Retos de FÍSICA NUCLEAR y FENÓMENOS NO LINEALES

BELYAEVA • AGUERO • PAVÓN
(Coords.)

Mc Graw Hill

Retos de **FÍSICA NUCLEAR** y **FENÓMENOS NO LINEALES**

Tatyana Belyaeva Leonidovna
Maximo Augusto Aguero Granados
Omar Pavón Torres
(*Coords.*)

Ciudad de México Bangkok Beijing Bogotá Chicago Columbus Dubai Dubuque
Hong Kong Kuala Lumpur Londres Los Ángeles Madrid Milán Nueva Delhi
Nueva York Seúl Shangai Sídney Singapur Taipei Toronto

McGraw Hill
Director general para Latinoamérica:
Martín Chueco
Director editorial:
Hans Serrano
Desarrollador de contenido Sr.:
Yanith Betsabé Torres Ruiz
Gerente de arte e integración de servicios digitales:
José Palacios Hernández
Supervisor de arte e integración de servicios digitales:
Juan Silverio Amandi Zárate

Universidad Autónoma del Estado de México
Rector: Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados:
Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Director de la Facultad de Ciencias: Doctor en Ciencias
Luis Enrique Díaz Sánchez
Directora de Difusión y Promoción de la Investigación y los Estudios Avanzados: Maestra en Administración
Susana García Hernández

Retos de física nuclear y fenómenos no lineales / Tatyana Belyaeva Leonidovna, Maximo Augusto Aguero Granados y Omar Pavón Torres
1ª ed.
Ciudad de México : McGraw Hill ; Toluca, Estado de México : Universidad Autónoma del Estado de México, 2023.
vi, 106 p. : il. ; 23 cm.

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN: 978-607-633-585-7

1. Física nuclear - Investigaciones.
2. Ecuaciones diferenciales no lineales - Investigaciones.
I. Belyaeva Leonidovna, Tatyana, coord.
II. Aguero Granados, Maximo Augusto, coord.
III. Pavón Torres, Omar, coord

QC786.5 .R47 2023

Libro sometido a sistema antiplagio y publicado con la previa revisión y aprobación de pares doble ciego externos, que forman parte del Sistema Nacional de Investigadores, niveles II y III. Expediente de obra 333/05/2022, Dirección de Difusión y Promoción de la Investigación y los Estudios Avanzados, adscrita a la Secretaría de Investigación y Estudios Avanzados de la Universidad Autónoma del Estado de México.

D.R. © 2023, Universidad Autónoma del Estado de México
Instituto Literario núm. 100 Ote., col. Centro
C.P. 50000, Toluca, Estado de México
www.uaemex.mx

D.R. © 2023, McGraw Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.
Edificio Punta Santa Fe, Prolongación Paseo de la Reforma 1015
Torre A, Piso 16, Álvaro Obregón C.P. 01376, CDMX, México
www.mheducation.com.mx

Primera edición: abril, 2023
ISBN 978-607-633-585-7 (impreso UAEMEX)
ISBN 978-607-15-2102-6 (impreso McGraw Hil)
ISBN 978-607-633-584-0 (PDF UAEMEX)
ISBN 978-607-15-2101-9 (PDF McGraw Hill)

Portada: Jean Paul Savage Inchaustegui

Esta obra queda sujeta a una licencia *Creative Commons* Atribución-No comercial-Sin derivadas 4.0 Internacional. Puede ser utilizada con fines educativos, informativos o culturales, ya que permite sólo descargar sus obras y compartirlas, siempre y cuando den crédito, pero no pueden cambiarlas de forma alguna ni usarlas de manera comercial. Disponible para su descarga en acceso abierto en: ri.uaemex.mx.

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Autónoma del Estado de México y, por características tipográficas, de McGraw Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.

El contenido de esta publicación es responsabilidad de los autores.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 XXX 28 27 26 25 24 23
Impreso en México *Printed in Mexico*

ÍNDICE

PREFACIO v

CAPÍTULO 1 El método de expansión F generalizado 1
José María Mondragón Alvarez, Maximo Augusto Aguero Granados, Jorge Mauricio Paulin Fuentes, Omar Pavón Torres

1. Introducción 1
2. Método de expansión F generalizado 2
3. Aplicación del método de expansión F generalizado 3
   3.1 Ecuación de Kadomtsev-Petviashvili 3
   3.2 Ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables 6
4. Conclusiones 9
5. Referencias 10

CAPÍTULO 2 Supersimetría paramétrica en bloques de guías de onda 11
Maximino Pérez Maldonado, Haret-Codratian Rosu

1. Introducción 11
2. Análisis modal de bloques de guía de ondas 12
3. Supersimetría de guías de onda planas 14
4. Aplicación de perfiles de índice de refracción en ley de potencias 15
   4.1 Modos TE 15
   4.2 Modo TM 18
5. Conclusiones 23
6. Referencias 23

CAPÍTULO 3 Inestabilidad modulacional en la ecuación no-autónoma cúbica-quinta de Schrödinger 25
Maximo Augusto Aguero Granados, Omar Pavón Torres, Misael Erikson Maguiña Palma, Juan Ramón Collantes Collantes

1. Introducción 25
2. Inestabilidad modulacional 26
3. Conclusiones 30
4. Referencias 30

CAPÍTULO 4 Integrabilidad de las figuras de equilibrio de una masa fluida rotante 31
Rolando Alvarado Flores, Alberto Vélez Rodríguez

1. Introducción 31
   1.1 Notación 33
2. Descripción del problema físico y la ecuación integral clásica 33
3. Los métodos de solución 36
4. Las condiciones de integrabilidad y la existencia de soluciones 37
   4.1 El teorema de Frobenius 37
   4.2 Las representaciones analíticas de la superficie 38
   4.3 El caso de las derivadas cruzadas 38
   4.4 El corchete de Lie de los campos vectoriales 40
5. El elipsoide de Maclaurin 45
6. Conclusiones 46
7. Referencias 47

CAPÍTULO 5 Exploración del potencial amortiguado y corrido de Lennard-Jones en la fase líquida y en la interfaz líquido-vapor 49
Lourdes Reyes Cervantes, Gustavo Torres García, Benjamín Ibarra Tandi, Jorge López Lemus
1. Introducción 49
2. Ecuaciones relevantes 51
3. Detalles de las simulaciones 54
3.1 Simulaciones en bulto 54
3.2 Simulaciones en el líquido-vapor 55
4. Resultados 55
5. Conclusiones 60
6. Referencias 61

CAPÍTULO 6 Potencial óptico extendido para el sistema con halo neutrónico $^{6}He + {}^{64}Zn$ 63
Elí Francisco Aguilera Reyes, Juan Carlos Morales Rivera, Fatemeh Torabi
1. Introducción 63
2. Potencial óptico extendido 65
3. Resultados 66
3.1 Discusión 67
4. Conclusiones 68
5. Referencias 68

CAPÍTULO 7 Trampas magnéticas esféricas para confinamiento de plasmas 69
Amado Augusto Espinoza Garrido, David Antonio Pérez Carlos
1. Introducción 69
2. Solución axisimétrica general de la ecuación $\nabla \times \mathbf{a} = k\mathbf{a}$ 71
3. Análisis de paridad 73
4. Lugares geométricos 73
4.1 Lugares geométricos magnéticos 73
4.2 Lugares geométricos eléctricos 75
5. Densidad de energía 76
6. El campo vectorial de Poynting 77
7. Conclusiones 78
8. Referencias 79

CAPÍTULO 8 Modelo interactivo en la métrica Lemaître-Tolman-Bondi 81
Roberto Carlos Blanquet Jaramillo, Germán Izquierdo, Roberto Sussman
1. Introducción 81
2. Métrica LTB, escalares cuasi-locales y energía oscura acoplada 82
3. Construcción del sistema dinámico adimensional 85
3.1 Sistema homogéneo y puntos críticos 87
3.2 Leyes de escala de los escalares cuasi-locales y singularidades 88
4. Perfiles iniciales, evolución y tiempo de colapso 90
5. Conclusiones 92
6. Referencias 93

CAPÍTULO 9 Ondas gravitacionales primordiales en modelos de energía oscura acoplada 97
Germán Izquierdo, Gildardo Alonzo, Jaime Besprosvany
1. Introducción 97
2. Metodología empleada 98
3. Resultados 101
4. Conclusiones 102
5. Referencias 102

EPÍLOGO 103
FICHAS CURRICULARES AUTORES 105

PREFACIO

En esta obra se presentan trabajos de investigación que están en la frontera de los principales problemas de la física de ciencias nucleares y fenómenos no lineales. A lo largo de los nueve capítulos que contiene la presente edición se incluyen referencias actualizadas para los interesados en conocer más acerca de los temas referidos. Hasta ahora los diferentes temas que abarca el libro escasamente podían consultarse en un título único, por lo que en el pasado la consulta de la información debía acudir a diversos textos por separado. Este trabajo no sólo es valioso para introducir a estudiantes de posgrado e investigadores de física y matemáticas aplicadas al campo de ondas no lineales, partículas elementales, gravitación, procesos nucleares y ciencia de materiales, sino que también podría ser útil para científicos en otras disciplinas, al tomar en cuenta el progreso reciente en estas teorías, lo cual permite su incorporación a cualquier trabajo de investigación que pudiera beneficiarse de la información aquí tratada. La totalidad de los materiales en este libro son autónomos, con cálculos detallados cuidadosamente explicados. Por lo tanto, el lector debería poder entender los materiales de este libro sin mucha ayuda de otras fuentes. Aunque a menudo usamos ecuaciones lineales y no lineales familiares para desarrollar el análisis, los tratamientos que presentamos son en gran medida generales y pueden extenderse fácilmente a otras ecuaciones relacionadas.

En el primer capítulo se exponen características fundamentales del método de expansión F generalizado, aplicándose posteriormente a obtener soluciones exactas de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili y la ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables. En particular, se analizarán los casos donde el módulo de la función elíptica es igual a 1 y 0, obteniendo varias soluciones localizadas y soluciones de funciones trigonométricas.

El segundo capítulo está dedicado al desarrollo de un tratamiento supersimétrico de los modos transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM) en guías de onda planas, que presentan dependencia en la coordenada transversal para la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética descrita por una ley de potencias. Para materiales dieléctricos en guías de onda, el correspondiente índice de refracción compañero supersimétrico presenta una descripción isoespectral. También se aplica iteradamente un desarrollo jerárquico supersimétrico en la guía de onda asociada, que describe un filtrado de modos en la guía original.

El tercer capítulo está dedicado a la investigación de la inestabilidad modulacional (IM) inducida en el marco del modelo de la ecuación no lineal cúbica-quinta de Schrödinger (NLSE) no-autónomo, misma que posee la característica de ser no integrable bajo los esquemas conocidos del método de dispersión inversa o del método de Hirota. Se generaliza el algoritmo de la IM iniciado por Akira Hasegawa, el cual aplicamos a este sistema no-autónomo con dispersión y no linealidades variables. Se encuentran relaciones de dispersión que se acoplarán al número de ondas κ con la frecuencia de la perturbación ω, lo cual permitirá obtener regiones de estabilidad de la IM inducida debido a la no linealidad tipo Kerr.

En el capítulo 4 se estudia el problema de las figuras de equilibrio de una masa rotante con un eje de simetría. Las formulaciones más generales fueron dadas por Colin Maclaurin, Pierre Simon de Laplace, Adrien Marie Legendre, Carl Gustav Jacob Jacobi, Bernhard Riemann, Richard Dedekind, Subrahmanyan Chandrasekhar y muchos otros. En este artículo se reformula la cuestión mediante dos campos vectoriales y se calculan las condiciones de integrabilidad de los mismos. Esto lleva a condiciones que debe satisfacer el potencial para que existan las superficies solución. El criterio utilizado es la conmutatividad de los corchetes de Lie, así como el teorema de Frobenius. De manera sorprendente, la simetría rotacional del potencial en el plano transversal al eje de giro se muestra capaz de reducir todo el conjunto de condiciones de consistencia a unas pocas condiciones tratables. Una vez en posesión de las condiciones de estas, se deduce un nuevo criterio de estabilidad.

Seguidamente, el capítulo 5 está dedicado a simulaciones de dinámica molecular en el ensamble canónico para calcular las propiedades termodinámicas y de transporte en fase líquida, y propiedades termo-

dinámicas en la interfase líquido-vapor para un fluido de Lennard-Jones. Las interacciones de largo alcance se estimaron mediante un potencial par amortiguado y corrido (AC). Se analizaron las capacidades de este potencial par AC en la fase líquida, así como en la interfase líquido-vapor. Los resultados de este trabajo se compararon con los obtenidos previamente con el MSE. En general se encontró un buen acuerdo con los datos obtenidos en un sistema homogéneo, pero para un sistema heterogéneo se observaron desviaciones entre las curvas obtenidas.

El capítulo 6 se dedica a la interacción entre dos núcleos y se define un potencial óptico extendido $U_{TOT} = V_{bare} + V_{Coul} - [iW_{int} + U_F + U_D]$, donde U_F y U_D son potenciales complejos de polarización que pueden ser asociados a acoplamientos del canal elástico con los correspondientes canales de fusión y directos, respectivamente. Para una energía dada, este potencial permite calcular tanto la distribución angular de dispersión elástica como la sección eficaz de fusión, así como la correspondiente sección eficaz total de reacción. Se encuentra un comportamiento atípico de la sección total de reacción, el cual se interpreta como una transición en los mecanismos de reacción directa. Se discute el efecto que el halo neutrónico de ^{6}He tiene sobre el potencial de polarización U_D.

En el capítulo 7 se exponen las soluciones exactas para las ecuaciones de Maxwell libres en el vacío, tales soluciones representan configuraciones del campo electromagnético estables que contienen trampas magnéticas, esto es, superficies magnéticas cerradas con un campo magnético con dependencia temporal y tangente en todos los puntos sobre la superficie, sin campo eléctrico sobre dichas superficies y formaciones anulares de campo eléctrico con campo eléctrico tangente en todos los puntos de los anillos, así como su magnitud dependiente del tiempo dentro de cada trampa magnética, y sin campo magnético sobre ellos. Dichas soluciones estacionarias son el resultado de la interferencia de ciertas soluciones de onda de las ecuaciones de Maxwell libres en el vacío. Las soluciones encontradas proveen pistas adicionales que podrían utilizarse para el diseño físico y geométrico de contenedores de plasma para los reactores de fusión nuclear, así como nuevos elementos para explicar la naturaleza y el origen de las bolas de fuego.

En el capítulo 8 se considera una métrica esféricamente simétrica no homogénea Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) que contiene una mezcla de materia bariónica, materia oscura fría y energía oscura con un término de acoplamiento proporcional a la suma de ambas densidades de energía de ambos fluidos. Reducimos las ecuaciones de Einstein a un sistema dinámico autónomo de siete dimensiones con ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y restricciones algebraicas. Estudiamos la evolución de las densidades de energía y los perfiles de curvatura en el espacio de las fases en detalle mediante un subespacio tridimensional y tetradimensional: una proyección homogénea, asociada a las soluciones de una métrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker y un subespacio que representa las fluctuaciones debidamente definidas. Asimismo, estudiamos los puntos críticos del sistema dinámico y resolvemos numéricamente las ecuaciones para un perfil de valores iniciales de densidades de energía y curvatura de interés, lo cual conduce a un colapso del tipo esférico. Finalmente calculamos el tiempo de dicho colapso para la formación de estructura.

Por último, el capítulo 9 está dedicado a las ondas gravitacionales. Como se sabe, la cosmología prevé la existencia de las ondas gravitacionales primordiales consistentes en perturbaciones del espacio-tiempo, que describe el universo a gran escala. Estas últimas se producen como consecuencia de la evolución de la métrica y tienen amplitudes dependientes de sus frecuencias, formando un fondo. Si bien el modelo de expansión temprana considerado (inflación) es muy importante en el proceso de evolución de las ondas primordiales, el modelo considerado de expansión acelerada actual (modelo de energía oscura) también tiene un impacto en el espectro resultante de estas. Dado que las ondas primordiales polarizan el fondo de radiación cósmica de microondas de una manera característica (polarización de tipo B), con los datos actuales es posible limitar la amplitud de las ondas a frecuencias muy pequeñas. En este capítulo discutiremos cómo los modelos de energía oscura acoplada generan diferentes espectros de ondas gravitacionales primordiales según el rango de los parámetros libres considerados, y cómo se pueden obtener límites a estos parámetros a partir de los datos de polarización tipo B existentes.

CAPÍTULO 1

EL MÉTODO DE EXPANSIÓN F GENERALIZADO

José María Mondragón Alvarez[1], Maximo Augusto Aguero Granados[1], Jorge Mauricio Paulin Fuentes[2], Omar Pavón Torres[1]

1. Introducción

El estudio de ecuaciones diferenciales parciales no lineales o NLPDE (por sus siglas en inglés) y sus soluciones exactas resulta fundamental para describir de manera exacta fenómenos y procesos físicos, químicos y biológicos. Ejemplos de lo anterior es el estudio de la dinámica no lineal del ADN [1], las fibras ópticas [2] y el condensado de Bose-Einstein [3]. Entre los métodos de solución podemos mencionar: el método de dispersión inversa [4], el método bilineal de Hirota [5], la transformación de Bäckund [6], el método de senos y cosenos [7], el método de la tanh [8], entre otros. Entre los métodos más recientes para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales destaca el método propuesto por Wang y Zhou [9], conocido como el método de expansión F. Si bien cada uno de los métodos mencionados anteriormente han sido aplicados en diferentes contextos y han demostrado cierta validez en el estudio de NLPDE, el método de expansión F generalizado [14] es un método directo más simple y efectivo comparado con los anteriores. Las nuevas soluciones encontradas al aplicar el método han servido para explicar diversos fenómenos.

En el presente trabajo se expondrán las ideas básicas del método de expansión F generalizado usando dos ecuaciones: en primer lugar, la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili, la cual describe ondas no lineales acústicas iónicas [10,11], asimismo, se revisará la ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables, misma que proporciona una descripción de la amplificación o atenuación de pulsos que se propagan de forma no lineal en una fibra óptica monomodo [12] y en tanques de olas hidrodinámicas [13].

[1] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, Instituto Literario núm. 100 Ote., col. Centro, C.P. 50000, Toluca, Estado de México, México. Enlace de correspondencia: jmondragona001@alumno.uaemex.mx

[2] División Académica de Ciencias Básicas, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Carretera Cunduacán-Jalpa km. 1, col. La Esmeralda, C.P. 86690, Cunduacán, Tabasco, México.

El manuscrito se encuentra organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se describe el método de expansión F generalizado; en la sección 3 se dan dos aplicaciones del método de expansión F generalizado, aplicado a la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili y a la ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables; en la sección 4 se presentan las conclusiones.

2. Método de expansión F generalizado

Una ecuación de evolución no lineal (NLEE) dada con variables independientes $X = (x, y, z, ..., t)$ y variable dependiente u lo representamos de la siguiente manera:

$$F(u, u_x, u_y, u_z, ..., u_{xy}, u_{yt}, u_{zt}, ..., u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}) = 0, \tag{1}$$

cuya solución es de la forma:

$$u = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \{a_i F^i(\xi) + b_i F^{-i}(\xi) + c_i F^{i-1}(\xi) F'(\xi) + d_i F^{-i}(\xi) F'(\xi)\}, \tag{2}$$

donde $a_0 = a_0(X)$, $a_i = a_i(X)$, $b_i = b_i(X)$, $c_i = c_i(X)$, $d_i = d_i(X)(i = 0, 1, 2, 3, ..., n)$ y $\xi = \xi(X)$ son funciones por determinar, además $F(\xi)$ y $F'(\xi)$ deben satisfacer la relación:

$$F'^2(\xi) = PF^4(\xi) + QF^2(\xi) + R, \tag{3}$$

y, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
F''(\xi) &= 2PF^3(\xi) + QF(\xi), \\
F'''(\xi) &= (6PF^2(\xi) + Q)F'(\xi), \\
F^{(4)}(\xi) &= 24P^2F^5(\xi) + 20PQF^3(\xi) + (Q^2 + 12PR)F(\xi), \\
F^{(5)}(\xi) &= (120P^2F^4(\xi) + 60PQF^2(\xi) + Q^2 + 12PR)F'(\xi), \\
&....
\end{aligned}$$

Donde P, Q y R son parámetros.

Dando diferentes valores a P, Q y R, de la ecuación (3) se pueden obtener diferentes soluciones en términos de las funciones elípticas de Jacobi.

Para determinar explícitamente u se siguen los siguientes pasos:

1. Determinar el número entero n, el cual se obtiene balanceando el término no lineal de mayor orden y el término de la derivada parcial de mayor orden.
2. Sustituir (2) junto con (3) y sus derivadas en la ecuación (1) y agrupar todos los coeficientes de $F'^i(\xi)F^j(\xi)(i = 0, 1; j = 0, \pm1, \pm2, ...)$, y posteriormente se fija cada coeficiente en cero para derivar un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales sobredeterminadas para a_0, a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ y ξ.
3. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, obtenido previamente para a_0, a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ y ξ mediante el uso de cálculo simbólico.
4. De la tabla 1 seleccionamos P, Q, R y $F(\xi)$, luego sustituirlos junto con a_0, a_i, b_i, c_i, d_i, y ξ que se obtuvieron en el paso 3 para obtener las soluciones de la función elíptica de Jacobi de la ecuación (1).

3. Aplicación del método de expansión F generalizado

3.1 Ecuación de Kadomtsev-Petviashvili

A continuación aplicaremos el método de expansión F generalizado para hallar soluciones exactas de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili de dimensión (3 + 1) [14]:

$$u_{xt} + 6(u_x)^2 + 6uu_{xx} + u_{xxxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. \tag{4}$$

Tabla 1. Relaciones entre los valores de P, Q, R y $F(\xi)$ en la ecuación (3), $(0 < m < 1)$ [14].

P	Q	R	F
m^2	$-(1+m^2)$	1	$sn\xi$, $cd\xi$
$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$cn\xi$
-1	$2-m^2$	m^2-1	$dn\xi$
1	$-(1+m^2)$	m^2	$ns\xi$, $dc\xi$
$1-m^2$	$2m^2-1$	$-m^2$	$nc\xi$
m^2-1	$2-m^2$	-1	$nd\xi$
$1-m^2$	$2-m^2$	1	$sc\xi$
1	$2-m^2$	$1-m^2$	$cs\xi$
1	$2m^2-1$	$-m^2(1-m^2)$	$ds\xi$
$-m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	$sd\xi$

Balanceando el término de mayor no linealidad uu_{xx} y el término con derivada de orden superior u_{xxxx} se obtiene que $n = 2$, entonces la ecuación (4) tiene la siguiente solución formal:

$$u = f(y,z,t) + g(y,z,t)F(\xi) + h(y,z,t)F(\xi)^2 + \frac{p(y,z,t)}{F(\xi)} + \frac{k(y,z,t)}{F(\xi)^2}, \tag{5}$$

donde $\xi = \alpha x + q(y, z, t)$, con α una constante no cero y f, g, h, k, p, q que son funciones a determinar.

Sustituyendo la ecuación (5) y (3) junto con sus derivadas dentro de la ecuación (4) y agrupando los coeficientes con la misma potencia de $F'^m F^n (m = 0{,}1;\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5$ y $\pm6)$. Después igualamos cada término a cero y obtenemos un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales para $p(y, z, t)$, $q(y, z, t)$, $h(y, z, t)$, $k(y, z, t)$, $f(y, z, t)$ y $g(y, z, t)$, las cuales son:

$$P^2\alpha^4 g + 3P\alpha^2 gh = 0, \tag{6}$$
$$2P^2\alpha^4 h + P\alpha^2 h^2 = 0, \tag{7}$$
$$R^2\alpha^4 p + 3R\alpha^2 kp = 0, \tag{8}$$
$$2R^2\alpha^4 k + R\alpha^2 k^2 = 0, \tag{9}$$
$$-\alpha p_t + 2p_z q_z + pq_{zz} + 2p_y q_y + pq_{yy} = 0, \tag{10}$$
$$-\alpha k_t + 2k_z q_z + kq_{zz} + 2k_y q_y + kq_{yy} = 0, \tag{11}$$
$$\alpha h_t - 2h_z q_z - hq_{zz} - 2h_y q_y - hq_{yy} = 0, \tag{12}$$
$$\alpha g_t - 2g_z q_z - g(q_{zz} + q_{yy}) - 2g_y q_y = 0, \tag{13}$$

$$g(Q^2\alpha^4 + 12PR\alpha^4 + 6Q\alpha^2 f + 36R\alpha^2 h + Q\alpha q_t - Qq_z^2 - Qq_y^2) - g_{yy} - g_{zz} + 6Q\alpha^2 hp = 0, \tag{14}$$

$$12Q\alpha^2 g^2 + 16Q^2\alpha^4 h + 72PR\alpha^4 h + 24Q\alpha^2 fh + 36R\alpha^2 h^2 + 4Qh(\alpha q_t - q_z^2 - q_y^2) - h_{yy} - h_{zz} = 0, \tag{15}$$

$$10PQ\alpha^4 g + 6P\alpha^2 fg + 27Q\alpha^2 gh + 6P\alpha^2 hp + Pg(\alpha q_t - q_z^2 - q_y^2) = 0, \tag{16}$$

$$3P\alpha^2 g^2 + 20PQ\alpha^4 h + 6P\alpha^2 fh + 8Q\alpha^2 h^2 + Ph(\alpha q_t - q_z^2 - q_y^2) = 0, \tag{17}$$

$$6Q\alpha^2 gk + Q^2\alpha^4 p + 12PR\alpha^4 p + 6Q\alpha^2 fp + 36P\alpha^2 kp + Qp(\alpha q_t - q_z^2 - q_y^2) - p_{yy} - p_{zz} = 0, \tag{18}$$

$$12Q\alpha^2 p^2 + 4k(4Q^2\alpha^4 + 18PR\alpha^4 + 6Q\alpha^2 f + Q\alpha q_t - Qq_z^2 - Qq_y^2) - k_{yy} - k_{zz} + 36P\alpha^2 k^2 = 0, \tag{19}$$

$$6R\alpha^2 gk + p(6R\alpha^2 f + 27Q\alpha^2 k + R(10Q\alpha^4 \alpha q_t - q_z^2 - q_y^2)) = 0, \tag{20}$$

$$20QR\alpha^4 k + 6R\alpha^2 fk + 8Q\alpha^2 k^2 + 3R\alpha^2 p^2 + Rk(\alpha q_t - q_z^2 - q_y^2) = 0, \tag{21}$$

$$8PQ\alpha^4 k + 12P\alpha^2 fk + 6P\alpha^2 p^2 + 2(Pk + Rh)(\alpha q_t - q_z^2 - q_y^2) + 2Rh(4Q\alpha^4 + 6\alpha^2 f) - (f_{yy} + f_{zz})6R\alpha^2 g^2 = 0. \tag{22}$$

Si $h(y, z, t) = 0$ o $k(y, z, t) = 0$, tenemos 4 casos, *i.e.*, $(h \neq 0, k = 0)$, $(h \neq 0, k \neq 0)$, $(k \neq 0, h = 0)$ y $(h = 0, k = 0)$. Pero se requiere además que h y k no sean cero simultáneamente, además tenemos el caso $(k \neq 0, h = 0) = (h \neq 0, k = 0)$. Por lo tanto, se trabaja con los casos $(h \neq 0, k = 0)$ y $(k \neq 0, h \neq 0)$.

Caso 1 $(h \neq 0, k = 0)$

Resolviendo el sistema

$$h(y, z, t) = -2P\alpha^2, \qquad k = 0, \tag{23}$$

$$g(y, z, t) = 0, \tag{24}$$

$$p(y, z, t) = 0, \tag{25}$$

$$f(y, z, t) = \frac{1}{6\alpha^4}(-4Q\alpha^2 - \alpha q_t + q_z^2 + q_y^2) \tag{26}$$

$$q(y, z, t) = a(t)y + b(t)z + c(t), \tag{27}$$

donde a, b, c son funciones dependientes de t. Sustituyendo la ecuación (27) en (26), se tiene:

$$f(y, z, t) = \frac{1}{6\alpha^2}(-4Q\alpha^4 - \alpha(a'y + b'z + c') + a^2 + b^2), \tag{28}$$

entonces la solución de la ecuación (4) con ($h \neq 0, k = 0$) es:

$$u = \frac{1}{6\alpha^2}\left[-4Q\alpha^4 - \alpha(a'y + b'z + c') + a^2 + b^2\right] - 2P\alpha^2 F(\alpha x + ay + bz + c)^2. \quad (29)$$

Si tomamos (P, Q, R) = (m^2, $-(m^2 + 1)$, 1) y $F(\xi) = sn(\xi)$, tenemos:

$$u = \frac{1}{6\alpha^2}\left[4(m^2 + 1)\alpha^4 - \alpha(a'y + b'z + c') + a^2 + b^2\right] - 2m^2\alpha^2 sn(\xi)^2, \quad (30)$$

en particular cuando $m \to 1$, la solución de onda solitaria de la ecuación (4) es entonces:

$$u = \frac{1}{6\alpha^2}\left[8\alpha^4 - \alpha(a'y + b'z + c') + a^2 + b^2\right] - 2\alpha^2 \tanh^2(\xi), \quad (31)$$

con $\xi = \alpha x + a(t)y + b(t)z + c(t)$.

Caso 2 ($h \neq 0, k \neq 0$)

De manera análoga al caso 1, se obtienen las siguientes soluciones al sistema de ecuaciones (6)-(22):

$$h(y, z, t) = -2P\alpha^2, \qquad k = -2R\alpha^2, \quad (32)$$
$$g(y, z, t) = 0, \quad (33)$$
$$p(y, z, t) = 0, \quad (34)$$
$$f(y, z, t) = \frac{1}{6\alpha^4}(-4Q\alpha^2 - \alpha(a'y + b'z + c') + a^2 + b^2), \quad (35)$$
$$q(y, z, t) = a(t)y + b(t)z + c(t), \quad (36)$$

donde a, b, c son funciones dependientes de t.

La solución general de la ecuación (4) es:

$$u = \frac{1}{6\alpha^2}\left[-4Q\alpha^4 - \alpha(a'y + b'z + c') + a^2 + b^2\right] - 2\alpha^2\left(PF(\xi)^2 + \frac{R}{F(\xi)^2}\right), \quad (37)$$

con $\xi = \alpha x + a(t)y + b(t)z + c(t)$.

Si de la tabla 1 se toman valores de (P, Q y R) = ($-m^2$, $2m^2 - 1$, $1 - m^2$), se tiene:

$$u = \frac{1}{6\alpha^2}\left[-4(2m^2 - 1)\alpha^4 - \alpha(a'y + b'z + c') + a^2 + b^2\right] + 2\alpha^2\left(-m^2 cn(\xi)^2 + \frac{1 - m^2}{cn(\xi)^2}\right), \quad (38)$$

en particular, cuando $m \to 1$, la ecuación (38) toma la forma:

$$u = \frac{1}{6\alpha^2}\left[-4\alpha^4 - \alpha(a'y + b'z + c' + a^2 + b^2\right] - 2\alpha^2 \sec^2(\xi), \quad (39)$$

que corresponde a una solución de función trigonométrica.

Tomando otros valores de P, Q y R de la tabla 1 se pueden obtener otras soluciones de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili.

3.2 Ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables

Consideremos las siguientes ecuaciones no lineales de Schrödinger con coeficientes variables [15]:

$$i\psi_t + a(t)\psi_{zz} + b(t)|\psi|^2\psi = 0, \tag{40}$$

$$i\psi_z + \frac{1}{2}\alpha(z)\psi_{tt} + \beta(z)|\psi|^2\psi = i\gamma(z)\psi, \tag{41}$$

donde $\psi = \psi(z, t)$ es una función arbitraria real o compleja de (z, t) y a, b, α, β y γ son todas funciones arbitrarias de variables indicadas. La ecuación (40) ya ha sido estudiada por Grimshaw[16], la ecuación (41) es la ecuación no lineal de Schrödinger con ganancia que se estudia en óptica no lineal. Por ejemplo, para obtener la solución exacta de la ecuación (40), se emplea la transformación de la siguiente manera:

$$\psi(z,t) = v(z,t)e^{iu(z,t)}, \tag{42}$$

donde $v(z, t)$ es la amplitud y $u(z, t)$ es la función fase. Se obtienen las derivadas de la ecuación (42):

$$\psi_z = e^{iu(z,t)}(v_z + ivu_z), \tag{43}$$
$$\psi_t = e^{iu(z,t)}(v_t + ivu_t), \tag{44}$$
$$\psi_{tt} = e^{iu(z,t)}(v_{tt} + ivu_{tt} - vu_t^2 + 2iv_tu_t) \tag{45}$$
$$|\psi|^2 = v^2; \quad v > 0, \tag{46}$$

sustituyendo las ecuaciones (42)-(46) dentro de la ecuación (41), se obtiene:

$$i(v_z + ivu_z) + \frac{\alpha(z)}{2}(2iv_tu_t - vu_t^2 + v_{tt} + ivu_{tt}) + \beta(z)v^3 = i\gamma(z)v, \tag{47}$$

separando la parte real e imaginaria; se observa que:

$$-vu_z + \frac{\alpha(z)}{2}(v_{tt} - vu_t^2) + \beta(z) = 0, \tag{48}$$
$$v_z + \frac{\alpha(z)}{2}(2v_tu_t + vu_{tt}) - \gamma(z)v = 0. \tag{49}$$

De acuerdo con el método de expansión F generalizado, ahora se balancea el término de la derivada de orden superior con el término no lineal más alto, de la ecuación (48) se nota que $n = 1$, entonces tenemos:

$$v(z,t) = f_1(z) + f_2(z)F(\xi) + \frac{f_3(z)}{F(\xi)}, \tag{50}$$
$$\xi = p(z)t + q(z), \tag{51}$$
$$u(z,t) = k(z)t^2 + \Gamma(z)t + \Omega, \tag{52}$$

donde $f_i(z)$, $k(z)$, $\Gamma(z)$ y $\Omega(z)$, $(i = 1, 2, 3)$ son funciones de z a determinar, $p(z)$ y $q(z)$ están relacionados con el ancho del pulso y la velocidad de grupo, respectivamente. Además, se asume que la fase $u(z, t)$ tiene una forma cuadrática.

