psi_0 \tilde{\psi}_{p_-} e^{-i\Delta_- t} \\ &\quad + T(\mathbf{q}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_+) \bar{\Psi}_0 \tilde{\psi}_{p_+} e^{i\Delta_+ t} \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\partial_t \tilde{\psi}_{p_+} = T(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \Psi_0 \tilde{\psi}_q e^{-i\Delta_+ t} \quad (5.57)$$

$$\partial_t \tilde{\psi}_{p_-} = T(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}, -\mathbf{q}) \bar{\Psi}_0 \tilde{\psi}_q e^{i\Delta_- t}. \quad (5.58)$$

Buscando soluciones de la forma:

$$\tilde{\psi}_q(t) = A_q e^{-i\Omega_q t}, \quad (5.59)$$

$$\tilde{\psi}_{p_-}(t) = A_{p_-} e^{-i\Omega_{p_-} t}, \quad (5.60)$$

$$\tilde{\psi}_{p_+}(t) = A_{p_+} e^{-i\Omega_{p_+} t} \quad (5.61)$$

lo cual requiere para la consistencia que

$$\Omega_{p_+} = \Omega_q + \Delta_+ \quad (5.62)$$

Y

$$\bar{\Omega}_{p_-} = -\Omega_q + \Delta_- \quad (5.63)$$

Al escribir las ecuaciones de linealización para el modelo de truncamiento de cuatro modos en primer orden en ε en forma matricial da,

$$\begin{pmatrix} i\Omega_q & T(\mathbf{q}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_+) \bar{\Psi}_0 & T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, -\mathbf{p}_-) \Psi_0 \\ T(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \Psi_0 & i(\Omega_q + \Delta_+) & 0 \\ T(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}, -\mathbf{q}) \bar{\Psi}_0 & 0 & -i(-\Omega_q + \Delta_+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_q \\ A_{\mathbf{p}_+} \\ \bar{A}_{\mathbf{p}_-} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.64)$$

y poniendo a cero el determinante de la matriz 3×3, da una expresión cúbica para la relación de dispersión de la frecuencia de modulación Ω_q ,

$$\begin{aligned} \Omega_q(\Omega_q + \Delta_+)(-\Omega + \Delta_-) + T(\mathbf{q}, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_+)T(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}, \mathbf{q})|\psi_0|^2(-\Omega_q + \Delta_-) - \\ T(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_-)T(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}, -\mathbf{q})|\psi_0|^2(\Omega_q + \Delta_+) = 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

que se puede resolver numéricamente para Ω_q , que luego se use para encontrar los vectores propios correspondientes

$$\begin{pmatrix} A_q \\ A_{\mathbf{p}_+} \\ A_{\mathbf{p}_-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{T(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \Psi_0}{-i(\Omega_q + \Delta_+)} \\ \frac{T(\mathbf{p}_-, \mathbf{p}, -\mathbf{q}) \bar{\Psi}_0}{i(\Omega_q - \Delta_-)} \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

La inestabilidad ocurre cuando una raíz Ω_q tiene una parte imaginaria positiva, que es la tasa de crecimiento de la inestabilidad, $\gamma = \text{Im}(\Omega_q) > 0$. Entonces $\tau = 1/\gamma$ es el tiempo de crecimiento característico.

Parámetro de fuerza de no linealidad

Si se introduce una amplitud adimensional que mide la fuerza inicial de la onda primaria

$$M = \frac{\Psi_0 p^3}{\beta} \quad (5.67)$$

donde $\Psi_0 = \Psi_p|_{t=0}$. El parámetro M es una medida formal de no linealidad en la evolución de la IM, es decir, la relación de términos no lineales a lineales.

Casos con onda portadora puramente meridional

La estructura de la inestabilidad depende fuertemente del parámetro M . A modo de ilustración, se considera el caso en el que la onda portadora es puramente meridional, $\mathbf{p} = (p_x, 0)$.

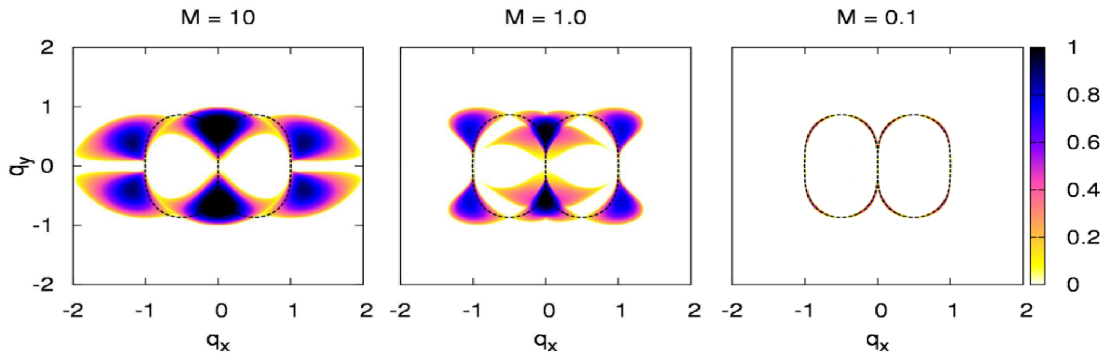


Figura 11: Tasa de crecimiento de la inestabilidad modulacional en función de q para un vector de onda primario meridional fijo, $p = (1,0)$ y $\rho = \infty$ para varios valores de la no linealidad M [16].

Como se observa en la figura 11, para $M \rightarrow 0$ la inestabilidad se concentra estrechamente alrededor de dos curvas de forma ovalada. Cada uno de estos óvalos parece ser la curva resonante en la que la onda portadora, la modulación y uno de los satélites están en resonancia exacta de tres ondas:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_- + \mathbf{q}, \quad \omega(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}_-) + \omega(\mathbf{q}) \quad (5.68)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_+ - \mathbf{q}, \quad \omega(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}_+) - \omega(\mathbf{q}). \quad (5.69)$$

En el límite de la interacción fuerte, $M \rightarrow \infty$, el término β en la ecuación CHM no es importante y el problema de IM se reduce a la bien conocida inestabilidad de los flujos de corte plano-paralelos de Kolmogorov (en forma de seno) descritos por la ecuación de Euler para un fluido incompresible. La máxima inestabilidad se obtiene cuando las ondas primaria y secundaria son perpendiculares y el enfoque tradicional es seleccionar un flujo meridional tal que \mathbf{p} esté a lo largo del eje x y la perturbación \mathbf{q} esté a lo largo del eje y . Es decir, si la onda portadora es meridional, IM conduce al crecimiento de flujos zonales. La figura anterior grafica la tasa de crecimiento de la perturbación que tiene el vector de onda \mathbf{q} en función de \mathbf{q} en el caso

en que el vector de onda portadora, \mathbf{p} , sea meridional. Para valores grandes y moderados de M , la perturbación más inestable es claramente zonal. Sin embargo, en el límite de la no linealidad débil, la perturbación máximamente inestable se bifurca fuera del eje zonal en un valor crítico de $M_c \approx 0.53474$, tendiendo a un punto en la variedad resonante ubicado en un ángulo de $5\pi/6$ con el eje x . Dichos modos siguen siendo predominantemente zonales, pero están ligeramente inclinados con respecto al eje x .

Casos con modulación puramente zonal

Fijando la modulación \mathbf{q} para que sea puramente zonal, se puede estudiar la inestabilidad para diferentes vectores de onda portadora, \mathbf{p} . Esto da como resultado la declaración más familiar de IM en plasmas de que la onda primaria será inestable si se encuentra dentro de un cono $(1/\rho^2) + \mathbf{p}_x^2 - 3\mathbf{p}_y^2 > 0$. Cuando $\rho = \infty$, este cono se reduce a $\mathbf{p}_y < (1/\sqrt{3})\mathbf{p}_x$.

Sin embargo, esto es cierto solo en los límites simultáneos $M \gg 1$ y $\mathbf{p} \gg \mathbf{q}$. Al eliminar la condición de separación de escala $\mathbf{p} \gg \mathbf{q}$, pero manteniendo $M \gg 1$ se tiene una región de inestabilidad más general: $\cos^2(\varphi) < (1 + (\mathbf{q}^2/\mathbf{p}^2))/4$, donde φ es el ángulo entre \mathbf{p} y \mathbf{q} .

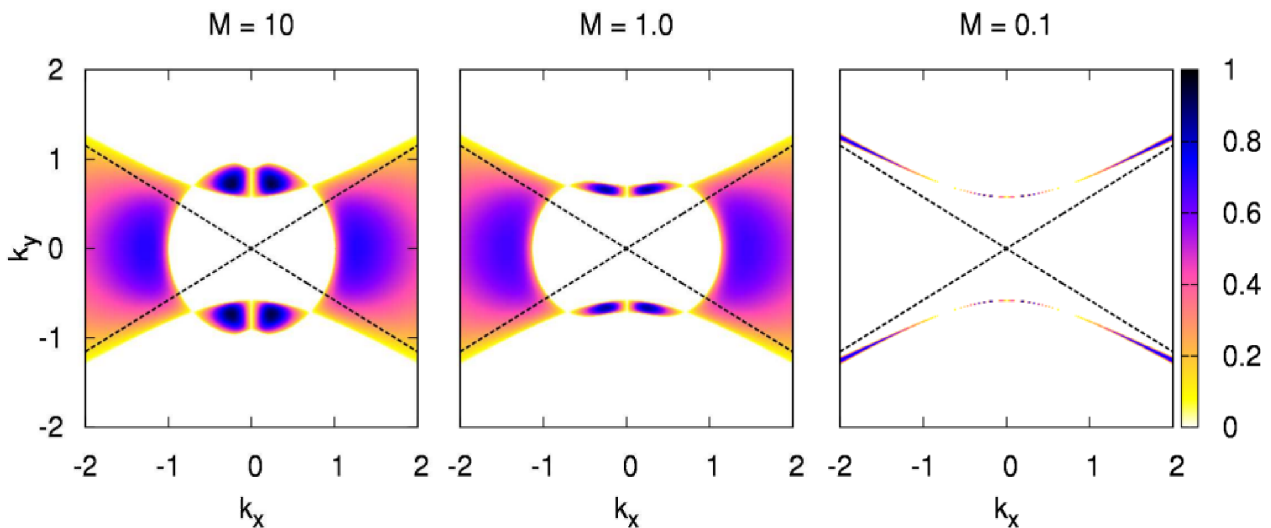


Figura 12: Tasa de crecimiento de la inestabilidad modulacional, dada por la ecuación (5.65) en función de \mathbf{p} para un vector de onda de modulación zonal fijo, $\mathbf{q} = (0,1)$ y $\rho = \infty$ para varios niveles de M . La línea discontinua es el cono definido por $\mathbf{p}_y < (1/\sqrt{3})\mathbf{p}_x$ [16].

La figura 12 muestra la tasa de crecimiento de la inestabilidad en función de \mathbf{p} para una modulación zonal fija $\mathbf{q} = (0,1)$ y $F = 0$ (es decir, $\rho = \infty$). Cuando $M \rightarrow 0$, una región de números de onda estables dentro del cono $\mathbf{p}_y < (1/\sqrt{3})\mathbf{p}_x$ se vuelve más grande, de modo que los vectores de onda inestables requieren un \mathbf{p}_x más grande. En el límite opuesto de un valor grande para M , existe una inestabilidad para algunos números de onda fuera del cono que están muy cerca de la dirección zonal, de modo que el crecimiento máximo ocurre para las orientaciones de onda primarias más cercanas a la zonal que a la dirección meridional, como se observa en la figura anterior para $M = 10$. Por otro lado, la elección de la dirección de la onda primaria a menudo no está dictada por la tasa máxima de crecimiento de la inestabilidad modulacional, sino por la estructura de la inestabilidad primaria que crea las ondas de Rossby y de deriva.

Una característica interesante de inestabilidad para $M \ll 1$ es evidente en la figura anterior, que para \mathbf{q} zonal fijo, la región inestable se estrecha y colapsa sobre los lados del cono, es decir, sobre las líneas $\mathbf{p}_y = \pm \mathbf{p}_x/\sqrt{3}$

Efectos ρ finitos y EHM

Para el caso EHM se tiene que es idéntico al CHM cuando el radio de Larmor ρ es infinito. Los dos sistemas también son idénticos, a menos que uno de los modos (muy probablemente \mathbf{q}) sea puramente zonal. Por lo tanto, todos los resultados descritos anteriormente para los casos $\rho = \infty$ o/y cuando la modulación no era puramente zonal se aplican por igual a los modelos CHM y EHM.

En CHM, cuando ρ es finito, hay dos regímenes, dependiendo del valor de M : Para $M > (2/27)^{1/2}$ el radio finito reduce la tasa de crecimiento de la inestabilidad, pero no puede suprimirla, mientras que para $M \leq (2/27)^{1/2}$ hay un rango de radios intermedios que suprimen completamente la inestabilidad. Un método de tipo WKB asume una separación de escala entre la onda portadora y la modulación y (implícitamente) una fuerte no linealidad $M \gg 1$. Se demostró que para EHM la inestabilidad es más fuerte para \mathbf{q} puramente zonal. Esta conclusión es generalmente cierta también para valores finitos de M .

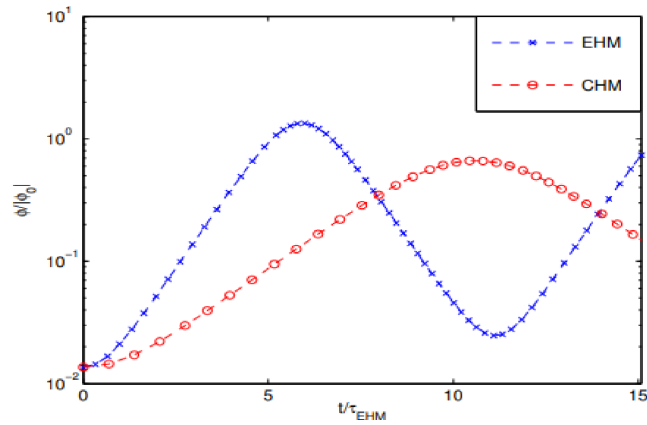


Figura 13: El crecimiento del modo zonal para condiciones iniciales idénticas en simulaciones ODE de los sistemas EHM y CHM para el caso $p = (10,0)$, $\rho = 0.6$, $\psi_0 = 0.01$ y $\beta = 10$. Los tiempos se han adimensionalizado con la tasa lineal de crecimiento del sistema EHM[16].

La figura 13 muestra la amplitud del modo de perturbación q obtenido al resolver numéricamente el sistema del truncamiento de cuatro modos (4MT) para las ecuaciones EHM y CHM. Claramente, el efecto de la extensión de la ecuación CHM es que la tasa de crecimiento asociada con el modelo EHM es mayor que la del modelo CHM.

5.4 Relajación de haces de electrones de corriente alta e inestabilidad modulacional[4].

La relajación colectiva de un haz de electrones que penetra en un plasma "frío" es causada por la interacción de resonancia entre las partículas del haz y las oscilaciones del plasma excitadas por la inestabilidad del haz. La teoría de tal relajación basada en las ecuaciones de turbulencia débil es bien conocida; es inaplicable para haces de alta energía y alta corriente cuando en la región espectral del ruido de plasma en resonancia con el haz aquí cobra importancia el efecto de la inestabilidad modulacional.

Como resultado de la inestabilidad, se forman cavidades (racimos de energía de Langmuir de los que sale plasma) en el fondo inicialmente uniforme de las oscila-

ciones del plasma. Las cavidades se colapsan hasta un tamaño en el que se produce la absorción de resonancia por parte de los electrones del plasma de los plasmones atrapados en ellas (colapso de las ondas de Langmuir, estudiado por primera vez por Zakharov). La transferencia de oscilaciones de longitud de onda corta provocada por la inestabilidad de la modulación y el colapso puede reducir considerablemente el nivel del ruido del plasma en resonancia con el haz y, por lo tanto, prolongar el proceso de relajación colectiva.

La construcción de una teoría cuantitativa de la turbulencia cuasi-estacionaria de Langmuir excitada cuando los haces de alta corriente se relajan en un plasma se dificulta por la invalidez de la aproximación de un acoplamiento débil entre los modos (turbulencia fuerte).

De acuerdo con la teoría no lineal de la inestabilidad modulacional, el desarrollo de la inestabilidad modulacional crea un mecanismo para la disipación de plasmones de longitud de onda larga en resonancia con el haz, cuya velocidad está determinada por la frecuencia "efectiva" de la dispersión de plasmones por fluctuaciones de densidad:

$$V_{eff} \approx \frac{\alpha \omega_p W}{n_0 T_e} \quad (5.70)$$

W es la energía de las oscilaciones; α es un coeficiente numérico; según los resultados de una simulación por ordenador $\alpha \approx 1/3$

El haz juega el papel de bombeo de longitud de onda larga para la turbulencia de Langmuir que surge como resultado de la inestabilidad modulacional. En definitiva, la competencia entre la acumulación de las oscilaciones por el haz y la disipación producida por el colapso conduce al establecimiento de una turbulencia cuasi estacionaria. La energía que entra en la turbulencia del plasma debido a la inestabilidad de la modulación se transfiere a longitudes de escala corta en las cavidades colapsadas y es absorbida por las partículas. La condición de equilibrio correspondiente tiene la forma

$$\mathcal{V}_{eff} \frac{E_0^2}{16\pi} = \gamma_M W, \quad (5.71)$$

$$\gamma_M = \omega_p \left(\frac{m}{M} \frac{W}{n_0 T_e} \right)^{1/2} \quad (5.72)$$

γ_M , es la tasa de crecimiento de la inestabilidad modulacional que determina la velocidad del colapso.

La conexión entre la energía \mathbf{W} de la turbulencia del plasma y la amplitud de bombeo E_0 se puede encontrar a partir de las ecuaciones anteriores.

$$\frac{W}{n_0 T_e} = \frac{M \alpha^3}{m} \left(\frac{E_0^2}{16\pi n_0 T_e} \right)^2 \quad (5.73)$$

El proceso de relajación de haces de electrones inyectados en un plasma se ha estudiado en detalle tanto en la aproximación cuasi-lineal como teniendo en cuenta los efectos no lineales en el marco de turbulencia débil. En la teoría de la relajación cuasi lineal, la difusión de las partículas del haz en el campo de las oscilaciones excitadas por ellas conduce al establecimiento de una "meseta" en la función de distribución de la velocidad del haz a distancias características

$$l_{QL} = \frac{\nu_0}{\omega_p} \frac{T_e}{m \nu_0^2} \frac{n_0}{n_1} \Lambda \quad (5.74)$$

Λ es el logaritmo de la relación entre el ruido final y el térmico, que es del orden de magnitud del logaritmo de Coulomb. En el estado final, aproximadamente la mitad de la potencia se transfiere a las oscilaciones del plasma; debido a que la velocidad de grupo de las oscilaciones es pequeña, $v_g/v_0 \sim T_e/m\nu_0^2$, su densidad de energía excede considerablemente la densidad de energía en el haz:

$$\left[\frac{E_0^2}{16\pi} \right]_{QL} \approx \frac{n_1 m \nu_0^2}{15} \frac{m \nu_0^2}{T_e} \quad (5.75)$$

En turbulencia débil, la falta de linealidad principal es causada por la dispersión inducida de las oscilaciones excitadas por el haz por los iones en el plasma, lo que conduce a una transferencia de estas oscilaciones desde el rango espectral en resonancia con el haz a la región de grandes velocidades de fase (k minúscula). En un proceso de dispersión separado, el número de onda del plasmón cambia en una cantidad

$$\delta k \sim \frac{k \nu_{ri}}{\frac{d\omega}{dk}} \sim \lambda_D^{-1} \left(\frac{m T_i}{M T_e} \right)^{1/2} \quad (5.76)$$

que suele ser mucho menor que el ancho del espectro de las oscilaciones excitadas por el haz $\Delta k \sim \omega_p \Delta v / v^2$, de modo que la transferencia de iones es de carácter diferencial. La tasa de crecimiento característica de este proceso es

$$\gamma_i \approx \omega_p \frac{E_0^2}{16\pi n_0 T_c} \frac{m}{M} \frac{1}{k^2 \lambda_D^2} \quad (5.77)$$

La transferencia afecta apreciablemente el proceso de relajación del haz de electrones si para la energía máxima de las oscilaciones, dada por el cambio del número de onda del plasmón, la tasa de crecimiento de la dispersión inducida excede la tasa de crecimiento de la inestabilidad del haz para un haz fuertemente difuminado ($\Delta v \sim v$): $\gamma_b \approx \omega_p n_1 / n_0$.

La condición correspondiente tiene la forma

$$\epsilon \approx 10 \frac{M}{m} \left(\frac{T_e}{m \nu_0^2} \right)^3 < 1 \quad (5.78)$$

Si $\epsilon \ll 1$, la transferencia espectral de las oscilaciones por parte de los iones conduce a una estabilización de la inestabilidad del haz del siguiente nivel de ruido del plasma en resonancia con el haz:

$$\left[\frac{E_0^2}{16\pi} \right]_{WT} = \left[\frac{E_0^2}{16\pi} \right]_{QL} \epsilon \Lambda \quad (5.79)$$

Como resultado de esto, la longitud de relajación del haz aumenta en un factor $\epsilon^{-1}\Lambda^{-1}$ en comparación con la longitud cuasilineal l_{QL} .

6. Métodos y técnicas de investigación empleadas.

Para estudiar la inestabilidad modulacional en la ecuación no lineal de Schrödinger partimos de la ecuación canónica

$$i \frac{\partial q}{\partial Z} = \frac{D_2(Z)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - \gamma |q|^2 q \quad (6.1)$$

recurrimos a una metodología simple, consideramos la evolución de una onda continua (CW), para este caso tenemos que la amplitud es independiente del tiempo, de manera esta ecuación debe ser resuelta considerando una envolvente independiente del tiempo, de esta forma se propone una solución de la forma

$$q = \sqrt{p_0} \exp(i\phi_{NL}) \quad (6.2)$$

donde p_0 es la potencia incidente y ϕ_{NL} es la fase no lineal inducida por el efecto de auto-modulación de fase. Esta solución nos dice que el haz incidente se propagara sin cambios en la amplitud a lo largo de una fibra, excepto si esta adquiere una fase no lineal que dependa de la potencia.

Para poder estudiar si este tipo de soluciones son estables o no, se recurre a la teoría de perturbaciones, donde aquí solo consideramos una sola ecuación, la cual contiene toda la información del sistema, para ello agregamos una pequeña perturbación (\mathbf{a}) mucho menor que $(p_0)^{1/2}$ así tenemos que

$$\bar{q} = (\sqrt{p_0} + a) \exp(i\phi_{NL}) \quad (6.3)$$

entonces estudiamos el desarrollo de esta nueva onda envolvente en la ecuación canónica (6.1) al sustituir la solución con la perturbación (6.3) en dicha ecuación canónica, linealizando con respecto a \mathbf{a} y manteniendo únicamente los términos en primeras potencias de \mathbf{a} , se obtiene una ecuación para la evolución de la perturba-

ción

$$i \frac{\partial a}{\partial Z} = \frac{D_2(Z)}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} - \gamma p_0 (a + a^*) \quad (6.4)$$

Esta ecuación debe de poder ser resulta en el dominio de Fourier, pero debido al término a^* las componentes de Fourier a las frecuencias Ω y $-\Omega$ están acopladas. Por lo tanto, para quitarnos este problema consideramos soluciones para \mathbf{a} de la forma

$$a(Z, T) = a_1 \exp[i(KZ - \Omega T)] - a_2 \exp[-i(KZ - \Omega T)] \quad (6.5)$$

donde \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 son amplitudes reales, K es el numero de onda y Ω es la frecuencia angular de la perturbación. Al sustituir esta forma de \mathbf{a} en la ecuación (6.4) se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneas para \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 las cuales tienen solución solo cuando K y Ω satisfacen la relación

$$K^2 = \pm \frac{1}{4} |D_2^2(Z) \Omega^2| [\Omega^2 + \text{Sgn}(D_2(Z)) \Omega_{cr}^2] \quad (6.6)$$

donde $\text{Sgn}(D_2(Z)) = \pm 1$ la cual depende del signo de $D_2(Z)$, y Ω_{cr} es la frecuencia critica definida como

$$\Omega_{cr}^2 = \frac{4\gamma p_0}{|D_2(Z)|} \quad (6.7)$$

Al analizar estas últimas tres ecuaciones (6.5, 6.6, 6.7) se puede observar que la estabilidad del haz incidente está comprometida en relación con la frecuencia Ω_{cr} y al régimen de dispersión que experimenta el haz. En el caso en que la dispersión en la velocidad de grupo sea normal ($D_2 > 0$), el vector de onda K es real para todo valor de Ω , y el estado del haz se mantiene estable, aún bajo la presencia de perturbaciones. Para la región de dispersión anómala ($D_2 < 0$), K toma un valor imaginario para valores de $|\Omega| < \Omega_{cr}$, y la perturbación $\mathbf{a}(Z, T)$ tiende a crecer exponencialmente conforme Z se incrementa como se puede ver en la ecuación de la perturba-

ción $\mathbf{a}(Z,T)$, como resultado el haz incidente es inestable durante su propagación. Esta inestabilidad es la inestabilidad modulacional debido a que se manifiesta como una modulación temporal en amplitud a la frecuencia Ω , la cual puede conllevar a la ruptura temporal del pulso y a la formación de un tren de pulsos ultra-cortos. Al analizar la ecuación (6.6), se nota que la amplificación no ocurre para cualquier frecuencia, sino que la amplificación espectral está condicionada para frecuencias que cumplan la condición $|\Omega| < \Omega_{cr}$. Para estas frecuencias se puede obtener una ganancia en potencia ajustando una función $g(\Omega) = 2\text{Im}[K]$ (2 veces la parte imaginaria de K), donde el factor 2 convierte a $g(\Omega)$ en ganancia de potencia. Así, la ganancia espectral queda expresada mediante la ecuación