Ahora se obtienen las derivadas de las ecuaciones (50)-(52) para así poder sustituirlas en las ecuaciones (48) y (49):

$$\xi_z = p'(z)t + q'(z), \tag{53}$$

$$\xi_t = p(z), \tag{54}$$

$$u_z = k_z t^2 + \Gamma_z t + \Omega_z, \tag{55}$$

$$v_z = f'_z + f'_2 F(\xi) + f_2 F'(\xi)\xi_z + \frac{f'_3}{F(\xi)} - \frac{f_3 F'(\xi)\xi_z}{F^2(\xi)}, \tag{56}$$

$$u_t = 2k(z)t + \Gamma(z), \tag{57}$$

$$u_z = f_2 F'(\xi)p(z) - \frac{f_3 F'(\xi)p(z)}{F^2(\xi)}, \tag{58}$$

$$v_{tt} = f_2 p^2(z)F''(\xi) + \frac{2f_3 p^2(z)(F'(\xi))^2}{F^3(\xi)} - \frac{f_3 p^2(z)F''(\xi)}{F^2(\xi)}, \tag{59}$$

$$u_{tt} = 2k(z), \tag{60}$$

sustituyendo las ecuaciones (50)-(60) en las ecuaciones (48) y (49) y agrupando términos $t^k F^n(\xi)$ y $F'(\xi)$ con ($k = 0, 1, 2, 3$; $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3$), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$4f_1\alpha k^2 + 2f_1 k_z = 0, \tag{61}$$

$$2f_1\Gamma_z + 4f_1\alpha\Gamma k = 0, \tag{62}$$

$$4f_2\alpha k^2 + 2f_2 k_z = 0, \tag{63}$$

$$2f_2\Gamma_z + 4f_2\alpha\Gamma k = 0, \tag{64}$$

$$4f_3\alpha k^2 + 2f_3 k_z = 0, \tag{65}$$

$$2f_3\Gamma_z + 4f_3\alpha\Gamma k = 0, \tag{66}$$

$$-2\alpha f_2 p^2 c_4 - 2\beta f_2^3 = 0, \tag{67}$$

$$-2\alpha f_3 p^2 c_4 - 2\beta f_3^3 = 0, \tag{68}$$

$$\alpha f_2\Gamma^2 - \alpha f_2 p^2 c_2 - 6\beta f_2 f_1^2 - 6\beta f_2^2 f_3 + 2f_2\Omega_z = 0, \tag{69}$$

$$\alpha f_3\Gamma^2 - \alpha f_2 p^2 c_2 - 6\beta f_3 f_1^2 - 6\beta f_2^2 f_3 + 2f_3\Omega_z = 0, \tag{70}$$

$$-2f_1^3\beta + \alpha f_1\Gamma^2 - 12\beta f_1 f_2 f_3 + 2f_1\Omega_z = 0, \tag{71}$$

$$2\alpha f_2 pk + f_2 p_z = 0, \tag{72}$$

$$2\alpha f_3 pk + f_3 p_z = 0, \tag{73}$$

$$f'_1(z) - \gamma f_1 + \alpha f_1 k = 0, \tag{74}$$

$$f'_2(z) - \gamma f_2 + \alpha f_2 k = 0, \tag{75}$$

$$f'_3(z) - \gamma f_3 + \alpha f_3 k = 0, \tag{76}$$

$$\alpha f_2 p\Gamma f_2 + q_z(z) = 0, \tag{77}$$

$$\alpha f_3 p\Gamma f_3 + q_z(z) = 0, \tag{78}$$

$$6\beta f_1 f_2^2 = 0, \tag{79}$$

$$6\beta f_1 f_3^2 = 0, \tag{80}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales (61)-(80), se obtiene:

$$f_1 = f_3 = k = 0; \Gamma(z) = A_1; p(z) = A_2,$$

$$f_2 = A_3 \exp\left(\int^z \gamma(\varsigma)d\varsigma\right),$$

$$q(z) = -A_1A_2\int^z \alpha(\varsigma)d\varsigma + A_4,$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}(A_2^2c_2 - A_1^2)\int^z \alpha(\varsigma)d\varsigma + A_5; \quad \beta = -\frac{\alpha A_2^2 c_4 \exp\left(-2\int^z \gamma(\varsigma)d\varsigma\right)}{A_3^2}, \tag{81}$$

donde $\alpha(z)$ y $\gamma(z)$ se consideran funciones arbitrarias, y $A_1 \sim A_5$ son constantes arbitrarias. Con los resultados del sistema (81), se tiene que:

$$v(z,t) = A_3 \exp\left(\int^z \gamma(\varsigma)d\varsigma\right)F(\xi), \tag{82}$$

$$u(z,t) = A_1 t + \frac{1}{2}(A_2^2c_2 - A_1^2)\int^z \alpha(\varsigma)d\varsigma + A_5. \tag{83}$$

De la tabla 1, tomamos los siguientes valores, para $c_0 = 1$, $c_2 = -(1 + m^2)$ y $c_4 = m^2$ además $F(\xi)$ es $sn(\xi)$ y se sustituye en la ecuación (42):

$$\psi_{11} = A_3 \exp\left(\int^z \gamma(\varsigma)d\varsigma\right) sn(\xi)$$

$$\times \exp\left(i\left\{A_1 t + \frac{1}{2}(-A_2^2(1+m^2) - A_1^2)\int^z \alpha(\varsigma)d\varsigma + A_5\right\}\right), \tag{84}$$

también:

$$\xi = A_4 p - A_1A_2\int^z \alpha(\varsigma)d\varsigma + A_4, \tag{85}$$

$$\beta = -\frac{\alpha A_2^2 m^2 \exp\left(-2\int^z \gamma(\varsigma)d\varsigma\right)}{A_3^2}. \tag{86}$$

En particular, cuando $m \to 1$ la solución de onda solitaria es oscura, y tomando en cuenta que $sn(\xi)$ se degenera en una función trigonométrica hiperbólica, la cual es $\tanh(\xi)$, entonces:

$$\psi'_{11} = A_3 \exp\left(\int^z \gamma(\varsigma)d\varsigma\right)\tanh(\xi) \times \exp\left(i\left\{A_1 t - \frac{1}{2}(2A_2^2 + A_1^2)\int^z \alpha(\varsigma)d\varsigma + A_5\right\}\right), \tag{87}$$

donde:

$$\xi = A_2 t - A_1A_2\int^z \alpha(\varsigma)d\varsigma + A_4, \tag{88}$$

$$\beta = -\frac{\alpha A_2^2 \exp\left(-2\int^z \gamma(\varsigma)d\varsigma\right)}{A_3^2}. \tag{89}$$

Supongamos que los parámetros de dispersión de la velocidad de grupo son:

$$\alpha(z) = \frac{1}{\alpha_0}\exp(\sigma z)\beta(z), \tag{90}$$

los parámetros de no linealidad de Kerr $\beta(z)$:

$$\beta(z) = \beta_0 + \beta_1\cos(gz), \tag{91}$$

donde α_0 está relacionado con la potencia de la cresta inicial en el sistema, los parámetros β_1, β_2 y g describen la no linealidad de Kerr. Entonces, la función ganancia (o pérdida) es $\gamma(z) = \frac{\sigma}{2}$, la cual corresponde en el decaimiento en la dispersión de la fibra en $\sigma < 0$. Luego sustituyendo (90) y (91) en (87) se tiene:

$$\psi = A_3\exp\left(\int^z \frac{\sigma}{2}d\varsigma\right)\tanh(\xi)$$

$$\times\exp\left(i\left\{A_1 t - \frac{1}{2}(2A_2^2 + A_1^2)\int^z \frac{1}{\alpha_0}\exp(\sigma z)(\beta_0 + \beta_1\cos(gz))d\varsigma + A_5\right\}\right), \tag{92}$$

entonces:

$$\psi = A_3\exp\left(\frac{\sigma}{2}z\right)\tanh\left(A_2 t - A_1A_2e^{\sigma z}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0\sigma} + \frac{\beta_1 g\sin(gz) - \beta_1\sigma\cos(gz)}{\alpha_0(\sigma^2 + g^2)}\right) + A_4\right)$$

$$\times\exp\left(i\left\{A_1 t - \frac{1}{2}(2A_2^2 + A_1^2)e^{\sigma z}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0\sigma} + \frac{\beta_1 g\sin(gz) - \beta_1\sigma\cos(gz)}{\alpha_0(\sigma^2 + g^2)}\right)\right\} + A_5\right). \tag{93}$$

Esta es una de las soluciones de onda solitaria para la ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables. Tomando otra familia de soluciones de la tabla 1 se pueden obtener nuevas soluciones a la ecuación no lineal de Schrödinger.

Observación: se consideró solo un caso de muchos que surgen para la ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables.

4. Conclusiones

Se desarrollaron las ideas principales del método de expansión F generalizado para hallar nuevas soluciones exactas de ecuaciones diferenciales no lineales parciales con la ayuda del cálculo simbólico o algebraico, incluidas soluciones de funciones elípticas de Jacobi no degeneradas simples y combinadas, soluciones tipo solitón y soluciones de funciones trigonométricas. Además, se eligieron valores particulares para $\alpha(z)$ y $\beta(z)$, que son los parámetros de fibra óptica, esto para poder controlar la velocidad y el cambio de tiempo de la onda solitaria. El método resulta directo y conciso, como se puede apreciar al hallar las soluciones de la ecuación de Kadomtsev-Petviashvili y la ecuación no lineal de Schrödinger con coeficientes variables, de la cual se incluyen soluciones de onda solitarias oscuras y brillantes, soluciones similares a solitones y soluciones de funciones trigonométricas. Este método de expansión F generalizado se puede también extender

a otras ecuaciones diferenciales parciales no lineales y de esta manera obtener soluciones nuevas en términos de las funciones elípticas de Jacobi.

5. Referencias

[1] Chaves, F. S. Dinámica no lineal del ADN mediante la solución de la ecuación de seno Gordon por el método de la función exponencial. *Tumbaga*, 2(10), 6, 2015.

[2] De Valcárcel, G. J., García-Ferrer, F. V., Höppner, R., Kolpakov, S., Navarrete-Benlloch, C., Roldán, E. y Soriano, J. C. El Grupo de Óptica Cuántica y No lineal de la Universitat de València. *Óptica Pura y Aplicada*, 44(2), 263-269, 2011.

[3] Cabrera, C. R., Tanzi, L., Sanz, J., Naylor, B., Thomas, P., Cheiney, P. y Tarruell, L. Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates. *Science*, 359(6373), 301-304, 2018.

[4] Ablowitz, M.J. y Clarkson, P.A. *Solitons*, *Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, Nueva York, 1991.

[5] Hirota, Ryogo. Exact Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. *Physical Review Letters*, 27(18), 1192-1194, 1971.

[6] Miura, M.R. *Backlund Transformation*. Berlín, 1978.

[7] Yan, C. A. Simple Transformation for Nonlinear Waves. *Physics Letters A*, 224, 77-84, 1996.

[8] Malfliet, W. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. *American Journal of Physics*, 60, 650-654, 1992.

[9] Wang, M., Zhou, Y. The periodic wave solutions for the Klein-Gordon-Schrödinger equations. *Physics Letters A*, 318(1-2), 84-92, 2003.

[10] Romero, E. F. Granados, M. A. Solitones singulares y regulares en la ecuación no lineal de Kadomtsev-Petvishvili. *CIENCIA ergo-sum*, *Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva*, 8(3), 2001.

[11] Biondini, G., Pelinovsky, D. Kadomtsev-Petviashvili equation. *Scholarpedia*, 3(10), 6539, 2008.

[12] Chabchoub, A. Tracking breather dynamics in irregular sea state conditions. *Physical Review Letters*, 117(14), 144103, 2016.

[13] Chabchoub, A., Hoffmann, N. P., y Akhmediev, N. Rogue wave observation in a water wave tank. *Physical Review Letters*, 106(20), 204502, 2011.

[14] Jiang, C. H. E. N., Hong-Sheng, H. E. y Kong-Qing, Y. A generalized F-expansion method and its application in high-dimensional nonlinear evolution equation. *Communications in Theoretical Physics*, 44(2), 307, 2005.

[15] Zhang, J. F., Dai, C. Q., Yang, Q. y Zhu, J. M. Variable-coefficient F-expansion method and its application to nonlinear Schrödinger equation. *Optics Communications*, 252(4-6), 408-421, 2005.

[16] Grimshaw, R. Slowly varying solitary waves. II. Nonlinear Schrödinger equation. Proceedings of the Royal Society of London. A. *Mathematical and Physical Sciences*, 368(1734), 377-388, 1979.

CAPÍTULO 2

SUPERSIMETRÍA PARAMÉTRICA EN BLOQUES DE GUÍAS DE ONDA*

Maximino Pérez Maldonado[1], Haret-Codratian Rosu[2]

1. Introducción

Los métodos algebraicos de la mecánica cuántica supersimétrica (SUSY-QM) recientemente tienen una gran influencia de aplicación en la óptica física en el régimen paraxial (Helmholtz). Lo anterior debido a obvias similitudes matemáticas entre ambas ramas de la física. En la década de 1990, Chumakov y Wolf [1] fueron los primeros en utilizar el álgebra SUSY-QM en el contexto de guías de ondas ópticas al factorizar la ecuación de Helmholtz. Sin embargo, su trabajo no llamó mucho la atención, y lo mismo sucedió con otras obras de la misma época [2, 3].

El desarrollo supersimétrico se describe por una fase de no ruptura de la supersimetría en mecánica cuántica, donde el hamiltoniano adicional tiene el mismo espectro que el hamiltoniano inicial, excepto por el estado fundamental [4]. En la última década la no ruptura de SUSY se ha aplicado a la óptica lineal y no lineal de forma natural, a través de analogías bien conocidas [5]. Por ejemplo, Moayedi y Rostami [6] fueron los primeros en aplicar la supersimetría a bloques de guías de ondas, Kočinac *et al.* [7] usaron la supersimetría para modos en guías de ondas de semiconductores, y Zúñiga-Segundo *et al.* [8] presentaron una clase de redes fotónicas construidas a partir de matrices de guías de ondas utilizando argumentos supersimétricos.

De manera general, también se han desarrollado extensamente los métodos mecánico-cuánticos supersimétricos en el contexto de guías de ondas en trabajos de Miri *et al.* [9, 10, 11], o en trabajos de Laba y Tkachuk, donde se han utilizado el enfoque supersimétrico para modos transversales eléctricos (TE) y modos transversales magnéticos (TM) en guías de ondas planas [12].

---

* Parte de este trabajo se encuentra en el contenido de la tesis doctoral de Maximino Pérez: https://repositorio.ipicyt.edu.mx/bitstream/handle/11627/4871/TDIPICYTP4P72019.pdf?isAllowed=y& sequence=6. Se corrigieron errores tipográficos y detalles en las fórmulas y gráficas.

[1] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México. Instituto Literario núm. 100 Ote., col. Centro, C.P. 50000, Toluca, Estado de México, México. Enlace de correspondencia: speeck@gmail.com.

[2] División de Materiales Avanzados, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Camino a la Presa San José 2055, col. Lomas 4ta sección, C.P. 78216. San Luis Potosí, México.

Además, en el área de la fotónica, Macho *et al.* [13] han discutido diseños de fibras multinúcleo que incorporan conversión de modo, modo-funcionalidades de filtrado y modelado de pulsos con índices de refracción supercompañeros.

En este trabajo, después de presentar la ecuación de Helmholtz TE y TM en la sección 2, y una breve presentación general del método de supersimetría en la sección 3, en la sección 4 consideramos la aplicación de este método en bloques de guías de ondas planas para tres tipos de índices de refracción aplicados a una ley de potencia, utilizando los perfiles: constante, lineal y parabólico, junto con una aplicación iterativa de la supersimetría. Donde se observa que el primer y el último perfil propuestos tienen resultados similares a los obtenidos en los trabajos de Miri *et al.* [9, 10, 11], en el cual sólo se aplica al caso de TE, mientras que en este trabajo se incluye el caso TM ajustado mediante un tratamiento de aproximación.

2. Análisis modal de bloques de guía de ondas

La propagación de ondas electromagnéticas en guías de onda se produce cuando un haz es confinado entre dos placas paralelas de esta guía, es decir $x = \pm a$; esta estructura consiste en una capa de alto índice de refracción ($-a < x < a$) insertada entre dos capas de material con índice de refracción ligeramente menor al del centro (figura 1). El bloque de guía de onda guía el haz por reflexión total interna entre las interfaces [16].

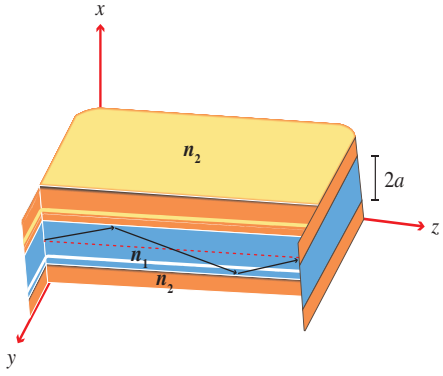


Figura 1. En una guía de onda el índice de refracción tiene una discontinuidad de paso en $x = \pm a$. La región $|x| < a$ es conocida como núcleo y las regiones $|x| > a$ son conocidas como revestimiento. El índice de refracción del núcleo n_1 es mayor que el índice de refracción del revestimiento n_2. Se asume que el medio de propagación es infinito en dirección y [elaboración propia].

Se considera que la propagación de ondas electromagnéticas en guías de onda es isotrópica y homogénea, es decir, está libre de cargas en la superficie. En tal caso, por simplicidad los campos eléctrico y magnético son armónicos en el tiempo, $\bar{E} = \bar{E}e^{i\omega t}$ y $\bar{H} = \bar{H}e^{i\omega t}$ respectivamente. Las ecuaciones de Maxwell están escritas de la siguiente forma:

$$\nabla \times \bar{E} = -i\omega\mu\bar{H}, \tag{1}$$
$$\nabla \times \bar{H} = i\omega\epsilon\bar{E}, \tag{2}$$
$$\nabla \cdot \bar{D} = 0, \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \bar{B} = 0, \tag{4}$$

donde $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ y $\bar{B} = \mu\bar{H}$, mientras la permitividad y la permeabilidad son funciones dependientes de la coordenada transversal x representadas como $\mu = \mu_0\mu(x)$ y $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon(x)$, respectivamente. De esta forma los campos $\bar{E}$ y $\bar{H}$ son obtenidos mediante los rotacionales de las ecuaciones (1) y (2). Siendo el eje z como el eje de propagación de los modos transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM), y asumimos que la guía de onda es uniforme en forma y tamaño a lo largo de la dirección de propagación. Además, se asume que los campos también son armónicos espacialmente durante su propagación:

$$\bar{E} = \bar{E}(x)e^{-i\beta z}, \qquad \text{y} \qquad \bar{H} = \bar{H}(x)e^{-i\beta z}, \tag{5}$$

donde β es la constante de propagación longitudinal, la cual en general es función de frecuencias y de la geometría de las guías de onda. De tal manera que TE (también llamado modo H) es caracterizado por $E_z = 0$ y $H_z \neq 0$, y el modo TM (también llamado modo E) se caracteriza por $E_z \neq 0$ y $H_z = 0$. Para estas dos clases de modos se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)\frac{\partial E_y}{\partial x} + (\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)E_y = 0, \tag{6}$$

y:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)\frac{\partial H_y}{\partial x} + (\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)H_y = 0, \tag{7}$$

respectivamente.

Definiendo el siguiente cambio de variable $E_y(x) = -\sqrt{\mu(x)}\psi_h(x)$ y $H_y(x) = -\sqrt{\varepsilon(x)}\psi_e(x)$ para cada modo, las ecuaciones (6) y (7) se reducen a ecuaciones estacionarias de Helmholtz, de modo que el cuadrado de la constante de propagación para este caso juega el papel de eigenvalores para los modos [14]:

$$-\psi_h''(x) + \left(-\Gamma_1' + \Gamma_1^2 - k_0^2 n^2(x)\right)\psi_h(x) = \beta^2\psi_h(x), \tag{8}$$

$$-\psi_e''(x) + \left(-\Gamma_2' + \Gamma_2^2 - k_0^2 n^2(x)\right)\psi_e(x) = \beta^2\psi_e(x), \tag{9}$$

donde, $\Gamma_1(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)$, $\Gamma_2(x\chi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)$, $\omega^2\mu(x)\varepsilon(x) \equiv k_0^2 n^2(x)$; $n^2(x) = \mu(x)\varepsilon(x)$ es el índice de refracción [6], y $k_0 = \frac{\omega}{c}$ es el vector de onda en el espacio libre.

Considerando un bloque de guías de onda simétrico con el perfil de índice de refracción de la forma:

$$n(x) = \begin{cases} n_1(x) = \sqrt{n_0^2 - s_2 f(x)} & \text{para } |x| < a \\ n_2(x) = \sqrt{n_0^2 - s_2 f(a)} & \text{para } |x| \geq a \end{cases}, \tag{10}$$

donde $n_0 = n_1(0)$ es el índice de refracción máximo en el centro de la región del núcleo, con un parámetro adimensional s_2 definido como $s_2 = \frac{n_0^2 - n_2^2}{n_0^2}$, tal que $s_2 > 0$, el cual genera un radio de decremento cuadrático del índice de refracción por unidad de longitud, y $f(x)$ caracteriza el perfil del índice de refracción [15].

Usando la variable transversal adimensional $\chi = k_0 x$, se pueden escribir (8) y (9) en la región del núcleo como:

$$-\psi_h''(\chi) + \left(-\Gamma_1' + \Gamma_1^2 + s_2 f(\chi)\right)\psi_h(\chi) = \kappa^2 \psi_h(\chi), \tag{11}$$

$$-\psi_e''(\chi) + \left(-\Gamma_2' + \Gamma_2^2 + s_2 f(\chi)\right)\psi_e(\chi) = \kappa^2 \psi_e(\chi), \tag{12}$$

donde $\kappa^2 = \left(n_0^2 - \frac{\beta^2}{k_0^2}\right)$ que es el índice de refracción efectivo de propagación de los modos y las primadas indican la derivada con respecto a χ. Por otro lado, para la capa del revestimiento tenemos:

$$-\psi_h''(\chi) + \rho^2 \psi_h(\chi) = 0, \tag{13}$$

$$-\psi_e''(\chi) + \rho^2 \psi_e(\chi) = 0, \tag{14}$$

siendo $\rho^2 = \left(\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_0^2\right)$, porque las condiciones de frontera corresponden al hecho de que la componente longitudinal de los campos debe de ser continua sobre la frontera. Así, E_y debe de ser continua para $x = \pm a$; teniendo solución:

$$\psi_{h,e;clad} = C_1 \cos(\kappa a) \exp\left[-\rho(|x| - a)\right], \tag{15}$$

tal que la relación entre κ y ρ es:

$$\tan(\kappa a) = \frac{\rho}{\kappa} \tag{16}$$

esta ecuación es denominada la ecuación trascendental y determina la constante de propagación de los modos guiados TE y TM [16]. El coeficiente C_1 puede ser relacionado con la potencia que llevan los modos guiados. Para $n_1 > n_2$, pero κ^2 y ρ^2 pueden ser positivos. Cuando $\rho^2 > 0$ el campo eléctrico fuera del bloque guiado decae exponencialmente y uno obtiene modos guiados; por otro lado, para $\rho^2 < 0$ el campo es oscilatorio fuera del bloque y uno puede obtener modos radiados.

3. Supersimetría de guías de onda planas

Matemáticamente la supersimetría es una factorización de la ecuación de Schrödinger, tal que (11, 12) pueden ser factorizadas como $A^+ A\psi_{h,e} = \kappa^2 \psi_{h,e}$ tal que los operadores son definidos de manera similar a los obtenidos en la sección anterior [1, 18]:

$$A^+ = -\partial_x + \Gamma_j + \phi_j, \tag{17}$$

$$A = \partial_x + \Gamma_j + \phi_j, \tag{18}$$

con $j = 1, 2$ para los modos H y E, respectivamente; lo que implica que la función $\phi_j(x)$ es determinada por la siguiente ecuación de Riccati:

$$-\phi_j' + 2\Gamma_j \phi_j + \phi_j^2 = s_2 f(\chi), \tag{19}$$

para perfiles particulares de $f(\chi)$ del índice de refracción. Por otro lado, $\psi_{h,e}(\chi)$ nos da una distribución de modos y κ nos genera los valores propios de los modos, donde sabemos que la ecuación de Schrödinger soporta M estados excitados para un potencial específico, entonces, por analogía la estructura $f(\chi)$ soportará un total de M modos guiados, $\psi_{h,e;1}(\chi)$, $\psi_{h,e;2}(\chi)$, . . ., $\psi_{h,e;m}(\chi)$ con eigenvalores $\kappa_1^{(I)} > \kappa_2^{(I)} > \cdots > \kappa_m^{(I)}$ con m positivo y entero. Por lo que la factorización del primer modo es $A^+ A\psi_{h,e;1} = (\kappa_1^{(I)})^2 \psi_{h,e}$. De manera análoga podemos aplicar a

SUSY los operadores de factorización invirtiendo el orden, es decir, $AA^{+}\tilde{\psi}_{h,e} = (\kappa_1^{(P)})^2\tilde{\psi}_{h,e}$, como en el problema de eigenvalores, obteniendo así isoespectralidad, donde $\kappa_1^{(I)} = \kappa_1^{(P)}$. De esta manera podemos obtener la ecuación compañera supersimétrica, la cual nos proporciona una estructura compañera que soportará un modo menos que la estructura original [20]; $\tilde{\psi}_{h,e;1}(\chi)$, $\tilde{\psi}_{h,e;2}(\chi), \ldots, \tilde{\psi}_{h,e;m-1}(\chi)$ con eigenvalores $\kappa_1^{(P)} > \kappa_2^{(P)} > \cdots > \kappa_{m-1}^{(P)}$, con $m \geq 1$:

$$-\tilde{\psi}''_{h,e} + \left(\Gamma_j^2 + \Gamma'_j + \phi'_j + 2\Gamma_j\phi_j + \phi_j^2\right)\tilde{\psi}_{h,e} = \left(\kappa_1^{(P)}\right)^2\tilde{\psi}_{h,e}, \tag{20}$$

que también puede ser escrita como

$$-\tilde{\psi}''_{h,e} + \left(\Gamma_j^2 + \Gamma'_j + s_2 f(\chi) + 2\phi'_j\right)\tilde{\psi}_{h,e} = \left(\kappa_1^{(P)}\right)^2\tilde{\psi}_{h,e}. \tag{21}$$

Esta ecuación compañera solo es válida para propagación de modos $\tilde{\psi}_{h,e}$ en una guía de onda diferente (compañera SUSY), a diferencia de lo propuesto por Chumakov y Wolf, siendo que aquí obtenemos un índice de refracción dado por:

$$\tilde{n}^2(\chi) = s_2 f(\chi) + 2\phi'_j. \tag{22}$$

En específico este perfil de índice de refracción compañero puede ser aplicado a cualquier función que se pueda representar en una guía de onda y hacer un filtrado de modos.

4. Aplicación de perfiles de índice de refracción en ley de potencias

Los bloques de guías de onda son caracterizados por una distribución del índice de refracción (10) que nos proporciona una ecuación de onda que se puede resolver analíticamente para los modos TE y TM, en el caso donde el material de la guía de onda es un dieléctrico ($\mu = 1$), tal que el índice de refracción solo depende de la permitividad ε de la forma $n_1^2(\chi) = \mu(\chi)\varepsilon(\chi) = \varepsilon(\chi)$.

Aquí se considera que $f(\chi) = \chi^{\alpha}$, con α que es común en fibras ópticas [21]. Los perfiles que se discuten son: $\alpha = 0$ constante, $\alpha = 1$ lineal, y $\alpha = 2$ parabólico.

4.1 Modos TE

Para estos modos $\Gamma_1 = 0$, entonces la ecuación (11) tiene la forma

$$-\psi''_h(\chi) + (s_2\chi^{\alpha})\psi_h(\chi) = \kappa^2\psi_h(\chi), \tag{23}$$

4.1.1 Caso $\alpha = 0$

En este caso la ecuación (23) es de la forma:

$$\psi''_{h,\alpha=0}(\chi) + \left(\kappa^2 - s_2\right)\psi_{h,\alpha=0}(\chi) = 0, \tag{24}$$

con solución general:

$$\psi_{h,\alpha=0}(\chi) = C_1\cos\left(\chi\sqrt{\kappa^2 - s_2}\right) + C_2\sin\left(\chi\sqrt{\kappa^2 - s_2}\right), \tag{25}$$

con condiciones simétricas cuando $C_2 = 0$ y antisimétricas cuando $C_1 = 0$. Los eigenvalores y el tamaño del núcleo de la guía son:

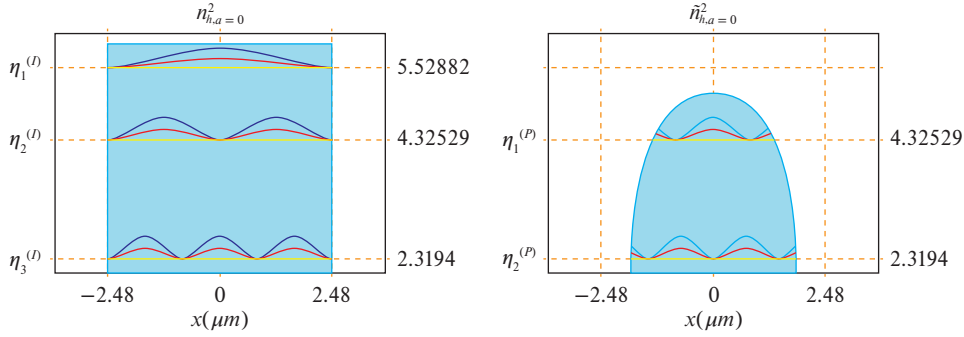
$$\eta_m = n_0^2 - s_2 - \left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2}\right), \qquad \text{y} \qquad a < \frac{m\pi}{2\sqrt{n_0^2 - s_2}}, \tag{26}$$

siendo que m nos dará el número de eigenmodos que soporta la guía. Para los eigenmodos compañeros tenemos:

$$\tilde{\Psi}_{h;m+1}(\chi) = \frac{1}{\kappa_{m+1}} A\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\kappa_{m+1}^2 - s_2}\,\chi\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\kappa_{m+1}^2 - s_2}\,\chi\right)\right). \tag{27}$$

con los eigenvalores isoespectrales:

$$\kappa_m^2 = s_2 + \left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2}\right). \tag{28}$$



(a) Guía de onda original (b) Guía de onda SUSY

Figura 2. Guías de onda supersimétricas para $\alpha = 0$, del modo TE; con $n_0 = 2.5$, $n_2 = 1.5$, $a = 2.48\,\mu$m y $n_1^2 = n_0^2 - s_2 = 2.44$, tomando el parámetro de escala $C_1 = 0.5$ (línea roja), y $C_1 = 0.7$ (línea azul) [elaboración propia].

4.1.2 Caso $\alpha = 1$

La ecuación de onda tiene la forma:

$$\psi''_{h,\alpha=1}(\chi) - \left(s_2\chi - \kappa^2\right)\psi_{h,\alpha=1}(\chi) = 0, \tag{29}$$

con eigenmodos:

$$\psi_{h,\alpha=1}(\chi) = C_1 \mathrm{Ai}(\xi), \tag{30}$$

donde $\xi = s_2^{-2/3}\left(s_2\chi - \kappa^2\right)$. La segunda clase de solución Bi(ξ) es físicamente imposible, por esto sólo se usa la solución C_1Ai(ξ), con eigenvalores y tamaño del núcleo:

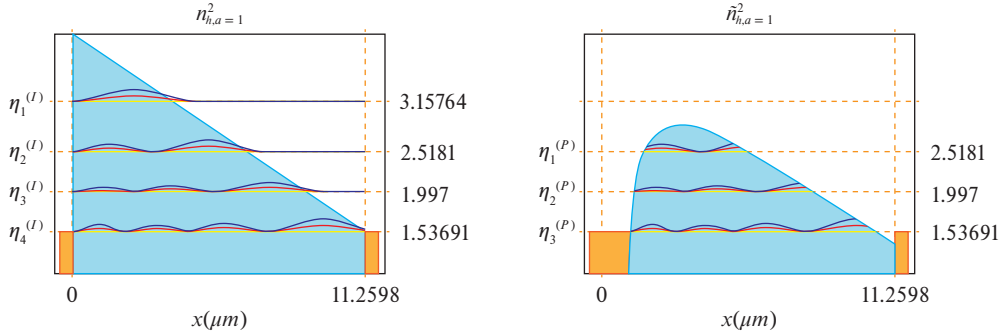
$$\eta_m = n_0^2 - \left(\frac{3\pi s_2}{8}(4m-1)\right)^{2/3}, \qquad \text{y} \qquad a < \frac{1}{s_2^{1/3}}\left(\frac{3}{8}(4m-1)\pi\right)^{2/3}, \tag{31}$$

Los eigenmodos compañeros son:

$$\tilde{\Psi}_{h;m+1}(\xi) = \frac{1}{\kappa_{m+1}} A(C_1 \mathrm{Ai}(\xi_{m+1})), \tag{32}$$

con $\xi_{m+1} = s_2^{-2/3}\left(s_2\chi - \kappa_{m+1}^2\right)$ mientras que los eigenvalores isoespectrales están dados por:

$$\kappa_m^2 = \left(\frac{3\pi s_2}{4m-1}\right)^{2/3}. \tag{33}$$



(a) Guía de onda original (b) Guía de onda SUSY

Figura 3. Guías de onda supersimétricas para $\alpha = 1$, del modo TE; con $n_0 = 2$, $n_2 = 1.5$, $a = 11.25\ \mu$m y $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi = 2.003$, tomando el parámetro de escala $C_1 = 0.5$ (línea roja), y $C_1 = 0.7$ (línea azul) [elaboración propia].