$$g(\Omega) = |D_2(Z)\Omega| \sqrt{\Omega_{cr}^2 - \Omega^2} \quad (6.8)$$

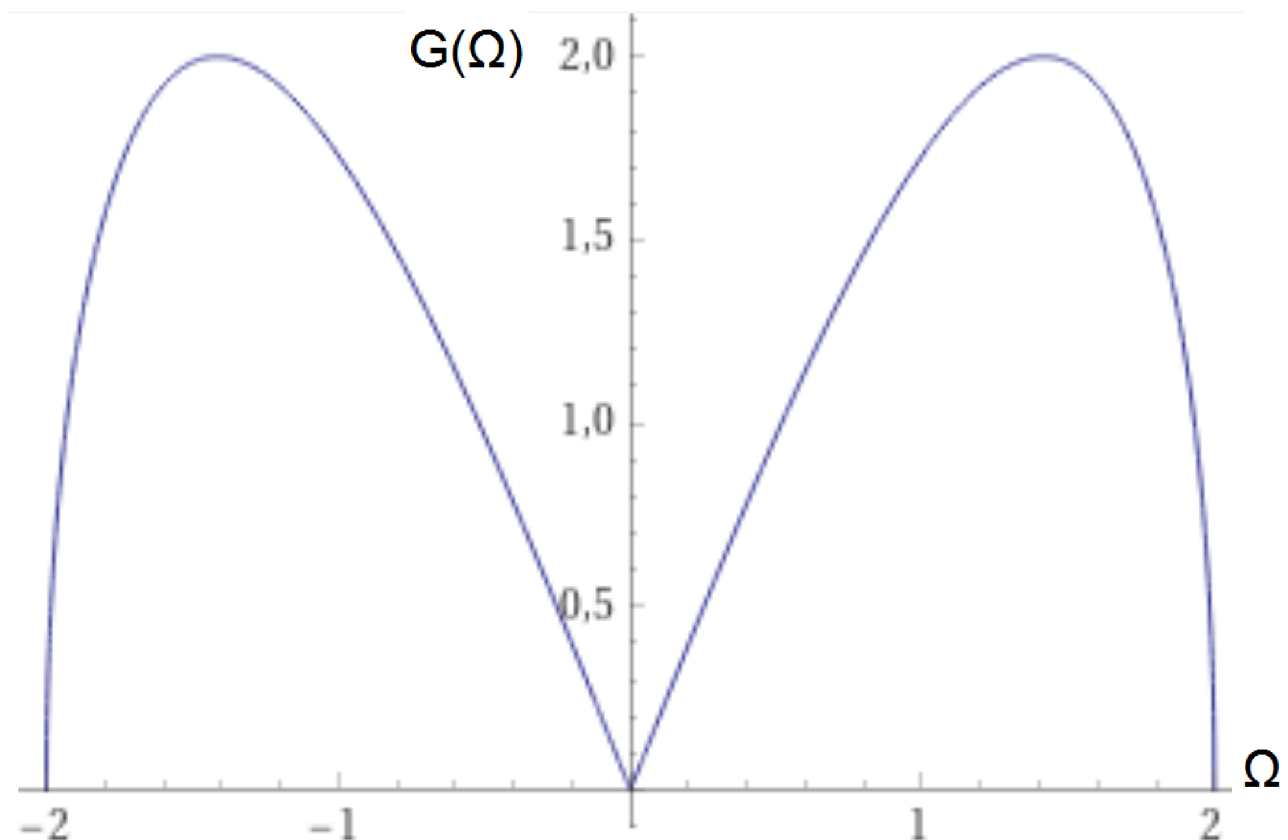


Figura 14: Espectro de ganancia de la inestabilidad modulacional ecuación (6.7), con valores de $D_2(Z)=1$ y $\Omega_{cr}=2$.

En la figura 14 la ganancia está representada en función de la longitud de onda, la cual corresponde al desplazamiento en frecuencia debido a la frecuencia $\pm\Omega$ y esta

es simétrica con respecto a la frecuencia central $\Omega = 0$, y depende fuertemente de la potencia. Además para una potencia determinada existe una frecuencia dominante, la cual experimenta una ganancia máxima. La frecuencia a la cual la ganancia es máxima, se puede obtener a partir de la ecuación (6.7), de tal forma que

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{4\gamma\rho_0}{|D_2(Z)|}} \quad (6.9)$$

Siendo la ganancia máxima

$$G_{max} = \frac{1}{2}|D_2(Z)|\Omega_{cr}^2 = 2\gamma\rho_0 \quad (6.10)$$

Por lo que, la inestabilidad modulacional fuerza a una modulación en la amplitud con una frecuencia máxima Ω_{cr} , la cual estará en función de la potencia y de los parámetros del medio, como se observa en la expresión (6.9). Espectralmente, esta modulación se manifiesta como la aparición de dos jorobas laterales localizadas simétricamente a la frecuencia $\pm\Omega_{cr}$, una a cada lado de la frecuencia central ω_0 .

Ahora, para estudiar la inestabilidad modulacional que surge en el modelo que contiene la ecuación no autónoma no lineal de Schrödinger con término de auto-dispersión de Raman que se describe usando el potencial $Q(Z,T)$ que satisface a la segunda ecuación del sistema de ecuaciones

$$i\frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{D_2(Z)}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + R(Z)\left\{(1-\beta)|q|^2 + \beta Q\right\}q = 0, \quad (6.11)$$

$$\mu^2\frac{\partial^2 Q(Z,T)}{\partial T^2} + 2\gamma\mu\frac{\partial Q(Z,T)}{\partial T} + Q(Z,T) = |q(Z,T)|^2. \quad (6.12)$$

Procedemos a realizar una metodología análoga a la descrita anteriormente, donde al ser este sistema no completamente integrable por el método de dispersión inversa [13] por lo que se debe estudiar con los métodos numéricos [27]. Si una pequeña modulación se aplica a una onda continua de entrada, entonces la inestabilidad modulacional inducida se podrá generar en la ecuación (6.10).

La ecuación (6.10) es una generalización de la ecuación no lineal de Schrödinger estándar que se aparece en óptica no lineal para tener en cuenta los efectos de

propagación de pulsos ultra-cortos con un espectro muy amplio de frecuencias [26].

Al usar la sustitución:

$$q(Z, T) = (\sqrt{\rho_0} + \varepsilon \rho_1(Z, T)) \exp \left\{ i \rho_0 \int_0^Z R(Z) dZ \right\} \quad (6.13)$$

$$Q(Z, T) = Q_0 + \varepsilon Q_1(Z, T) \quad (6.14)$$

en las ecuaciones (6.10, 6.11) y al tomar en cuenta que $\varepsilon \ll 1$ y $q \in \mathbb{C}$ se obtiene que

$$|q|^2 = \rho_0 + \varepsilon \sqrt{\rho_0} (\rho_1 + \rho_1^*) \quad (6.15)$$

Entonces al calcular las derivadas de la ecuación (6.10) con la sustitución de (6.12) y (6.13) tenemos

$$\frac{i \partial q}{\partial Z} = i \frac{\partial}{\partial Z} \left[(\sqrt{\rho_0} + \varepsilon \rho_1(Z, T)) \exp \left[i \rho_0 \int_0^Z R(Z) dZ \right] \right]$$

$$\frac{i \partial q}{\partial Z} = \exp \left[i \rho_0 \int_0^Z R(Z) dZ \right] \left(i \varepsilon \frac{\partial \rho_1(Z, T)}{\partial Z} - \rho_0^{3/2} R(Z) - \varepsilon \rho_0 \rho_1(Z, T) R(Z) \right)$$

$$\frac{D_{2(Z)}}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} = \frac{D_{2(Z)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left((\sqrt{\rho_0} + \varepsilon \rho_1(Z, T)) \exp \left[i \rho_0 \int_0^Z R(Z) dZ \right] \right)$$

$$\frac{D_{2(Z)}}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} = \frac{D_{2(Z)}}{2} \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \rho_1(Z, T)}{\partial T^2} \right) \exp \left[i \rho_0 \int_0^Z R(Z) dZ \right]$$

$$R(Z) [(1 - \beta) |q|^2 + \beta Q] q =$$

$$R(Z) \exp \left[i \rho_0 \int_0^Z R(Z) dZ \right] \left[(1 - \beta) \rho_0^{3/2} + (1 - \beta) \varepsilon \rho_0 (\rho_1 + \rho_1^*) + \beta Q_0 \sqrt{\rho_0} + \beta \varepsilon Q_1 \sqrt{\rho_0} + \right.$$

$$\left. (1 - \beta) \rho_0 \varepsilon \rho_1 + (1 - \beta) \varepsilon^2 \sqrt{\rho_0} \rho_1 (\rho_1 + \rho_1^*) + \beta Q_0 \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 Q_1 \beta \rho_1 \right]$$

Así tenemos para la ecuación (6.10) toma la forma

$$\begin{aligned} & \exp[i\rho_0 \int_0^Z R(Z)dZ] \left(i\epsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} - \rho_0^{3/2} R(Z) - \epsilon \rho_0 \rho_1 R(Z) \right) + \exp[i\rho_0 \int_0^Z R(Z)dZ] \frac{D_2(Z)}{2} \left(\epsilon \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial T^2} \right) + \\ & R(Z) \exp[i\rho_0 \int_0^Z R(Z)dZ] \left[(1-\beta)\rho_0^{3/2} + (1-\beta)\epsilon \rho_0 (\rho_1 + \rho_1^*) + \beta Q_0 \sqrt{\rho_0} + \beta \epsilon Q_1 \sqrt{\rho_0} + \right. \\ & \left. (1-\beta)\rho_0 \epsilon \rho_1 + (1-\beta)\epsilon^2 \sqrt{\rho_0} \rho_1 (\rho_1 + \rho_1^*) + \beta Q_0 \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 Q_1 \beta \rho_1 \right] = 0 \end{aligned}$$

Al factorizar, despreciando los terminos ϵ^2 ya que $\epsilon \ll 1$ y tomando que las constantes $Q_0 = \rho_0$ tenemos que la ecuación (6.10) toma la forma simplificada

$$i \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} + \frac{D_2(Z)}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial T^2} + R(Z) \{ (1-\beta)\rho_0 (\rho_1 + \rho_1^*) + \beta \sqrt{\rho_0} Q_1 \} = 0 \quad (6.16)$$

Para la ecuación (6.11) la sustitución de (6.12) y (6.13) nos dan las derivadas

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} = \mu^2 \epsilon \frac{\partial^2 Q_1}{\partial T^2}$$

$$2\gamma\mu \frac{\partial Q}{\partial T} = 2\gamma\mu \epsilon \frac{\partial Q_1}{\partial T}$$

Así la ecuación (6.11) toma la forma

$$\mu^2 \epsilon \frac{\partial^2 Q_1}{\partial T^2} + 2\gamma\mu \epsilon \frac{\partial Q_1}{\partial T} + Q_0 + \epsilon Q_1 = \rho_0 + \epsilon \sqrt{\rho_0} (\rho_1 + \rho_1^*)$$

Considerando que $Q_0 = \rho_0$ y factorizando ϵ la ecuación (6.11) toma la forma simplificada

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial T^2} + 2\gamma\mu \frac{\partial Q_1}{\partial T} + Q_1 = \sqrt{\rho_0} (\rho_1 + \rho_1^*)$$

por lo que en el primer orden de la teoria de perturbaciones las ecuaciones (6.10, 6.11) se reducen al sistema:

$$i \frac{\partial \rho_1}{\partial Z} + \frac{D_2(Z)}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial T^2} + R(Z) \{ (1 - \beta) \rho_0 (\rho_1 + \rho_1^*) + \beta \sqrt{\rho_0} Q_1 \} = 0, \quad (6.17)$$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial T^2} + 2\gamma\mu \frac{\partial Q_1}{\partial T} + Q_1 = \sqrt{\rho_0} (\rho_1 + \rho_1^*), \quad (6.18)$$

donde ρ_0 y ρ_1 son intensidades de la onda continua inicial (cw) y de la primer onda con las frecuencias laterales.

La condición de inestabilidad es derivada al buscar soluciones (ρ_1 y Q_1) para estas ultimas ecuaciones las cuales aplicamos las expresiones

$$\rho_1(Z, T) = \rho_{1A} \exp \left\{ i \int_0^Z K(Z) dZ - i\Omega T \right\} + \rho_{1S} \exp \left\{ -i \int_0^Z K(Z) dZ + i\Omega T \right\}, \quad (6.19)$$

$$Q_1(Z, T) = Q_{1A} \exp(-i\Omega T) + Q_{1S} \exp(i\Omega T), \quad (6.20)$$

con las amplitudes de banda lateral constantes ρ_{1A} , ρ_{1S} y Q_{1A} , Q_{1S} para dichas ecuaciones, al substituir estas soluciones en las ecuaciones (6.17, 6.18) se obtiene un sistema de ecuaciones el cual permite obtener los valores para las constantes ρ_{1A} , ρ_{1S} y Q_{1A} , Q_{1S} siempre y cuando el determinante de los coeficientes de la matriz sea igual a cero, esta condición ayuda para la obtención de la relación de dispersión para un número de onda k y una frecuencia Ω .

Así al subsituir las expresiones (6.19) y (6.20) en las ecuaciones (6.17, 6.18) los calculos dan:

Para la ecuación (6.17)

$$\frac{i \partial \rho_1}{\partial Z} = -\rho_{1A} K(Z) \exp \left[i \int_0^Z K(Z) dZ - i\omega T \right] + \rho_{1S} K(Z) \exp \left[-i \int_0^Z K(Z) dZ + i\omega T \right]$$

$$\frac{D_2(Z)}{2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial T^2} = -\frac{D_2(Z)}{2} \Omega^2 \left(\rho_{1A} \exp \left[i \int_0^Z K(Z) dZ - i\Omega T \right] + \rho_{1S} \exp \left[-i \int_0^Z K(Z) dZ + i\Omega T \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
R(Z)[(1-\beta)\rho_0(\rho_1+\rho_1^*)+\beta\sqrt{\rho_0}Q_1] = \\
R(Z)[(1-\beta)\rho_0\left((\rho_{1A}+\rho_{1S})\left(\exp\left[i\int_0^Z K(Z)dZ-i\Omega T\right]\right)+(\rho_{1A}+\rho_{1S})\left(\exp\left[-i\int_0^Z K(Z)dZ+i\Omega T\right]\right)\right)+ \\
\beta\sqrt{\rho_0}(Q_{1A}\exp(-i\Omega T)+Q_{1S}\exp(i\Omega T))]
\end{aligned}$$

Así la ecuación (6.17) toma la forma

$$\begin{aligned}
K(Z)\rho_{1S}\exp\left[-i\int_0^Z K(Z)dZ+i\Omega T\right]-K(Z)\rho_{1A}\exp\left[i\int_0^Z K(Z)dZ-i\Omega T\right]- \\
\frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2\left[\rho_{1A}\exp\left[i\int_0^Z K(Z)dZ-i\Omega T\right]+\rho_{1S}\exp\left[-i\int_0^Z K(Z)dZ+i\Omega T\right]\right]+ \\
R(Z)[(1-\beta)\rho_0\left((\rho_{1A}+\rho_{1S})\left(\exp\left[i\int_0^Z K(Z)dZ-i\Omega T\right]\right)+(\rho_{1A}+\rho_{1S})\left(\exp\left[-i\int_0^Z K(Z)dZ+i\Omega T\right]\right)\right)+ \\
\beta\sqrt{\rho_0}(Q_{1A}\exp(-i\Omega T)+Q_{1S}\exp(i\Omega T))] = 0
\end{aligned}$$