4.1.3 Caso $\alpha = 2$

La ecuación de onda se presenta como:

$$\psi''_{h,\alpha=2}(\chi) + \left(\lambda - \xi^2\right)\psi_{h,\alpha=2}(\chi) = 0, \tag{34}$$

donde $\xi = s_2^{1/4}\chi$ y $\lambda = \frac{\kappa^2}{\sqrt{s_2}}$ con eigenmodos:

$$\psi_{h,\alpha=2}(\chi) = C_1 H_m(\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right), \tag{35}$$

donde $H_m(z) = (-1)^m \exp\left(z^2\right)\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(-z^2\right)$ son los polinomios de Hermite de orden m; con eigenvalores y tamaño del núcleo:

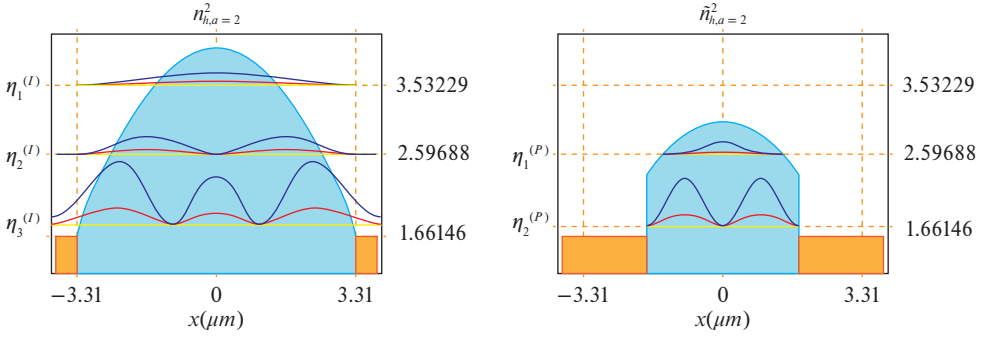
$$\eta_m = n_0^2 - \sqrt{s_2}\,(2m+1), \qquad \text{y} \qquad a < \frac{\sqrt{2m+1}}{s_2^{1/4}}. \tag{36}$$

Los eigenmodos compañeros son:

$$\tilde{\Psi}_{h;m+1}(\xi) = \left(\frac{1}{\kappa_{m+1}} A\left(C_1 H_{m+1}(\xi)\exp(-\frac{1}{2}\xi^2)\right)\right), \tag{37}$$

donde $\xi = s_2^{1/4}\chi$, $\lambda_{m+1} = \frac{\kappa_{m+1}^2}{\sqrt{s_2}}$, y los eigenvalores isoespectrales están dados por:

$$\kappa_m^2 = \sqrt{s_2}\,(2m+1). \tag{38}$$



(a) Guía de onda original (b) Guía de onda SUSY

Figura 4. Guías de onda supersimétricas para $\alpha = 2$, del modo TE; con $n_0 = 2$, $n_2 = 1.5$, $a = 3.31$ μm y $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi^2 = 2.003$, tomando el parámetro de escala $C_1 = 0.1$ (línea roja), y $C_3 = 0.7$ (línea azul) [elaboración propia].

4.2 Modo TM

Para los modos TM $\Gamma_2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon'}{\epsilon}$, la ecuación (12) toma la forma:

$$-\psi_e''(\chi) + \left(-\frac{1}{2}\frac{s_2}{n_0^2}\left(\frac{-\alpha\chi^{\alpha-1}}{1-\frac{s_2}{n_0^2}\chi^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2\left(\frac{-\alpha\chi^{\alpha-1}}{1-\frac{s_2}{n_0^2}\chi^\alpha}\right)^2 + s_2\chi^\alpha\right)\psi_e(\chi) = \kappa^2\psi_e(\chi). \tag{39}$$

4.2.1 Caso $\alpha = 0$

La ecuación de onda se reduce a:

$$\psi_{e,\alpha=0}''(\chi) + \left(\kappa^2 - s_2\right)\psi_{e,\alpha=0}(\chi) = 0, \tag{40}$$

con eigenmodos de la forma:

$$\psi_{e,\alpha=0}(\chi) = C_1\cos\left(\chi\sqrt{\kappa^2 - s_2}\right) + C_2\sin\left(\chi\sqrt{\kappa^2 - s_2}\right), \tag{41}$$

Los eigenvalores y el tamaño del núcleo están dados por:

$$\eta_m = n_0^2 - s_2 - \left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2}\right), \qquad \text{y} \qquad a < \frac{m\pi}{2\sqrt{n_0^2 - s_2}}, \tag{42}$$

Los eigenmodos compañeros son:

$$\tilde{\Psi}_{e;m} = \frac{1}{\kappa_{m+1}} A\left(C_1 \cos\left(\sqrt{\kappa_{m+1}^2 - s_2}\chi\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\kappa_{m+1}^2 - s_2}\chi\right)\right). \tag{43}$$

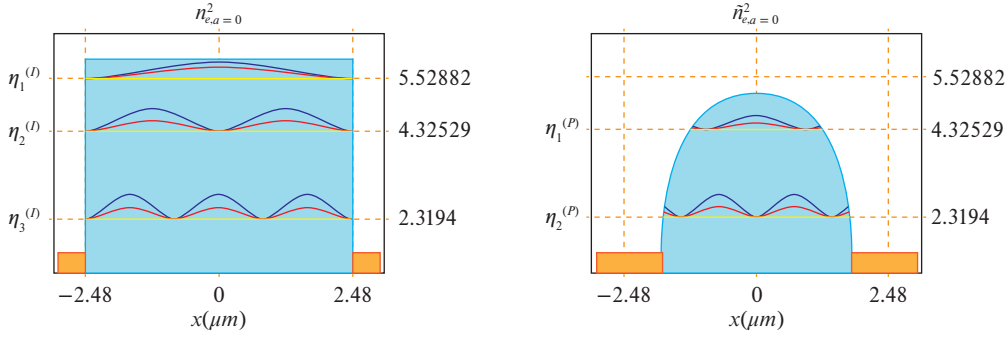
Con eigenvalores isoespectrales:

$$\kappa_m^2 = s_2 + \left(\frac{m^2\pi^2}{4a^2}\right). \tag{44}$$

4.2.2 Caso $\alpha = 1$

La correspondiente ecuación de onda es:

$$\psi''_{e,\alpha=1}(\chi) - \left(s_2\chi - \kappa^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2\right)\psi_{e,\alpha=1}(\chi) = 0, \tag{45}$$



(a) Guía de onda original (b) Guía de onda SUSY

Figura 5. Guías de onda supersimétricas para $\alpha = 0$, del modo TM; con $n_0 = 2$, $n_2 = 1.5$, $a = 2.48\,\mu$m y $n_1^2 = n_0^2 - s_2 = 2.44$, tomando el parámetro de escala $C_1 = 0.5$ (línea roja), y $C_1 = 0.7$ (línea azul) [elaboración propia].

aplicado una expansión en series para el segundo y tercer término en (39), donde los términos $\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^3 \ll 1$ llegan a ser despreciables, siendo que los eigenmodos son:

$$\psi_{e,\alpha=1}(\chi) = C_1 \mathrm{Ai}(\xi), \tag{46}$$

con $\xi = s_2^{-2/3}(s_2 x - \lambda)$ y $\lambda = \kappa^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2$; con eigenvalores y tamaño del núcleo:

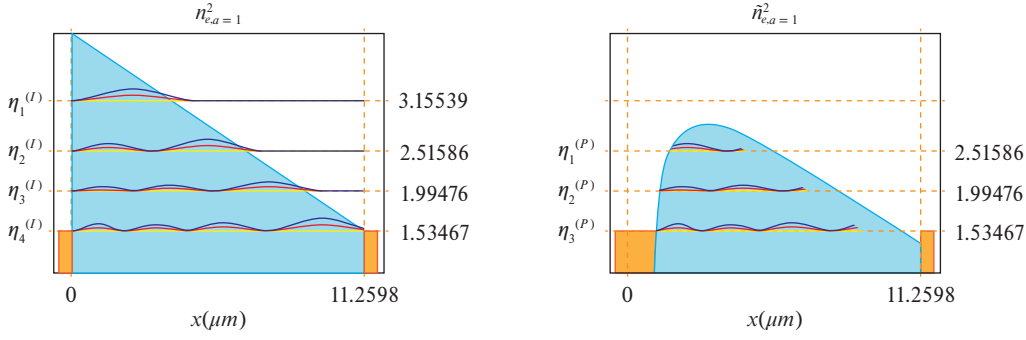
$$\eta_m = n_0^2 - \left(\frac{3\pi s_2}{8}(4m-1)\right)^{2/3} - \frac{3}{4}\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2, \qquad \text{y} \qquad a < \frac{1}{s_2^{1/3}}\left(\frac{3}{8}(4m-1)\pi\right)^{2/3}, \tag{47}$$

Los eigenmodos compañeros son:

$$\tilde{\Psi}_{e;m} = \frac{1}{\kappa_{m+1}} A(C_1 \mathrm{Ai}(\xi_{m+1})), \tag{48}$$

con $\xi_{m+1} = s_2^{-2/3}(s_2 x - \lambda_{m+1})$, $\lambda_{m+1} = \kappa^2_{m+1} - \frac{3}{4}\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2$. Mientras que los eigenvalores isoespectrales son:

$$\kappa_m^2 = \left(\frac{3\pi s_2}{8}(4m-1)\right)^{2/3} + \frac{3}{4}\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2. \tag{49}$$



(a) Guía de onda original

(b) Guía de onda SUSY

Figura 6. Guías de onda supersimétricas para $\alpha = 1$, del modo TM; con $n_0 = 2$, $n_2 = 1.5$, $a = 11.25\,\mu$m y $n_1^2 = n_0^2 - s_2 = 2.003$, tomando el parámetro de escala $C_1 = 0.5$ (línea roja), y $C_1 = 0.7$ (línea azul) [elaboración propia].

4.2.3 Caso $\alpha = 2$

La ecuación de onda es:

$$\psi''_{e,\alpha=2}(\chi) + \left(\lambda - \xi^2\right)\psi_{e,\alpha=2}(\chi) = 0, \tag{50}$$

donde $\xi = b^{1/4}\chi$, $\lambda = \dfrac{\kappa^2 - \left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)}{\sqrt{b}}$ y $b = 3\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2 + s_2$ con eigenmodos:

$$\psi_{e,\alpha=2}(\chi) = C_1 H_m(\xi)\exp(-\frac{1}{2}\xi^2), \tag{51}$$

donde $H_m(z) = (-1)^m \exp\left(z^2\right)\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(-z^2\right)$ son los polinomios de Hermite de orden m, y aplicando expansión en series, los términos $\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^3 \ll 1$ son despreciables.

Los eigenvalores y tamaño del núcleo son:

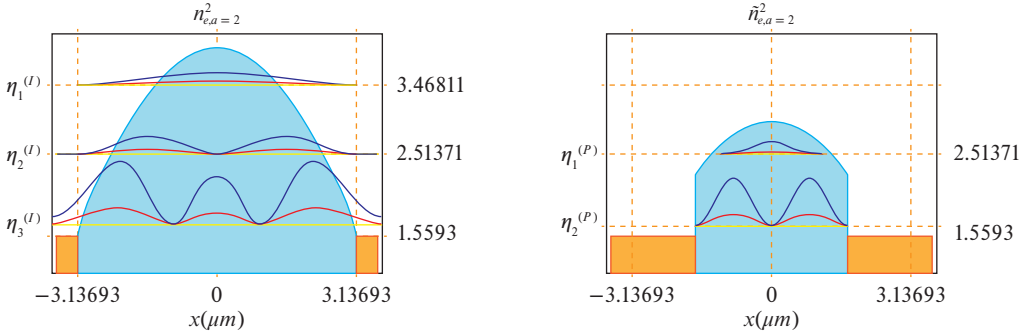
$$\eta_m = n_0^2 - \sqrt{b}(2m+1) - \left(\frac{s_2}{n_0^2}\right), \qquad \text{y} \qquad a < \frac{\sqrt{2m+1}}{b^{1/4}}, \tag{52}$$

Los eigenmodos compañeros son:

$$\tilde{\Psi}_{e;m} = \frac{1}{\kappa_{m+1}} A\left(C_1 H_{m+1}(\xi)\exp(-\frac{1}{2}\xi^2)\right), \tag{53}$$

donde $\xi = b^{1/4}\chi$, $\lambda = \frac{\kappa^2_{m+1} - \left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)}{\sqrt{b}}$, $b = 3\left(\frac{s_2}{n_0^2}\right)^2 + s_2$, mientras que los eigenvalores compañeros son:

$$\kappa^2_m = \sqrt{b}(2m+1) + \left(\frac{s_2}{n_0^2}\right). \tag{54}$$



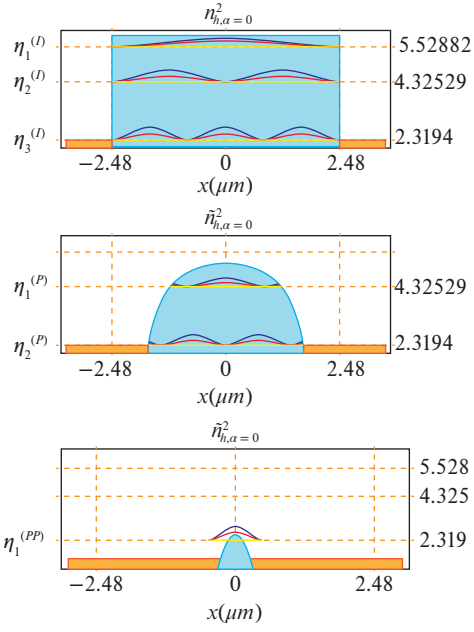
(a) Guía de onda original

(b) Guía de onda SUSY

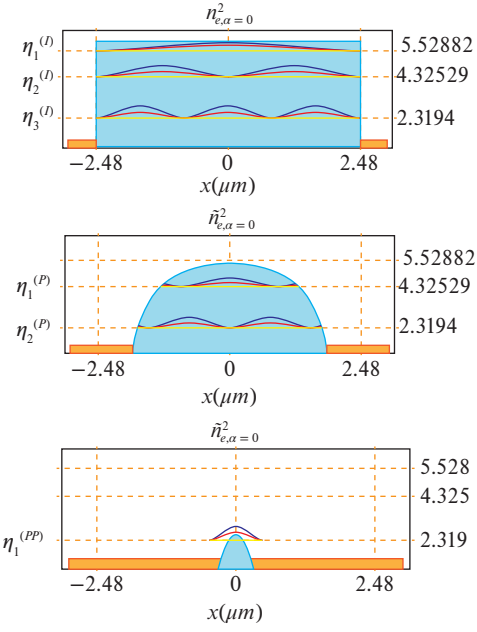
Figura 7. Guías de onda supersimétricas para $\alpha = 2$, del modo TM; con $n_0 = 2$, $n_2 = 1.5$, $a = 3.31\ \mu$m y $n_1^2 = n_0^2 - s_2\chi^2 = 2.003$, tomando el parámetro de escala $C_1 = 0.2$ (línea roja), y $C_1 = 0.4$ (línea azul) [elaboración propia].

4.2.4 Guías de onda jerárquicas supersimétricas

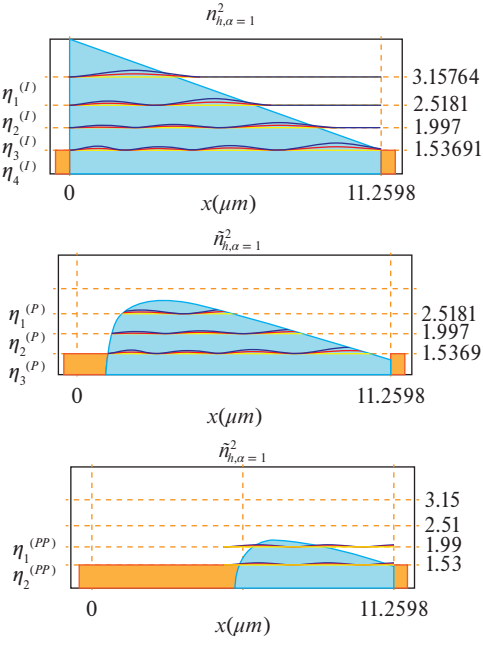
Como se muestra en las figuras (2, 3, 4) y (5, 6, 7), para el modo transversal eléctrico y para el modo transversal magnético, notamos que el comportamiento de ambos modos es similar para cada caso con respecto al índice de refracción gradual, donde se ve que sólo para el modo transversal magnético se nota una pequeña disminución en el tamaño del núcleo, esto es debido a la aproximación utilizada en la expansión en series en la solución. También se observa que los perfiles supersimétricos de índice de refracción son todos parabólicos para todos los casos con este comportamiento peculiar en la frontera, se puede notar también que las guías de onda compañeras muestran una reducción del tamaño del núcleo, lo que nos lleva a pensar que las guías de onda obtenidas bajo el tratamiento supersimétrico un modo menos que las guías originales, debido a que no contienen el modo base, y a su vez tienden a ser más delgadas. En todos los casos C es un parámetro de escala que nos indica la amplitud de los modos introducidos en las guías de onda tanto originales como supersimétricas. Bajo este método podemos hacer un subtratamiento supersimétrico a las guías supersimétricas, lo cual nos lleva a obtener un tratamiento jerárquico supersimétrico, esto tecnológicamente significa un filtrado de modos propios mediante las estructuras supersimétricas. Esta relación es representada en las siguientes figuras, para cada caso, tanto en los modos TE como en los modos TM.



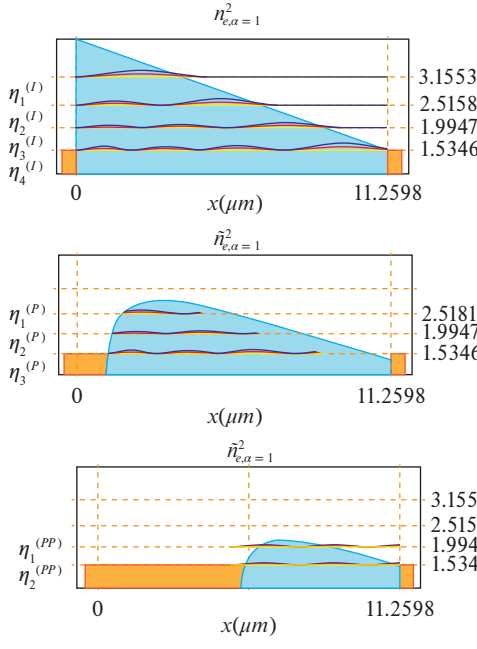
(a) Modo TE, $\alpha = 0$



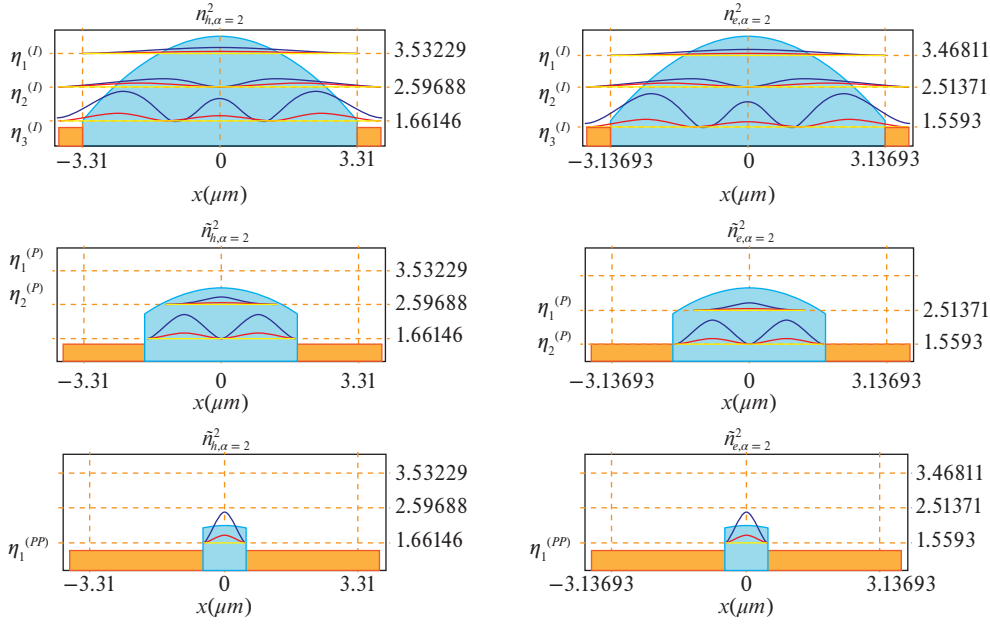
(b) Modo TM, $\alpha = 0$



(c) Modo TE, $\alpha = 1$



(d) Modo TM, $\alpha = 1$



(e) Modo TE, $\alpha = 2$ (f) Modo TM, $\alpha = 2$

Figura 8. Segunda generación de guías de onda supersimétricas obtenidas de manera jerárquica, basada en una guía de onda que soporta tres eigenmodos para cada perfil de índice de refracción analizados en este documento [elaboración propia].

5. Conclusiones

La aproximación supersimétrica conecta los modos guiados en bloques de guías de onda para los modos TE y TM, donde se muestran tres tipos de perfiles de índices de refracción (perfil de índice cuadrado, perfil de índice triangular (lineal) y perfil de índice de refracción parabólico). De manera particular, se puede notar que el índice de refracción triangular es presentado por primera vez con ciertos detalles supersimétricos, del cual se conoce muy poco, y se podría analizar de una manera tecnológica como un sistema que contiene estrechamientos. Para eigenmodos de TE y TM de alto orden se construyeron escaleras jerárquicas de guías de onda supersimétricas para cada uno de los perfiles analizados. Esta jerarquía supersimétrica puede ser considerada como un caso especial de dispositivos multicapa capaces de filtrar modos guiados.

6. Referencias

[1] Chumakov, S.M.; Wolf, K.B. Supersymmetry in Helmholtz optics, *Phys. Lett. A*, 193; pp. 51-53, 1994.
[2] Rosu, H-C. Darboux-Witten techniques for the Demkov-Ostrovsky problem, *Phys. Rev. A,* 54, 2571-2576, 1996.
[3] Rosu, H-C.; Reyes, M.; Wolf, K.B.; Obregón, O. Supersymmetric features of the Maxwell fish-eye lens, *Proc. SPIE* 2730, 436-439, SPIE Bellingham WA, 1996.
[4] Kostelecky, V. A.; Campbell, D.K. *Supersymmetry in Physics,* Amsterdam: North Holland, 1985.
[5] Black, R.J.; Ankiewicz, A. Fiber-optics analogies with mechanics, *Am. J. Phys.* 53(6), 554-563, 1985.

[6] Moayedi, S.K.; Rostami, A. Exact treatment of light propagation in inhomogeneous slab waveguides using supersymmetric quantum mechanics, *Nuovo Cim.* B, 118, pp. 729-734, 2003.
[7] Kočinac, S.; Milanović, V.; Ikonić, Z.; Indjin, D.; Radovanović, J.; Harrison, P. Supersymmetric transformation of guided modes in semiconductor waveguides, *Phys. Status Solidi (c)* **2**, pp. 3552–3555, 2005.
[8] Zúñiga-Segundo, A.; Rodríguez-Lara, B.M.; Fernández, C.J.; Moya-Cessa, H.M. Jacobi photonic lattices and their SUSY partners, *Opt. Express* 22, 987-994, 2014.
[9] Miri, M-A.; Heinrich, M.; El-Ganainy, R.; Christodoulides, D.N. Supersymmetric optical structures, *Phys. Rev. Lett.* 110, 233902, 2014.
[10] Miri, M-A.; Heinrich, M.; Christodoulides, D.N. Supersymmetry-generated complex optical potentials with real spectra, *Phys. Rev. A,* 87, 043819, 2013.
[11] Miri, M-A.; Heinrich, M.; Christodoulides, D.N. SUSY-inspired one-dimensional transformation optics, *Optica* 1(2), 89-95, 2014.
[12] Laba, H.P.; Tkachuk, V.M. Quantum-mechanical analogy and supersymmetry of electromagnetic wave modes in planar waveguides, *Phys. Rev. A,* 89, 033826, 2014.
[13] Macho, A.; Llorente, R.; García-Meca, C. Supersymmetric transformations in optical fibers, *Phys. Rev. Appl.,* 9, 014024, 2018.
[14] Love, J.D.; Ghatak, A.K. Exact solution for TM modes in graded index slab waveguides, *IEEE J. Quantum Electron.,* 15(1), 14-16, 1979.
[15] Moayedi, S.K.; Rostami, A. PT-invariant Helmholtz optics and its applications to slab waveguides, *Eur. Phys. J. B*, 36, 359-363, 2003.
[16] Sodha, M.S.; Ghatak, A.K. *Inhomogeneous Optical Waveguides*. Nueva York: Plenum Press, 1977.
[17] Mielnik, B.; Rosas-Ortiz, O. Factorization: little or great algorithm. *J. Phys. A: Math. Gen.,* 37, 10007-10035, 2004.
[18] Rosu, H.C.; Mancas, S.C.; Chen, P. One-parameter families of supersymetric isospectral potentials from Riccati solutions in function composition form, *Ann. Phys.,* 343, 87-102, 2014.
[19] Cooper, F.; Khare, A.; Sukhatme, U. Supersymmetry and quantum mechanics, *Phys. Rep.,* 251, 267-385, 1995.
[20] Miri, M.A.; Heinrich, M.; Christodoulides, D.N. Supersymmetric optical waveguides, *Proc.* SPIE, 8980, 89801, 2014.
[21] Senior, J.M. *Optical Fiber Communications*. Harlow: Pearson Education Limited, 2009.
[22] Polyanin, A.D.; Zaitsev, V.F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Boca Raton: Chapman and Hall, 2003.

CAPÍTULO 3

INESTABILIDAD MODULACIONAL EN LA ECUACIÓN NO-AUTÓNOMA CÚBICA-QUINTA DE SCHRÖDINGER[1]

Maximo Augusto Aguero Granados[2], Omar Pavón Torres[2], Misael Erikson Maguiña Palma[3], Juan Ramón Collantes Collantes[4]

1. Introducción

Aunque llegó a buen puerto, en la mañana del 12 de abril de 1966, mientras cruzaba el Atlántico hacia Nueva York, con 745 pasajeros, el elegante transatlántico Michelangelo de 275 metros súbitamente enfrentó una ola extremadamente alta que se elevó unos 18 metros por encima de la proa. Todo sucedió en cuestión de segundos. Un cuarto de siglo más tarde seguían cuestionándose la existencia de tales olas (ondas rebeldes o *rouge waves*) que parecían ligarse al fenómeno recurrente de Fermi-Pasta-Ulam, presentado en el experimento numérico realizado en la década de 1950 en los Álamos National Laboratory sobre la inconsistencia del teorema ergódico.

Los sistemas integrables y cercanos a ellos pueden explicar la aparición de gigantescas olas asesinas de hasta 25 metros de altura [1]. Aparecen en un océano relativamente tranquilo, como de la nada, y representan un grave peligro para los barcos y diversas estructuras. Los científicos creen que es un efecto no lineal asociado con la inestabilidad de la modulación. En el océano hay una distribución heterogénea de olas, por eso aquellas zonas donde hay más olas parecen atraer energía hacia sí mismas. Como resultado, en algún momento, nacen ondas de gran amplitud en un mismo lugar. Un modelo efectivo para describir la inestabilidad de la modulación de las olas en el océano es la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE, por sus siglas en inglés).

[1] MAAG agradece a la Secretaría de Investigación y Estudios Avanzados de la Universidad Autónoma del Estado de México, por el apoyo a través del proyecto 6454/2022CIB.

[2] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México. Instituto Literario núm. 100 Ote., col. Centro C.P. 50000, Toluca, Estado de México, México. Enlace de correspondencia: maaguerog@uaemex.mx

[3] Escuela de Posgrado, Universidad Norbert Wiener, Jirón Larrabure y Unanue 110, Cercado de Lima 15046, Perú.

[4] Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad Tecnológica de Panamá, Apdo. 0819-07289, Panamá, República de Panamá.

Recientemente, en la literatura científica se ha prestado atención a las soluciones periódicas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, en particular, la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) (ver [2]-[5] y la lista de referencias en estos trabajos). Esto se debe al hecho de que se necesitan soluciones periódicas en un número de problemas prácticamente importantes; por ejemplo, en el problema de generar pulsos de picosegundos en una fibra óptica local [6], [7], en el problema de enfocamiento [8], [9], en la teoría de una onda en aguas profundas [10], [11] y muchos otros. Un lugar especial en la clase de soluciones periódicas de NLSE son las soluciones que describen las modulaciones del crecimiento de perturbaciones periódicas de longitud de onda larga contra el fondo de ondas interrumpidas de amplitud constante.

En la etapa inicial de desarrollo de la inestabilidad en este problema se estudió el método de linealización [8], [9], y se estudió la evolución posterior del campo utilizando una simulación numérica para soluciones de NLSE en una computadora [5], [6], [10], [11]. Estos estudios permitieron averiguar de muchas maneras el comportamiento cualitativo de la solución. En particular, se encontró que el crecimiento inicial de la amplitud de la perturbación, como resultado de la evolución del campo, es reemplazada por su posterior disminución y retorno al estado inicial de una onda plana, análogo al retorno de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou en un sistema de osciladores acoplados, y para unas condiciones especiales la solución también se vuelve oscilatoria en el tiempo.

La solución exacta de este problema en los trabajos mencionados no se presenta, lo cual podría servir de alguna forma de estímulo para nuestras investigaciones. En esta contribución nosotros presentamos soluciones exactas de inestabilidad modulacional expresada en funciones elementales. La inestabilidad de modulación (MI) es un rasgo característico de una amplia clase de sistemas dispersivos no lineales, asociado con el crecimiento dinámico y la evolución de perturbaciones periódicas sobre un fondo de onda continua. En la etapa inicial de evolución, las bandas laterales espectrales asociadas con la inestabilidad experimentan una amplificación exponencial a expensas de la ganancia, pero la dinámica de onda posterior es más compleja, por lo cual varios escenarios de intercambio de energía son posibles entre los modos espectrales. Esta dinámica está estrechamente relacionada con el célebre fenómeno de recurrencia de Tsingou-Fermi-Pasta-Ulam (TFPU) o el *déjà vu* en fenómenos no lineales.

2. Inestabilidad modulacional

Se analiza la ecuación cúbica quinta no-autónoma de Schrödinger que posee la forma:

$$\imath \frac{\partial q}{\partial Z} + \frac{D(Z)}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + R(Z)|q|^2 q + S(Z)|q|^4 q = 0, \tag{1}$$

que describe la evolución de una envolvente de funciones complejas que varían lentamente $q(Z, T)$ con el tiempo t y la distancia de propagación Z. La unidad imaginaria i satisface $i^2 = -1$. El modelo incluye la dispersión de velocidad de grupo descrita por el parámetro $D(Z)$ y la no linealidad cúbica-quinta de Kerr con magnitudes $R(Z)$, $S(Z)$.

Representamos la solución como:

$$q(Z, T) = \sqrt{\rho(T, Z)} e^{i\sigma(Z, T)}, \tag{2}$$

que al reemplazarlo en la ecuación (1) produce el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para las magnitudes ρ, σ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial Z} + D(z)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\frac{\partial \rho}{\partial T} + \rho\frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2}\right) = 0 \tag{3}$$

$$R(Z)\rho + S(Z)\rho^2 - \frac{\partial \sigma}{\partial Z} +$$

$$D(Z)\left\{\frac{1}{4\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} - \frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)^2\right\} = 0 \tag{4}$$

Ahora veamos pequeñas modulaciones a través del parámetro $\epsilon \ll 1$ de la forma:

$$\rho(Z,T) = \rho_0(Z) + \epsilon Re\left(\rho_1(Z)e^{-i\Omega T}\right) \tag{5} \qquad \sigma(Z,T) = \sigma_0(Z) + \epsilon Re\left(\sigma_1(Z)e^{-i\Omega T}\right) \tag{6}$$

Conseguimos la aproximación de orden cero:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial Z} = 0, \qquad \rho_0 = cte \tag{7} \qquad\qquad \rho_0\left[R(Z) + S(Z)\rho_0\right] = \frac{\partial \sigma_0}{\partial Z} \tag{8}$$

que también se puede escribir así:

$$\sigma_0 = \rho_0 \int_0^Z (R(z) + \rho_0 S(z))dZ \tag{9}$$

Para la aproximación de primer orden en ϵ, las ecuaciones para las amplitudes y la fase de las bandas adyacentes se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial Z} = \Omega^2 \rho_0 \sigma_1(Z) D(Z) \tag{10}$$

$$\frac{\sigma_1}{\partial Z} = \rho_1(Z)\left[R(Z) - \Omega^2 \frac{D(Z)}{4\rho_0} + 2\,\rho_0 S(Z)\right] \tag{11}$$

Para el caso de nuestra ecuación no-autónoma, la amplitud de Fourier se puede representar en forma general de la siguiente manera:

$$\rho_1(Z) = Re\left\{\rho_1 \exp\left[i\int_0^Z K(Z)dZ\right]\right\} \tag{12}$$

$$\sigma_1(Z) = Re\left\{\sigma_1 \exp\left[i\int_0^Z K(Z)dZ\right]\right\} \tag{13}$$

Seguidamente derivamos la ecuación ordinaria de segundo orden considerando las variables de los coeficientes:

$$\frac{d^2\rho_1}{dZ^2} = \Omega^2 \rho_0 \rho_1(Z) D(Z)\left(R(Z) - \Omega^2 \frac{D(Z)}{4\rho_0} + 2\rho_0 S(Z)\right) + \tag{14}$$

$$+ D(Z)\frac{d\rho_1}{dZ}\frac{dD(Z)}{dZ},$$

que tiene el aspecto formal de la ecuación bien conocida:

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} + 2\beta(X)\frac{dY}{dX} + k_0^2(X)Y = 0 \tag{15}$$

Entonces, el potencial de oscilación típica tomará la forma:

$$U(X,Y) = k_0^2(X)Y^2/2 \tag{16}$$

Denotando $k_0 = K$ obtenemos la relación de dispersión en ese determinado potencial de oscilación, por lo tanto:

$$K = \pm\Omega\left\{\rho_0 D(Z)\left(\Omega^2\frac{D(Z)}{4\rho_0} - R(Z) - 2\rho_0 S(Z)\right)\right\}^{1/2} \tag{17}$$

Esta relación de dispersión es totalmente dependiente del signo del término dentro de la raíz cuadrada, ya que si es positivo, el número de onda será real, correspondiente a meras oscilaciones alrededor de la solución no perturbada, mientras que si es negativo, el número de onda se volverá imaginario, correspondiente al crecimiento exponencial y, por tanto, tendremos inestabilidad. Por ende, la inestabilidad ocurrirá cuando:

$$|\Omega| < 2\sqrt{\frac{\rho_0(R(Z) + 2\rho_0 S(Z))}{D(Z)}} \tag{18}$$

El espectro se puede describir definiendo un parámetro de ganancia como $G \equiv 2\,|Im\,K|$. Visualizamos la dependencia del parámetro de ganancia G de la distancia Z y de la frecuencia Ω. Usamos una dependencia posible para el coeficiente dispersivo.

$$D(Z) = \exp(\beta Z) \tag{19}$$

Cuando la nolinealidad quinta de la NLSE: $S(Z) = 0$, y $\beta = 0$ tenemos la típica gráfica de la ganancia:

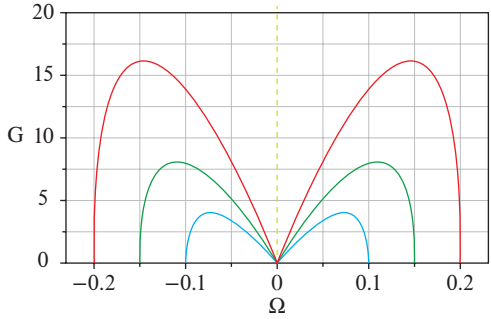


Figura 1. Dependencia típica de la ganancia cuando se fijan valores nulos para el coeficiente del término quinto no lineal [elaboración propia].