Para la ecuación (6.17)

$$\mu^2\frac{\partial^2 Q_1}{\partial T^2} = -\mu^2\Omega^2(Q_{1A}\exp(-i\Omega T)+Q_{1S}\exp(i\Omega T))$$

$$2\gamma\mu\frac{\partial Q_1}{\partial T} = 2i\gamma\mu\Omega(Q_{1S}\exp(i\Omega T)-Q_{1A}\exp(-i\Omega T))$$

$$\sqrt{\rho_0}(\rho_1+\rho_1^*) = \sqrt{\rho_0}\left[(\rho_{1A}+\rho_{1S})\exp\left[i\int_0^Z K(Z)dZ-i\Omega T\right]+(\rho_{1A}+\rho_{1S})\exp\left[-i\int_0^Z K(Z)dZ+i\Omega T\right]\right]$$

Así la ecuación (6.17) toma la forma

$$\begin{aligned}
& -\mu^2\Omega^2(Q_{1A}\exp(-i\Omega T) + Q_{1S}\exp(i\Omega T)) + \\
& 2i\gamma\mu\Omega(Q_{1S}\exp(i\Omega T) - Q_{1A}\exp(-i\Omega T)) + \\
& Q_{1A}\exp(-i\Omega T) + Q_{1S}\exp(i\Omega T) = \\
& \sqrt{\rho_0} \left[(\rho_{1A} + \rho_{1S}) \exp \left[i \int_0^Z K(Z) dZ - i\Omega T \right] + (\rho_{1A} + \rho_{1S}) \exp \left[-i \int_0^Z K(Z) dZ + i\Omega T \right] \right]
\end{aligned}$$

En esta última ecuación, para poder encontrar los valores de Q_{1A} y Q_{1S} igualamos los términos que tengan $(-i\Omega T)$ o $(i\Omega T)$ en común, lo que nos generara el sistema de ecuaciones:

Para los terminos con $(-i\Omega T)$ en común

$$-\mu^2\Omega^2 Q_{1A} - 2i\gamma\mu\Omega Q_{1A} + Q_{1A} = \sqrt{\rho_0}(\rho_{1A} + \rho_{1S}^*)$$

Para los terminos con $(i\Omega T)$ en común

$$-\mu^2\Omega^2 Q_{1S} + 2i\gamma\mu\Omega Q_{1S} + Q_{1S} = \sqrt{\rho_0}(\rho_{1A}^* + \rho_{1S})$$

Al despejar Q_{1A} y Q_{1S} obtenemos las contribuciones espectrales al potencial de Raman

$$Q_{1A} = \frac{\sqrt{\rho_0}(\rho_{1A} + \rho_{1S}^*)}{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\gamma\mu\Omega} \quad (6.21)$$

$$Q_{1S} = \frac{\sqrt{\rho_0}(\rho_{1A}^* + \rho_{1S})}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\gamma\mu\Omega} \quad (6.22)$$

Para obtener los valores ρ_{1A} y ρ_{1S} de la ecuación (6.17) igualamos los términos que tengan $(-i\Omega T)$ o $(i\Omega T)$ en común, lo que nos generara el sistema de ecuaciones:

Para los terminos con $(-i\Omega T)$ en común

$$-\rho_{1A}K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2\rho_{1A} + R(Z)[(1 - \beta)\rho_0(\rho_{1A} + \rho_{1S}) + \beta\sqrt{\rho_0}Q_{1A}] = 0$$

Para los terminos con (iΩT) en común

$$\rho_{1S}K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2\rho_{1S} + R(Z)[(1 - \beta)\rho_0(\rho_{1A} + \rho_{1S}) + \beta\sqrt{\rho_0}Q_{1S}] = 0$$

Factorizando, sustituyendo Q_{1A} y Q_{1S} y simplificando la ecuación de los términos con (-iΩT) en comun obtenemos que

$$\rho_{1A} = \frac{-\rho_{1S} \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu} \right)}{R(Z)(1 - \beta)\rho_0 - K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu}}$$

Para la ecuación de los términos con (iΩT) en común obtenemos que

$$\rho_{1S} \left(K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 + R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) + \rho_{1A} \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) = 0$$

Al sustituir el valor de ρ_{1A} en esta ultima ecuación obtenemos

$$\rho_{1S} \left[\left(K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 + R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) - \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 - K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu} \right) - \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu} \right) \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) \right] = 0$$

Como ρ_{1S} no puede ser cero, tenemos la ecuación

$$\left(K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 + R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) - \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 - K(Z) - \frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu} \right) - \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu} \right) \left(R(Z)(1 - \beta)\rho_0 + \frac{R(Z)\beta\rho_0}{1 - \mu^2\Omega^2 + 2i\Omega\gamma\mu} \right) = 0$$

Al desarrollarla y despejar la función K^2 se tiene

$$K^2 = -\frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 \left[-\frac{D_2(Z)}{2}\Omega^2 + 2\rho_0 R(Z) \left\{ (1-\beta) + \beta \left[\frac{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu}{(1 - \mu^2\Omega^2)^2 + 4\Omega^2\gamma^2\mu^2} \right] \right\} \right] \quad (6.23)$$

donde el término

$$R_{corr}(\Omega, Z) = R(Z) \left\{ (1 - \beta) + \beta \left[\frac{1 - \mu^2\Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu}{(1 - \mu^2\Omega^2)^2 + 4\Omega^2\gamma^2\mu^2} \right] \right\} \quad (6.24)$$

La función compleja (6.24) que da una corrección del coeficiente de no linealidad es una contribución del efecto de Raman a la Relación de Dispersión.

La relación de dispersión K tendrá un valor imaginario para valores de $|\Omega| < \Omega_c$, o sea, cuando, $D_2(Z)$ estaba dentro de la región de dispersión anómala, la perturbación tendía a crecer y se generaba la inestabilidad modulacional. En el modelo estudiado la dispersión en la velocidad de grupo es $K^2(\Omega, Z)$ y no el valor $D_2(Z)$, por lo que la condición para que se desarrollen las inestabilidades modulacionales en el sistema de ecuaciones (6.10, 6.11) es mediante las regiones de $|\Omega|$ a las cuales se dan los valores imaginarios de K .

$$K^2 < 0$$

la cual corresponde a un rango de frecuencias de

$$|\Omega| < 2\sqrt{\frac{\rho_0 R(Z)}{D(Z)}} \quad (6.25)$$

7 Presentación y discusión de resultados

Con la metodología usada se obtuvo para el problema del sistema de ecuaciones (6.10, 6.11) una relación de dispersión de la forma (6.23).

Al graficar la función compleja R_{corr} (6.24) que da una corrección del coeficiente de no linealidad es una contribución del efecto de Raman a la Relación de Dispersión, se obtuvieron las siguientes gráficas de su parte real (Figura 15) y su parte imaginaria (Figura 16).

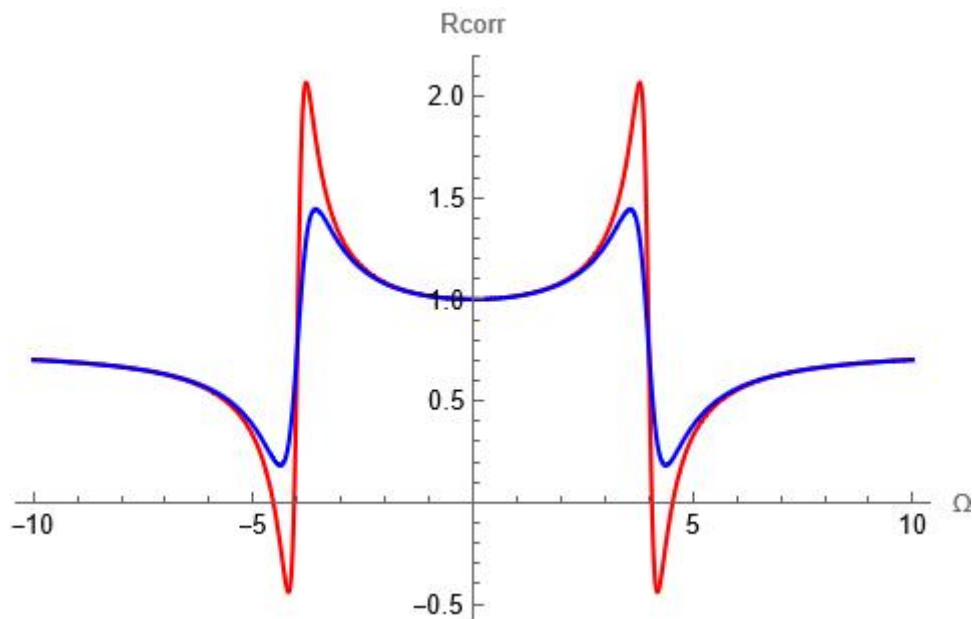


Figura 15: Parte real de la función compleja R_{corr} con valores de $R(Z)=1$, $\beta=0.25$, $\mu=0.25$, donde para la línea roja $\gamma=0.05$ y para la línea azul $\gamma=0.1$.

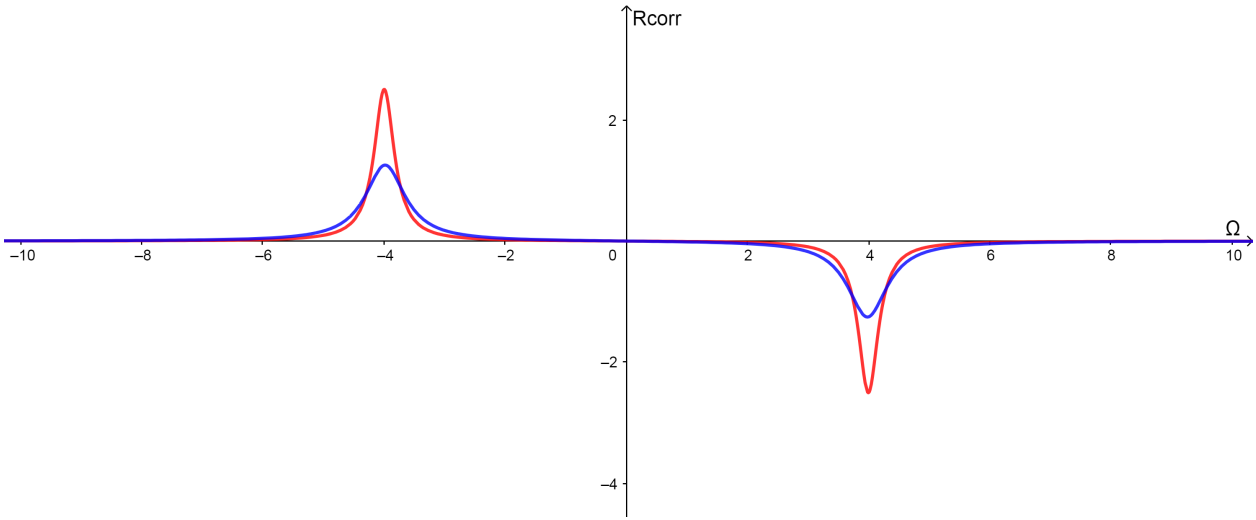


Figura 16: Parte imaginaria de la función compleja R_{corr} con valores de $R(Z)=1$, $\beta=0.25$, $\mu=0.25$, donde para la línea roja $\gamma=0.05$ y para la línea azul $\gamma=0.1$.

La Inestabilidad Modulacional aparece para valores de $K^2 < 0$, o sea valores de K imaginarios, por ello en óptica no lineal se suele estudiar la dinámica a partir del coeficiente de amplificación $G(\Omega) = 2\text{Im}(K)$. Por lo que para nuestro caso el valor para el coeficiente de ganancia espectral $G(\Omega)$ es

$$G(\Omega) = |\Omega| \sqrt{(D_2(Z))^2 \Omega^2 - 4D_2(Z)\rho_0 R(Z) \left\{ (1 - \beta) + \beta \left[\frac{1 - \mu^2 \Omega^2 - 2i\Omega\gamma\mu}{(1 - \mu^2 \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \gamma^2 \mu^2} \right] \right\}} \quad (7.1)$$

Verificamos que los resultados tengan validez con lo esperado a partir del estudio de las principales características de la dinámica de ondas solitónicas en fibras ópticas para el caso particular, en que la dispersión disminuye lentamente. Con este fin usamos una función exponencial de la forma $D_2(Z)=\exp(-\beta Z)$, con β una constante y $R(Z)=1$, escogemos este caso, ya que desde el punto de vista de aplicaciones es uno de los más interesantes en óptica no lineal por el fenómeno de auto-compresión de solitones ópticos, el cual generó que la onda se comprima en el espacio y en el tiempo y se propague a mayor velocidad.