La inestabilidad de modulación se manifiesta por las dos bandas laterales espectrales ubicadas simétricamente en los máximos de las frecuencias $\Omega_{máx}$ a cada lado de la línea central. En el dominio del tiempo, la onda continua se convierte en un tren de pulsos periódicos con un periodo $T_m = 2\pi/\Omega_{máx}$.

La dinámica subsiguiente se puede modelar numéricamente. Estas oscilaciones se refuerzan y logran —después de un tiempo— formar el pulso inicial periódicamente al estilo del fenómeno de recurrencia de Fermi, Pasta y Ulham. Para la obtención de resultados de la simulación numérica se usan los siguientes valores $q(r, Z = 0) = 1 + \alpha\,\sin(2\pi T/T_m)$; $\alpha = 0.05$; $T_M = 2\pi$; $D(Z) = R(Z) = (1.0)$. Se muestran dos periodos de TFPU en el dominio espacio-temporal (a), y en el dominio espectral (b) [13].

En el caso general para la ecuación cúbica-quinta de Schrödinger, la dinámica es más compleja y las gráficas ilustran la dependencia del parámetro de ganancia con la frecuencia y distancia Z: tomando la ganancia G sobre la distancia Z que está dada como:

$$G = \int_0^z \mathrm{Im}\,[K(z')]\,dz' \tag{20}$$

donde:

$$\mathrm{Im}\,[K(z)] = \Omega\sqrt{D(z)}\left[\rho_0\,(R(z) + 2S(z)\rho_0) - \frac{1}{4}\Omega^2 D(z)\right]^{1/2} \tag{21}$$

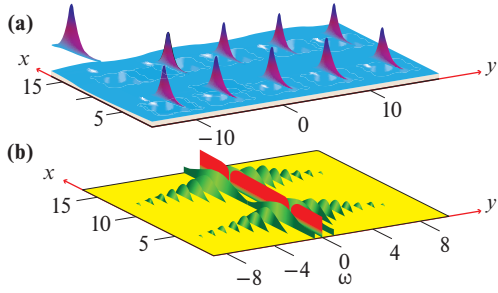


Figura 2. Simulación numérica de la recurrencia TFPU cuando los coeficientes son: $D(Z) = R(Z) = 1$ [elaboración propia].

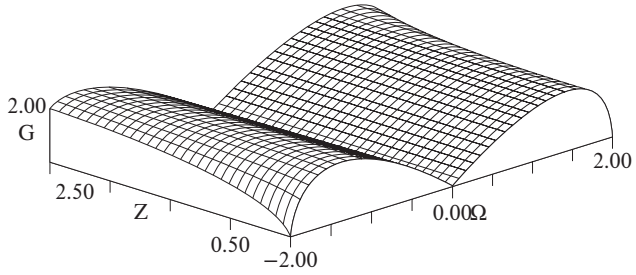


Figura 3. Influencia de la depresión de la ganancia $D(Z) = \exp(-0.1 * Z)$ [elaboración propia].

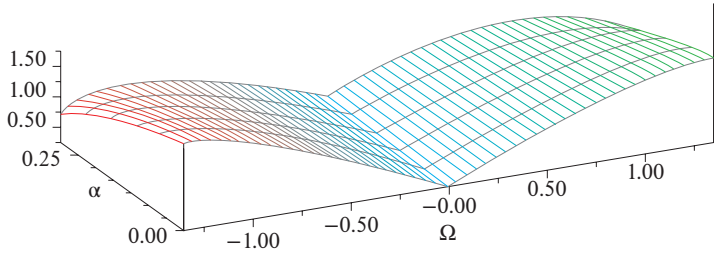


Figura 4. El papel de una fuerte nolinealidad está determinado por el parámetro α. Se nota una distorsión eficaz en la ganancia cuando disminuye el valor de las frecuencias Ω [elaboración propia].

Usando $R(z) = 1$, $S(z) = -1/10$, $\rho_0 = 1$ y la dispersión $D(z) = \exp[\beta z]$, con Ω = constante se tiene que:

$$G = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{\Omega e^{\frac{1}{2}\beta z'}}{2}\left[\alpha^2 - \Omega^2 e^{\beta z'}\right]^{1/2} dz' \tag{22}$$

con $\alpha^2 = 4\rho_0\,(R(z) + 2S(z)\rho_0)$, haciendo $u^2 = \Omega^2 e^{\beta z}$:

$$G = \frac{1}{4}\left[u\left(\alpha^2 - u^2\right)^{1/2} + \alpha^2 \mathrm{ArcTan}\left(\frac{u}{(\alpha^2 - u^2)^{1/2}}\right)\right] \tag{23}$$

Si se toma un z_m de decrecimiento dado por:

$$Zm = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{4\rho_0\,(R(z) + 2S(z)\rho_0)}{\Omega_m^2}\right] \tag{24}$$

Evaluando en la ecuación (23), y considerando R, S y ρ_0 constantes con los valores antes mencionados, tenemos:

$$G(\Omega) = \frac{8}{5\beta}\left[\frac{\Omega}{\Omega_m^2}\sqrt{\Omega_m^2 - \Omega^2} + \mathrm{ArcTan}\left(\sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega_m^2 - \Omega^2}}\right)\right] \tag{25}$$

Por otro lado, si se toma el espectro de ganancia como la ecuación (26):

$$g(\Omega) = \mathrm{Im}\,[K(z)] = |\,\Omega\,|\sqrt{D(z)}\left[\Omega_c - \frac{1}{4}\Omega^2 D(z)\right]^{1/2} \tag{26}$$

con $\Omega_c = \rho_0\,(R(z) + 2S(z)\rho 0)$, se obtiene el espectro de ganancia para distintos valores de β en la dispersión.

3. Conclusiones

En este trabajo se investiga la inestabilidad modulacional en el marco de la ecuación no-autónoma de Schrödinger con dispersión y nolinealidad variables. Se encontraron las relaciones de dispersión adecuadas para obtener las bandas adyacentes de la inestabilidad modulacional. Cuando la dispersión decrece, se ensancha la banda de inestabilidad y crece la ganancia en frecuencia. Actualmente se está investigando el surgimiento del *déjà vu* o la recurrencia de Tsingou-Fermi Pasta-Ulam en la NLSE cúbica-quinta no-autónoma de Schrödinger, así como excitaciones de inestabilidades de órdenes superiores y las ondas rebeldes.

4. Referencias

[1] Novikov S.P. *Solitons*. R. Bullough F (ed.). Springer, 348-362, 1983.
[2] Its A. R. kotliarov V.P. Doklady Akademy Nauk USSR, *Ser. A.,* 11, 965-968, 1976.
[3] Babich M. V., Bobenko A. I., Matveev V. B. *Isvestie AN USSR*, serie matematics, 49(3), 511- 529, 1985.
[4] Ma Y. C., Ablowitz M. *Stud. Appl. Math.*, 65(2), 113-158, 1981.
[5] Tracy E. R., Chen H. H., Lee Y. *C- Phys. Rev. Lett.*, 53(3), 218-221, 1984.
[6] Hasegawa A. *Opt. Lett.*, 9(7), 288-290, 1984.
[7] Anderson D., Lisak M. *Opt. Lett.*, 9(10), 468-470, 1984.
[8] Bespalov V.I, Talanov V.I. *Letter to ZHTEP*, 3, 471-475, 1966.
[9] Landau D., Lifshitz E. *Electrodinamics in condensed matter*. Moscú: Nauka, 1982.
[10] Yuen G, Lake B. In *Solitons in action*. K. Loo, Green A. Scott (ed). Springer, 103-137,1981.
[11] Yuen H. C., Ferguson W. E. *Phys. Fluids*, 21(8), 1275-1278, 1978.
[12] Achmediev N.N., Korneev V. I., Kuzmenko Yu. V. *ZhETP*, 88(1), 107-115, 1985.
[13] Mena Contla, *et. al*. *Optics*., 246, 16777, 2021.

CAPÍTULO 4

INTEGRABILIDAD DE LAS FIGURAS DE EQUILIBRIO DE UNA MASA FLUIDA ROTANTE

Rolando Alvarado Flores[1], Alberto Vélez Rodríguez[2]

1. Introducción

En el presente artículo se desarrolla una teoría para determinar la clase de potenciales de los que puede deducirse la existencia de la superficie de un fluido en rotación sometido a las fuerzas de gravedad y centrífugas. El problema clásico de una masa rotante cuya forma surge de la interacción de las fuerzas mencionadas fue tratado por Newton en el siglo XVII en sus *Principia*. De acuerdo con Todhunter [30] los resultados de la investigación de Newton están contenidos en las proposiciones XVIII, XIX y XX del libro tercero de su obra principal. Si se revisa el índice de nombres compilado en [30], se notará que no hay científico de renombre de los siglos XVII, XVIII y XIX que no haya contribuido a la solución del problema. Halley, Newton, Huygens, los Cassini, Maupertius, Clairaut, los Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, D'Alembert, Buffon, Boscovich, Legendre, etcétera. La situación problemática de la que surgió la cuestión de la forma de las masas rotantes fue la determinación de la figura de la Tierra y el campo gravitacional que le corresponde. Pero tal no es el único campo de aplicación. Se utilizan modelos de masas rotantes en problemas de física nuclear (la referencia canónica es [8], también [23]), de movimiento de medios granulares ([19, 20]) y, por supuesto, en astrofísica [16, 29] y geodesia [10, 11]. La formulación canónica del problema es simple, y se explica en la sección 2 del presente artículo. Un resumen esquemático es el siguiente: se concibe una masa fluida sometida a rotación cuyas partes se atraen entre sí de acuerdo con un potencial gravitatorio newtoniano. La rotación puede ser alrededor de un eje invariable con rapidez angular constante, o bien, presentar nutación y precesión, como se explica en [2]. Sólo se considerará la primera condición en el desarrollo presentado en las secciones siguientes. En otras palabras, el sistema físico presenta una simetría rotacional en un plano transversal al eje de giro invariable. Esta

[1] Centro de Estudios Multidisciplinarios, A. C., Valentín Gómez Farías 221, col. C. N. O. P., C.P. 98053, Zacatecas, Zacatecas, México. Enlace de correspondencia: rolandosmx2@gmail.com
[2] Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica, Universidad Autónoma de Zacatecas, Av. López Velarde 801, Col. Centro, C.P. 98000, Zacatecas, Zacatecas. México.

es una simetría crucial, como se verá en la sección 4. Obtener la ecuación básica del problema es cosa de aplicar los principios de la física. Sean los de conservación de la energía, como en [8], o bien, directamente de las ecuaciones de movimiento del fluido ideal en variables eulerianas en un sistema de referencia rotante (*e.g.*, [16, 29, 12]). A partir de cualquiera de estas formulaciones se obtiene una ecuación integral cuya incógnita es la forma de la superficie del fluido. Esto constituye un "problema de contorno indeterminado" (véase [9, 3 y 28]) que se formula de manera explícita para el potencial gravitatorio en la sección 2, ecuaciones (10)-(11), y para el geopotencial en las ecuaciones (14)-(15). No es común formular el problema de la masa fluida rotante como uno de contorno indeterminado para la ecuación de Laplace. Los autores clásicos no lo hacen. Si lo hubieran hecho, el famoso problema de Stefan para la ecuación del calor no sería reputado como el primero de esa clase de problemas de contorno para una ecuación diferencial (véase, *e.g.* [24], [32]). Una diferencia es fundamental en las situaciones descritas por estos problemas de valores en la frontera: la figura de la masa rotante es un estado de equilibrio, y en general el contorno no varía con el tiempo, lo que sí ocurre en un problema de Stefan. Algunos autores ni siquiera se molestan en formular la ecuación integral porque aplican, a priori, un "método directo". Así, [2] y [4] comienzan con la deducción del potencial interior y exterior de un elipsoide, dado que su hipótesis de trabajo parte de que esa es la forma de la figura de la masa fluida rotante. Con tal procedimiento la novedad del problema se desvanece, porque el contorno deja de ser una incógnita por determinar. Por esto mismo, al proponerse una solución explícita del problema, la cuestión general de la existencia de la superficie no se plantea. Con esto volvemos al objetivo, ya enunciado, del presente artículo, que con más detalle se puede explicar de la siguiente manera: definida una parametrización de la superficie se introducen los campos vectoriales generadores de la figura de equilibrio; se aplica el criterio de integrabilidad de Frobenius para deducir condiciones de existencia necesarias y suficientes bajo la suposición de simetría rotacional en el plano transversal al eje invariable. Esta simetría permite una reducción del conjunto de condiciones diferenciales obtenidas del criterio de Frobenius. Por lo regular, si se tiene una variedad diferenciable M, la existencia de un grupo de transformaciones G —compacto y de acción libre sobre la variedad— permite reducir la geometría a un espacio homogéneo de la forma M/G. Tal es la finalidad de obtener las simetrías de una ecuación diferencial, canjear M por M/G, ya que en este último espacio se opera una reducción de la ecuación diferencial y, a veces, puede ser resuelta. Desde un punto de vista operativo, transformar la ecuación diferencial del espacio M a M/G consiste en introducir los invariantes funcionales del grupo G como nuevas coordenadas. Véase [21] para una exposición detallada. En el problema del fluido en rotación alrededor de un eje invariante *ab initio* se sabe que existe una simetría, por lo tanto, el problema se puede reducir, y esto se manifiesta en la introducción de las coordenadas cilíndricas. Sin embargo, la reducción resulta mucho más útil si se le considera un mapeo en el primer haz estelar J^1 [25]. A ese nivel el procedimiento no ha sido aplicado sistemáticamente a la cuestión de la existencia, cosa que será realizada en la sección 4. Como se verá con detalle, en esa sección la simetría rotacional del potencial permite reducir las condiciones de integrabilidad a una sola, misma que, junto a otras de carácter analítico, conlleva la definición de una clase de funciones. Se organizó el artículo de la siguiente manera: se describe con detalle el problema en la sección 2, se introduce la distinción entre "modelos" de un sistema físico y condiciones de existencia en la sección 3, en la que se mencionan algunos resultados de los modelos utilizados en el caso del fluido rotante. Es hasta la sección 4 en la que se usan las condiciones de Frobenius y se opera el procedimiento de reducción. Una aplicación inmediata de las condiciones de integrabilidad es a los potenciales de elipsoides, por ende se utilizan para el caso de Maclaurin y se deduce un valor de la velocidad en la sección 5. Finalmente se presentan las conclusiones en la sección 6.

1.1 Notación

A lo largo del artículo se minimiza el uso de notación de teoría de conjuntos. En cambio, prolifera la notación del cálculo vectorial tal como se utiliza en [18]: los vectores van con negritas, se usa ∇ para el operador vectorial gradiente, Δ para el operador escalar laplaciano en coordenadas cartesianas, $\times$ para la operación binaria llamada "producto vectorial" y el punto $\cdot$ para la operación binaria conocida como 'producto escalar' con la que, por lo general, se introduce la métrica del espacio. Debido a que, implícitamente, se intercambian límites y signos de integración, el concepto de integral debe ser el de Lebesgue, aunque esto no tendrá relevancia en el desarrollo.

2. Descripción del problema físico y la ecuación integral clásica

La situación física es la siguiente. Se considera una masa de fluido incompresible de densidad acotada $\rho(\mathbf{r})$ a la temperatura de equilibrio T y presión $p(\rho, T)$ que rota alrededor de un eje dado. Está sometida a la acción del campo de gravedad descrito por un potencial $\varphi(\mathbf{r})$. Para la descripción matemática se elige un sistema de referencia móvil, cuyo eje z coincide con el eje de rotación. En tal sistema se sigue la evolución temporal del fluido hasta que adquiere una figura permanente de equilibrio que ocupa un conjunto D, que es una región del espacio real en tres dimensiones $\mathbf{R}^3$. Tal figura es el resultado de la interacción de las fuerzas de gravedad y centrífugas. El problema se reduce a conocer la forma de la superficie ∂D, por ende es un problema de "contorno indeterminado". Ahora bien, las ecuaciones que describen la evolución del sistema son la ecuación de Euler, que estipulada en el sistema rotante adquiere la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F} \tag{1}$$

La condición de incompresibilidad del campo de velocidades: $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$ no resultará de relevancia en el desarrollo posterior y la ecuación que describe el estado termodinámico del fluido se comenta más adelante. Los vectores base del sistema rotante son la terna $\boldsymbol{i}(t), \boldsymbol{j}(t), \boldsymbol{k}$, en la que $\boldsymbol{k}$ es el eje de simetría y por tanto no depende del tiempo. Dado que es un sistema móvil el otro par de vectores satisface las ecuaciones diferenciales cinemáticas típicas: $\frac{d}{dt}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}$, $\frac{d}{dt}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}$ que muestran que giran de acuerdo con la magnitud del vector velocidad angular. En variables lagrangianas se puede escribir una ecuación más general, para un medio deformable caracterizado por un tensor de tensiones no simétrico, véase [10]. Como es bien sabido, y es un ejercicio o ejemplo en los libros de texto, entre las simetrías de las ecuaciones de Euler se encuentran las relativas al cambio del sistema de referencia fijo al móvil. Por ende, permanecen invariantes cuando se transforman las ecuaciones de un sistema de referencia al otro. Esto es notorio si en lugar de la forma explícita (1) se utiliza la derivada covariante ante $SO(3)$, definida por $D_t\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Con esto la ecuación de Euler queda en una forma cuya covariancia frente al grupo especial de rotaciones es clara. En cuánto tiempo alcanza el equilibrio la masa fluida rotante es cosa que depende del radio de giro. Si es muy corto, de dimensiones de 10^2 m, el tiempo límite no es muy largo, incluso segundos. Pero si las dimensiones son del orden de parsecs (10^{16} m), entonces el tiempo entra al orden de los millones de años. De manera convencional se supone un límite ideal $t\to\infty$ para que el sistema se instale en un estado de equilibrio definido por:

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F} \tag{2}$$

A partir de (2) se plantean dos diferentes problemas de equilibrio, como lo mencionan los autores de [2]. Uno de ellos bajo la suposición de velocidad angular nula, el otro con velocidad angular diferente de cero, pero constante, a lo largo del eje invariante. La solución de cada uno de estos problemas debe ser la forma de una región del espacio. No es difícil resolver el primero si se busca el contorno indeterminado. Para ello se coloca nulo el vector velocidad angular y se obtiene una ecuación como: $-\frac{1}{\rho}dp + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. De esta se obtiene, cuando la fuerza es derivable de un potencial y la densidad es uniforme: $p = -\rho U + c$, con c una constante de integración y U el potencial. Determinar el contorno es simple: la presión del medio es uniforme y esto permite escribir: $U(\mathbf{r}) = k$, con k constante. Debido a la forma del potencial gravitatorio esta es la ecuación de una esfera. El otro problema es mucho más complicado. Para enunciarlo en su forma general se requieren las siguientes hipótesis, varias ya mencionadas en la exposición previa:

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{k} \tag{3}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \mathbf{F}_N \tag{4}$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{5}$$

$$p = p(\rho, T) \tag{6}$$

El fluido rota a lo largo de un eje, $\boldsymbol{k}$. Su estado termodinámico se caracteriza por la ecuación térmica de estado (6). Cuando se utiliza una ecuación con dependencia explícita de la temperatura el fluido se denomina "baroclínico". Tal clase de fluidos requieren la ecuación calórica de estado, que relaciona la temperatura de equilibrio con la energía interna. Si se prescinde de esta ecuación, y la presión es función de la densidad, pero no de la temperatura, el fluido se nombra "barotrópico". Aparte de las fuerzas centrífugas, el fluido está afectado por el campo gravitatorio introducido mediante una función $\varphi(\mathbf{r})$. Se incluye la fuerza no conservativa $\mathbf{F}_N$, que actúa aparte de la gravedad. Esta puede ser modelada si la masa rotante no es un fluido continuo sino un medio granulado, mediante las relaciones constitutivas de Mohr-Coulomb. Sin embargo, el problema de la figura de un medio granulado tiene diferencias con el de una masa continua (véase, *e.g.,* [19] y [20]). Las hipótesis (3)-(6), una vez consideradas en la ecuación (2) llevan a:

$$\omega^2 z\boldsymbol{k} - \omega^2 \boldsymbol{r} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\varphi + \mathbf{F}_N \tag{7}$$

Debido a que en el estado de equilibrio las fuerzas son normales a la superficie libre, hecho que Poincaré demuestra en [22], se puede obtener la siguiente relación diferencial:

$$\frac{\omega^2}{2} d\left(x^2 + y^2\right) = -\frac{1}{\rho} dp - d\varphi + \mathbf{F}_N \cdot d\boldsymbol{r} \tag{8}$$

O bien, en su forma integral, donde aparece la constante de integración c:

$$\varphi + \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) = -\int \frac{dp}{\rho} + \int \mathbf{F}_N \cdot d\boldsymbol{r} + c \tag{9}$$

Esta ecuación no es suficiente para completar el modelo, ya que el potencial gravitatorio satisface la ecuación de Poisson en la región D, por lo tanto, se le debe añadir. Sin embargo, como también es bien conocido, el potencial satisface el siguiente problema de contorno de Dirichlet:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \mathbf{r} \in D \tag{10}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \int \mathbf{F}_N \cdot d\boldsymbol{r} + c, \mathbf{r} \in \partial\sim D \tag{11}$$

La condición (11) sobre la superficie del fluido surge del valor que toma la presión en esa región. Dentro del fluido, existe en la región D una distribución de presiones que, al llegar a la interfaz entre los dos medios, *i.e.*, a la región del contorno ∂D, aparece una discontinuidad y adquiere el valor constante del fluido circundante, que bien puede ser la presión de la atmósfera planetaria. Se aprecia que el problema (10)-(11) es un típico problema de "contorno indeterminado" de acuerdo con la definición de Friedman [9]: "Los problemas de contorno indeterminado tienen por fin resolver ecuaciones diferenciales parciales en un dominio del que se desconoce, a priori, una parte". Es claro que la región D es desconocida. Se puede escribir de otra manera el problema (10)-(11) si se introduce la siguiente función; denominada "geopotencial" por Jeffreys [13]:

$$\psi = \varphi(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \tag{12}$$

Y si se elimina la parte no conservativa se arriba a la ecuación:

$$\Delta\psi = -4\pi\rho + \omega^2 \tag{13}$$

Que permite formular el siguiente problema de contorno indeterminado para el geopotencial:

$$\Delta\psi = -4\pi\rho^*, \mathbf{r} \in D \tag{14}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \partial D \tag{15}$$

Con $\rho^* = \rho - \frac{\omega^2}{4\pi}$.

Sin embargo, el camino histórico para resolver el problema de la masa axisimétrica rotante es el siguiente (véase, *e.g.*, [12]): se resuelve la ecuación de Poisson y esta solución se sustituye en (9), lo que conduce a la ecuación integral:

$$\int_D \frac{\rho(r_0)}{|r - r_0|} dV_0 + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = -\int \frac{dp}{\rho} + \int \mathbf{F}_N \cdot d\boldsymbol{r} + c \tag{16}$$

Así como en el problema (10)-(11), la incógnita en (16) es la forma del fluido, por ende, la región de integración D es desconocida. De hecho, la solución misma del problema de la ecuación de Poisson no se obtiene por solución del problema de Dirichlet; ¿cómo se podría obtener de esa manera si la región D es desconocida? Lo que se hace es utilizar una solución válida en una amplia región del espacio que después, al insertarse en (9), lleva a la ecuación (16), en la que aparece la incógnita D. Hay otras maneras de escribir la relación fundamental del movimiento del fluido rotante. Una muy elegante, por su concisión es:

$$dp = \rho d\psi + \rho \mathbf{F}_N \cdot d\mathbf{r} \tag{17}$$

Resultan entonces las relaciones: $p = p(\psi, x, y, z)$, $\frac{\partial p}{\partial \psi} = \rho$, $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_N^x$, etcétera. Es claro que en el caso conservativo barotrópico las líneas isopícnicas coinciden con las líneas isobaras. Más aún, estas líneas son también superficies de nivel del geopotencial ψ, como es claro de la relación $p = p(\psi, \ldots,)$. Mejores argumentaciones de estas afirmaciones en casos más generales se pueden consultar en [29]. Ahora bien, de (17) se puede deducir el problema de contorno indeterminado para la presión que aparece en [3]. Esto se logra con las suposiciones de densidad constante y fuerzas de fricción nulas. Con estas hipótesis se puede escribir:

$$\nabla p = \nabla \rho \psi \tag{18}$$

Si se toma ahora la divergencia de (18) queda:

$$\Delta p = \Delta\rho\psi = -4\pi + \frac{\omega^2}{\rho} \tag{19}$$

Que es la ecuación con la que en [3] se formula el problema de contorno indeterminado. Una vez definido el problema se debe resolver. Si se revisa la literatura atinente al problema bajo escrutinio, en particular la de fines del siglo XIX, se podrá constatar que el método de solución más utilizado es el denominado "método directo". Cuestiones sobre la consistencia del sistema de ecuaciones, es decir, acerca de la existencia de soluciones, no se plantean. Lo que no es raro: la matemática capaz de plantear tales problemas apenas estaba en ciernes a principios del siglo XX.

3. Los métodos de solución

Un teorema de existencia —demostrado para una ecuación cualquiera— apunta a la consistencia de la formulación del problema. Cuando no existe solución el problema está mal planteado. Hay dos caminos que surgen ante la cuestión de la consistencia. El primero es directo, se construye un modelo explícito, es decir, se propone una función que, bajo ciertas condiciones, resuelve el problema. Otro, el segundo, utiliza un razonamiento indirecto, *e.g.*, teoremas del punto fijo, procedimientos variacionales, métodos de la geometría diferencial o cualquier otra técnica, para mostrar cómo ciertas clases de funciones son soluciones. Respecto a este segundo camino, todavía en 1977, J. F. G. Auchmuty podía escribir que, en la extensa literatura acerca de las figuras de equilibrio de una masa rotante se encontraban pocos resultados de existencia [3]. Quizá fue este autor quien primero reconoció el problema de la masa rotante como un problema de contorno indeterminado. El único resultado general acerca de la consistencia del problema del fluido rotante con velocidad angular constante es de inexistencia y se debe a Poincaré [22]. Otras versiones de este resultado se exponen en [2], [15] y de manera breve en la sección 5 de este trabajo. Más transitada es la senda de la construcción de modelos, es decir, del uso de *ansätze* para ofrecer una posible solución. Si se hace una revisión somera de la referencia [30], hasta 1825 no había más procedimiento de solución de la ecuación (16) que el directo. Esto siguió así hasta las investigaciones de Jacobi, Liouville, Poincaré, Darwin, Jeans, Liapunov. En la revisión que presentan del problema, Appell y Véronnet [2] no mencionan otro método. De hecho, cualquier avance sustantivo consistió en mejorar los procedimientos directos. La literatura generada acerca de esta materia, de Newton a Darwin consigna la siguiente metodología. Se propone la forma de la superficie ∂D y se calcula el potencial que produce. Una vez en posesión de la forma funcional se inserta en la ecuación (16) con diferentes distribuciones de presión y se ajustan los parámetros libres. Existen dos variantes de esta técnica. La más sencilla es proponer la figura elipsoidal y ajustar los ejes mayor y menor. Para esto se requiere el cálculo del potencial exterior e interior del elipsoide. Existen muchas técnicas para alcanzar este objetivo. Muy sencilla es la sugerida por [4], aunque también Thomson y Tait realizan un cálculo original [31]. El otro método, propuesto por Clairaut, se basa en expandir el potencial en armónicos esféricos [14] y deducir ecuaciones para cada grado de la expansión. De ese modo se obtienen las denominadas ecuaciones de Clairaut y Radau. Tal teoría se puede generalizar, como se muestra en [11]. Una descripción sucinta del tipo de análisis propuesto por Clairaut se encuentra en [31]. Sin embargo, como se demuestra en [2] el método de Clairaut es más general, y permite obtener los elipsoides de Maclaurin y Jacobi, así como figuras vecinas de estas. Por ende, se puede considerar el método de expansiones en series de armónicos esféricos como la teoría más general en el tratamiento de las figuras de las masas rotantes fluidas hasta la introducción de las expansiones viriales

de Chandrasekhar [5]. No por esto deja de ser un método directo que supone la existencia de la solución, así como la convergencia de las series que utiliza, sin que haya espacio para plantear el problema de la existencia. No resulta claro a priori cómo un teorema de existencia se relaciona a la magnitud de la velocidad angular. Basta, sin embargo, examinar el resultado de Poincaré para descubrirlo: a partir de las propiedades de las soluciones de la ecuación de Poisson se establece una cota superior para este parámetro. Una velocidad superior a la definida por Poincaré torna incoherente la figura de equilibrio y se deshace. En la sección 5 de este capítulo se aplica uno de los criterios de existencia deducidos en la sección 4 al caso de un elipsoide de Maclaurin. Ya en forma explícita el criterio establece un valor de la magnitud de la velocidad angular. Para referencia posterior se consigna aquí la forma del potencial en un punto externo al mismo $\langle x, y, z\rangle$ de un elipsoide de ejes a_1, a_2, a_3:

$$\varphi = \pi\gamma a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \left[1-\left(\frac{x^2}{a_1^2+u}+\frac{y^2}{a_2^2+u}+\frac{z^2}{a_3^2+u}\right)\right]\frac{du}{G(u)}$$

Donde $G(u)=\sqrt{(a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)}$ y γ es la constante gravitatoria de Newton. Este potencial se puede escribir de la manera siguiente:

$$\varphi = A + Bx^2 + Cy^2 + Dz^2$$

La forma de los coeficientes A, B, C, D se obtiene fácilmente de la expresión explícita ofrecida. Estos coeficientes suelen conducir a integrales hiperelípticas, que en el caso de elipsoides de revolución se reducen a integrales más simples.

4. Las condiciones de integrabilidad y la existencia de soluciones

4.1 El teorema de Frobenius

Sea M una variedad diferenciable C^N. Es decir, N veces diferenciable. De acuerdo con Souriau [26], una distribución sobre la variedad M es una correspondencia entre cada uno de sus puntos p, y un subespacio $E(p)$ del haz tangente TM. Caben ahora las siguientes definiciones comunes:

Def1: Decimos que $N \subset M$ es una "integral" de la distribución $E(p)$ si, y sólo si, para todo $p \in N$ se tiene que $T_p N = E(p)$.

Def2: La correspondencia $p \to E(p)$ definida en M establece una "foliación" de M si, y sólo si, cada uno de sus puntos pertenece a una integral de la distribución.

Def3: Dados dos campos vectoriales, X, $Y \in E$, definidos en M, se dice que E es una "distribución involutiva" si, y sólo si, $[X, Y] \in E$. El corchete $[X, Y]$ es el "corchete de Lie" de campos vectoriales.

Teorema 1 (de Frobenius): Una distribución es involutiva si, y sólo si, es integrable.

Se pueden leer exposiciones y demostraciones del teorema de Frobenius en [1], desde el punto de vista dual en [6], con más generalidad en [7] y desde luego en [27]. La formulación dual exige introducir las 1-formas diferenciales duales de los campos vectoriales, lo que supone dotar a la variedad de una estructura métrica. Entonces, si se tiene una variedad riemanniana $\langle M, g\rangle$ donde g es la métrica, las formas diferenciales duales generadoras de los ideales diferenciales se introducen mediante la fórmula $\theta_i = \tau_{X_i} g$, donde τ_{X_i} es el operador de contracción vectorial y X_i

un vector de la base del espacio tangente. Con tal definición queda el producto interior $\theta_i(X_j) = \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es el tensor unitario de Kronecker. En este trabajo no se utilizará la formulación dual, *i.e.*, formas diferenciales, sino la que involucra los campos vectoriales y el corchete de Lie.

4.2 Las representaciones analíticas de la superficie

Aplicar el teorema de Frobenius requiere reescribir las ecuaciones fundamentales del problema de rotación del fluido, de modo tal que los campos vectoriales que generan la dinámica sean evidentes. Para ello se debe escoger una parametrización de la superficie ∂D. Si la incógnita es una forma, la de la masa rotante autogravitante se puede establecer como una región en $D \subset \mathbf{R}^3$, que es un volumen, o bien como su frontera ∂D, que es una superficie. En general existen tres representaciones posibles de ∂D, todas ellas locales porque sólo tienen validez en una región $U \subset \partial D$. La primera es la "representación de Monge", dada por:

$$U = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{R}^3 \,|\, \langle x, y, z(x, y)\rangle\}$$

En esta lo importante es determinar la forma de la función $z(x, y)$. También se le puede denominar "representación explícita", porque otra de las representaciones posibles es la "representación implícita", cuya forma analítica es:

$$U' = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbf{R}^3 \,|\, f(x, y, z) = 0\}$$

Con $U' \subset \partial D$. La relación entre ambas está dada por el teorema de la función implícita, que garantiza la existencia de la representación explícita cuando, para alguna variable, la derivada parcial de f es distinta de cero en una región definida. Por fin, la representación más general es la de Gauss, cuya definición es:

$$U''\{\langle u, v\rangle \in \mathbf{R}^2 \,|\, x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)\}$$

Esta última representación se suele escribir en la forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Pero no se usará en el presente artículo. Los campos vectoriales que se requieren para aplicar el teorema de Frobenius se construirán a partir de la transformación de la representación explícita en la implícita.

4.3 El caso de las derivadas cruzadas

Para esto se toma la ecuación que define la superficie en la forma:

$$d\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\omega^2}{2} d(x^2 + y^2) \tag{20}$$

Esta ecuación define la superficie porque, como ya se explicó, la presión se toma constante en la interfaz de los dos medios. Luego, se expande el diferencial del potencial y se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = -\omega^2(xdx + ydy) \tag{21}$$

Si se asume la representación local de Monge se tiene que, por ejemplo: $z = (x, y)$. Cualquiera otra variable se puede utilizar, pero se debe escoger alguna y aquí se toma la tercera componente. Se coloca esta representación en la ecuación (21) y se obtiene:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = -\omega^2(xdx + ydy) \tag{22}$$

De la independencia de las diferenciales surgen directamente las ecuaciones que satisface la superficie:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -\omega^2 x \tag{23}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = -\omega^2 y \tag{24}$$

En general, debido a la forma del potencial, las ecuaciones son no lineales. De las ecuaciones (23)-(24) surge un primer criterio de integrabilidad: las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Si tal criterio se satisface, la 1-forma diferencial $a = pdx + qdy$ resultará integrable porque $a = dz$. Este no es el marco analítico más general, pero discutirlo permite clarificar la formulación general. Queda claro, además, que no cualquier potencial genera estructuras coherentes.

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 2: En el problema de la masa rotante, la superficie del fluido existe si y sólo si en todos los puntos tales que $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0$, el potencial satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\left(\omega^2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\left(\omega^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \tag{25}$$

Demostración: que la ecuación (25) es suficiente se logra ver si de las ecuaciones (22)-(23) se despejan las derivadas de la función $z(x, y)$, en la forma:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\omega^2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right) \tag{26}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{\omega^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}\right) \tag{27}$$

Y a partir de estas se calculan las derivadas respecto de y en (26) y de x en (27), se igualan y se obtiene la ecuación (25), por tanto es criterio suficiente. La necesidad se demuestra igual de simple. Si la ecuación (25) no vale, las derivadas cruzadas no son iguales y la superficie no existe. QED

Teorema 3: Si el potencial y su derivada respecto de z son invariantes ante rotaciones en el plano transversal y $\omega^2 + \frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$, entonces la superficie existe.

Demostración: Se denomina plano transversal de la figura aquel ortogonal al eje z. Si en este plano es invariante el potencial ante $SO(2)$, entonces satisface la siguiente relación:

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{28}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{x}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{29}$$

Lo que transforma el criterio de integrabilidad (25) en lo siguiente:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\left(\omega^2x+\frac{x}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\left(\omega^2y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

Que se puede escribir como:

$$x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\left(\omega^2+\frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\left(\omega^2+\frac{1}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$$

De donde es claro que:

$$x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}$$

Lo que es:

$$y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0 \tag{30}$$

Es decir, dada la invariancia del potencial en el plano transversal, así como de su derivada respecto de z, se deduce que el criterio de integrabilidad se satisface idénticamente. QED

4.4 El corchete de Lie de los campos vectoriales

Se puede considerar que el criterio de derivadas cruzadas es una aplicación del teorema de Frobenius. Sin embargo, lo es de manera pedestre porque los campos vectoriales, así como la representación utilizada, no son generales. Es más general la representación implícita, la que se consigue si se supone que entre las variables subsiste la relación:

$$f(x,y,z)=0 \tag{31}$$

Ya se mencionó que para pasar de esta representación a la de Monge se utiliza el teorema de la función implícita. Si se invoca ese teorema se puede obtener lo siguiente:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \tag{32}$$

De modo que las ecuaciones (23)-(24) son:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\omega^2x+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\omega^2y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{34}$$

Por ende, los campos vectoriales que constituyen la distribución E se escriben como:

$$X_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial x} + \left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z} \tag{35}$$

$$X_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial y} + \left(\omega^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z} \tag{36}$$

Entonces, se puede escribir: $E_f = \{X_1, X_2\}$, la que claramente es tangente a U' en caso de que exista la solución f. Se tiene el siguiente:

Teorema 4: Si se excluye el origen, el potencial es invariante ante SO (2) en el plano transversal, su derivada respecto de z es diferente de cero y satisface la condición:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] = 0 \tag{37}$$

Entonces la distribución E_f está en involución porque su corchete de Lie es nulo.

Demostración: se calcula el corchete de Lie de los campos (35)-(36), lo que produce de inmediato:

$$[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y} +$$

$$\left[\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \left(\omega^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\right]\frac{\partial}{\partial z} \tag{38}$$

Entonces es claro que las siguientes condiciones son suficientes para la involutividad:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right] = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] = 0 \tag{40}$$

$$\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \left(\omega^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = 0 \tag{41}$$

Se demostrará que una es suficiente bajo la condición de invariancia del potencial en el plano transversal. Para esto basta escribir la condición de invariancia en la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{42}$$

Y sustituir en la ecuación (40). El resultado es la ecuación (39), lo que muestra que si el potencial es invariante ante SO (2) en el plano transversal, entonces las condiciones (39) y (40) son equivalentes entre sí. Ahora, si se aplica este resultado a la ecuación (41) esta se reduce a la condición:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \tag{43}$$

Que se satisface idénticamente, debido a que la derivada segunda del lado izquierdo se calcula de la condición (39), mientras que la del lado derecho de la condición (40). De modo explícito se despejan de (39) y (40) las derivadas segundas requeridas, que son:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} = -\frac{\left(\omega^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} = -\frac{\left(\omega^2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \tag{45}$$

Estas se pueden sustituir directamente en (41), para reducirla a la condición de invariancia ante rotaciones del potencial en el plano transversal. QED

A partir del teorema 4 se tiene un criterio suficiente para establecer la integrabilidad del movimiento rotante de un fluido a partir de un potencial invariante ante rotaciones en el plano transversal. Pero es muy débil. Nos dice cuándo existe la superficie, pero si no se satisface, nada indica. En particular no es un criterio necesario porque no es exhaustivo: existen otras posibilidades de lograr la involutividad de la distribución. La más general es:

$$[X_1, X_2] = aX_1 + bX_2 \tag{46}$$

Con $a, b \in \mathbf{R}$. Se tiene entonces el siguiente:

Teorema 5: Si se excluye el origen, el potencial φ y $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ son invariantes ante SO (2) en el plano transversal, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0, \left(\omega^2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \neq 0$ y valen las ecuaciones: $ax + by = 0$ y:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\omega^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] = a\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{47}$$

entonces la distribución E_f es involutiva con un álgebra definida por (46).

Demostración: para demostrar el teorema basta probar que, bajo las condiciones establecidas en el mismo, las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\omega^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] = a\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{48}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] = -b\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{49}$$

$$\left(\omega^2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \left(\omega^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} = a\left(\omega^2 x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + b\left(\omega^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \tag{50}$$

se satisfacen idénticamente. Que la ecuación (48) se satisface es suposición del teorema. El resto de las ecuaciones se satisfacen de la siguiente manera. Si el potencial es invariante ante rotaciones en el plano transversal vale la ecuación (42), lo que permite escribir:

$$\omega^2 y + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \tag{51}$$

Por lo tanto, si vale la ecuación (48), la transformación (51) implica que cambia en:

$$\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] = a\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{52}$$

o bien:

$$-\frac{y}{x}\, b\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{53}$$

que es $ax + by = 0$, por lo que queda satisfecha la condición. Ahora bien, con ayuda de la transformación (42) la condición (50) se reduce a:

$$\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{y}{x}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \tag{54}$$
$$= a\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + b\,\frac{y}{x}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$$

que se reescribe como:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = a + b\,\frac{y}{x} \tag{55}$$

y:

$$x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = ax + by \tag{56}$$

Finalmente:

$$x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{57}$$

Es decir, la condición (50) se reduce a (57), que es la invariancia ante rotaciones de la derivada respecto de la coordenada z del potencial. QED

Quedan dos opciones para obtener una distribución involutiva, estas son:

$$[X_1, X_2] = aX_1 \tag{58}$$
$$[X_1, X_2] = bX_2 \tag{59}$$

Lo que resulta de la consideración de estos casos es el:

Teorema 6: Si el potencial es invariante ante $SO(2)$ en el plano transversal y la distribución E_f es involutiva de acuerdo con el álgebra (58), entonces el potencial satisface las condiciones:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,\ \omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{60}$$

Demostración: los campos vectoriales satisfacen (58), entonces son válidas las ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 y+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]=a\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{61}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right]=0 \tag{62}$$

$$\left(\omega^2 x+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}-\left(\omega^2 y+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}=a\left(\omega^2 x+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \tag{63}$$

De la invariancia ante SO (2) en el plano transversal resulta que la ecuación (61) se transforma en:

$$\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right]=a\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{64}$$

Por lo tanto, con el uso de (62) se obtiene el resultado $\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0$. Se inserta esta derivada en (63) y queda $\omega^2 x+\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0$. QED.

Las condiciones del teorema 6 vuelven triviales los campos vectoriales X_1 y X_2 al reducirlos a las formas: $X_1=0, X_2=\left(\omega^2 y+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$. Campos a los que se denominará "triviales". De igual manera, las álgebras respectivas son también triviales. Cualquier potencial derivado de las condiciones del teorema 6 será, por ende, denominado "trivial". Se trabajó el caso (58), el (59) conduce a la misma trivialización.

Todos los resultados hasta ahora obtenidos son muy débiles si se los toma por separado. Lo son porque ofrecen condiciones suficientes de involutividad, lo que significa que si se satisfacen las condiciones dadas, la superficie existe, pero si no hay satisfacción de estas no se deduce nada. No son condiciones necesarias. Sin embargo, si se les considera en conjunto conducen a las condiciones necesarias, es decir, a criterios de inexistencia de la superficie. ¿Cómo se realiza esa consideración? Por exhaustividad. Los resultados obtenidos agotan las condiciones de posibilidad de una superficie de la forma $f(x, y, z)=0$. Si tal superficie existe, satisface el criterio ofrecido por el teorema 4, o bien, el teorema 5. Los únicos otros casos son los triviales, por tanto, la condición necesaria es la siguiente:

Corolario: Condición necesaria de existencia local de la superficie $U' \subset \partial D$ para un potencial no trivial es que satisfaga los criterios del teorema 4 o los del teorema 5.

Demostración: Supóngase que no se cumplen las condiciones $[X_1, X_2]=0$ ni $[X_1, X_2]=aX_1+bX_2$. Estas condiciones son equivalentes, como muestran los teoremas 4 y 5, a ciertas condiciones sobre el potencial, que por ende tampoco se cumplen. Debido a que se excluyen las condiciones triviales, no hay manera de tornar involutiva la distribución E_f dentro del rango de aplicabilidad del teorema de Frobenius. Por tanto, no existe la integral. QED

Todo lo anterior se puede sintetizar en una única proposición:

Proposición 1: Condiciones necesarias y suficientes de existencia de la integral f son las dadas en los teoremas 4 y 5.

Demostración: como se mostró en los teoremas 4 y 5, si se satisfacen sus condiciones, entonces existe la integral. Por ende, son condiciones suficientes. Si no se satisfacen las condiciones, de acuerdo con el corolario, no existe la integral, por tanto, son condiciones necesarias.

Comentario 1: Se debe notar que el criterio de las derivadas cruzadas (25) de la sección 4.3 es un caso particular de los criterios de la presente sección, 4.4, definidos a partir del corchete de Lie (38).

Comentario 2: La teoría anterior, asentada en los teoremas 4 y 5 depende en gran parte, fuera de condiciones analíticas derivadas del teorema de la función implícita, de la invariancia del potencial ante rotaciones en el plano transversal. Esta es, en general, una simetría que permite relacionar coordenadas del haz fibrado estelar $J^2(\partial D)$, pero no es la única posible desde un punto de vista teórico. Se pueden imponer simetrías más generales de la forma:

$$\eta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \eta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \tag{65}$$

Donde las funciones η son los generadores infinitesimales de un grupo de transformaciones G. La finalidad de imponer (65) es la de simplificar las ecuaciones que aparecen en el desarrollo mediante reducciones simétricas. Sin embargo, las rotaciones en el plano transversal se imponen de la física del problema. Tiene un eje de rotación que ni precesa o nuta porque el vector velocidad angular se postula constante. La invariancia ante $SO(2)$ es una condición suficiente, también en los teoremas de [3].

5. El elipsoide de Maclaurin

Desde el punto de vista físico, la existencia de un equilibrio impone la cuestión del parámetro, o parámetros, cuya variación continua determina la estabilidad del mismo. Las figuras de equilibrio de la masa fluida rotante se pueden clasificar de acuerdo con su velocidad angular, cuya variación hace máxima o mínima la energía potencial del fluido. Este resultado se debe a Poincaré [22] y lo desarrolla [2]. De hecho, uno de los resultados más simples respecto a la estabilidad se sigue de la aplicación del teorema de Gauss, en la forma que le dio Poincaré en [22] al geopotencial. Para obtenerlo basta escribir la siguiente relación:

$$\int \Delta \psi dV = \int \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \tag{66}$$

La integral de la izquierda es sobre todo el volumen del fluido, la segunda sobre su superficie indeterminada. Si se utiliza la ecuación (13) queda:

$$\int \left(\omega^2 - 4\pi\rho\right) dV = \int \frac{\partial \psi}{\partial n_e} dS \tag{67}$$

Es aquí donde se usan las propiedades de las soluciones de la ecuación de Poisson. Como se argumenta en [22], [2] y [15] la función $\frac{\partial \psi}{\partial n_e}$, que es el gradiente del geopotencial sobre el vector normal exterior a la superficie del fluido rotante, no cambia de signo. Tal signo es negativo porque el vector normal interior es siempre positivo debido a dos motivos: la relación $\rho \frac{\partial \psi}{\partial n_i} = \frac{\partial p}{\partial n_i}$ que está implicada por (17), y a que la presión interna del fluido es positiva. Por ende, de (67)

resulta que si $\frac{\omega^2}{4\pi\rho} > 1$ la figura es inestable y no existe. O no existe el tiempo suficiente. Appell y Veronnet lo dicen así: *c'est-a-dire, pour parler un langage vulgaire, si le corps tourne trop vite*. Si gira muy rápido se deshace. La existencia de una cota superior general para la frecuencia angular obliga a que todas las ecuaciones dadas para calcularla la satisfagan, por eso, en el espacio construido con la frecuencia angular y los parámetros que la definen se establecen zonas de estabilidad/inestabilidad. Esto se puede consultar en [2]. Expuesto lo anterior, se procede a ilustrar la teoría con un ejemplo sencillo: el elipsoide de Maclaurin. De este modo se notará que la condición de existencia lleva a un valor de la velocidad angular, lo que muestra el contenido físico del desarrollo matemático. Utilizar el teorema 4 al caso del potencial del elipsoide requiere el uso de las ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(\omega^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] = 0$$

$$\varphi = A + Bx^2 + Cy^2 + Dz^2$$

No se aplica de forma directa el criterio, sino que antes se verifican el resto de supuestos del teorema. En particular, es claro que $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ en todos lados excepto en $z = 0$. Se excluye este punto. Como se exige simetría rotacional del potencial en el plano transversal se debe colocar $a_1 = a_2 = d$. Esto conduce a un elipsoide de revolución del tipo de Maclaurin. Por tanto, el potencial sobre el que se aplica el criterio es:

$$\varphi = A + B\left(x^2 + y^2\right) + Dz^2 \tag{68}$$

Y resulta la relación:

$$\omega_*^2 = -2B \tag{69}$$

Que establece un valor preciso de la frecuencia angular. En forma explícita se tiene:

$$\omega_*^2 = 2\pi\gamma d^2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\left(d^2 + u\right)^2 \sqrt{a_3^2 + u}} \tag{70}$$

El valor obtenido de esta integral es suficiente y necesario para decir que la superficie existe a esa magnitud de la velocidad angular. Y también establece que si supera este valor, o no lo alcanza, o bien, es inestable y no existe. O sea: si gira muy rápido o muy lento no alcanza a formarse. Por la parte de arriba existe la cota fijada por Poincaré de valor $4\pi\rho$ que la debe satisfacer también (70). Por el método directo –de ajuste de parámetros– los criterios obtenidos son más complicados que el dado en (70) porque exigen calcular más integrales. Así que el uso del teorema de Frobenius permite obtener un nuevo criterio de estabilidad, más simple.

6. Conclusiones

Al inicio del artículo se prometió una teoría para determinar clases de potenciales capaces de generar estructuras fluidas coherentes mientras rotan. Las condiciones de los teoremas 4, 5 y 6

definen las condiciones necesarias y suficientes de pertenencia a clases de funciones con esa propiedad. Se logra aún más: dado un potencial, se puede verificar si satisface los criterios de cada teorema y ajustar los parámetros libres que contiene, para que con esos valores existan las figuras del equilibrio. Este ajuste es más sofisticado que el utilizado en la literatura clásica, y está mejor argumentado. Del desarrollo teórico de la sección 4 queda claro que la representación de Monge de la superficie indeterminada es menos general que la representación implícita. Esta última contiene a aquella y la generaliza, como se nota en el conjunto más restrictivo de condiciones de existencia que exige. También se mostró la manera en la que la imposición de una simetría permite la reducción del conjunto de condiciones de existencia. Con la ayuda de la simetría rotacional se transforman las ecuaciones derivadas del criterio de Frobenius, la una en la otra, por lo que la acción de la simetría es similar a la acción de mapeos como el de Hopf-Cole, que permite resolver la ecuación de Burgers por transformación a la del calor. Este tipo de transformaciones suelen denominarse "transformaciones de Backlünd". Su utilidad reside en relacionar diferentes tipos de ecuaciones diferenciales. De la misma manera actúa la simetría rotacional ante las condiciones de consistencia. Sin esa simetría resultaría un sistema de ecuaciones de consistencia muy complicado de satisfacer y, quizá, insoluble. Sin embargo, cuando el eje de rotación precesa o nuta, otras simetrías pueden estar presentes, con las que quizá se podría realizar algún tipo de reducción. Pero esto dependerá de la disposición geométrica del sistema físico particular.

7. Referencias

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Addison-Wesley, 1983.

[2] P. Appell, A. Véronnet. *Traite de Mécanique Rationelle IV: Figures d´équilibre d´une masse liquid homogéne en rotation*. París: Gauthier-Villars, 1933.

[3] J. F. G Auchmuty. Existence of axisymmetric equilibrium figures. *Arch. Rat. Mech. Anal*., 65, 1977. doi.org/10.1007/BF00280443

[4] H. Bouasse. *Cours de Mécanique*. París: Ch. Delagrave, 1913.

[5] S. Chandrasekhar. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. New Haven: Yale University Press, 1969.

[6] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics*. Amsterdam: North-Holland, 1987.

[7] A. Candel, L. Conlon. *Foliations I*. Rhode Island: AMS, 2000.

[8] S. Cohen, F. Plasil, W. J. Swiatecki. Equilibrium Configurations of Rotating Charged or Graviting Liquid Masses with Surface Tension II. *Annals of Physics*, 82, 1974. doi.org/10.1016/0003-4916(74)90126-2

[9] A. Friedman. Free Boundary Problems in Science and Technology. *Notices of de AMS*, 47, 2000.

[10] E. Grafarend, K. Hauer. The Equilibrium Figure of the Earth I. *Bull. Geod.*, 52, 1978. doi.org/10.1007/BF02521827

[11] Ch. Huang, Y. Liu, Ch. Liu, M. Zhang. A generalized theory of the figure of the Earth: formulae, *J. Geod.*, 93, 2019. doi.org/10.1007/s00190-018-1159-6

[12] W. S. Jardetsky. *Theories of Figures of Celestial Bodies*. NY: Dover, 2005.

[13] H. Jeffreys. *The Earth*. Cambridge: Cambridge University Press, 1959.

[14] Z. Kopal. *Figures of Equilibrium of Celestial Bodies*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1960.

[15] N. S. Koshlyakov, M. M. Smirnov, E. B. Gliner. *Differential Equations of Mathematical Physics*. Amsterdam: North-Holland, 1964.

[16] N. R. Lebovitz. Rotating Self-Graviting Masses. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 11, 1979. doi.org/10.1146/annurev.fl.11.010179.001305

[17] E. R. Marshalek. An overlooked figure of equilibrium of a rotating ellipsoidal self-gravitating fluid and the Riemann theorem. *Phys. Fluids*. 8, 1996. doi.org/10.1063/1.869126
[18] J. E. Marsden, A. Tromba. *Cálculo vectorial*. Madrid: Pearson, 2018.
[19] A. Medina Ovando, E. Luna, R. Alvarado, C. Treviño. Axisymmetrical Rotation of a Sand Heap. *Phys. Rev. E*, 51, 1995. doi.org/10.1103/PhysRevE.51.4621
[20] A. Medina Ovando. Free Surface Flow and Fracture in Granular Media. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 71, 2002. doi.org/10.1143/JPSJ.71.1189
[21] P. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. NY: Springer, 2000.
[22] H. Poincaré. *Figures d´équilibre d´une Masse Fluide*. París: C. Naud éditeur, 1902.
[23] C. E. Rosenkilde. Stability of Axisymmetric Figures of Equilibrium of a Rotating Charged Liquid Drop. *J Math Phys*, 8, 1967. doi.org/10.1063/1.1705107
[24] L. Rubinstein. The Stefan Problem: Comments on its Present State. *J. Inst. Math. Applics.*, 24, 1979. doi.org/10.1093/imamat/24.3.259
[25] D. J. Saunders. *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
[26] J. M. Souriau. *Structure of Dynamical Systems*. Boston: Birkhauser, 1997.
[27] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I*. Houston, TX: Publish or Perish, 1999.
[28] M. Sussman, P. Smereka. Axisymmetric free boundary problems. *J. Fluid Mech.*, 341, 1997. doi.org/10.1017/S0022112097005570
[29] J. L. Tassoul. *The Theory of Rotating Stars*. Nueva Jersey: Princeton University Press, Princeton, 1977.
[30] I. Todhunter. *A History of the Theories of Attraction and the Figure of the Earth*. NY: Dover, 1962.
[31] W. Thomson, P. G. Tait. *Principles of Mechanics and Dynamics*. NY: Dover, 1964.
[32] H. Hu, S. A. Argyropoulos. Mathematical modelling of solidification and melting: a review. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng*, 4, 1996. doi.org/10.1088/0965-0393/4/4/004

CAPÍTULO 5

EXPLORACIÓN DEL POTENCIAL AMORTIGUADO Y CORRIDO DE LENNARD-JONES EN LA FASE LÍQUIDA Y EN LA INTERFAZ LÍQUIDO-VAPOR*

Lourdes Reyes Cervantes[1], Gustavo Torres García[1], Benjamín Ibarra Tandi[1], Jorge López Lemus[1]

1. Introducción

El advenimiento de las computadoras de alta velocidad proporciona las herramientas necesarias para llevar a cabo simulaciones por computadora de fluidos atómicos y moleculares de forma detallada y precisa. Los estudios computacionales de fluidos homogéneos y heterogéneos han sido investigados por medio de simulaciones de dinámica molecular (DM) [1]. Estos estudios, si bien brindan información básica sobre el comportamiento de fluidos simples y complejos, también brindan información importante sobre diversas ramas de la investigación aplicada, como la tecnología de lubricación (tribología), el procesamiento de polímeros y las técnicas de separación de gas usando membranas, donde el transporte y la energía en escalas de longitud atómica son difíciles o imposibles de medir experimentalmente, justamente en casos como este la simulación por computadora ha demostrado ser de gran valor.

En las simulaciones de DM, el truncamiento del potencial de interacción y el tamaño del sistema son dos cuestiones importantes, ya que ambos afectan la confiabilidad de los resultados, por lo cual se debe tener precaución al elegirlos. En cualquier simulación por computadora es necesario tratar con interacciones de largo alcance (ILA). Estas interacciones dependen de la naturaleza física del sistema. Para fluidos polares las interacciones electrostáticas determinan las propiedades del sistema, su truncamiento podría conducir a resultados no físicos [2]. Esta misma situación no ocurre con fluidos simples no polares. Particularmente, para los fluidos de Lennard-Jones (LJ) se han realizado extensos estudios para aclarar la implicación del uso de poten-

* CLA y GTG agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), México, por el apoyo financiero. JLL agradece al Laboratorio Nacional de Cómputo de Alto Desempeño (LANCAD), México, proyecto 11-2022.

[1] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, Instituto literario núm. 100 Ote., col Centro, C.P. 50000, Toluca, Estado de México, México. Enlace de correspondencia: jllemus@uaemex.mx

cial esféricamente truncado y desplazado (STS) [3]. Las propiedades termodinámicas en una fase homogénea no muestran diferencias significativas si se utiliza el potencial ST o STS. Para estas propiedades se deben incluir las correcciones de largo alcance (CLA) al final de las simulaciones [1, 4]. Las propiedades de transporte generalmente se calculan con fuerzas truncadas sin incluir las CLA, debido principalmente a que no hay una expresión confiable de tales correcciones de largo alcance para propiedades de transporte. Estas cantidades muestran una clara dependencia del truncamiento potencial [5, 6, 7, 8]. Esta misma dependencia también se encuentra para propiedades coexistentes en una interfase líquido-vapor.

El truncamiento en potencial y fuerzas tiene un fuerte efecto sobre las propiedades termodinámicas en un sistema de dos fases. Para estimar con precisión estas propiedades se han hecho varios esfuerzos [3, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Recientemente, el MSE —también conocido como método de sumas de Ewald— se ha utilizado para obtener propiedades termodinámicas y de transporte para la fase líquida y propiedades de coexistencia en la interfase líquido-vapor [24, 25]. Esta última técnica nos permite lograr buenos resultados sin incluir las CLA durante o al final de las simulaciones. Hasta donde sabemos, el MSE aplicado al potencial LJ es uno de los métodos más precisos para calcular de manera completa las ILA, tal como sucede con las interacciones de Coulomb [26]. Aquí, la energía total se divide en dos partes, una contribución se calcula en el espacio real y otra en el espacio de Fourier. La primera contribución se evalúa mediante una suma de todos los pares moleculares y no requiere mucho tiempo. Por el contrario, el cálculo del término de Fourier implica un largo tiempo de cálculo. Por ello, se han desarrollado algunos métodos para reducir su costo computacional. Entre los más exitosos se pueden citar el paso de tiempo múltiple (MTS) [27] y el *smooth particle mesh Ewald method* (método de Ewald de malla de partículas suaves) (SPME) [28]. Un inconveniente de estos métodos es su difícil implementación computacional.

Recientemente, Wolf *et al*. [29] demostraron que la interacción efectiva de Coulomb para sistemas iónicos clásicos puede evaluarse evitando la contribución de Fourier. Por supuesto, esto implica una notable reducción del esfuerzo computacional. Para ello, propuso un método basado en los siguientes pasos. Inicialmente se lleva a cabo una neutralización de carga del sistema dentro de la esfera de corte de radio r_c. En el segundo paso se demuestra la equivalencia operativa entre la neutralización de carga en la superficie del sistema y el cambio del potencial de Coulomb a cero en r_c. Finalmente, se obtiene una expresión para un potencial de par de Coulomb con carga neutralizada y amortiguada. Podemos notar que las fuerzas resultan truncadas y desplazadas en r_c; es decir, las fuerzas se corrigen con el mismo término real de las fuerzas evaluadas en radio de corte. La expresión resultante ofrece resultados muy parecidos a los obtenidos por el método de Ewald. Demontis *et al*. [30] aplicaron el método Wolf a simulaciones de sistemas complejos, como aluminosilicatos hidratados anhidros (zeolitas) y agua líquida. Se encontró que los resultados obtenidos son equivalentes a los que emplean el esquema tradicional de Ewald, siempre que el radio de truncamiento y el parámetro de amortiguamiento sean los adecuados. El método de Wolf también ha sido aplicado por Zahn *et al*. [31] al agua líquida pura. Utilizaron un potencial de Coulomb amortiguado ligeramente modificado, sus resultados coincidieron con los resultados de la simulación clásica de Ewald. Concluyen que el método de Wolf, además de su estrecha correspondencia con los resultados de MSE, es aproximadamente dos veces más rápido que este último. También descubrieron que dicho método es más rápido que el método SPME y computacionalmente más fácil de implementar. Además, este método fue utilizado con éxito por Keblinski *et al.* [32], para sales (NaCl) fundidas y gaseosas. Y de Ribeiro [33] sobre transición vítrea. En el trabajo original de Wolf *et al.* [29] se menciona que el método de Wolf es poderoso para la simulación de sistemas interfaciales, como las interfaces líquido-vapor. Por lo tanto, de manera natural uno puede preguntarse: ¿funciona un potencial par AC LJ para sistemas

homogéneos y no homogéneos?, o más específicamente: ¿podría usarse este enfoque para calcular las ILA de manera precisa y simultáneamente reducir el tiempo de CPU?

Hasta el momento, esta posibilidad aún no ha sido explorada. Por esta razón, en este trabajo se deriva y utiliza un potencial par AC LJ para estudiar las propiedades termodinámicas y de transporte de un sistema homogéneo, y para calcular propiedades termodinámicas en la interfase líquido-vapor. Todos los resultados se comparan con los resultados de la simulación MSE. La idea clave es evitar el término que consume más tiempo en el MSE aplicado al potencial de LJ, reemplazándolo con un término de corrección escrito en el espacio real. De esta forma, las fuerzas amortiguadas se truncarán y desplazarán a la distancia r_c. El objetivo principal de este trabajo es verificar la aplicabilidad general del potencial par AC LJ y su desempeño en el cálculo de las propiedades termodinámicas en sistemas homogéneos y heterogéneos.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 esbozamos brevemente los aspectos más importantes del MSE, mostrando la expresión para el potencial par AC LJ. En la sección 3 se presentan detalles de nuestras simulaciones de DM. Los resultados de la simulación están contenidos en la sección 4. Finalmente, en la sección 5 mostramos conclusiones relevantes.

2. Ecuaciones relevantes

Para derivar un potencial par AC LJ es importante tener en cuenta la naturaleza de las interacciones. En el trabajo original de Wolf se establece la naturaleza de corto alcance de las interacciones efectivas en el sistema iónico de la materia condensada. La idea clave es que la interacción completa se puede calcular con el término real del MSE, agregando un término de corrección sin calcular la parte de Fourier. Relacionado con este punto, Wolf *et al.* [29] informaron que, en la práctica, la parte del espacio recíproco de las sumas de Ewald puede despreciarse por completo sin afectar la física subyacente.

Para un fluido LJ las interacciones se consideran [29] de corto alcance. En este caso, la interacción completa podría calcularse sólo con la parte real del MSE aplicada sobre el potencial de LJ, agregando un término de corrección simple escrito en el espacio real. Para tal procedimiento, la elección del radio de corte y el parámetro amortiguado es bastante relevante para obtener buenos resultados.

Para obtener un potencial par AC LJ recordaremos el procedimiento MSE. Consideremos un fluido cuyas moléculas/átomos interactúan a través del potencial de Lennard-Jones:

$$\begin{aligned} U(r_{ij}) &= 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r_{ij}}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_{ij}}\right)^{6}\right], \\ &= U_{12} - U_6, \end{aligned} \tag{1}$$

donde r_{ij} es la distancia entre los átomos i e j, σ y ϵ son el diámetro atómico y la profundidad del pozo atractivo, respectivamente.

El MSE aplicado sobre el potencial $1/r^6$ se divide en dos términos, uno de ellos escrito en espacio real y el segundo en el espacio de Fourier. La parte de dispersión (U_6) del potencial LJ se escribe en términos de sumas de Ewald [34], como se muestra:

$$\begin{aligned} U_6^{Ewald} = {} & v^6 \sum_{\mathbf{L}} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \lambda_{ij} \left(a^{-6} + a^{-4} + \frac{a^{-2}}{2} \right) e^{-a^2} + \frac{\pi^{3/2}}{24V} \sum_{\mathbf{h}\neq 0} S(\mathbf{h}) S(-\mathbf{h}) B(h) \\ & - \frac{v^6}{12} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ii} + \frac{\pi^{3/2} v^3}{6V} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $a = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j - \mathbf{R}_L|\, v$, con la posición del átomo i dado por $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{R}_L$ es el vector de traslación en la red y $\mathbf{L}$ es el vector de red de un sistema periódico compuesto de celdas imágenes. El primer término en la ecuación (2) es la parte real donde N es el número de átomos, v es el factor de decaimiento y $\lambda_{ij} = \lambda_i \lambda_j$ con $\lambda_i = 2\sqrt{\epsilon_i}\sigma_i^3$. El segundo término en la ecuación (2) es la parte de Fourier donde V es el volumen de los átomos, $S(h)$ es el factor de estructura y $\mathbf{h}$ el vector de red recíproca con magnitud $h = |\mathbf{h}|$.

$$S(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, \mathrm{e}^{i\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}_j}, \tag{3}$$

La función $B(h)$ es definida como sigue:

$$B(h) = h^3 \left[\pi^{1/2} erfc(b) + \left(\frac{1}{2b^3} - \frac{1}{b} \right) \mathrm{e}^{-b^2} \right], \tag{4}$$

donde $b = h/2v$, y finalmente $erfc(x)$ es la función error complementaria. El tercer término de la ecuación (2), llamada autocorrección, es obtenido de la exclusión de términos con $i = j$ donde $\mathbf{L} = 0$, y el último término es obtenido del espacio recíproco cuando $\mathbf{h} = 0$.