Primero estudiamos el ejemplo del caso de $\beta = 0$, por lo que $R_{\text{corr}}(Z) = R(Z)$ y se denota que la relación de dispersión para este caso $K^2 = K_0^2$. Por lo que la condición de inestabilidad modulacional para este caso estará dada por la expresión:

$$K_0^2 = D_2(Z)\Omega^2 \left[\frac{D_2(Z)}{4}\Omega^2 - \rho_0 R(Z) \right] < 0 \quad (7.2)$$

Y el coeficiente de ganancia espectral de K^2_0 sera:

$$G(\Omega) = |\Omega| \sqrt{(D_2(Z))^2 \Omega^2 - 4D_2(Z)\rho_0 R(Z)} \quad (7.3)$$

Donde si la graficamos para valores $D_2(Z)=\exp(-\beta Z)$ con $\beta = 0$, $R(Z) = 1$ y $\rho_0 = 1$ tenemos la función $G(\Omega) = |\Omega|(\Omega^2-4)^{1/2}$

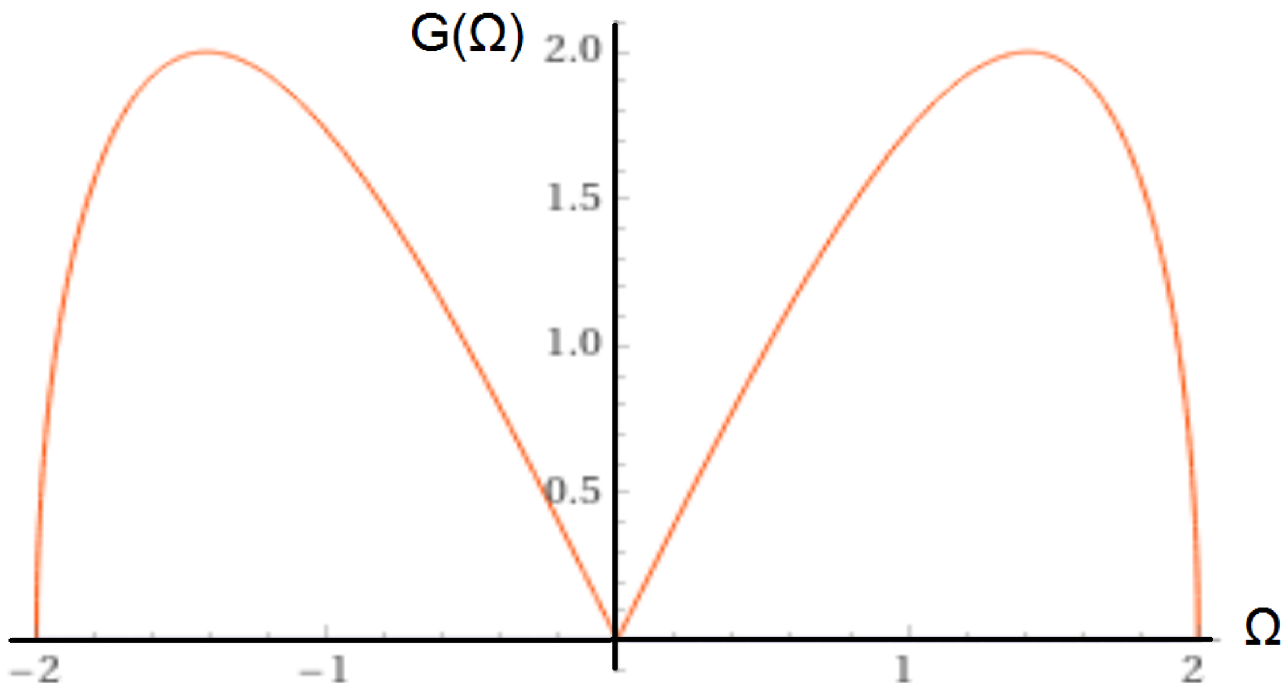


Figura 17: Coeficiente de ganancia espectral de K^2_0 con valores $D_2(Z)=\exp(-\beta Z)$ con $\beta = 0$, $R(Z) = 1$ y $\rho_0 = 1$.

Ahora estudiamos el caso de β no igual a 0, y analizamos Ec. (6.23), en este caso K^2 es un número complejo y no se puede decir que $K^2 < 0$.

La condición de IM en este caso la parte imaginaria de K^2 no es cero.

Para hacer esto en forma analítica, vamos a simplificar el problema y vamos a estudiar un modelo simplificado de Auto-dispersión de Raman nada más.

Al estudiar la ecuación (6.11) sin el primer término de la derivada doble

$$\mu^2 \frac{\partial^2 Q(Z, T)}{\partial T^2}$$

esto significa que $\mu^2 = 0$, esto es posible al considerar los valores μ, γ como parámetros pequeños y así solo considerar los términos lineales, por lo que la ecuación (6.11) se reduce a:

$$2\gamma\mu \frac{\partial Q(Z, T)}{\partial T} + Q(Z, T) = |q(Z, T)|^2. \quad (7.4)$$

al usar $\mu^2 = 0$ en Ec. (6.23) entonces $R_{corr}(Z)$ tendrá la forma:

$$R_{corr}(\Omega, Z) = R(Z)(1 - 2i\gamma\mu\Omega\beta) \quad (7.5)$$

Esto nos da un coeficiente de ganancia espectral de la forma:

$$G(\Omega) = |\Omega| \sqrt{(D_2(Z))^2 \Omega^2 - 4D_2(Z)\rho_0 R(Z)(1 - 2i\gamma\mu\Omega\beta)} \quad (7.6)$$

La región de IM corresponde a la condición $\text{Im}(K) \neq 0$ y la que se define por los números de onda K imaginarios.

Entonces si graficamos la ecuación (7.6) podemos observar

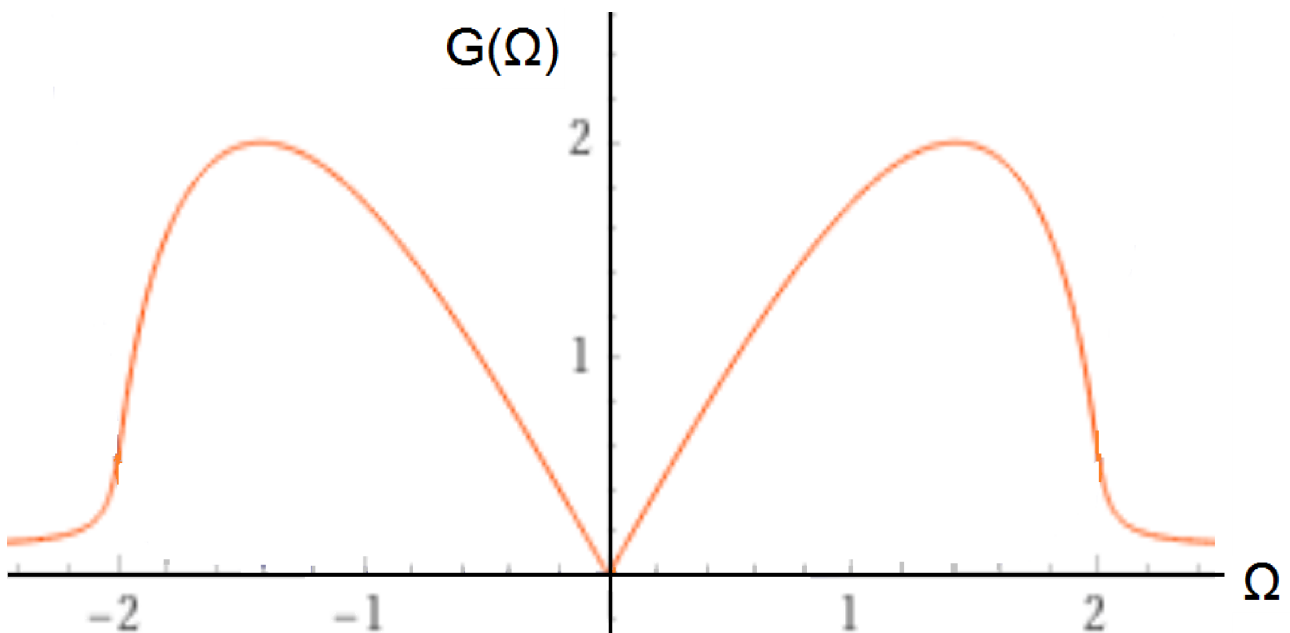


Figura 18: Gráfica de la ganancia espectral ecuación (7.6) con valores $D_2(Z)=R(Z)=\rho_0=1$, $2\gamma\mu=T_{Ram} = 0.1$, $\beta = 0.18$

Al graficar las figuras 17 y 18 en la misma gráfica tenemos:

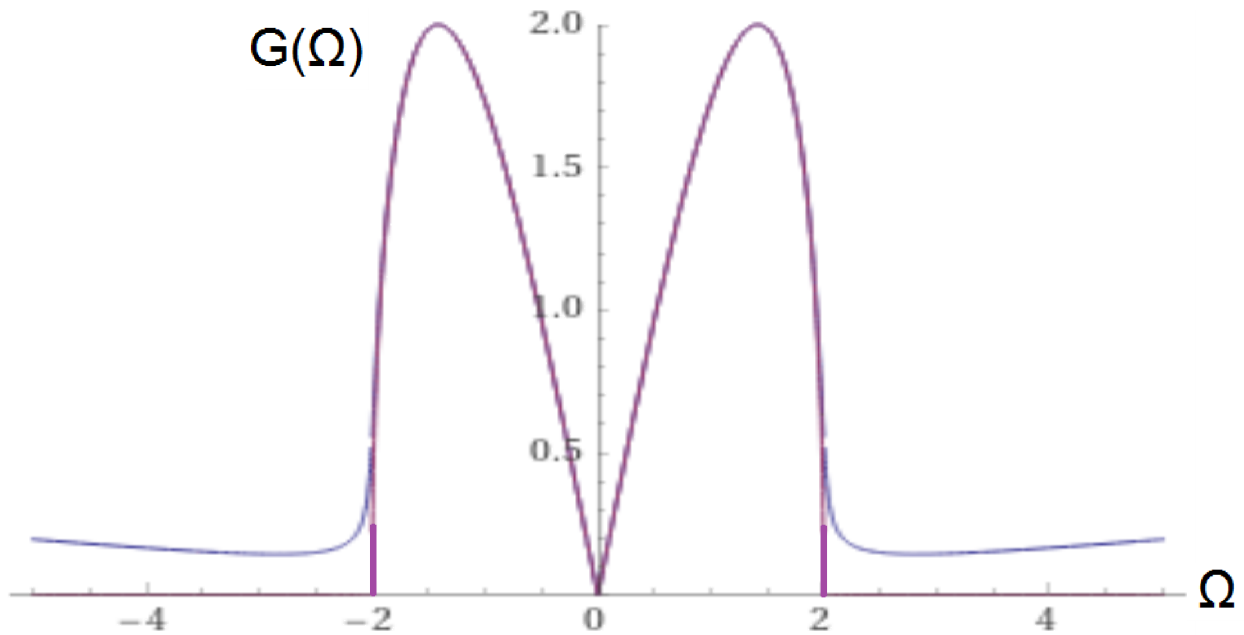


Figura 19: Gráfica de las figuras 17 y 18, (la línea morada es la figura 17 y la línea azul es la figura 18).

Como se observa en la figura 19 el efecto Raman aumenta la región de IM, tal que esta región aumenta linealmente con el aumento de las frecuencias mayores que la región estándar.

Si comparamos con el sistema de NLSE estándar donde se presenta la inestabilidad modulacional al que no es afectado por el efecto Raman es posible también observar como este incrementa la IM, como se puede apreciar en la figura 20.

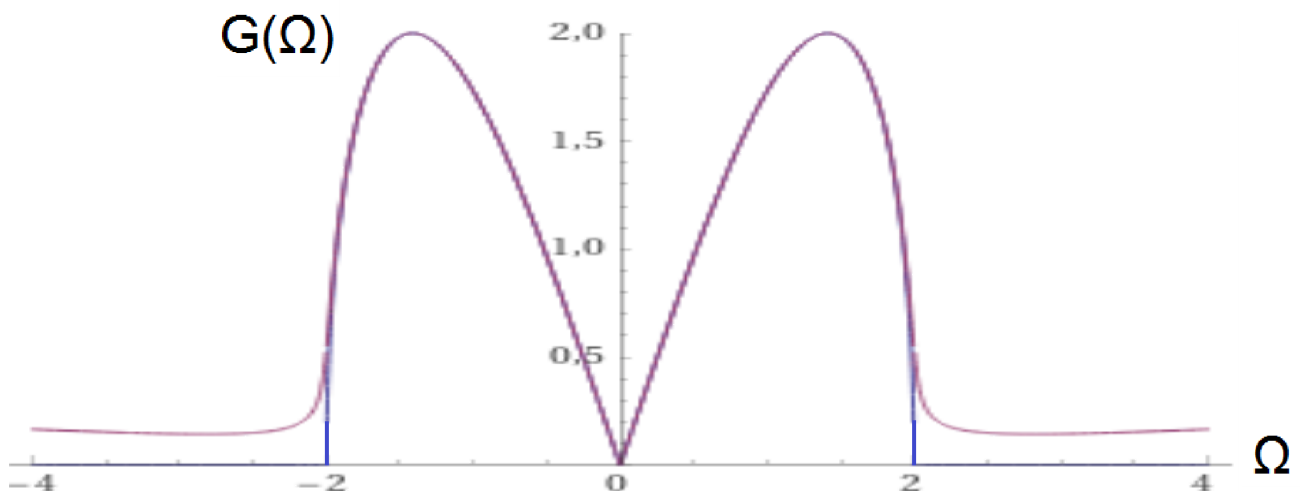


Figura 20: Comparación de la gráfica de la figura 2 (línea azul) con la gráfica de la figura 18 (línea morada).

Finalmente para concluir la discusión de resultados se muestra a continuación gráficas de la ecuación (7.6) con diferentes parámetros para observar como la auto-dispersión de Raman afecta la IM.

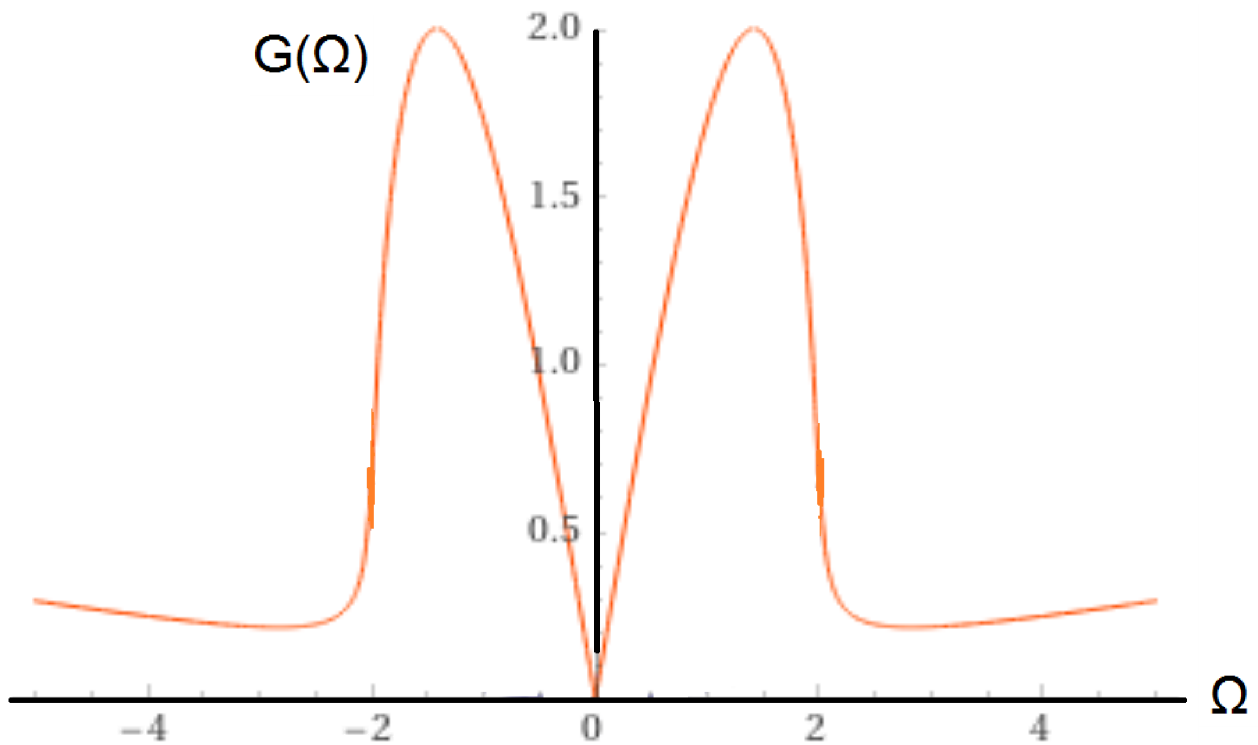


Figura 21: Gráfica de la función (7.6) con parámetros: $D_2(Z)=1$, $R(Z)=1$, $\rho_0=1$, $2\gamma\mu=T_{Ram}=0.15$ y $\beta=0.18$

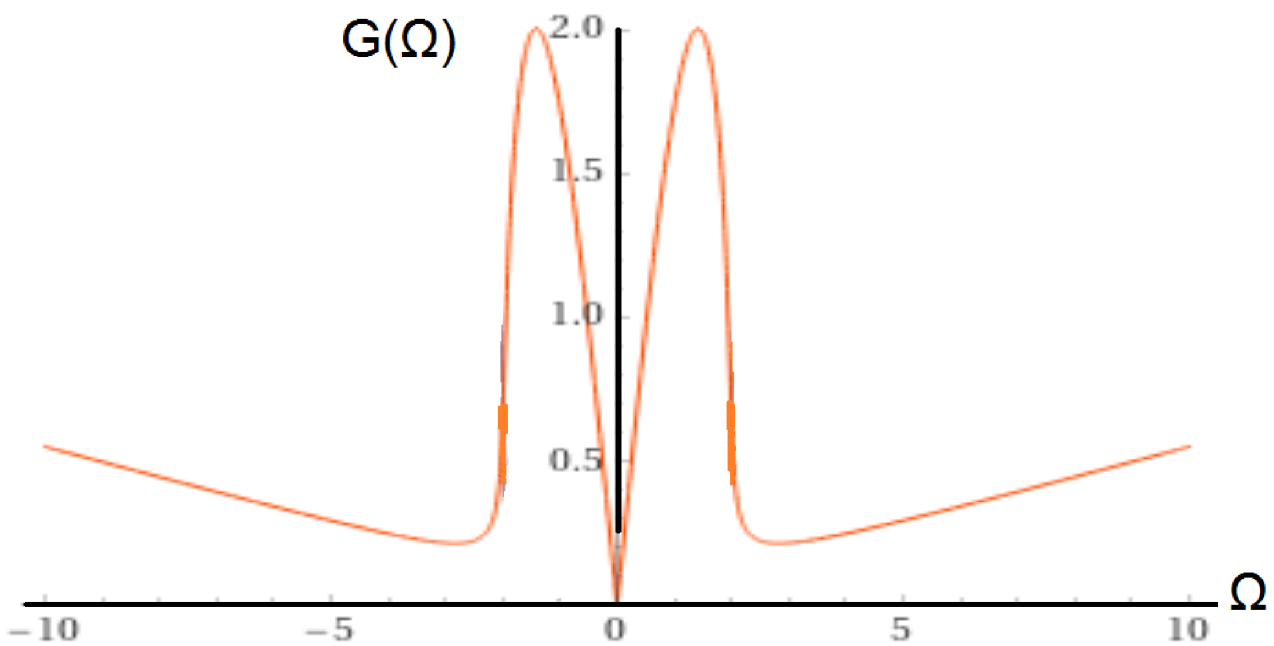


Figura 22: Misma gráfica de la figura 21 pero con valores extendidos de Ω donde se observa como la región de IM aumenta linealmente con el aumento de las frecuencias mayores que la región estándar.

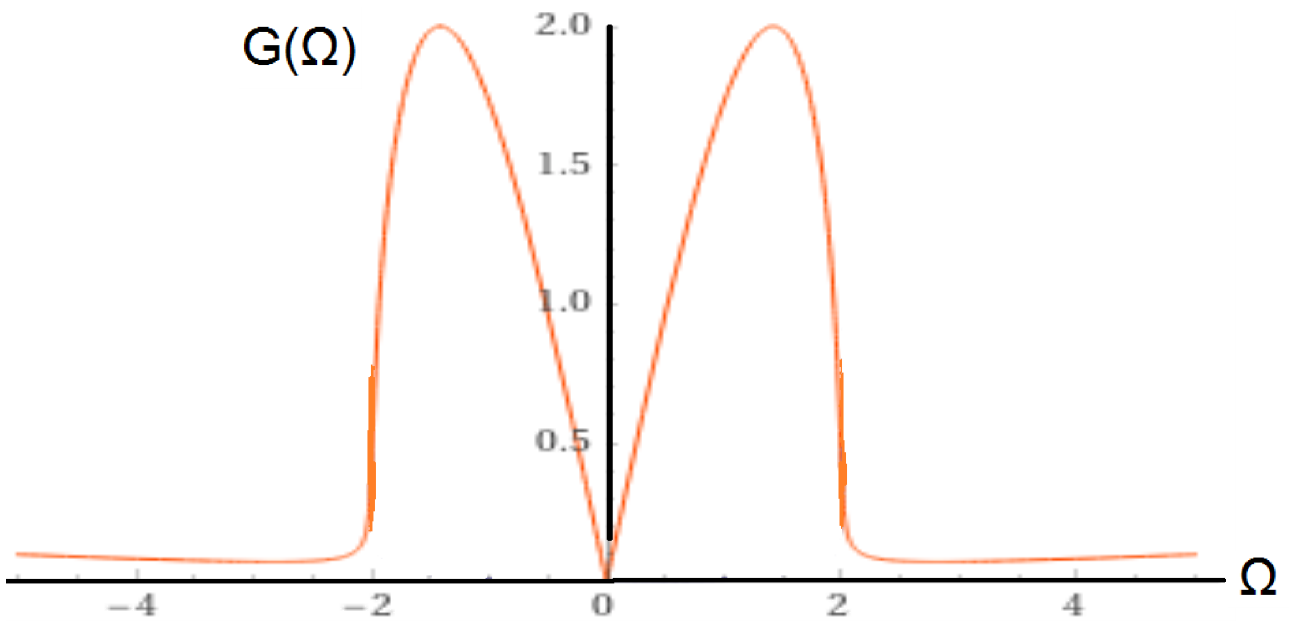


Figura 23: Gráfica de la función (7.6) con parámetros: $D_2(Z)=1$, $R(Z)=1$, $\rho_0=1$, $2\gamma\mu=T_{Ram}=0.05$ y $\beta=0.18$

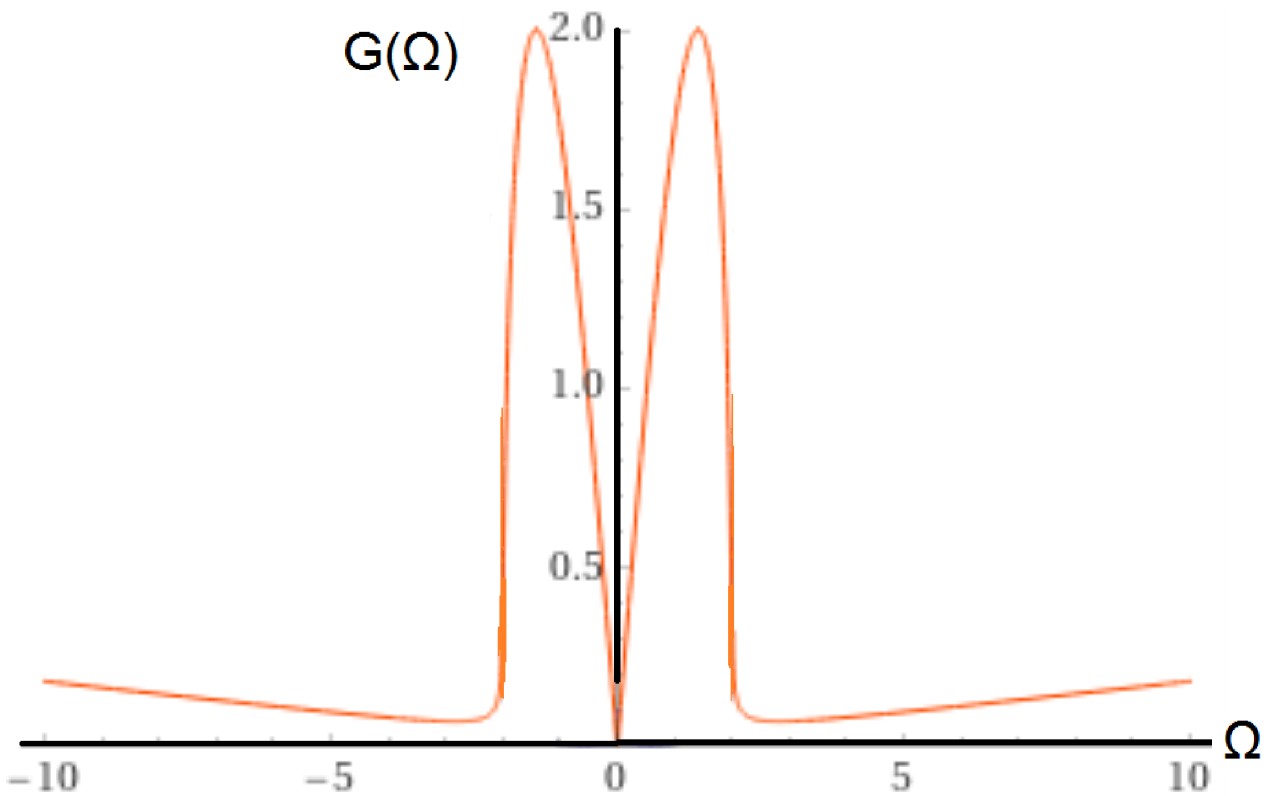


Figura 24: Misma gráfica de la figura 23 pero con valores extendidos de Ω donde se observa como la región de IM aumenta linealmente con el aumento de las frecuencias mayores que la región estándar.

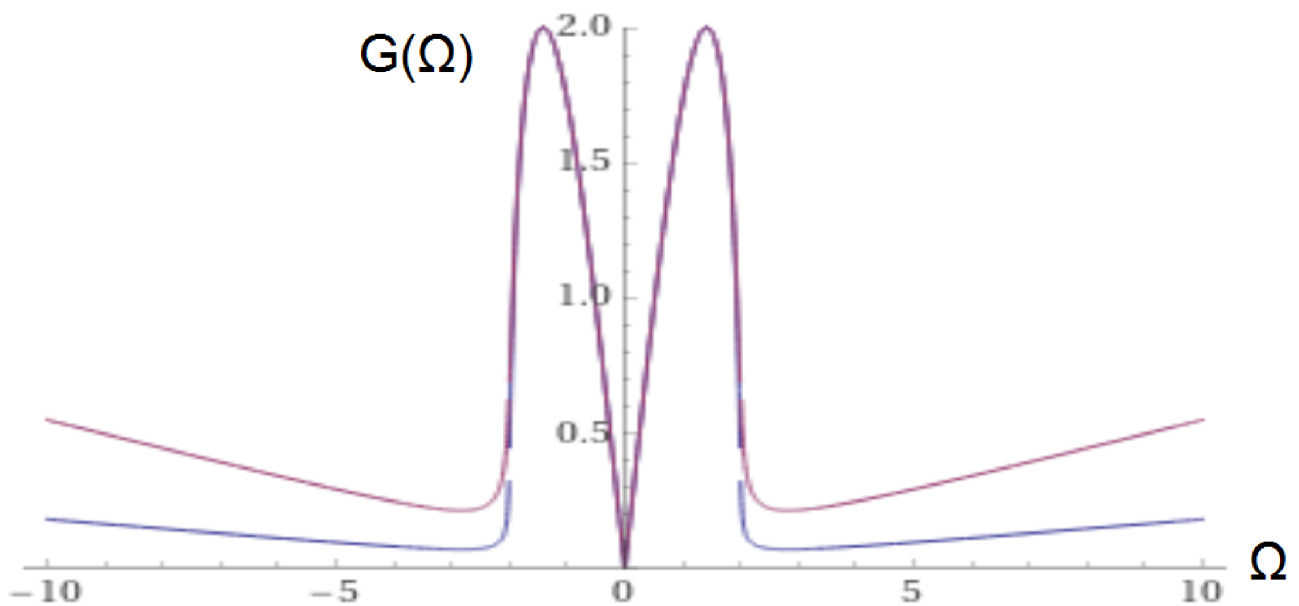


Figura 25: Gráfica de la figuras 22 (línea morada) y figura 24 (línea azul) donde se puede observar como el factor T_{Ram} incrementa la IM cuando es mayor (T_{Ram} (línea morada) $>$ T_{Ram} (línea azul))