El MSE aplicado sobre el potencial LJ nos permite calcular las ILA de forma correcta, evitando la inclusión de las CLA, durante o al final de una simulación [24, 25]. A partir de estos resultados se sabe que la parte de Fourier es el término que requiere más tiempo de cómputo. Entonces, el truncamiento de las fuerzas amortiguadas, al principio, parece ser una opción conveniente para calcular la interacción completa y reducir el tiempo de CPU. Debido a que el cálculo de fuerzas es lo más importante en una simulación de DM, es conveniente obtener la expresión de estas fuerzas previamente. En este trabajo utilizamos un término corrector simple, las fuerzas amortiguadas se corrigen con su correspondiente término real y se evalúan en r_c. De hecho, este mismo procedimiento se puede ver en el trabajo original de Wolf [29]. Después de eso, la expresión del potencial se obtiene inmediatamente. Con esta idea en mente, el término de dispersión del potencial de LJ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U^{AC} = {} & v^6 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \lambda_{ij} \left[(r_{ij} v)^{-6} + (r_{ij} v)^{-4} + \frac{(r_{ij} v)^{-2}}{2} \right] \mathrm{e}^{-(r_{ij} v)^2} \\ & - v^6 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left[(r_c v)^{-6} + (r_c v)^{-4} + \frac{(r_c v)^{-2}}{2} \right] \mathrm{e}^{-(r_c v)^2} \\ & - v^7 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \lambda_{ij} \left[6(r_c v)^{-7} + 6(r_c v)^{-5} + 3(r_c v)^{-3} + (r_c v)^{-1} \right] \mathrm{e}^{-(r_c v)^2} (r_c - r_{ij}) \\ & - \frac{v^6}{12} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ii} + \frac{\pi^{3/2} v^3}{6V} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \end{aligned} \tag{5}$$

donde r_c es el radio de corte. Los términos segundo y tercero de la ecuación (5) son las correcciones para la energía potencial en el espacio real. Estas correcciones dependen del radio de corte y son compatibles con el término de corrección de fuerzas. Como se ha mencionado, la expresión de la fuerza desplazada se puede anticipar para determinar el potencial corregido. Tal procedimiento es conveniente porque estas fuerzas pueden derivarse directamente del potencial. Notamos que, aunque el último término en la ecuación (5) se deriva del espacio recíproco cuando

$\mathbf{h} = 0$, no es una tarea que consuma mucho tiempo. En realidad, esta parte es una contribución importante a la presión.

La fuerza desplazada $\mathbf{F}_p$ sobre la partícula p se obtiene de la ecuación (5). Se incluye un término real evaluado en el radio de corte en lugar del término de Fourier:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_p = v^8 \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ip} \left[6(r_{ip}v)^{-8} + 6(r_{ip}v)^{-6} + 3(r_{ip}v)^{-4} + (r_{ip}v)^{-2} \right] \mathrm{e}^{-(r_{ip}v)^2} \mathbf{r}_{ip} \\ - v^8 \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ip} \left[6(r_c v)^{-8} + 6(r_c v)^{-6} + 3(r_c v)^{-4} + (r_c v)^{-2} \right] \mathrm{e}^{-(r_c v)^2} \mathbf{r}_{ip}\end{aligned} \tag{6}$$

Notamos que la precisión del método se ve afectada, pero este problema se puede solucionar haciendo un nuevo ajuste tanto en el parámetro de amortiguación como en el radio de corte.

El tensor de presión también se calcula a partir del potencial usando el virial, de la misma forma que se hizo en la referencia [35], lo cual produce:

$$\begin{aligned}VP_{\alpha\beta} = & \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathrm{v}_i)_\alpha (\mathrm{v}_i)_\beta \\ & + v^8 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \lambda_{ij} \left[6(r_{ij}v)^{-8} + 6(r_{ij}v)^{-6} + 3(r_{ij}v)^{-4} + (r_{ij}v)^{-2} \right] \mathrm{e}^{-(r_{ij}v)^2} (\mathbf{r}_{ij})_\alpha (\mathbf{r}_{ij})_\beta \\ & - v^8 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} \lambda_{ij} \left[6(r_c v)^{-8} + 6(r_c v)^{-6} + 3(r_c v)^{-4} + (r_c v)^{-2} \right] \mathrm{e}^{-(r_c v)^2} (\mathbf{r}_{ij})_\alpha (\mathbf{r}_{ij})_\beta \\ & - \frac{v^3 \pi^{3/2}}{6V} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \delta_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{7}$$

donde α y β representan los componentes del tensor de presión. El primer término en la ecuación (7) es la contribución cinética, v_i y m_i son la velocidad y la masa del átomo i, respectivamente. El segundo término es la parte real y el tercero es el término de corrección escrito en el espacio real y evaluado en el radio de corte. Finalmente, el último término en la ecuación (7) proviene del cuarto término en la ecuación (5).

Se realizaron simulaciones en líquido para calcular las propiedades de transporte. El coeficiente de difusión D y la viscosidad de corte η se calcularon mediante las fórmulas de Green-Kubo [1].

$$\eta = \left(\frac{V}{k_B T} \right) \int_0^\infty \langle P_{\alpha\beta}(0) P_{\alpha\beta}(t) \rangle \, dt, \tag{8}$$

es la viscosidad de corte, donde k_B es la constante de Boltzmann, T y V son la temperatura y el volumen, respectivamente. $P_{\alpha\beta}$ son las componentes no diagonales del tensor de presiones evaluado en tiempos diferentes y $\langle \cdots \rangle$ significa un promedio en el ensamble.

El coeficiente de difusión es dado por:

$$D = \frac{1}{3} \int_0^\infty \langle \mathbf{v}_i(0) \cdot \mathbf{v}_i(t) \rangle dt, \tag{9}$$

donde $\mathbf{v}_i$ es la velocidad del átomo i.

Las densidades ortobáricas se calcularon a partir del perfil de densidad $\rho(z)$, que se ajustó mediante una función tangente hiperbólica:

$$\rho(z) = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_V) - \frac{1}{2}(\rho_L - \rho_V)\tanh\,[2(z - z_0)/\delta\,], \tag{10}$$

donde ρ_L y ρ_V son las densidades del líquido y vapor, respectivamente. δ es el ancho de la interfase y es la posición de la superficie divisora de Gibbs.

Finalmente, la presión de vapor se determina tomando el promedio de la componente normal de la presión a la interfase, $\langle P_{zz}\rangle$. La diferencia entre los promedios de presión normal y tangencial da la tensión superficial:

$$\gamma = \frac{L_z}{2}\left[\langle P_{zz}\rangle - \frac{1}{2}(\langle P_{xx}\rangle + \langle P_{yy}\rangle)\right], \tag{11}$$

donde L_z es la dimensión de la celda de simulación en la dirección z, y es perpendicular a la interfase. La expresión de la tensión superficial se divide por 2 debido a que se forman dos interfases.

3. Detalles de las simulaciones

Se realizaron simulaciones de dinámica molecular para un fluido LJ. Se calcularon las propiedades termodinámicas y de transporte en líquido y las propiedades de coexistencia en la interfase líquido- vapor. Todas las simulaciones se realizaron en el conjunto NVT. La evolución temporal, de posición y velocidad de los átomos se calculó mediante el algoritmo de salto de rana de Verlet (*leap-frog*). En las simulaciones se utilizaron condiciones de frontera periódicas y la convención de mínima imagen para las tres direcciones [1].

3.1 Simulaciones en bulto

Se calculó la energía potencial reducida, $U^* = U/N\epsilon$ y la presión reducida $p^* = p\sigma^3/\epsilon$. La configuración inicial consta de $N = 500$ átomos colocadas en una red fcc con $L_x^* = L_y^* = L_z^* = L_z/\sigma$. La temperatura reducida $T^* = K_B T/\epsilon$ fue 2.0 con un paso de tiempo de $\Delta t = 0.005\sigma(m\epsilon)^{1/2}$. Los valores de densidad reducida, $\rho^* = \rho\sigma^3$, fueron: 0.5, 0.7, 0.8, 0.8442 y 0.9. El radio de corte reducido y el parámetro de amortiguamiento reducido $v\sigma$ para el potencial AC fueron 3.5σ y 0.86, respectivamente. En realidad, estos mismos valores se utilizaron en todas las simulaciones. Para alcanzar el equilibrio, se realizaron 6×10^4 pasos de simulación y, además, se llevaron a cabo 3.4×10^5 pasos adicionales para calcular las propiedades promedio. Los resultados se muestran en la tabla 1.

Las propiedades de transporte se calcularon para un estado termodinámico particular, $\rho^* = 0.8442$ y $T^* = 0.722$, cerca del punto triple. Este estado fue elegido para comparar con los resultados obtenidos previamente con el método MSE de la referencia [24]. La viscosidad de corte y la difusión se obtuvieron mediante las fórmulas estándar de Green-Kubo. Para calcular el coeficiente de difusión reducido $D^* = \sqrt{m/\epsilon}\, D/\sigma$ y la viscosidad de corte reducida $\eta^* = \eta\sigma^2/\sqrt{m\epsilon}$, se realizaron 1×10^6 y 1.5×10^6 ciclos, respectivamente. Estas propiedades de transporte se calcularon para diferentes números de átomos N =500, 864 y 2 048. Para todos los valores de N, las velocidades de los átomos $N_n = 256$ se almacenaron cada 10 pasos de tiempo, mientras que los componentes del tensor de presión se almacenaron en cada paso de tiempo. El paso de tiempo reducido fue de 0.0025. Los resultados de las propiedades de transporte se muestran en la tabla 2. Finalmente, el radio de corte y el parámetro de amortiguamiento reducido son los mismos que en el caso anterior.

3.2 Simulaciones en el líquido-vapor

Las simulaciones de DM se realizaron en la interfase líquido-vapor. Se utilizó como configuración inicial una celda paralelepípeda con una zona compuesta de átomos en fase líquida rodeada de vacío. El lado L_z es perpendicular a la interfase y es mayor que $L_x = L_y$. El número de átomos en las simulaciones fue $N = 2\ 048$ con un paso de tiempo $\Delta t = 0.005\sigma(m\epsilon)^{1/2}$ y $r_c = 3.5\sigma$. El valor del parámetro de amortiguamiento fue $v/L_x^* = 0.86$. Los resultados de estas simulaciones se muestran en la tabla 3. Las simulaciones de líquido-vapor se equilibraron llevando a cabo 1×10^5 pasos de simulación y los promedios se realizaron después de correr 4×10^5 pasos de simulación.

4. Resultados

La energía potencial y la presión resultantes se muestran en la tabla 1. Nuestros resultados se compararon con los obtenidos usando el MSE y se encontró un buen acuerdo, como se muestra en la figura 1 (de aquí en adelante identificaremos los resultados obtenidos en este trabajo como: Wolf o este trabajo). La mayor diferencia fue de alrededor de 1% para ambas propiedades. Además, estas mismas cantidades se compararon con las calculadas con el potencial STS usando $N = 864$ y $r_c = 4.0\sigma$, donde las CLA fueron incluidas al final de las simulaciones. Se encontró una diferencia de alrededor de 1% para la presión y alrededor de 2% para la energía potencial cuando $\rho^* = 0.5$.

Tabla 1. Energía potencial reducida y presión reducida como función de densidad reducida. El parámetro de amortiguamiento y el radio de corte reducido fueron $v\sigma = 0.86$ y $r_c = 3.5$, respectivamente. La cifra 1.04_2 significa 1.04 ± 0.02 [elaboración propia].

	$T^* = 2.0$	
ρ^*	U^*	p^*
0.5	-3.1001_5	1.04_2
0.7	-4.2808_6	2.998_2
0.8	-4.7373_3	5.269_2
0.8442	-4.8854_8	6.735_2
0.9	-5.0133_9	9.100_3

Los valores óptimos para v^* y r_c se obtuvieron calculando la energía potencial y la presión para varios valores de estos mismos parámetros.

En la figura 2, los valores de referencia para ambas cantidades U^* y p^* se recuperaron después de ajustar el parámetro de amortiguamiento y aumentar el radio de corte. Para el caso del MSE, los parámetros v y r_c se eligen ajustando el error de la energía potencial reducida a 10^{-3} [34].

Se analizó la dependencia de las propiedades de transporte con el número de átomos, los resultados obtenidos se recopilaron en la tabla 2.

La viscosidad de corte no muestra una variación clara cuando cambia el número de átomos, y una situación opuesta se encuentra para el coeficiente de difusión, donde se observa una dependencia notable con el número de átomos. La viscosidad de corte $\eta^*(t_\eta^*) =$ y el coeficiente

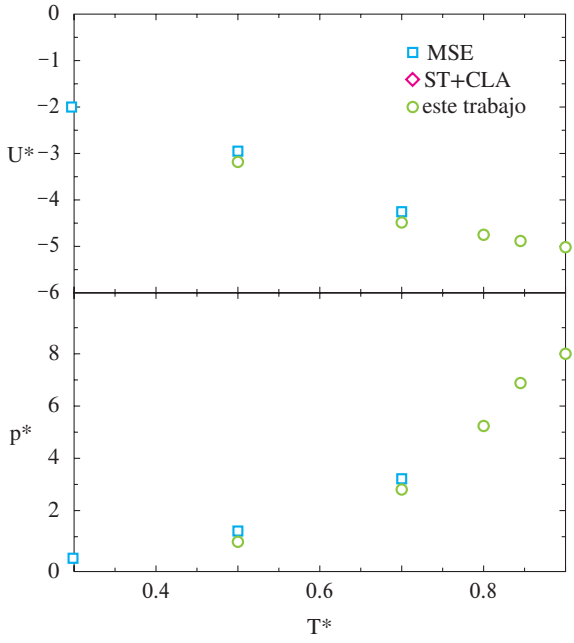


Figura 1. Energía potencial y presión reducidas contra la densidad reducida. La temperatura reducida fue $T^* = 2.0$. Los diamantes vacíos son el resultado del potencial ST más las correcciones de largo alcance con $r_c = 4.0\sigma$. Los cuadrados y círculos vacíos son los resultados de MSE y AC LJ, respectivamente [elaboración propia].

Tabla 2. Coeficientes de transporte adimensionales contra números de átomos. Los resultados de este trabajo se muestran en esta tabla, la difusión dependiente del tiempo y la viscosidad de corte se evaluaron en un tiempo $t_D^* = 1.6625$ y $t_v^* = 1.6562$, respectivamente. Los parámetros reducidos utilizados fueron 0.0025 para el paso de tiempo, 3.5 para el radio de corte reducido y $v\sigma = 0.86$ para el parámetro de amortiguamiento. La densidad y la temperatura reducidas fueron $\rho^* = 0.8442$ y $T^* = 0.722$, respectivamente [elaboración propia].

N	$D^* \times 10^{-2}$	η^*
500	3.178	3.241
864	3.260	3.170
2 048	3.282	3.156

de difusión $D^*(t_D^*)$ dependiente del tiempo se calcularon y evaluaron en un tiempo reducido $t_\eta^* = 1.6562$ y $t_D^* = 1.6625$, respectivamente. Las figuras 3 y 4 muestran estas mismas cantidades calculadas para diferentes números de átomos. Comparamos nuestros resultados con los calculados con el método MSE en la referencia [24]. La mayor diferencia fue de alrededor de 1% tanto para η^* como para D^*, para todos los valores de N estudiados. El parámetro de amortiguamiento reducido

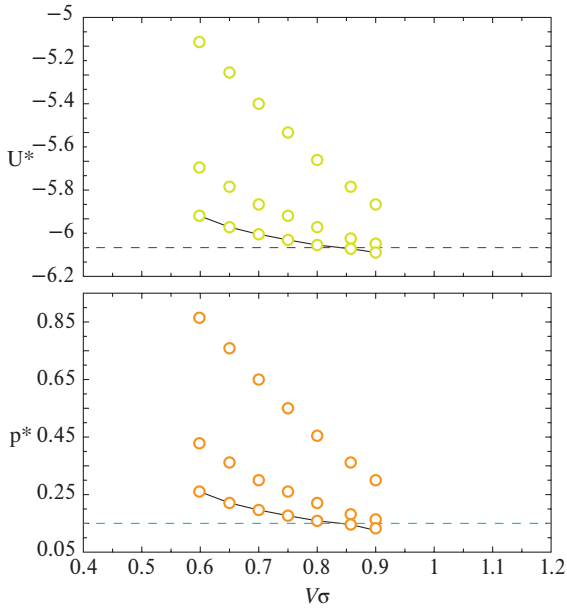


Figura 2. Parámetros óptimos para v^* y r_c. La energía potencial y la presión reducidas se trazaron como función del parámetro de amortiguamiento reducido. El parámetro de amortiguamiento reducido y el radio de corte se ajustaron para recuperar los valores de referencia de las propiedades termodinámicas con $\rho^* = 0.8442$ y $T^* = 0.722$. Los círculos abiertos representan los resultados de este trabajo. El radio de corte utilizado fue de arriba a abajo 2.5σ, 3.0σ y 3.5σ respectivamente. La línea sólida es sólo para guiar la vista, la línea discontinua es una línea de referencia [elaboración propia].

óptimo y el radio de corte se obtuvieron comparando la energía potencial y la presión con las obtenidas con el potencial total. Nuestro resultado de la difusión reducida para $N = 2\,048$ también está de acuerdo con el calculado con el potencial STS en $r_c = 6\sigma$ [24].

Se realizaron simulaciones adicionales para comparar el tiempo de CPU de diferentes procedimientos. Para este propósito se empleó una configuración con 2 048 átomos. Después de alcanzar el equilibrio, se llevó a cabo un solo paso de simulación utilizando el potencial par AC LJ con $r_c = 3.5\sigma$, el MSE con $r_c = 3.5\sigma$ y el método SPME aplicado sobre la contribución de Fourier que se deriva del método MSE con $r_c = 3.5\sigma$. El tiempo de CPU para el primer método fue de $t = 0.32s$, para MSE se obtuvo $t = 4.34s$, para el último método usado se obtuvo $t = 1.16s$. El tiempo de CPU invertido por nuestro enfoque en la simulación es alrededor de 70% más bajo que los demás.

Por otro lado, se llevaron a cabo simulaciones adicionales que constaban de 10 pasos para una comprobación directa del tiempo de computadora consumido entre el potencial de CA y el MTS combinado con SPME, ambos implementados en MSE. El tiempo para el primero fue $t = 1.43s$, mientras que para el segundo el tiempo fue $t = 1.64s$ usando un paso de tiempo reducido en la parte de Fourier, cinco veces mayor que el tiempo usado en el espacio real. Nuestro potencial es más rápido que MSE incluso usando MTS combinado con el procedimiento SPME. Evitando el término recíproco, la simulación se acelera alrededor de 13%. Como se puede ver en las

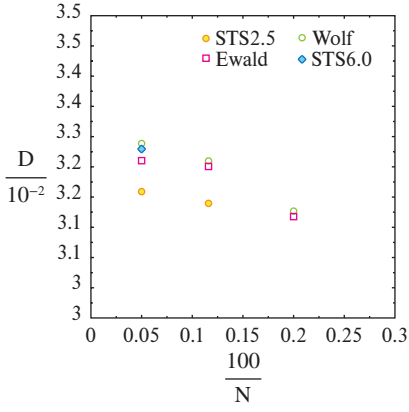


Figura 3. La difusión en función del número de átomos. Los cuadrados y círculos vacíos son los resultados de usar el MSE y AC LJ, respectivamente. Los círculos llenos y los diamantes o rombos llenos son los resultados de usar la aproximación STS con $r_c = 2.5\sigma$ y $r_c = 6\sigma$, respectivamente. Estos resultados fueron tomados de la referencia [24].

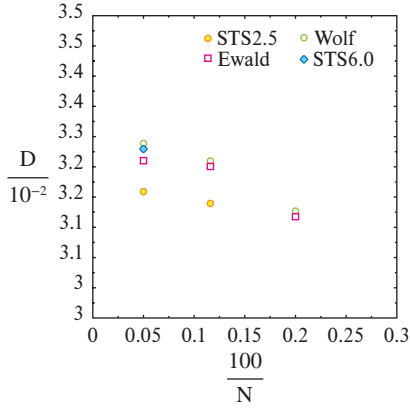


Figura 4. La viscosidad de corte se representa en función del número de átomos. Los triángulos vacíos que apuntan hacia arriba son datos obtenidos con el potencial STS y un radio de corte de 6. El resto de los símbolos tienen el mismo significado que en la figura 3.

figuras 3 y 4, las fuerzas corregidas y el potencial funcionan bastante bien para calcular las propiedades en un fluido homogéneo.

Por otro lado, también se calcularon propiedades de coexistencia como las densidades ortobáricas, presión de vapor y tensión superficial. Los resultados se muestran en la tabla 3 y se compararon con aquellos obtenidos al usar el MSE.

Tabla 3. Propiedades termodinámicas en la interfase líquido-vapor. $N = 1\,024$, $r_c = L_x^*/2$, $= 11$, $L_z^* = 60$ [elaboración propia].

T^*	ρ_V^*	ρ_L^*	ρ_V^*	γ^*	ν^*
0.8	0.0064	0.7882	0.0048_2	0.79_1	0.55
0.9	0.0153	0.7410	0.0132_3	0.61_1	0.55
1.0	0.0320	0.6846	0.0262_4	0.42_1	2.2
1.1	0.0589	0.6270	0.0491_5	0.23_1	2.2

En la figura 5 se muestran las densidades del equilibrio líquido-vapor. Nuestros resultados muestran un comportamiento sistemático, son menores para las densidades líquidas, y para la rama del vapor los resultados son mayores. Las diferencias más grandes para las densidades de líquido y vapor son alrededor de 1.6% a $T^* = 1.1$ y 17% a $T^* = 0.8$, respectivamente. Sobre la base de estos resultados, la mayor desviación de los resultados obtenidos con MSE se produce en la fase de vapor.

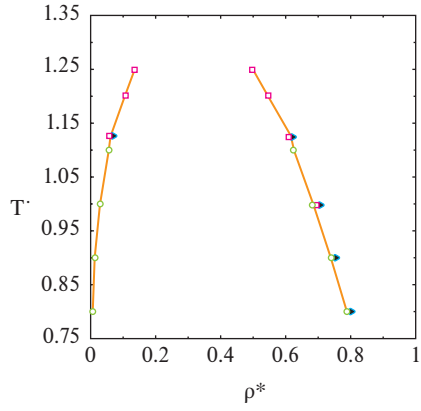


Figura 5. Densidades de coexistencia del líquido-vapor. Los cuadrados y círculos abiertos son los resultados tomados de la referencia [24] y de este trabajo, respectivamente. Los triángulos llenos fueron tomados de la referencia [3].

Las figuras 6 y 7 muestran la presión de vapor y la tensión superficial, respectivamente. Se hace una comparación directa de estas propiedades con aquellas obtenidas al usar MSE. La presión de vapor es alrededor de 13% más alta en $T^* = 0.8$ y la tensión superficial es alrededor de 26% más baja en $T^* = 1.1$. La tensión superficial obtenida en este trabajo es comparable con la de la referencia [36]. Sin embargo, nuestros resultados presentan un pobre acuerdo con los datos obtenidos con MSE. Con base en estos resultados mencionamos que, para una densidad reducida dada, se observa invariablemente que, al aumentar el parámetro de decaimiento, la separación entre los resultados también aumenta. Se produce una situación opuesta cuando el parámetro de amortiguamiento disminuye; en este caso, el término real juega un papel relevante y el efecto amortiguador afecta la estimación de las ILA.

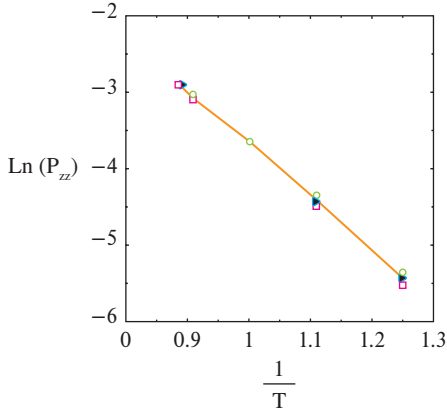


Figura 6. La presión de vapor se grafica como función de la temperatura. Los símbolos tienen el mismo significado que en la figura 5.

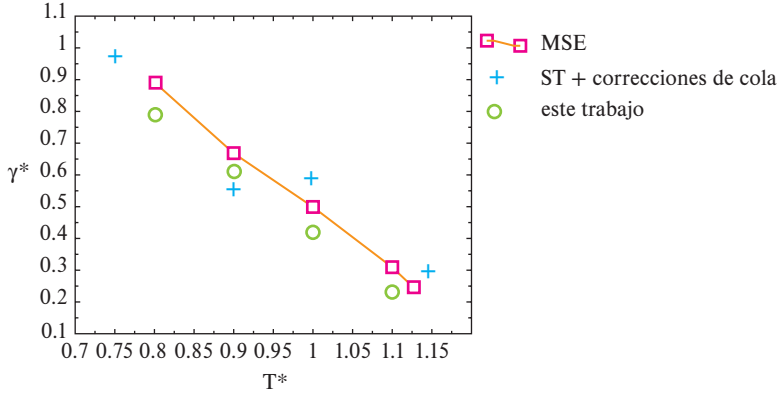


Figura 7. Tensión superficial en función de la temperatura. Los símbolos más corresponden a la referencia [36], los cuadros y círculos vacíos corresponden a los resultados de la referencia [24] obtenidos con el MSE y de este trabajo, respectivamente. La línea continua se incluye sólo para guiar la vista.

Con el fin de comprobar la velocidad en el rendimiento al simular un fluido heterogéneo, se llevaron a cabo simulaciones adicionales para un sistema equilibrado con $N = 2\ 048$ átomos. A fin de hacer una comparación, se calculó el tiempo de CPU invertido en 10 pasos usando el potencial AC LJ, incluyendo el procedimiento MTS combinado con SPME, ambos aplicados en MSE. Se encontró $t = 10.79s$ para la primera opción, y $t = 5.99s$ para la segunda. En este caso nuestra propuesta es más costosa en tiempo para una simulación de un fluido heterogéneo.

5. Conclusiones

Usando el potencial par AC LJ, calculamos las propiedades de transporte y termodinámicas para una fase líquida. Con este mismo potencial también se calcularon las propiedades en la interfase líquido-vapor. La energía potencial reducida y la presión se obtuvieron por medio del potencial AC LJ. Los resultados están en buen acuerdo con los obtenidos usando el potencial completo. El parámetro de amortiguamiento y el radio de corte se ajustaron durante las simulaciones. Comparamos ambas simulaciones realizadas con el potencial STS usando $r_c = 4.0\sigma$, y MSE usando $r_c = 2.5\sigma$.

Es importante señalar que los resultados de las propiedades de transporte dieron una viscosidad de corte y un coeficiente de difusión muy cercanos a los resultados obtenidos al usar MSE. Para un sistema homogéneo, las ILA se estiman con éxito dentro de nuestro potencial. En la práctica, ambos métodos proporcionan los mismos resultados, pero con la ventaja de que el tiempo de CPU se reduce cuando se emplea nuestra propuesta, incluso cuando el MTS combinado con SPME se implementan en MSE. El radio de corte y el parámetro de amortiguamiento son los mismos que se eligieron para recuperar los valores de energía potencial y presión obtenidos con MSE. Desafortunadamente, no se encontró un criterio general para seleccionar los v y r_c más apropiados.

Se calcularon las densidades ortobáricas, presión de vapor y tensión superficial para un sistema no homogéneo. Surgen diferencias considerables cuando se comparan nuestros resultados con los obtenidos con el potencial completo. Por ejemplo, la tensión superficial calculada en este trabajo fue sistemáticamente menor que la obtenida con MSE. Esto es evidencia de que las

ILA en un sistema líquido-vapor no se calculan muy bien. Como consecuencia, concluimos que el potencial par AC LJ no es la mejor opción para determinar con precisión las propiedades termodinámicas en la interfase líquido-vapor. Las ILA son fundamentales a la hora de calcular estas propiedades. Para mejorar los resultados, el radio de corte debe ser mayor. Sin embargo no es conveniente, porque este procedimiento aumenta el tiempo de cómputo.

Finalmente, suponemos que el potencial par LJ amortiguado y desplazado presenta un comportamiento similar a la versión del potencial de Coulomb. Un tema interesante sería comparar las propiedades de coexistencia para el modelo de agua SPC/E, utilizando los procedimientos de Wolf y MSE aplicado en los potenciales de Coulomb y LJ. Esta tarea quedará para futuras investigaciones.

6. Referencias

[1] Allen, M.P. y Tildesley, D. J. *Computer Simulation of Liquids.* Oxford: Claredon Press, ch. 2, 60, ch. 3, 71, 1987.

[2] Spohr, E. Effect of electrostatic boundary conditions and system size on the interfacial properties of water and aqueous solutions, *J. Chem. Phys.,* 107, 6342-6348, 1997.

[3] Trokhymchuk, A. y Alejandre, J. Computer simulations of the liquid/vapor interface in Lennard-Jones fluids: some questions and answers. *J. Chem. Phys.,* 111, 8510-8523, 1999.

[4] Johnson, J. K.; Zollweg, J. A. y Gubbins, K. E. The Lennard-Jones equation of state revisited. *Mol. Phys*., 78, 591-618, 1993.

[5] Levesque, D. y Verlet, L. Computer experiments on classical fluids. III. Time-dependent self-correlation functions. *Phys. Rev. A,* 2, 2514-2528, 1970.

[6] Gardner, P. J.; Heyes, D. M. y Preston, S. R. Molecular dynamics computer simulation of binary Lennard-Jones fluid mixtures: Thermodynamics of mixing and transport coefficients. *Mol. Phys.,* 73, 141-173, 1991.

[7] Heyes, D. M. Molecular dynamics simulations of liquid binary mixtures: Partial properties of mixing and transport coefficients. *J. Chem. Phys*., 96, 2217-2227, 1992.

[8] Erpenbeck, J. J. Shear viscosity of the Lennard-Jones fluid near the triple point: Green-Kubo results. *Phys. Rev. A.,* 38, 6255-6266, 1998.

[9] Shi, W. y Johnson, J. K. Histogram reweighting and finite size scalling study of the Lennard- Jones fluids. *Fluid Phase Equilibria,* 187-188, 171-191, 2001.

[10] Panagiotopoulos, A. Z.; Quirke, N.; Stapleton, M. y Tildesley, D. J. Phase equilibria by simulation in the Gibbs ensemble alternative derivation, generalization and application to mixture and membrane equilibria. *Mol. Phys*. 63*,* 527-545, 1998.

[11] Pottof, J. J. y Panagiotopoulos, Z. Critical point and phase behavior of the pure fluid and a Lennard-Jones mixture. *J. Chem. Phys.,* 109, 10914-10920, 1998.

[12] Pottof, J. y Panagiotopoulos, Z. Surface tension of the three-dimensional Lennard-Jones fluid from histogram-reweighting Monte Carlo simulation. *J. Chem. Phys.,* 112, 6411-6415, 2000.

[13] Lotfi, A.; Vrabec, J. y Fischer, J. Orthobaric densities from simulations of the liquid vapour interface, *Mol. Sim.,* 5, 233-243, 1990.

[14] Lotfi, A.; Vrabec, J. y Fischer, J. Vapour liquid equilibria of the Lennard-Jones fluid from the NpT plus test particle method. *Mol. Phys.,* 76, 1319-1333, 1992.

[15] Harismiadis, V. I.; Koutras, N. K.; Tassios, D. P. y Panagiotopoulos, A. Z. How good is conformal solution theory for phase equilibrium predictions? Gibbs ensemble simulation of binary Lennard-Jones mixtures. *Fluid Phase Equilibria,* 65, 1-18, 1991.

[16] Vrabec, J. y Fischer, J. Vapour liquid equilibria of mixtures from the NpT plus test particle method. *Mol. Phys.,* 85, 781-792, 1995.

[17] Mecke, M.; Winkelmann, J. y Fischer, J. Molecular dynamics simulation of the liquid- vapor interface: The Lennard-Jones fluid. *J. Chem. Phys.,* 107, 9264-9270, 1997.
[18] Mecke, M.; Winkelmann, J. y Fisher, J. Molecular dynamics simulation of the liquid-vapor interface: binary mixtures of Lennard-Jones fluids. *J. Chem. Phys.,* 110, 1188-1194, 1999.
[19] Holcomb, C. D.; Clancy, P.; Thompson, S. M. y Zollweg, J. A. A critical study of simulation of the Lennard-Jones liquid-vapor interface. *Fluid Phase Equilibria,* 75, 185-196, 1992.
[20] Smit, B. Phase diagrams of Lennard-Jones fluids. *J. Chem. Phys.,* 96, 8639-8640, 1992.
[21] Boda, D.; Liszi, J. y Szalai, I. An extension of the NpT plus test particles method for the determination of the vapour-liquid equilibria of pure fluids. *Chem. Phys. Let.,* 235, 140-145, 1995.
[22] Kofke, D. A. Gibbs-Duhem integration: A new method for direct evaluation of phase coexistence by molecular simulation. *Mol. Phys.,* 78, 1331-1336, 1993.
[23] Moody, M. P. y Attard, P. Monte Carlo simulation methodology of the ghost interface theory for the planar surface tension. *J. Chem. Phys.,* 120, 1892-1904, 2004.
[24] López-Lemus, J. y Alejandre, J. Thermodynamic and transport properties of simple fluids using lattice sums: bulk phases and liquid-vapour interface. *Mol. Phys.,* 100, 2983-2992, 2002.
[25] López-Lemus, J. y Alejandre, J. Simulation of phase equilibria and interfacial properties of binary mixtures on the liquid-vapour interface using lattice sums. *Mol. Phys.,* 101, 743-751, 2003.
[26] Alejandre, J.; Tildesley, D. J. y Chapela, G. A. Molecular dynamics simulation of the orthobaric densities and surface tension of water. *J. Chem. Phys.,* 102, 4574-4583, 1995.
[27] Tuckerman, M.; Berne, B. J. y Martyna, G. J. Reversible multiple time scale molecular dynamics, *J. Chem. Phys.,* 97, 1990-2001, 1992.
[28] Essmann, U.; Perera, L.; Berkowitz, M. L.; Darden, T.; Lee, H. y Pedersen, L. G. A smooth particle mesh Ewald method. *J. Chem. Phys.,* 103, 8577-8593, 1995.
[29] Wolf, D.; Keblinski, P.; Phillpot, S. R. y Eggebrecht, J. Exact method for the simulation of Coulombic systems by spherically truncated pairwise r^{-1} summation. *J. Chem. Phys.,* 110, 8254-8282, 1999.
[30] Demontis, P.; Spanu, S. y Suffritti, G. B. Application of the Wolf method for the evaluation of Coulombic interactions to complex condensed matter system: Aluminosilicates and water. *J. Chem. Phys.,* 114, 7980-7988, 2001.
[31] [31] Zahn, D.; Schilling, B. y Kast, S. M. Enhancement of the Wolf damped Coulomb potential: static, dynamic, and dielectric properties of liquid water from molecular simulation. *J. Chem. Phys.*, B 106, 10725-10723, 2002.
[32] Keblinski, P.; Eggebrecht, J.; Wolf, D. y Phillpot, S. R. Molecular dynamics study of screening in ionic fluids. *J. Chem. Phys.,* 113, 282-291, 2000.
[33] Ribeiro, M. C. C. Molecular dynamics study on the glass transition in $Ca_{0,4}K_{0,6}(NO_3)_{1,4.}$ *J. Chem. Phys.*, B 107, 9520-9527, 2003.
[34] Karasawa, N. y Goddar, III. W. A. Acceleration of convergence for lattice sums, *J. Chem. Phys.,* 93, 7320-7327, 1989.
[35] Brown, D. y Neyertz, S. A general pressure tensor calculation for molecular dynamics simulations. *Mol. Phys.,* 84, 577-595, 1995.
[36] Guo, M. y Lu, B. C. Y. Long range corrections to thermodynamic properties of inhomogeneous system with planar interfaces. *J. Chem. Phys.,* 106, 3688-3695, 1997.