Ahora si tenemos valores para $D_2(Z)=\exp(-\beta Z)$ con $\beta= .1$, $R(Z)= 1$, $2\gamma\mu=T_{Ram}=.15$ y $\rho_0= 1$ en la ecuación (7.6) podemos observar como influye el coeficiente de dispersión de segundo orden para valores $\neq 1$:

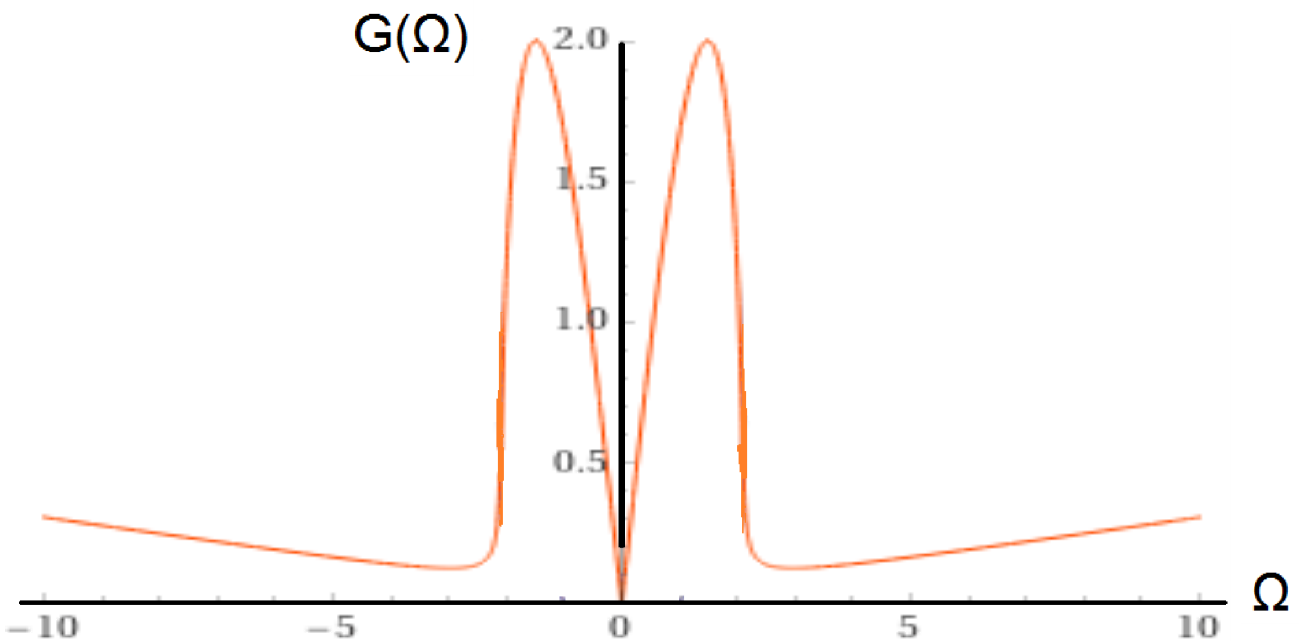


Figura 26: Gráfica de la ecuación (7.6) para un valor de $Z=1$ con parámetros $D_2(Z)=\exp(-\beta Z)$ con $\beta= .1$, $R(Z)= 1$, $2\gamma\mu=T_{Ram}=.15$ y $\rho_0= 1$

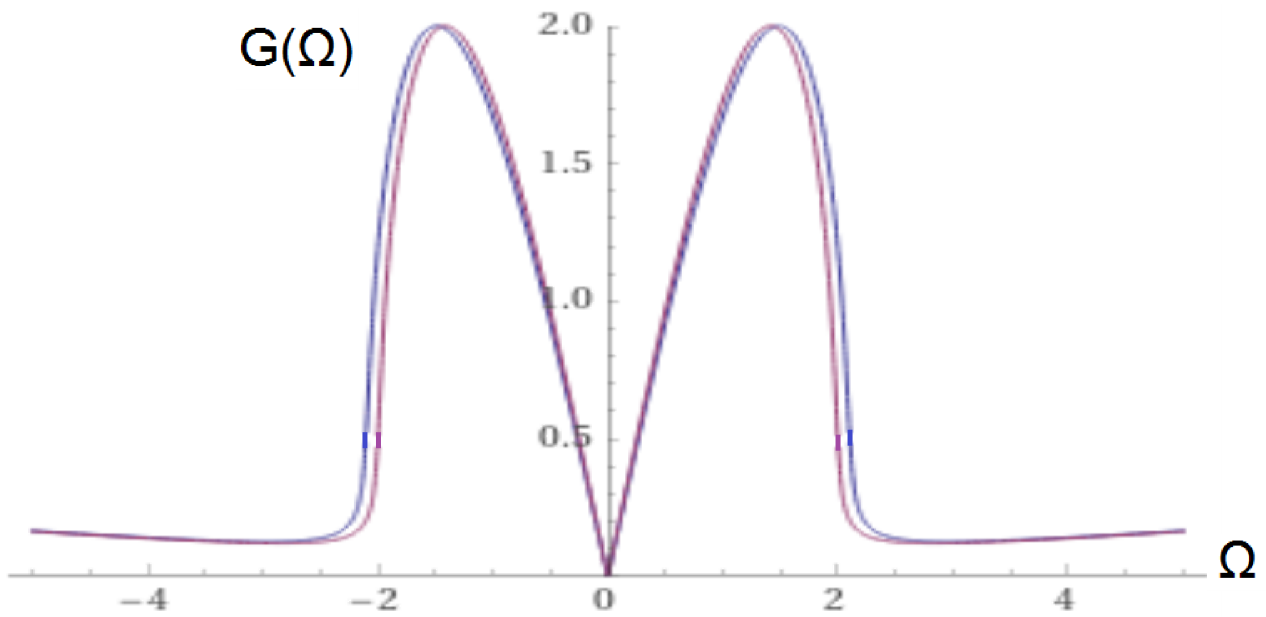


Figura 27: Comparación de la gráfica de la figura 26 que tiene un valor de dispersión de exponencial negativo $e^{-\beta Z}$ (línea azul) comparada con ella misma pero donde la dispersión es igual a 1 (línea morada).

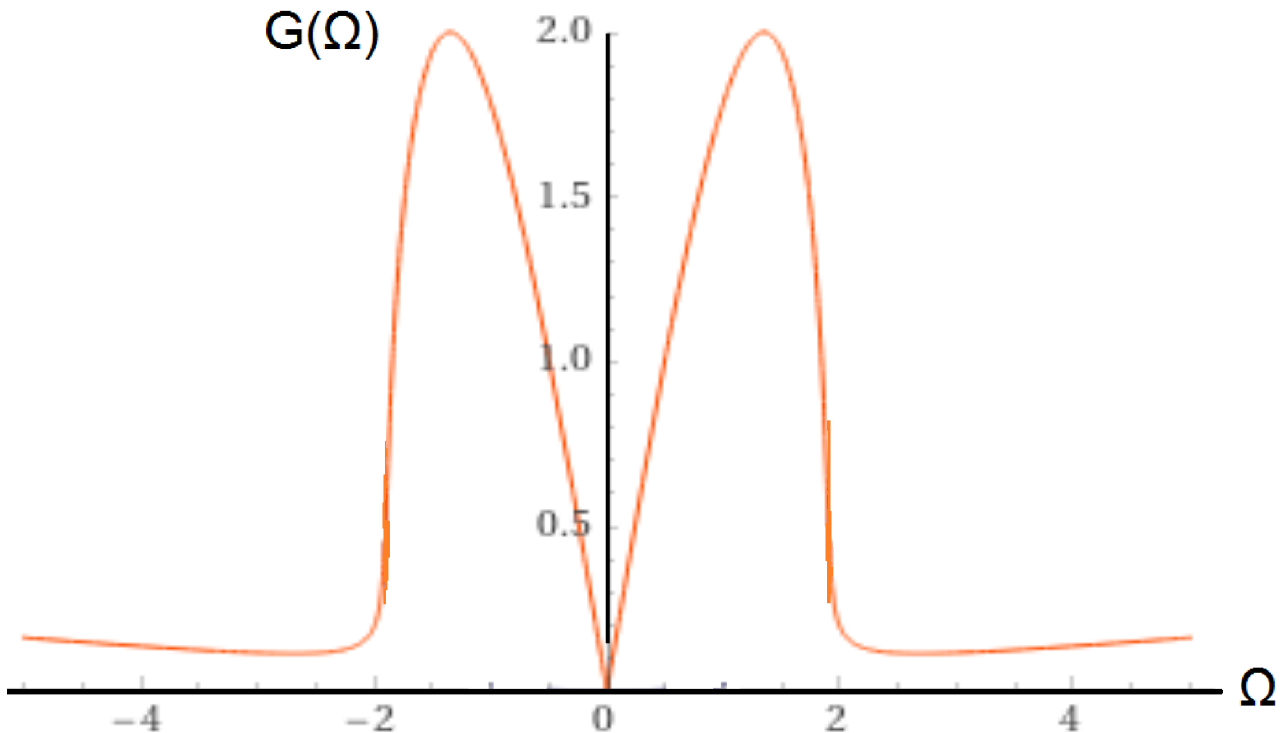


Figura 28: Gráfica de la ecuación (7.6) para un valor de $Z=1$ con parámetros $D_2(Z)=\exp(\beta Z)$ con $\beta= .1$, $R(Z)= 1$, $2\gamma\mu=T_{Ram}=.15$ y $\rho_0= 1$

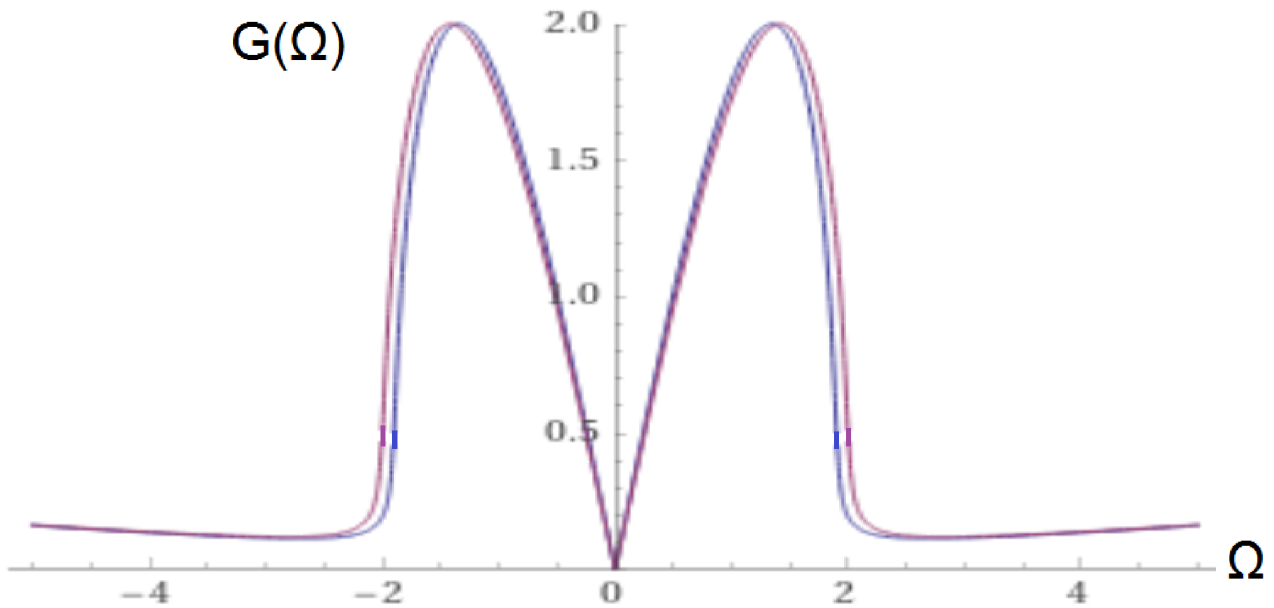


Figura 29: Comparación de la grafica de la figura 28 que tiene un valor de dispersión de exponencial positivo $e^{(\beta Z)}$ (línea azul) comparada con ella misma pero donde la dispersión es igual a 1(línea morada).

Al analizar las figuras 28 y 29 se puede observar que cuando la dispersión es de la forma de exponencial negativo ($e^{-\beta Z}$) aumenta la región de IM a comparación de cuando es de la forma de exponencial positivo ($e^{\beta Z}$) que reduce la región de IM.

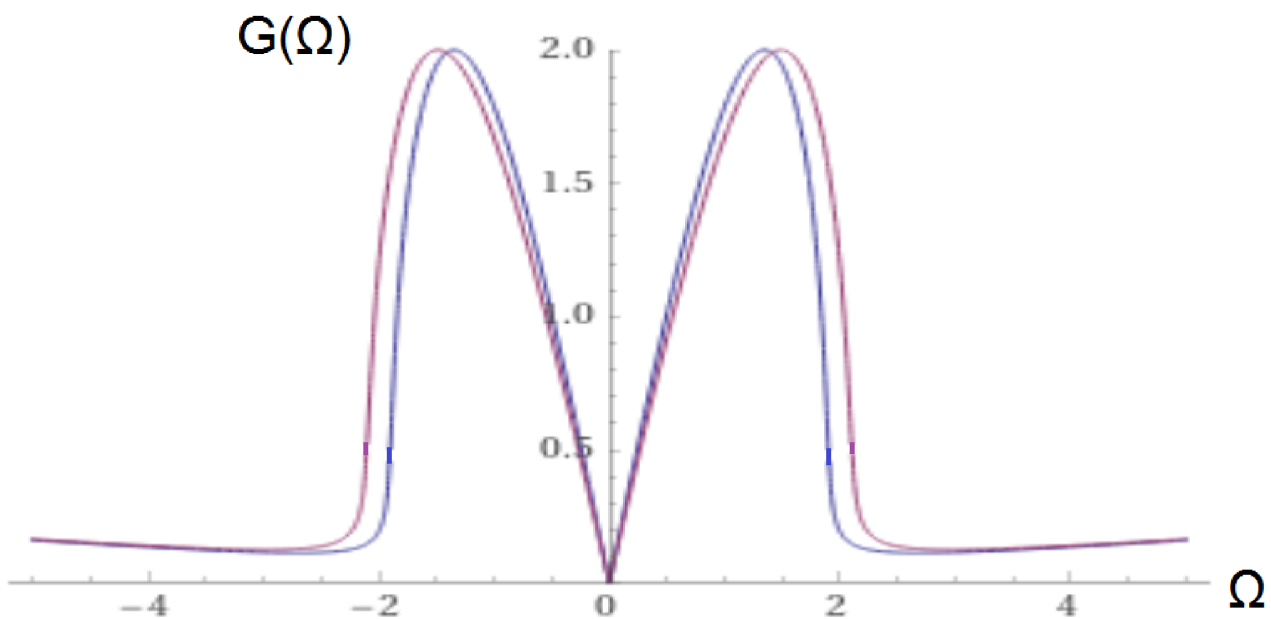


Figura 30: Gráficas del coeficiente de ganancia espectral con una dispersión de forma exponencial positiva ($e^{\beta Z}$) (línea azul) y una con dispersión de forma exponencial negativa ($e^{-\beta Z}$) (línea morada), donde se observa que la region de IM es mayor para la exponencial negativa

8 Conclusiones.

Como la inestabilidad modulacional es un problema básico en la física no lineal moderna, en la cual en los últimos años ha demostrado que puede ser de gran ayuda en la generación de métodos de aceleración de partículas cargadas (como en el experimento AWAKE), por lo que controlar los parámetros en los sistemas que generan este fenómeno es importante, en esta tesis se estudió el caso particular del sistema que es descrito por la ecuación no lineal de Schrödinger bajo el efecto de auto-dispersión de Raman, en el análisis de resultados se pudo observar como el efecto Raman influye en la región de IM en el sistema al graficar parámetros diferentes del tiempo de relajación de la no linealidad de Raman $T_{\text{Ram}} = 2\gamma\mu$, por lo que fue posible apreciar como estos valores influyen en la región de IM en el sistema y comparandolo con otros sistemas que presentan IM, pero no son afectados por el efecto de auto-dispersión de Raman, también se observaron los efectos que ocasiona el coeficiente de dispersión de segundo orden $D_2(Z)$ en la región de IM al tener un valor de función exponencial positiva ($e^{\beta Z}$) o negativa ($e^{-\beta Z}$) visualizando las gráficas se nota que la forma de la función exponencial negativa genera más región de IM que la función exponencial positiva.

Los aceleradores de campo de estela de plasma al ser sistemas en los que se puede generar la IM son un campo de interés en el estudio para este efecto, ya que se pueden utilizar diferentes modelos que describan la dinámica de los plasmas y generar diferentes sistemas que generen IM para así poder generar mayor energía en las colisiones de partículas cargadas lo cual seria de gran interés para la física de partículas.

9 Referencias de consulta

- [1] V.E. Zakharov, L.A. Ostrovsky, Modulation instability: The beginning, *Physica D* 238 (2009) 540-548.
- [2] N. F. Pilipetskii, A. R. Rustamov, Observation of Self-focusing of Light in Liquid, *JETP Letters*. 2 (2) (1965) 55-56.
- [3] T.B. Benjamin, J.E. Feir, The disintegration of wavetrains on deep water. Part 1: theory, *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 417-430.
- [4] A. A. Galeev, R. Z. Sagdeev, V. D. Shapiro, and V. I. Shevchenko, Relaxation of high-current electron beams and the modulational instability, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 72, 507-517 (1977).
- [5] V. I. Bespalov, V. I. Talanov, Filamentary structure of light beams in nonlinear liquids, *JETP Lett.* 3, 307-310 (1966).
- [6] T. Taniuti, H. Washimi, Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, *Phys. Rev. Lett.* 21, (1968).
- [7] Y. H. Ichikawa, T. Suzuki, T. Taniuti, Modulational instability of electron plasma wave, *J. Phys. Soc. Japan* 34, 1089 (1973).
- [8] A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975
- [9] R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y.R. Shen, Eds., *Self-Focusing: Past and Present*. Topics in Applied Physics, Vol. 114, Springer Science+Business Media, LLC, New York.
- [10] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240.

- [11] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-deVries equation, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095 (1967).
- [12] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *JETP* 34, 62 (1972).
- [13] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur, Nonlinear evolution equations of physical significance, *Phys. Rev. Lett.* 31, 125-127 (1973).
- [14] A. Hasegawa, Generation of a train of soliton pulses by unduced modulational instability in optical fibers, *Opt. Lett.* 9 (1984) 288-290.
- [15] K. Tai, A. Hasegawa, A. Tomita, Observation of modulational instability in optical fibers, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 135.
- [16] B. Quinn, S. Nazarenko, C. Connaughton, S. Gallagher, B. Hnat, Modulational Instability in Basic Plasma and Geophysical Models, in *Zonal Jets*, Eds.: B. Galperin, P. L. Read, Cambridge University Press, 2019.
- [17] F. Il Ndzana, A. Mohamadou, T. C. Kofané, Modulational instability in the IN THE cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation through the variational approach, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, IC/2006/052, www.ictp.it/~pub_off , 2006.
- [18] K. V. Lotov, INSTABILITY OF LONG DRIVING BEAMS IN PLASMA WAKE-FIELD ACCELERATORS, *Nucl. Instr. Methods A*, 806-808 (1998).
- [19] V I Trunov et al., Laser-driven plasma wakefield electron acceleration and coherent femtosecond pulse generation in X-ray and gamma ranges, *J. Phys.:* Conf. Ser. 793 012028 (2017).

- [20] E. Gschwendtner et al., AWAKE, The Advanced Proton Driven Plasma Wakefield Acceleration Experiment at CERN, *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research*, A 829, 76–82 (2016).
- [21] M. Moreira, J. Vieira, P. Muggli, Signatures of the self-modulation instability of relativistic proton bunches in the AWAKE experiment, *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research*, A 909, 343–345 (2018).
- [22] E. Gschwendtner et al. , Proton-driven plasma wakefield acceleration in AWAKE. *Phil. Trans. R. Soc. A 377*: 20180418 (2019).
- [23] F. Braunmüller et al. , Proton Bunch Self-Modulation in Plasma with Density Gradient, *Phys. Rev. Lett.* 125, 264801 (2020).
- [24] F. Batsch et al., Transition between Instability and Seeded Self-Modulation of a Relativistic Particle Bunch in Plasma, *Phys. Rev. Lett.* 126, 164802 (2021).
- [25] A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [26] G. P. Agrawal, *Optics and Photonics*, 3rd edition, Institute of Optics University of Rochester, 2001.
- [27] E. M. Dianov, A. B. Grudinin, A.M. Prokhorov, V.N. Serkin, Nonlinear transformation of laser radiation and generation of Raman solitons in optical fibers, Ch. 7 in: J.R. Taylor (Ed.), *Optical Solitons-Theory and Experiment*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, pp. 197-265.
- [28] M. A. Agüero Granados, V. Serkin, *Introducción a la Teoría de Solitones*, Ediciones y Gráficos Eón, 2021.
- [29] Juan Gabriel Belmonte Beitia, *ECUACIONES DE SCHRÖDINGER NO LINEALES CON NO LINEALIDAD ESPACIALMENTE INHOMOGÉNEA*, Ediciones de la

Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca, 2009

[30] V.E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.* 9 (1968) 8694. Transl. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 9 (1968) 190-194.

[31] R. Y. Chiao , T. K. Gustafson , and P. L. Kelley, Self-Focusing of Optical Beams, School of Engineering, University of California, Merced, California, USA, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, California, USA, Department of Electrical and Computer Engineering, Tufts University, Medford, Massachusetts.

10 Anexos

10.1 Definiciones.

Capitulo 3

Periodo wakefield: El periodo wakefield $2\pi c/\omega_p$ es el periodo de la estela de campo, donde c es la velocidad de la luz y ω_p es la frecuencia del plasma.

Factor relativista: El factor relativista γ_b es el llamado factor de Lorentz del haz de electrones (conductor) definido usualmente como $\gamma \equiv dt/d\mathcal{T} = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, donde \mathcal{T} es el tiempo propio y β es la velocidad relativa a la de la luz (v/c).

Betrón: Un betatrón es un acelerador de partículas desarrollado por Donald Kerst en la Universidad de Illinois en 1940 para acelerar electrones, es esencialmente un transformador con un gran tubo vacío como su bobina secundaria. Una corriente alterna en la bobina primaria acelera electrones, en el tubo de vacío que hace de bobina secundaria, haciéndolos girar alrededor de una trayectoria circular.

Efecto Compton: El efecto Compton (o dispersión Compton) consiste en el aumento de la longitud de onda de un fotón cuando choca con un electrón libre y pierde parte de su energía. La frecuencia o la longitud de onda de la radiación dispersada depende únicamente del ángulo de dispersión.

Budker: El Instituto Budker de Física Nuclear es uno de los principales centros de estudios avanzados de física nuclear en Rusia.

Capítulo 5

Autoenfoco: El autoenfoco es un proceso óptico no lineal inducido por el cambio en el índice de refracción de los materiales expuestos a una radiación electromagnética intensa.

Autoenfoco en plasma: Los avances en la tecnología láser han permitido la observación del autoenfoco en la interacción de pulsos láser intensos con plasmas. El autoenfoco en plasma puede ocurrir a través de efectos térmicos, relativistas y ponderomotrices. El autoenfoco térmico se debe al calentamiento por colisión de un plasma expuesto a la radiación electromagnética: el aumento de la temperatura induce una expansión hidrodinámica que conduce a un aumento del índice de refracción y un mayor calentamiento.

Anisotropía: La anisotropía (opuesta de isotropía) es la propiedad general de la materia según la cual cualidades como elasticidad, temperatura, conductividad, velocidad de propagación de la luz, etc., varían según la dirección en que son examinadas. Algo anisótropo podrá presentar diferentes características según la dirección.

Electrostricción: La Electrostricción es una propiedad de todos los dieléctricos que provoca una deformación bajo el efecto de un campo eléctrico.

Susceptibilidad eléctrica: La susceptibilidad eléctrica χ_e es la relación tensorial entre un campo eléctrico aplicado E y la polarización eléctrica inducida P . En la mayoría de las aplicaciones este tensor es utilizado como una constante de proporcionalidad.

Componente de Fourier: Componente en la que se puede expresar espectralmente toda señal periódica; consiste en unas frecuencias fundamentales y series de armónicos que son múltiplos exactos de sus frecuencias fundamentales.

Polarización: La polarización electromagnética es una propiedad de las ondas que pueden oscilar con más de una orientación.

Dispersión de luz por luz: Es un fenómeno muy raro en el que dos fotones, partículas de luz, interactúan y producen otro par de fotones.

Flujo zonal: En experimentos de plasma de fusión confinado toroidalmente, el término flujo zonal significa un flujo de plasma dentro de una superficie magnética, principalmente en la dirección poloidal. Este uso está inspirado en la analogía entre la naturaleza casi bidimensional de los flujos atmosféricos y oceánicos a gran escala, donde zonal significa latitudinal, y la naturaleza casi bidimensional similar de los flujos de baja frecuencia en un plasma fuertemente magnetizado.

Distribución de Boltzmann: En mecánica estadística y matemáticas, una distribución de Boltzmann (también llamada distribución de Gibbs) es una distribución de probabilidad o medida de probabilidad que da la probabilidad de que un sistema se encuentre en un cierto estado en función de la energía de ese estado y la temperatura del sistema.

Radio de Larmor: El radio de giro (también conocido como radio de Larmor o radio de ciclotrón) es el radio del movimiento circular de una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme.

Ondas de Rossby: Las ondas de Rossby barotrópicas denominadas así por Carl-Gustaf Rossby que las identificó en 1939, son oscilaciones que se producen en los fluidos geofísicos (océano y atmósfera) y que tienen su origen en el principio de conservación de la vorticidad potencial.

Onda de deriva: En la física del plasma, una onda de deriva es un tipo de excitación colectiva impulsada por un gradiente de presión dentro de un plasma magnetizado, que puede desestabilizarse por diferencias entre el movimiento de iones y

electrones (entonces conocido como inestabilidad de onda de deriva o inestabilidad de deriva).

Metodo WKB: En física matemática, la aproximación WKB o método WKB es un método para encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes que varían espacialmente.

Plasma frío: Un plasma no térmico, plasma frío o plasma sin equilibrio es un plasma que no está en equilibrio termodinámico, porque la temperatura de los electrones es mucho más caliente que la temperatura de las especies pesadas (iones y neutros). Como solo los electrones están termalizados, su distribución de velocidad de Maxwell Boltzmann es muy diferente de la distribución de velocidad de los iones.

Plasmón: El plasmón es una cuasipartícula que, estudiado desde la Mecánica cuántica, corresponde un cuanto de oscilación del plasma, mientras que desde la Física clásica, describe al campo electromagnético producido por las oscilaciones colectivas de los electrones de conducción en un material.