CAPÍTULO 6

POTENCIAL ÓPTICO EXTENDIDO PARA EL SISTEMA CON HALO NEUTRÓNICO ^{6}HE + ^{64}ZN

Elí Francisco Aguilera Reyes[1], Juan Carlos Morales Rivera[1,2], Fatemeh Torabi[3]

1. Introducción

Se pretende describir simultáneamente las distribuciones angulares de dispersión elástica y las respectivas secciones eficaces de fusión para el sistema con halo neutrónico ^{6}He + ^{64}Zn. Para ello se usará el llamado potencial óptico extendido [1, 2], que será descrito más adelante. Se dice que el ^{6}He tiene un halo neutrónico porque puede considerarse que está formado por dos componentes de características muy diferentes. Por un lado está el carozo (una partícula alfa), que es como un hueso con un alta densidad de materia, y por otro lado están dos neutrones que, por estar muy débilmente ligados, pueden alejarse mucho del carozo, formando una especie de nube de baja densidad, es decir, forman un halo.

Esta estructura de halo del ^{6}He puede producir efectos importantes en su interacción con otros núcleos. Por ejemplo, al interaccionar con ^{64}Zn, la carga del Zn repele a la partícula alfa (carozo) pero no a los neutrones del halo y esto puede producir una especie de polarización, deformando al halo y haciendo que este se acerque más al Zn, con la consecuencia de que se intensifica la fuerza nuclear atractiva entre los dos núcleos.

Como su nombre lo indica, el modelo óptico extendido es en realidad una extensión del modelo óptico usual. En este último, además del potencial real se introduce un potencial imaginario que describe de manera global todos los procesos que no sean dispersión elástica, es decir, dichos procesos se describen como una absorción o un sumidero del canal elástico. En el modelo óptico extendido el potencial W se separa en varios componentes: un potencial puramente imaginario de corto alcance, W_{int}, y dos potenciales complejos U_F y U_D, el primero de estos dos se asocia a reacciones de fusión y el segundo se asocia a reacciones directas.

[1] Departamento de Aceleradores y Estudio de Materiales, Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares. Apartado Postal 18-1027, C.P. 11801, Ciudad de México, México. Enlace de correspondencia: eli.aguilera@inin.gob.mx.
[2] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, Instituto Literario núm. 100 Ote., col Centro, C.P. 50000, Toluca, Estado de México, México.
[3] Department of Physics, Karaj Branch, Islamic Azad University, Karaj, Irán.

Las ideas físicas detrás de esta separación se pueden entender en el esquema de la figura 1, cuya parte superior izquierda representa un haz de partículas (núcleos) incidiendo sobre un blanco (otro núcleo); las líneas son los rayos o trayectorias de las partículas con diferentes valores del parámetro de impacto.

Para trayectorias con parámetro de impacto grande, las fuerzas nucleares de corto alcance no actúan y sólo hay sensibilidad a la fuerza coulombiana, que es de largo alcance; en este caso la dispersión es puramente de Rutherford. Al disminuir el parámetro de impacto, los proyectiles empiezan a entrar en contacto con la superficie del blanco, las fuerzas nucleares empiezan a actuar y se da lo que se conoce como reacciones directas (excitaciones inelásticas, intercambio de nucleones, etc.). En este régimen actúa principalmente el potencial U_D. Al disminuir aún más el parámetro de impacto, empiezan a ocurrir fusiones entre los dos núcleos; aquí actúa principalmente el potencial U_F, aunque parcialmente sigue actuando también U_D. Finalmente, para colisiones frontales, si la energía es suficientemente grande, predomina completamente el mecanismo de fusión, en este caso actúa preponderantemente el potencial interior W_{int}.

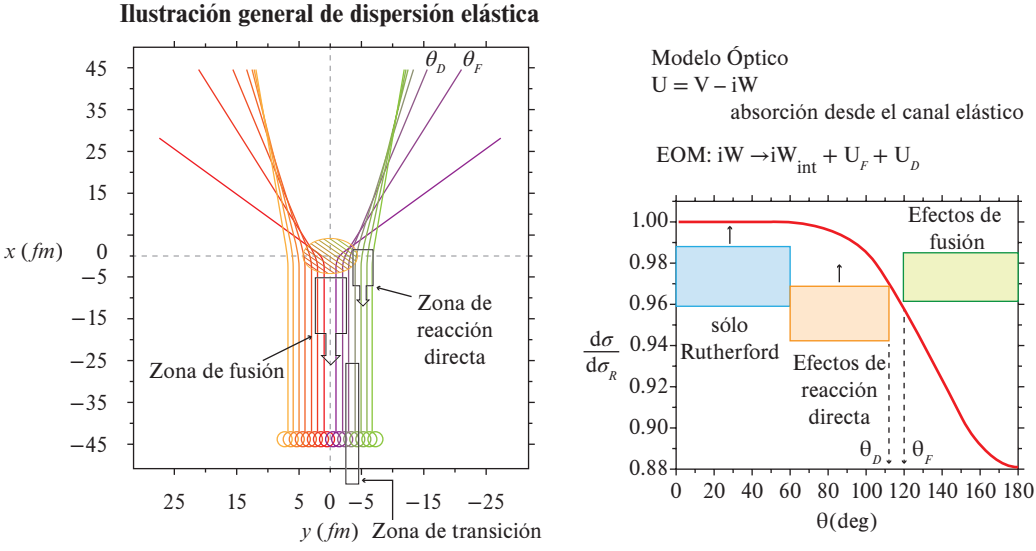


Figura 1. Esquema que muestra un haz de partículas incidiendo sobre un blanco (parte superior izquierda) y las correspondientes zonas de influencia de los distintos mecanismos de reacción, en una distribución angular típica de la dispersión elástica (parte inferior derecha) [elaboración propia].

Si midiéramos la distribución angular de las partículas dispersadas y dividimos la respectiva sección eficaz entre la sección de Rutherford, típicamente se vería como la curva negra en la parte inferior derecha de la figura 1. Ángulos pequeños corresponden a parámetros de impacto grandes, donde la dispersión es puramente de Rutherford, así que $d\sigma/d\sigma_R$ es 1. Después empiezan a ocurrir reacciones directas y la razón empieza a disminuir de 1. Finalmente aparecen los efectos de fusión, que dominan hasta los mayores ángulos.

En este trabajo se pretende reproducir simultáneamente los datos existentes para distribuciones angulares de dispersión elástica y para secciones eficaces de fusión del sistema ^{6}He + ^{64}Zn. Para ello se proponen potenciales con algunos parámetros libres y se varían dichos parámetros hasta reproducir los datos.

2. Potencial óptico extendido

Dentro del modelo óptico extendido [1, 2] (EOM, por sus siglas en inglés), el potencial se define por medio de la expresión indicada en el pie de la figura 2, donde se resume también la forma utilizada para cada uno de los términos del potencial, los cuales se describen a continuación.

EOM: $U_{TOT} = V_{bare} + V_{Coul} - [iW_{int} + U_F + U_D]$

OMP Term	Shape	Fixed params.	Fitting params.
V_{bare}	Sao Paulo Pot.	all	none
C_{Coul}	usual	$r_C = 1.2$ fm	none
W_{int}	Vol. Woods-Saxon (int. to barrier)	$W_0 = 50$ MeV, $r_0 = 1.0$ fm, $a_0 = 0.2$ fm	none
$U_{F,D} = V_{F,D} + i\,W_{F,D}$		$\sigma_{fus} = (2/\hbar v)\langle\chi^{(+)} \mid W_{int} + W_F \mid \chi^{(+)}\rangle$	
V_F, W_F	Vol. Woods-Saxon	$r_F = 1.4$ fm, $a_F = 0.43$ fm	V_{F0}, W_{F0}
V_D, W_D	deriv. Woods-Saxon	r_D, a_D from el. data	V_{D0}, W_{D0}

Figura 2. Se muestra la definición del potencial óptico extendido y se indica la forma usada en este trabajo para cada uno de sus términos [elaboración propia].

El potencial real principal tiene una parte nuclear y una parte coulombiana. Para la parte nuclear se usa el llamado potencial de Sao Paulo, que no tiene parámetros libres. El potencial coulombiano es bien conocido y tampoco tiene parámetros libres. Para el potencial imaginario interior se usa una forma de Woods-Saxon volumétrica con valores fijos de los parámetros, a saber, una profundidad de 50 MeV, un radio de 1 fm, y una difusividad de 0.2 fm. Ya se ha mencionado que los potenciales U_F y U_D son complejos, con parte real e imaginaria. A partir de W_F y W_{int} se obtiene la sección eficaz de fusión, mediante el elemento de matriz de $W_{int} + W_F$ entre las funciones de onda que resultan de resolver la ecuación de Schrödinger con el potencial completo U_{TOT}. Para V_F y W_F se usan potenciales volumétricos de Woods-Saxon con radio y difusividad fijas, como se indica en la figura 2, y las respectivas profundidades son parámetros libres que se ajustan. Para V_D y W_D se usan derivadas de Woods-Saxon, que son potenciales superficiales y que también tienen un radio y una difusividad fijos, pero estos se obtienen a partir de los datos de dispersión elástica, como se describirá adelante. Las profundidades de estos potenciales son también parámetros de ajuste.

Como ya se mencionó, los parámetros de radio y difusividad del potencial asociado a reacciones directas, U_D, se obtienen a partir de los datos de dispersión elástica, que para el presente sistema fueron medidos en [3, 4]. Se usa una prescripción introducida en [5], cuya aplicación al caso del sistema ^{6}He + ^{64}Zn ha sido descrita detalladamente en [6]. Básicamente, se hace una transformación del ángulo a la cantidad d, que es la distancia de mayor aproximación entre proyectil y blanco, medida sobre una trayectoria de Rutherford. Esto lleva a que los datos de las distribuciones angulares medidas a las diferentes energías se aglomeren sobre una trayectoria común en la gráfica de $d\sigma/d\sigma_R$ *vs.* d. Aplicando la mencionada prescripción a dicha trayectoria se obtienen los valores $r_D = 1.51$ fm y $a_D = 1.22$ fm [6]. Vale la pena mencionar que, comparado con otros sistemas que no poseen halo, este último valor corresponde a una difusividad grande. Más adelante se mostrará una comparación con el caso de un proyectil de ^{6}Li, el cual, si bien es débilmente ligado, no posee un halo.

3. Resultados

Una vez definidos todos los radios y difusividades, quedan en el potencial total solamente cuatro parámetros libres, que son las profundidades de las partes reales e imaginarias de U_F y U_D. Estos cuatro parámetros se ajustan para reproducir simultáneamente los datos de dispersión elástica [3, 4] y de fusión [3, 7]. Los valores óptimos de dichas profundidades se indican en la tabla 1.

Tabla 1. Intensidades de los potenciales de polarización, obtenidas de los ajustes para las diferentes energías experimentales [elaboración propia].

$E_{c.m.}$ (MeV)	V_{D0} (MeV)	W_{D0} (MeV)	V_{F0} (MeV)	W_{F0} (MeV)
9.0	–0.43	0.3	3.9	2.5
12.3	–0.54	0.52	4.0	3.3
13.6	–0.60	0.2	2.0	3.3
16.4	–0.64	0.27	1.8	4.2

Las curvas de la figura 3 describen los resultados de los ajustes a las distribuciones angulares de dispersión elástica, mismas que reproducen bastante bien los datos. En la figura 4 se ve que los cálculos describen también las secciones eficaces de fusión. Se presentan con círculos negros sólidos las secciones eficaces experimentales de fusión y con círculos rojos huecos los resultados de nuestros ajustes. La reproducción de los valores experimentales se ajusta de manera adecuada

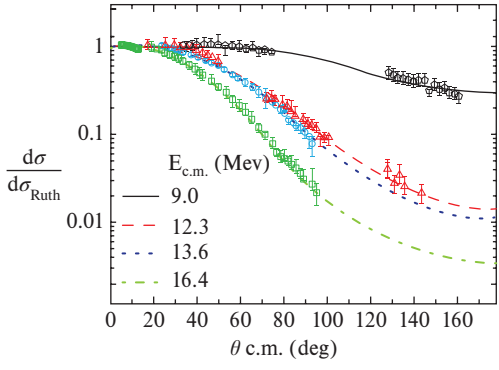


Figura 3. Los símbolos representan las distribuciones angulares de dispersión elástica reportadas en [3, 4]; las curvas describen los resultados de los respectivos ajustes [elaboración propia].

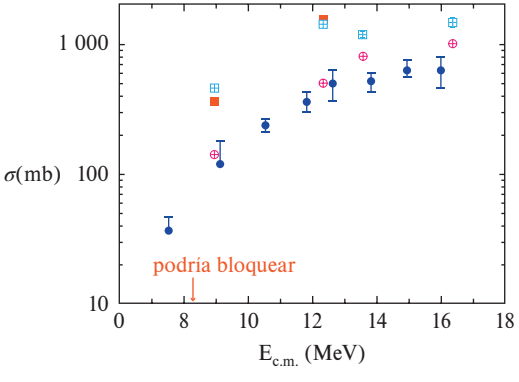


Figura 4. Los círculos sólidos (huecos) representan las secciones eficaces de fusión reportadas (calculadas); los cuadrados sólidos (huecos) representan las secciones eficaces de reacción total reportadas (calculadas); Pie04: [3], Scu11: [7] (elaboración propia basada en [3] y [7]).

a las dos energías más bajas y es razonable a las dos energías mayores, considerando las barras de error reportadas. La figura muestra también, con cuadros azules huecos, las secciones eficaces de reacción total, que fueron calculadas a partir del potencial óptico completo. Para las dos energías menores ya existían valores reportados (cuadros sólidos), que coinciden bastante bien con los nuestros, y para las dos energías mayores se reportan valores aquí por primera vez.

3.1 Discusión

Vale la pena comparar el potencial U_D obtenido para el sistema halo ^{6}He + ^{64}Zn con el potencial respectivo obtenido para ^{6}Li + ^{64}Zn [5], que no tiene un halo. El ^{6}Li tiene un protón más que el ^{6}He, así que la respectiva repulsión coulombiana es mayor, es decir, la barrera coulombiana es más alta para ^{6}Li que para ^{6}He. Si nos interesa comparar de manera efectiva los efectos de las fuerzas nucleares, convendría eliminar los efectos triviales de la carga, es decir, conviene escalar los potenciales por las respectivas alturas de la barrera coulombiana. Estos valores son $V_C = 8.3$ MeV para ^{6}He y $V_C = 13.1$ MeV para ^{6}Li.

Las curvas de la figura 5 se refieren a la parte imaginaria del potencial asociado a reacciones directas con un blanco de ^{64}Zn. La curva negra corresponde a la interacción con ^{6}He, mientras que las otras dos curvas se refieren a ^{6}Li. La curva roja es la interacción original, mientras que la curva verde ya está escalada por la altura de la barrera. Aún si se compara con el potencial de ^{6}Li sin escalar, se ve que el potencial para ^{6}He es mucho más ancho y profundo. Estos efectos se pronuncian aún más si se compara con la curva escalada, donde ya se han eliminado los efectos triviales de la carga. Considerando que la anchura está correlacionada con la difusividad, se concluye que un efecto del halo es que produce un valor grande de la difusividad del potencial de interacción directa. Por otra parte, la profundidad del potencial está relacionada con la intensidad de las fuerzas nucleares. Se concluye que el halo intensifica dichas fuerzas nucleares en este caso.

Un rasgo interesante que se observa en la figura 4 es que los cuadros azules presentan un máximo local a 12.3 MeV. Esto es inesperado, porque las secciones eficaces totales normalmente crecen con la energía. La sección total de reacción debe ser la suma de la sección de fusión más la sección de reacción directa. Puede verse que la sección de fusión (círculos negros) no muestra ningún máximo local a 12.3 MeV. Se deduce entonces que dicho máximo en las secciones totales de reacción debe originarse en las secciones de reacción directa. Esto puede corroborarse porque dichas secciones de reacción directa han sido también medidas para este sistema.

Fernández García *et al.* [4] reportaron distribuciones angulares para las partículas alfa que se producen en la reacción ^{6}He + ^{64}Zn, que provienen de las reacciones directas que ocurren en

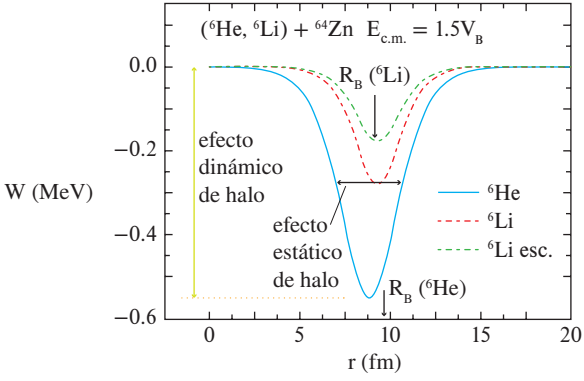


Figura 5. Parte imaginaria del potencial U_D para ^{6}He + ^{64}Zn (presente trabajo) y para ^{6}Li + ^{64}Zn [5]. Para este último caso, se presenta también el potencial escalado por las respectivas alturas de la barrera coulombiana (elaboración propia basada en [5]).

este sistema. Dichas distribuciones angulares han sido integradas en [6] y los valores obtenidos para las secciones integradas se grafican en la figura 6. Se representan con círculos rojos las secciones eficaces totales de producción de partículas alfa (σ_α) y con cuadros negros el resultado de restar la sección de fusión a la sección total de reacción, que llamamos σ_{dir}.

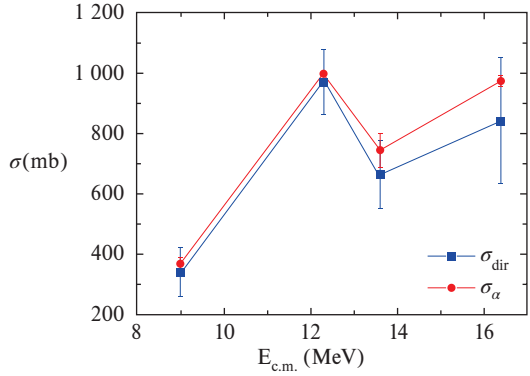


Figura 6. Valores de σ_{dir} y σ_α para ^{6}He + ^{64}Zn, obtenidos como se describe en el texto [elaboración propia].

En primer lugar se observa que, efectivamente, las secciones de alfas, σ_α, presentan un máximo local a 12.3 MeV, como ocurría con la sección total de reacción. En segundo lugar, sus valores son consistentes con los valores de σ_{dir}. La conclusión es que, en efecto, el máximo local observado en la sección total de reacción se origina en los mecanismos de reacción directa, los cuales muestran una especie de transición a la energía 12.3 MeV.

4. Conclusiones

Se obtuvo el potencial óptico extendido para el sistema con halo neutrónico ^{6}He + ^{64}Zn, mostrando que con dicho potencial se consigue una buena descripción de los datos reportados tanto para las distribuciones angulares de dispersión elástica como para las secciones eficaces de fusión.

Debido al halo neutrónico de ^{6}He, el potencial de polarización asociado a reacciones directas, U_D, tiene valores grandes de la difusividad, a_D y de la profundidad imaginaria, W_D.

Se descubrió un máximo local en la sección eficaz de reacción total, σ_R, el cual está correlacionado con un máximo en la sección eficaz de producción de partículas α, σ_α. Se concluye que existe una transición en los mecanismos de reacción directa. Convendría estudiar dentro de este contexto otros sistemas con halo.

5. Referencias

[1] T. Udagawa y T. Tamura. *Phys. Rev. C.,* 29, 1922, 1984.
[2] T. Udagawa, B. T. Kim, y T. Tamura. *Phys. Rev. C*., 32, 124, 1985.
[3] A. Di Pietro, P. Figuera, F. Amorini, C. Angulo, G. Cardella, S. Cherubini, T. Davinson, D. Leanza, J. Lu, H. Mahmud, M. Milin, A. Musumarra, A. Ninane, M. Papa, M. G. Pellegriti, R. Raabe, F. Rizzo, C. Ruiz, A. C. Shotter, N. Soić, S. Tudisco, y L. Weissman. *Phys. Rev. C*., 69, 044613, 2004.
[4] J. P. Fernández-García, A. Di Pietro, P. Figuera, J. Gómez-Camacho, M. Lattuada, J. Lei, A. M. Moro, M. Rodríguez-Gallardo, y V. Scuderi. *Phys. Rev. C*., 99, 054605, 2019.
[5] F. Torabi, E. F. Aguilera, O. N. Ghodsi y A. Gómez-Camacho. *Nucl. Phys. A*, 944, 121661, 2020.
[6] E. F. Aguilera, F. Torabi, J. C. Morales-Rivera. *Phys. Rev. C*., 104, 054612, 2021.
[7] V. Scuderi, A. Di Pietro, P. Figuera, M. Fisichella, F. Amorini, C. Angulo, G. Cardella, E. Casarejos, M. Lattuada, M. Milin, A. Musumarra, M. Papa, M. G. Pellegriti, R. Raabe, F. Rizzo, N. Skukan, D. Torresi, y M. Zadro. *Phys. Rev. C*., 84, 064604, 2011.

CAPÍTULO 7

TRAMPAS MAGNÉTICAS ESFÉRICAS PARA CONFINAMIENTO DE PLASMAS

Amado Augusto Espinoza Garrido[1], David Antonio Pérez Carlos[2]

1. Introducción

Uno de los problemas de actualidad está relacionado con la producción alternativa de energía, esto se debe principalmente al agotamiento de las fuentes de energía no renovables. Una de las alternativas propuestas es la generación de grandes cantidades de energía por medio de la reacción nuclear de dos isótopos ligeros en una partícula más estable, basándose en la equivalencia masa-energía de Einstein.

En 1939, Hans Bethe demostró que la fuente de energía del Sol es la fusión nuclear [1]. Describió el mecanismo de la fusión de los núcleos de hidrógeno en el interior del Sol, resultado que le valió obtener el Premio Nobel de Física en 1967. En 1950, Igor Tamm y Andréi Sákharov diseñaron el Tokamak, un acrónimo del ruso para designar a la cámara toroidal con bobinas magnéticas, dispositivo diseñado como una cámara de vacío de forma toroidal con hidrógeno en su interior, y un dispositivo eléctrico que ioniza el hidrógeno hasta convertirlo en plasma [2, 3, 4]. Para lograr el confinamiento de dicho plasma a muy altas temperaturas se crea un campo magnético intenso por medio de potentes electroimanes. El primer Tokamak fue diseñado por el Instituto de Energía Atómica "I. V. Kurchatov" de la Academia de Ciencias de la URSS. Además, en 1950, Lyman Spitzer [5] diseñó el reactor llamado Stellarator, otro dispositivo de forma más complicada para confinar plasmas a muy altas temperaturas mediante campos magnéticos, obteniendo así reacciones de fusión nuclear de forma controlada. Los Tokamak obtuvieron mejores resultados que los Stellarator. Se sabe que fue en 1958 cuando se construyó el primer Tokamak, este fue realizado por el Kharkov Institute of Physics and Technology, pero no fue sino hasta 1968

[1] Cuerpo académico de "Partículas, campos y astrofísica", Unidad Académica de Ciencia y Tecnología de la Luz y la Materia (LUMAT), Universidad Autónoma de Zacatecas, Carretera Zacatecas-Guadalajara, Cieneguillas, km. 6, ejido "La Escondida", Ciudad Universitaria campus Siglo XXI, C.P. 98160, Zacatecas, Zacatecas, México.

[2] Cuerpo académico de "Partículas, campos y astrofísica", Unidad Académica de Física, Universidad Autónoma de Zacatecas, Av. Preparatoria, Campus Universitario II, col. Hidráulica, C.P. 98068, Zacatecas, Zacatecas, México. Enlace de correspondencia: dperezcarlos@gmail.com

que se logró alcanzar una temperatura récord de 10 millones de grados centígrados en 10 milisegundos, a este se le llamó el Tokamak Soviético T3. En 1938 se puso en funcionamiento el Joint European Torus (JET), un reactor en el que seis países se unieron a trabajar juntos en el campo de la energía nuclear, y no fue sino hasta 1991 que se liberó una cantidad significativa de energía procedente de la fusión nuclear controlada [6, 7]. En 1995, la Universidad de Princeton trabajó con los conceptos Tokamak y Stellarator para crear el reactor de prueba de fusión Tokamak, y obtuvo resultados similares a los del JET, logrando obtener 1.8 megavatios en dos segundos, y alcanzando una temperatura de 510 millones de grados Celsius. El JET es el reactor tipo Tokamak más grande del mundo, aunque se está construyendo en la actualidad otro proyecto más grande, llamado el International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER), el cual es un proyecto ideado en 1986 por la URSS, dicho reactor se está construyendo en Cadarache, Francia, y es el quinto proyecto más costoso de la historia. Está diseñado para elevar la temperatura de un plasma de hidrógeno hasta 100 millones de grados Celsius [8, 9].

Otro proyecto es el Spherical Tokamak by Energy Production (STEP), que, a diferencia de la mayoría de los Tokamak, tiene forma esférica y provee mayor eficiencia en el campo magnético, además, se planea que disminuya su tamaño respecto a sus predecesores JET e ITER [10, 11]. Este tipo de proyectos concierne más a los lineamientos de este trabajo, puesto que las ecuaciones de Maxwell proveen ciertas soluciones en el vacío cuando se considera simetría axial, las cuales dan formaciones esféricas concéntricas con campo magnético tangencial en todos los puntos de las esferas, y a formaciones anulares concéntricas con campo eléctrico tangencial en todos los puntos de los anillos. Dichos resultados fueron obtenidos en [12]. El presente capítulo es una generalización de los resultados obtenidos en ese trabajo. Aquí mostramos que además de la solución encontrada en dicho artículo, existe un conjunto infinito de soluciones que permiten la existencia de configuraciones axiales estables del campo electromagnético en el vacío, las cuales tienen las características necesarias para poder usarse como trampas magnéticas para confinar plasma. Estas características son, primero, superficies magnéticas esféricas cerradas (sin campo eléctrico sobre ellas y su campo magnético tangencial dependiente del tiempo) y, segundo, formaciones anulares donde sólo hay campo eléctrico tangencial variable en el tiempo. Se deducirán dichas soluciones y se mostrará que todas ellas se caracterizan por esta estructura, además de que dichas formaciones no cambian su forma en el tiempo en el vacío.

Considerando el auge de la tecnología nuclear de fusión, y teniendo en cuenta que en todos los Tokamak creados hasta el momento los confinamientos se realizan por medio de imanes, en este trabajo se obtienen esferas magnéticas que surgen directamente de procesos de interferencia del campo electromagnético, lo cual nos muestra la importancia de este trabajo, ya que este resultado teórico podría sugerir otra forma de construir trampas magnéticas para plasma.

Hemos encontrado que una clase de soluciones exactas de las ecuaciones de Maxwell libres en el vacío (EMLV):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{4}$$

poseen las características de trampas magnéticas. El presente trabajo está dedicado al estudio de dichas soluciones.

Buscaremos las soluciones del sistema EMLV en la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{r})\psi(t) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r})\chi(t), \tag{5}$$

donde $\psi(t)$ y χ(t) son ciertas funciones del tiempo, el vector $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ es un vector polar y el vector $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ es axial.

Sustituyendo (5) en el sistema EMLV, con el método de separación de variables obtenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = 0, \tag{6}$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = \frac{\omega}{c}\mathbf{b}, \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{\omega}{c}\mathbf{e}, \tag{9}$$

$$\psi'' + \omega^2\psi = 0, \tag{10}$$

$$\chi'' + \omega^2\chi = 0, \tag{11}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos tomar las soluciones para las ecuaciones (10) y (11) como:

$$\psi(t) = \mathcal{A}\,\sin(\omega t) \text{ y } \chi(t) = \mathcal{A}\,\cos(\omega t), \tag{12}$$

donde $\mathcal{A}$ es una constante arbitraria y que, para simplificar la escritura de las ecuaciones, tomaremos igual a la unidad. Si denotamos $k = \omega/c$, entonces las ecuaciones para $\mathbf{e}$ y $\mathbf{b}$ resultan:

$$\nabla \times \mathbf{e} = k\mathbf{b} \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \mathbf{b} = k\mathbf{e}. \tag{13}$$

Para resolver estas ecuaciones, notemos que al sumar formalmente las dos ecuaciones obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{a} = k\mathbf{a}, \tag{14}$$

donde:

$$\mathbf{a} = \mathbf{e} + \mathbf{b}, \tag{15}$$

de tal manera que primero resolveremos la ecuación (14) para $\mathbf{a}$ y después separaremos la parte polar y la parte axial de esta solución para determinar $\mathbf{e}$ y $\mathbf{b}$ respectivamente:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\,[\mathbf{a}(\mathbf{r}) - \mathbf{a}(-\mathbf{r})], \tag{16}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\,[\mathbf{a}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}(-\mathbf{r})], \tag{17}$$

Es necesario resaltar que la separación (16)-(17) de $\mathbf{a}$ en su parte polar y axial es única.

2. Solución axisimétrica general de la ecuación $\nabla \times \mathbf{a} = k\mathbf{a}$

La ecuación (14) es una ecuación característica en el estudio de modelos de campos magnéticos libres de fuerza en física de plasmas y astrofísica [13].

Para la obtención de las soluciones que nos interesa vamos a suponer que ellas poseen simetría axial. Entonces, en coordenadas esféricas $\mathbf{a}$ puede representarse como:

$$\mathbf{a}(r, \theta) = a_r(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta + a_\varphi(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \tag{18}$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$ son los vectores unitarios del sistema esférico.

Separando la ecuación (14) según sus componentes en coordenadas esféricas, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, a_\varphi) = kr\sin\theta\, a_r, \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi) = -kra_\theta, \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(ra_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(a_r) = kra_\varphi. \tag{21}$$

Utilizamos las ecuaciones (19) y (20) para dejar la ecuación (21) sólo en términos de a_φ:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta a_\varphi)\right) + k^2 ra_\varphi = 0. \tag{22}$$

Al proponer la solución en la forma:

$$a_\varphi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{23}$$

la ecuación (22) se separa en las ecuaciones:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + (k^2r^2 - l(l+1))R = 0, \tag{24}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\cot\theta\,\Theta - \frac{d\Theta}{d\theta}\right) + l(l+1)\Theta = 0, \tag{25}$$

donde l es una constante arbitraria.

La solución, convergente en $r = 0$, para la ecuación (24) es:

$$R_l(r) = j_l(kr), \tag{26}$$

donde $j_l(kr)$ son las funciones esféricas de Bessel [2] con argumento kr.

Las soluciones regulares de la ecuación (25) son los polinomios asociados de Legendre $P_l^m(\cos\theta)$ con $m = 1$:

$$\Theta_l(\theta) = P_l^1(\cos\theta), \tag{27}$$

donde $l \geq 1$.

Reemplazando (26) y (27) en (23) finalmente obtenemos:

$$a_\varphi^l(r,\theta) = j_l(kr)P_l^1(\cos\theta),$$

y reemplazando este valor en (19) y (20) obtenemos $a_r^l(r,\theta)$ y $a_\theta^l(r,\theta)$. De este modo, hemos encontrado las tres componentes de a que dependen del valor arbitrario de l:

$$\mathbf{a}^l(r,\theta) = a_r^l(r,\theta)\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta^l(r,\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta + a_\varphi^l(r,\theta)\hat{\mathbf{e}}_\varphi; \tag{28}$$

$$a_r^l(r,\theta) = \frac{j_l(kr)}{kr}\left[2\cot\theta P_l^1(\cos\theta) + P_l^2(\cos\theta)\right], \tag{29}$$

$$a_\theta^l(r,\theta) = \left[j_{l+1}(kr) - (l+1)\frac{j_l(kr)}{kr}\right]P_l^1(\cos\theta), \tag{30}$$

$$a_\varphi^l(r,\theta) = j_l(kr)P_l^1(\cos\theta). \tag{31}$$

3. Análisis de paridad

Las partes espaciales $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ del campo electromagnético poseen la propiedad:

$$\mathbf{e}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{e}(\mathbf{r}), \tag{32}$$
$$\mathbf{b}(-\mathbf{r}) = \mathbf{b}(\mathbf{r}), \tag{33}$$

y pueden obtenerse a partir de $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ con las fórmulas (16) y (17). La parte polar y axial del vector $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ depende del valor del parámetro l. Como resultado de este análisis se obtuvo que en el caso de valores impares de l:

$$\mathbf{e}^l(\mathbf{r}) = a_\varphi^l \hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{34}$$
$$\mathbf{b}^l(\mathbf{r}) = a_r^l \hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta^l \hat{\mathbf{e}}_\theta \tag{35}$$

Y para valores pares de l:

$$\mathbf{e}^l(\mathbf{r}) = a_r^l \hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta^l \hat{\mathbf{e}}_\theta, \tag{36}$$
$$\mathbf{b}^l(\mathbf{r}) = a_\varphi^l \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{37}$$

El campo electromagnético resultante, para l impar, es:

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = a_\varphi^l(r, \theta)\sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \tag{38}$$
$$\mathbf{B}^l(\mathbf{r}, t) = [a_r^l(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta^l(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta]\cos(\omega t). \tag{39}$$

El campo electromagnético resultante, para l par, es:

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = [a_r^l(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_r + a_\theta^l(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta]\sin(\omega t), \tag{40}$$
$$\mathbf{B}^l(\mathbf{r}, t) = a_\varphi^l(r, \theta)\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{41}$$

4. Lugares geométricos

4.1 Lugares geométricos magnéticos

La tarea de encontrar superficies magnéticas $\mathcal{S}$ equivale a encontrar superficies donde $\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = 0$ para todo momento de tiempo y en todo punto de dicha superficie, con la condición de que el campo magnético no sea idénticamente igual a cero.

De la ecuación (40) está claro que la condición $\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = 0$, para el caso cuando l es par, lo cual implica que deben cumplirse simultáneamente las siguientes dos ecuaciones

$$a_r^l(r, \theta) = 0, \tag{42}$$
$$a_\theta^l(r, \theta) = 0, \tag{43}$$

La superficie solución de (42) y la superficie solución de (43), según las expresiones (29) y (30), no pueden ser coincidentes debido a que las raíces de las funciones esféricas de Bessel $j_l(kr)$ y $j_{l+1}(kr)$ son siempre diferentes. Lo mismo sucede con las raíces de polinomios asociados de Legendre $P_l^1(\cos\theta)$ y $P_l^2(\cos\theta)$. El lugar geométrico donde se cumple la condición $\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = 0$, será, por lo tanto, la curva de intersección de las superficies definidas por (42) y (43). Con esto se concluye que no existen superficies magnéticas para el caso de valores pares de l.

Estudiemos ahora el caso de valores impares del parámetro l. La condición $\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = 0$, en este caso, se expresa, según la ecuación (34) como:

$$a^l_\varphi(r, \theta) = j_l(kr)\, P^1_l(\cos\theta) = 0. \tag{44}$$

Los lugares geométricos que describen las soluciones de la ecuación (44) son los siguientes.

4.1.1 Esferas magnéticas $\mathcal{S}^l_i$

La ecuación:

$$j_l(kr) = 0, \tag{45}$$

proporciona una cantidad infinita de soluciones que representan, para un valor impar dado de l, esferas con centro en el origen de coordenadas y radio igual a:

$$r^l_i = \frac{x^l_i}{k}, \tag{46}$$

donde x^l_i, $i = 0, 1, 2, 3,...$, son las raíces de la función esférica de Bessel j_l ordenadas en forma creciente.

$$0 = x^l_0 < x^l_1 < x^l_2 < x^l_3 < \ldots, \tag{47}$$

De las ecuaciones (29)-(31) se observa que sobre cada esfera $\mathcal{S}^l_i$ sólo hay un campo magnético tangencial a dicha esfera, el cual está dado por la expresión:

$$\mathbf{B}^l_i(\mathbf{r}, t) = j_{l+1}(kr^l_i) P^1_l(\cos\theta)\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\theta. \tag{48}$$

4.1.2 Conos magnéticos $\mathcal{C}^l_n$

La ecuación:

$$P^1_l(\cos\theta) = 0, \tag{49}$$

para valores impares de l, tiene $l + 1$ raíces θ^l_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, l$:

$$0 = \theta^l_0 < \theta^l_1 < \theta^l_2 < \ldots < \theta^l_l = \pi, \tag{50}$$

con la particularidad de que:

$$\theta^l_n + \theta^l_{l-n} = \pi. \tag{51}$$

Esto se debe a que para l impar $P^1_l(x)$ es una función par de su argumento, y $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.

A excepción de las dos raíces extremas $\theta^l_0 = 0$ y $\theta^l_l = \pi$, las demás raíces determinan $l - 1$ conos, que designaremos como $\mathcal{C}^l_n$, $1 \leq n \leq l - 1$. La mitad de estos conos, según la relación (51), está encima del eje Z y la otra mitad por debajo. Además, el cono $\theta = \theta^l_{l-n}$ es el cono $\theta = \theta^l_n$ invertido. El campo magnético existente sobre el cono $\mathcal{C}^l_n$, es tangente a dicha superficie e igual a:

$$B^l_n(r, t) = \frac{j_l(kr)}{kr} P^2_l(\cos\theta^l_n)\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_r. \tag{52}$$

4.1.3 Eje magnético

Para cualquier valor l impar, las raíces $\theta^l_0 = 0$ y $\theta^l_l = \pi$ siempre están presentes, y juntas representan el eje de simetría que es el eje Z. Por lo tanto, un lugar geométrico donde sólo hay campo

magnético es el eje Z, al cual llamaremos eje magnético y designaremos como Z. Ahí el campo dirigido a lo largo del eje Z expresado en coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{B}^l(0,0,z,t) = -l(l+1)\frac{j_l(k|z|)}{kz}\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{53}$$

4.2 Lugares geométricos eléctricos

4.2.1 Anillos eléctricos $\mathcal{R}^l_{m,n}$

De la ecuación (39) se observa que los lugares donde no hay campo magnético para todo momento de tiempo se obtienen igualando a cero de manera simultánea las funciones $a^l_r(r,\theta)$ y $a^l_\theta(r,\theta)$. La solución de este sistema de ecuaciones son las curvas de intersección de esferas con conos, por lo que resultan anillos en planos paralelos al plano XY con centro en el eje Z. El único resultado no trivial son los anillos:

$$\begin{cases} 2\cot\theta P^1_l(\cos\theta) + P^2_l(\cos\theta) = 0, \\ j_{1+1}(kr) - (l+1)\dfrac{j_l(kr)}{kr} = 0 \end{cases} \tag{54}$$

Designaremos estos anillos $\mathcal{R}^l_{m,n}$. El campo eléctrico sobre estos anillos es armónico en el tiempo, con amplitud constante, tangente al anillo y viene dado por la expresión:

$$\mathbf{E}^l_{m,n}(\mathbf{r},t) = j_l\left(k\tilde{r}^l_m\right)P^1_l\left(\cos\tilde{\theta}^l_n\right)\sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \tag{55}$$

donde $\tilde{r}^l_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ y $\tilde{\theta}^l_n$ $(n = 1, 2, \ldots, l)$ son las raíces de la ecuación (54).

En el sistema (54) la solución $\tilde{\theta}^l_{\frac{l+1}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$ es válida para cualquier valor de l (recuérdese que l es impar). Esto significa que, para cualquier valor impar de l y para cada valor de m, existe siempre un anillo $\mathcal{R}^l_{m,\frac{l+1}{2}}$ en el plano XY donde:

$$\mathbf{E}^l_{m,\frac{l+1}{2}}(\mathbf{r},t) = (-1)^{\frac{l+1}{2}}\frac{l!!}{(l-1)!!}j_l\left(k\tilde{r}^l_m\right)\sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi. \tag{56}$$

Podemos visualizar estas configuraciones como sigue para $l = 1, 3, 5$.

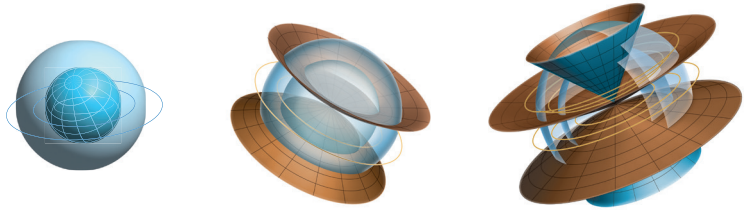


Figura 1. De izquierda a derecha, representación del conjunto esferas magnéticas y anillos eléctricos para $l = 1, 3, 5$. Esta figura representa las esferas y conos de campo magnético, y los anillos eléctricos [elaboración propia].

Las esferas y los conos son superficies en las que el campo magnético es tangencial a esas superficies, y no hay campo eléctrico en esas superficies, mientras que en los anillos el campo eléctrico es tangencial a los anillos, y no hay campo magnético en esos anillos.

5. Densidad de energía

La densidad de energía electromagnética $w^l(\mathbf{r}, t) = \dfrac{(\mathbf{E}^l)^2 + (\mathbf{B}^l)^2}{8\pi}$ para las soluciones (38) y (39) es:

$$w^l(\mathbf{r},t) = w_0^l(\mathbf{r}) + \left\{ w_0^l(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi}\left[j_l(kr)P_l^1(\cos\theta)\right]^2 \right\}\cos(2\omega t), \tag{57}$$

donde:

$$w_0^l(\mathbf{r}) = \frac{1}{16\pi}\left\{ [j_1(kr)]^2\left[P_l^1(\cos\theta)\right]^2 + \left[\frac{j_l(kr)}{kr}\right]^2 \left[2\cot\theta P_l^1(\cos\theta) + P_l^2(\cos\theta)\right]^2 + \left[P_l^1(\cos\theta)\right]^2\left[j_{l+1}(kr) - (l+1)\frac{j_l(kr)}{kr}\right]^2 \right\}, \tag{58}$$

es el valor alrededor del cual oscila la densidad de energía.

En la figura 2 se muestra la variación temporal de la densidad de energía en el plano XZ, para $l = 1$, $(k = 1)$.

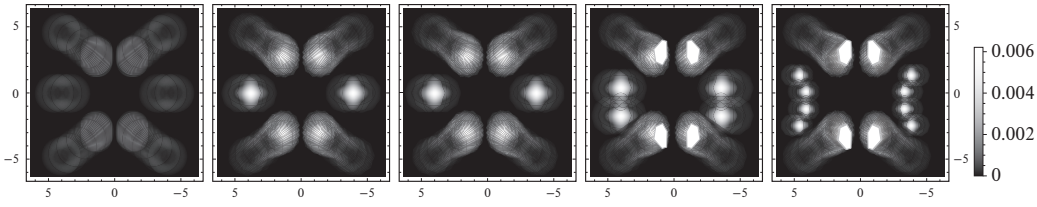


Figura 2. Evolución temporal de la densidad de energía debida a la presencia del término cos $2\omega t$, donde $-1 \leq \cos 2\omega t \leq 1$. De izquierda a derecha, cada gráfica corresponde respectivamente a los valores de cos $2\omega t = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ [elaboración propia].

De las expresiones (57) y (58) se puede obtener el lugar geométrico donde la densidad de energía no cambia con el tiempo (nodos de densidad de energía). La ecuación de estas superficies nodales está dada por:

$$\left[2\cot\theta + \frac{P_l^2(\cos\theta)}{P_l^1(\cos\theta)}\right]^2 = (kr)^2 - \left[kr\frac{j_{l+1}(kr)}{j_l(kr)} - (l+1)\right]^2. \tag{59}$$

La figura 3 nos muestra gráficamente dichas superficies, donde la densidad de energía es constante.

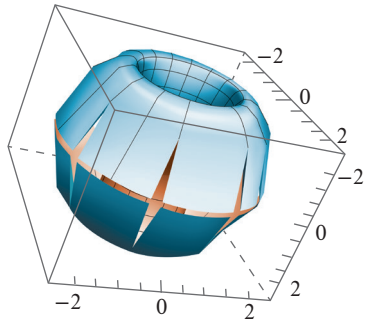


Figura 3. Superficies nodales de la densidad de energía [elaboración propia].

6. El campo vectorial de Poynting

El vector de Poynting $\mathbf{S}^l = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}^l \times \mathbf{B}^l$ para las soluciones (38)-(39) con superficies magnéticas (l impar) es:

$$\mathbf{S}^l = \frac{c}{8\pi}\, a^l_\varphi(r,\theta)\left[a^l_r(r,\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta - a^l_\theta(r,\theta)\hat{\mathbf{e}}_r\right]. \tag{60}$$

El momento lineal total del campo electromagnético dentro de una esfera arbitraria de radio R se puede calcular fácilmente reemplazando en (57):

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_x \sin\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{e}}_y \sin\theta\sin\varphi + \hat{\mathbf{e}}_z\cos\theta$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_x \cos\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{e}}_y \cos\theta\sin\varphi - \hat{\mathbf{e}}_z\sin\theta$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$, $\hat{\mathbf{e}}_z$ son los vectores unitarios ortogonales cartesianos.

Entonces, integramos el campo vectorial de Poynting sobre una esfera de radio arbitrario R:

$$\iiint \mathbf{S}^l r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi = -\frac{c\sin(2\omega t)}{4}\hat{\boldsymbol{e}}_z\left[\int_0^\pi\int_0^R a^l_\varphi(r,\theta)a^l_r(r,\theta)r^2\sin^2\theta dr d\theta\right.$$

$$\left. + \int_0^\pi\int_0^R a^l_\varphi(r,\theta)a^l_\theta(r,\theta)r^2\sin\theta\cos\theta\, dr d\theta\right] = 0$$

Por lo tanto, el momento lineal total dentro de toda esfera con centro en el origen de coordenadas es igual a cero.

Calculemos el flujo total de energía a través de toda la superficie de una esfera con radio arbitrario. Sobre la esfera, el elemento diferencial de área es $d\mathbf{A} = R^2\sin\theta d\theta d\varphi\hat{\mathbf{e}}_r$, por lo que el flujo total será:

$$\Phi = \int \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A} = -2\pi\frac{cR^2}{8\pi}\sin(2\,\omega t)\int_0^\pi a^l_\theta(R,\theta)a^l_\varphi(R,\theta)\sin\theta d\theta$$

$$= -\frac{cR^2}{4}\sin(2\omega t)\left[j_{l+1}(kR) - (l+1)\frac{j_l(kR)}{kR}\right]j_l(kR)\int_0^\pi P_l^1(\cos\theta)^2\sin\theta d\theta.$$

Esta última integral es igual a cero. Por lo tanto, el flujo total de energía a través de toda la superficie de una esfera con radio arbitrario siempre es igual a cero, lo que implica la conservación de la energía electromagnética en el volumen dentro de toda esfera.

De la misma manera se puede calcular el momento angular total dentro de una esfera de radio arbitrario y demostrar que es igual a cero.

$$\iiint \mathbf{r} \times \mathbf{S}\, dV = \mathbf{0}.$$

En la figura 4 apreciamos no sólo el campo vectorial de Poynting, sino también la densidad de energía en el plano XY, para el caso $l = 5$.

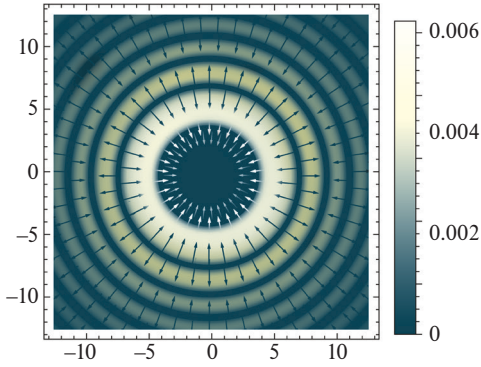


Figura 4. Gráfica del campo vectorial de Poynting para el caso $l = 5$, junto con la distribución de la densidad de energía [elaboración propia].

7. Conclusiones

En el presente trabajo encontramos un conjunto infinito de soluciones de las ecuaciones libres de Maxwell en el vacío con simetría axial y que dependen armónicamente del tiempo. En coordenadas esféricas las soluciones obtenidas están dadas por las fórmulas (38) y (39):

$$\mathbf{E}^l(\mathbf{r}, t) = a^l_\varphi(r, \theta)\, \mathrm{sin}_e(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \tag{38}$$

$$\mathbf{B}^l(\mathbf{r}, t) = \left[a^l_r(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_r + a^l_\theta(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta\right] \cos(\omega t), \tag{39}$$

válidas para todos los valores de l, donde las funciones componentes $a^l_\varphi(r, \theta)$, $a^l_r(r, \theta)$ y $a^l_\theta(r, \theta)$ se expresan mediante las funciones esféricas de Bessel y de los polinomios asociados de Legendre según las ecuaciones (29)-(31).

Mediante un análisis de las propiedades de paridad de estas soluciones se deduce que, para valores impares del parámetro l, las soluciones encontradas contienen lugares geométricos estacionarios donde no hay campo eléctrico y sólo hay campo magnético tangente: esferas ($r = const$), conos ($\theta = const$) y el eje Z. Estos lugares geométricos encontrados forman entre sí una infinidad de superficies cerradas axialmente simétricas que pueden servir de trampas magnéticas. Además, en cada trampa magnética existe un anillo eléctrico que son circunferencias sobre el plano y paralelas al plano XY, en donde no hay campo magnético, y sólo hay campo eléctrico tangente

a dicha circunferencia en todas partes. Todos los lugares geométricos mencionados son calculados al igual que el correspondiente campo sobre ellos.

Es importante destacar que los contenedores de plasma que actualmente se utilizan para los procesos de fisión nuclear están hechos por imanes, mientras que las configuraciones encontradas en este trabajo se obtienen a través de ciertos procesos de interferencia de campos electromagnéticos, por esta razón, creemos que las soluciones obtenidas podrían proporcionar pistas sobre nuevas formas de crear contenedores de plasma. Se sabe que los reactores Tokamak tienen formas toroidales o esféricas. Hemos encontrado superficies que se forman por la intersección de conos y esferas, estos espacios pueden servir de confinamiento para plasmas, además, se podrían utilizar anillos eléctricos para ionizar hidrógeno dentro de contenedores.

Estas soluciones también podrían usarse para estudiar el comportamiento del fenómeno de la electricidad atmosférica conocido como rayo de bola. Pueden dar algún apoyo a la hipótesis de Kapitsa sobre el origen y la estructura de los rayos de bola, relacionados con los procesos de interferencia estudiada en un trabajo anterior [15].

8. Referencias

[1] Bethe, H. A. Energy production in stars. *Physical Review*, 55(5), 434, 1939.

[2] Tamm, I. E. *Theory of the magnetic thermonuclear reactor, part I Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions. New* York: Pergamon, 3-19, 1959.

[3] Sakharov, A. D. *Theory of the magnetic thermonuclear reactor, part II Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions*. New York: Pergamon, 20-30, 1959.

[4] Tamm, I. E. *Theory of the magnetic thermonuclear reactor, part III Plasma Physics and the Problem of Controlled Thermonuclear Reactions*. New York: Pergamon, 31-41, 1959.

[5] Spitzer Jr, L. The stellarator concept. *The Physics of Fluids*, 1(4), 253-264, 1958.

[6] Rebut, P. H.; Bickerton, R. J.; Keen, B. E. The Joint European Torus: installation, first results and prospects. *Nuclear fusion*, 25(9), 1011, 1985.

[7] Sartori, F.; de Tommasi, Gianmaria; Piccolo, F. The joint European torus. *IEEE Control Systems Magazine*, 26(2), 64-78, 2006.

[8] Sips, A. C. C.; Giruzzi, G.; Ide, S.; Kessel, C.; Luce, T. C.; Snipes, J. A,... & Integrated Operation Scenario Topical Group of the ITPA. Progress in preparing scenarios for operation of the International Thermonuclear Experimental Reactor. *Physics of Plasmas*, 22(2), 021804, 2015.

[9] Campbell, D. J. The physics of the international thermonuclear experimental reactor FEAT. *Physics of Plasmas*, 8(5) 2041-2049, 2001.

[10] Sykes, A. Overview of recent spherical tokamak results. *Plasma physics and controlled fusion*, 43, 12A, A127, 2001.

[11] Sykes, A.; Costley, A. E.; Windsor, C. G.; Asunta, O.; Brittles, G.; Buxton, P.; ...& Smith, G. Compact fusion energy based on the spherical tokamak. *Nuclear Fusion*, 58(1), 016039, 2017.

[12] Chubykalo, A. E.; Espinoza A. Unusual formations of the free electromagnetic field in vacuum. *J. Phys. A: Math. Gen*., 35(38), 8043, 2002.

[13] Collinson, C. D. J. *Phys. A: Math. Gen.*, 20, L193, 1987.

[14] Arfken G. B.; Weber H. J. *Mathematical methods for physicists*. EEUU: Elsevier, Sixth Edition, 2005.

[15] Espinoza, A. & Chubykalo, A. Mathematical foundation of Kapitsa's hypothesis about the origin and structure of ball lightning. *Foundations of Physics,* 33(5), 863-873, 2003.

CAPÍTULO 8

MODELO INTERACTIVO EN LA MÉTRICA LEMAÎTRE-TOLMAN-BONDI

Roberto Carlos Blanquet Jaramillo[1], Germán Izquierdo[1], Roberto Sussman[2]

1. Introducción

Las observaciones cosmológicas nos indican que el contenido del universo tiene materia barió-nica y dos fuentes de energía de origen desconocido: la materia oscura fría (CDM) y la energía oscura (DE). Si suponemos que el universo es homogéneo e isotrópico, entonces la aceleración tardía es originada por un componente de energía oscura. Para explicar dicha aceleración se han propuesto los modelos de energía oscura (constante cosmológica, quintaesencia y energía oscura fantasma), cuya dinámica cósmica a grandes escalas se describe mediante perturbaciones lineales. Para describir la energía oscura se asume que esta es un fluido con presión negativa proporcional a la densidad:

$$p = w\rho \tag{1}$$

con constante de proporcionalidad negativa ($w < 0$). Estos modelos de energía oscura son dinámicos con $w < -1/3$ y dependientes del tiempo. Desafortunadamente estos modelos tienen problemas de ajuste fino al tratar de adecuarse a la fenomenología del universo temprano [1, 2, 3]. Las fluctuaciones en la densidad de la materia oscura fría son las que dan lugar a la formación de estructura (galaxias, clústers, etc.), siendo posible obtener límites a los modelos de energía oscura a través de los datos observados. Una propuesta interesante son los modelos de energía oscura acoplada que resuelven el problema de ajuste fino. Se han presentado y estudiado varios modelos de interacción (ver, por ejemplo, [4]).

La métrica Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) son soluciones exactas esféricamente simétricas de las ecuaciones de Einstein que contienen una fuente del tipo polvo [7, 8, 9, 10, 11]. En particular, el enfoque de los escalares cuasi-locales [12, 13, 14, 15] nos permite una descripción completa de las propiedades teóricas y la dinámica, ya que la evolución de los promedios de los

[1] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, Instituto Literario núm. 100 Ote., col. Centro, C.P. 50000, Toluca, Estado de México, México. Enlace de correspondencia: rcbjim@gmail.com

[2] Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-543, C.P. 04510, Ciudad de México, México.

escalares covariantes estándar satisfacen las ecuaciones de evolución de una métrica homogénea esféricamente simétrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [14]. Existe una conexión con la teoría de las perturbaciones cosmológica y las fluctuaciones de los escalares cuasi-locales, ya que representan una generalización analítica e invariantes de las funciones covariantes de las perturbaciones cosmológicas [17, 62]. Es muy poco conocida la métrica LTB con tensores energía-momento con presión distinta de cero en un marco comóvil. Para un fluido perfecto la presión debe ser uniforme (gradientes de presión cero), lo que permite interpretar la fuente como una mezcla compuesta por un fluido de densidad de energía oscura homogéneo que interactúa con polvo no homogéneo que representa la materia oscura fría (ver [20]).

Para fluidos con presión anisotrópica, admiten gradientes de presión no triviales, lo que conduce a una descripción similar en términos de escalares cuasi-locales y sus fluctuaciones, como sucede en los modelos LTB de polvo. Para los fluidos anisotrópicos, la anisotropía de la presión puede estar relacionada con la fluctuación del escalar cuasi-local asociado con la presión isotrópica. Dado que es posible establecer mezclas de fluidos y un amplia variedad de ecuaciones de estado son admisibles, se han utilizado métricas LTB con estas fuentes para modelar mezclas no homogéneas de energía oscura y materia oscura fría [21, 22]. En [23] se estudia una métrica LTB que contiene una mezcla de materia oscura fría no relativista y energía oscura acoplada con una ecuación de estado constante, con un término de acoplamiento proporcional a la densidad de materia oscura fría. En [24], se examina la evolución de una mezcla no homogénea de materia oscura fría no relativista sin presión, acoplada a la energía oscura caracterizada por la ecuación de estado $w < -1/3$, con el término de interacción proporcional a la densidad de energía oscura.

En este trabajo, generalizamos los resultados anteriores haciendo uso del enfoque de variables escalares cuasi-locales [16, 18, 62, 21, 23, 24, 25] para obtener ecuaciones de evolución autónomas en términos de los parámetros libres, considerando un término de acoplamiento proporcional a la densidad de energía del sector oscuro —es decir, la suma de las densidades de energía de ambas fuentes oscuras— y considerando una fuente de materia bariónica. También calculamos la evolución de las condiciones de valores iniciales para resolver las ecuaciones de evolución para ilustrar un escenario interesante de colapso esférico. El plan del trabajo es el siguiente: en la sección 2 presentamos el formalismo de los escalares cuasi-locales para establecer las ecuaciones de evolución de una métrica LTB, cuya fuente es una mezcla de materia oscura fría y energía oscura con el término de acoplamiento proporcional a la materia oscura fría más la energía oscura. En la sección 3 construimos un sistema dinámico adimensional y estudiamos el comportamiento de los puntos críticos para diferentes rangos de los parámetros libres. En la sección 4 resolvemos numéricamente las ecuaciones de evolución para algunos conjuntos de datos interesantes de condiciones iniciales. Finalmente, en la sección 5 resumimos nuestros resultados y los comparamos con los de [23, 24]. A lo largo del trabajo vamos a considerar unidades tales que $c = 1$.

2. Métrica LTB, escalares cuasi-locales y energía oscura acoplada

Vamos a denotar como espacios-tiempos Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) a todos los espacios-tiempos que tengan simetría esférica y son soluciones de las ecuaciones de Einstein descritas por la métrica LTB [7, 8]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R'^2 dr^2}{1+K} + R^2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2], \tag{2}$$

donde $R = R(t, r)$, $R' = \partial/\partial r$, y $K = K(r)$.

En este trabajo consideramos que el tensor de energía-momento del fluido contenido por la métrica LTB es:

$$T^{ab} = \rho u^a u^b + pH^{ab} + \Pi^{ab}, \tag{3}$$

donde $\rho = \rho(t,\, r)$ y $p = p(t,\, r)$ son densidad y presión respectivamente del fluido que llena el universo, u^a es la cuadrivelocidad del elemento de fluido y H^{ab} es la métrica inducida sobre la hipersuperficie a tiempo constante y $\Pi^a_b = \mathcal{P}(t,r) \times \text{diag}[0, -2, 1, 1]$ es la presión anisotrópica de la fuente. Considerando que el fluido es una mezcla de materia bariónica no relativista y un acoplamiento entre la materia oscura fría y energía oscura:

$$\rho = \rho_b + \rho_m + \rho_e, \tag{4}$$
$$p = p_b + p_m + p_e, \tag{5}$$

donde ρ_b, p_b son la densidad de energía y la presión de la fuente de materia bariónica, ρ_m, p_m son la densidad de energía y la presión de la fuente de la materia oscura fría y ρ_e, p_e son la densidad de energía y la presión de la fuente de energía oscura, respectivamente. El tensor energía-momento se separa como:

$$T^{ab} = T^{ab}_b + T^{ab}_m + T^{ab}_e. \tag{6}$$

si bien, se conserva el tensor energía-momento, $\nabla_b T^{\,ab} = 0$, consideramos que hay un flujo de energía-momento entre las fuentes acopladas como:

$$j^a = \nabla_b T^{ab}_{(m)} = -\nabla_b T^{ab}_{(e)}, \tag{7}$$

donde j^a es el flujo de energía entre las fuentes que caracteriza la interacción. Para mantener la simetría de la métrica asumimos que este flujo es un vector paralelo a la cuadri-velocidad u^a, cuya proyección es:

$$u_a \nabla_b T^{ab}_m = -u_a \nabla_b T^{ab}_e = J \tag{8}$$

tal que $J_a = J u_a$ y $H_{ca} J^a = 0$ se conservan, y la ecuación de conservación proyectada espacialmente $H_{ac} \nabla_b T^{ab} = 0$ se mantiene durante toda la evolución. El modelo LTB, entonces, tiene siete escalares dependientes de las fuentes del fluido cuya evolución hay que resolver: $A(t,\, r) = \rho_b$, ρ_m, ρ_e, p_b, p_m, p_e y J. Siguiendo la metodología de los escalares cuasi-locales de la métrica LTB, [18, 23, 24, 21, 22], A_q y sus fluctuaciones δ^A definidas para cada A como:

$$A_q = \frac{\int_{x=0}^{x=r} AR^2 R' dx}{\int_{x=0}^{x=r} R^2 R' dx}, \qquad \delta^A = \frac{A - A_q}{A_q} = \frac{A'_q/A_q}{3R'/R}, \tag{9}$$

donde el límite inferior de las integrales $x = 0$ marca un centro de simetría de la métrica, tal que, $R(t,\, 0) = \dot{R}(t,\, 0) = 0$, con $\dot{} = \partial/\partial t$ y $\dot{R} = u^a \nabla_a R$. En particular, es sencillo demostrar que en [23, 24, 22]:

$$\begin{aligned} p_{bq} &= p_b - 2\mathcal{P}_b, \quad \delta^p_{(b)} = 2\mathcal{P}^{(b)}, \\ p_{mq} &= p_m - 2\mathcal{P}^{(m)}, \quad \delta^p_{(m)} = 2\mathcal{P}^{(m)}, \\ p_{eq} &= p_e - 2\mathcal{P}^{(e)}, \quad \delta^p_{(e)} = 2\mathcal{P}^{(e)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Además, hay dos escalares covariantes asociados a la métrica (2): el escalar de expansión de Hubble $\mathcal{H} = (1/3)\nabla_a u^a = (R^2R')^{\cdot}/(R^2R')$ y la curvatura espacial $\mathcal{K} = (1/6)^3\mathcal{R} = 2(KR)'/(R^2R')$, donde ${}^3\mathcal{R}$ es el escalar de Ricci a tiempo constante t de las hipersuperficies. Sus respectivos escalares cuasi-locales están dados por:

$$\mathcal{H}_q = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \mathcal{K}_q = \frac{K}{R^2}. \tag{11}$$

Para el término de interacción, tenemos $J = J_q(1 + \delta^{(J)})$, cuya dependencia del resto de escalares cuasi-locales se define más adelante. Para obtener las ecuaciones de evolución debemos considerar las siguientes ecuaciones de estado para las diferentes fuentes:

$$\text{materia bariónica (polvo):} \qquad p_b = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta^p_{(b)} = 0 \tag{12}$$

$$\text{materia oscura fría (polvo):} \qquad p_m = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta^p_{(m)} = 0, \tag{13}$$

$$\text{energía oscura (fluido barotrópico):} \qquad p_e = w\rho_e \quad \Rightarrow \quad \delta^p_{(e)} = \delta^\rho_{(e)}, \tag{14}$$

donde hemos asumido que w es el coeficiente adiabático de la densidad de energía oscura, definido como una constante. Observe que (11) y (14) implican que sólo la fuente de energía oscura contribuye a la presión anisotrópica: $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(e)} = \delta^p_{(e)}/3$. Como en [23, 24, 21, 22], las ecuaciones de Einstein se reducen al siguiente sistema de ecuaciones de evolución:

$$\dot{\mathcal{H}}_q = -\mathcal{H}_q^2 - \frac{\kappa}{6}\left[\rho_{mq} + (1 + 3\,w)\rho_{eq} + \rho_{bq}\right], \tag{15a}$$

$$\dot{\rho}_{bq} = -3\mathcal{H}_q\rho_{bq}, \tag{15b}$$

$$\dot{\rho}_{mq} = -3\mathcal{H}_q\rho_{mq} + J_q, \tag{15c}$$

$$\dot{\rho}_{eq} = -3\mathcal{H}_q\,(1 + w)\,\rho_{eq} - J_q, \tag{15d}$$

$$\dot{\delta}^{(\mathcal{H})} = -\mathcal{H}_q\delta^{(\mathcal{H})}\left(1 + 3\delta^{(\mathcal{H})}\right) + \frac{\kappa}{6\mathcal{H}_q}\Big[\rho_{mq}\left(\delta^{(\mathcal{H})} - \delta^{(m)}\right) + (1 + 3w)\rho_{eq}\left(\delta^{(\mathcal{H})} - \delta^{(e)}\right) + \rho_{bq}\left(\delta^{(\mathcal{H})} - \delta^{(B)}\right)\Big], \tag{15e}$$

$$\dot{\delta}^{(b)} = -3\mathcal{H}_q\delta^{(\mathcal{H})}\left[1 + \delta^{(B)}\right], \tag{15f}$$

$$\dot{\delta}^{(m)} = -3\mathcal{H}_q\delta^{(\mathcal{H})}\left(1 + \delta^{(m)}\right) + \frac{J_q}{\rho_{mq}}\left(\delta^{(J)} - \delta^{(m)}\right), \tag{15g}$$

$$\dot{\delta}^{(e)} = -3\mathcal{H}_q\delta^{(\mathcal{H})}\left(1 + w + \delta^{(e)}\right) - \frac{J_q}{\rho_{eq}}\left(\delta^{(J)} - \delta^{(e)}\right) \tag{15h}$$

junto con las restricciones algebraicas:

$$\mathcal{H}_q^2 = \frac{\kappa}{3}\left[\rho_{bq} + \rho_{mq} + \rho_{eq}\right] - \mathcal{K}_q, \tag{16}$$

$$2\mathcal{H}_q^2\delta^{(\mathcal{H})} = \frac{\kappa}{3}\left(\rho_{bq}\delta^{(B)} + \rho_{mq}\delta^{(m)} + \rho_{eq}\,\delta^{(e)}\right) - \mathcal{K}_q\delta^{(\kappa)}. \tag{17}$$

donde $\kappa = 8\pi G$, (17) se sigue desde las ecuaciones (16) y (9), $\delta^{(\kappa)} = (\mathcal{K} - \mathcal{K}q)/\mathcal{K}q$, mientras que J_q es el escalar cuasi-local asociado a (9) que corresponde al flujo de densidad de energía definido a partir de J. La ecuación (16) es la restricción hamiltoniana cuasi-local, que (de (11)) toma la forma

de una ecuación de Hubble para un fondo FLRW. Además, las ecuaciones de evolución (15a-15d) para los escalares cuasi-locales $\mathcal{H}_q$, ρ_{bq}, ρ_{mq}, ρ_{eq} son formalmente equivalentes a las ecuaciones de una métrica FLRW para una mezcla de materia oscura fría y energía oscura acopladas con ecuaciones de estado (12), (13) y (14). Esto refuerza la interpretación de los escalares cuasi-locales del modelo LTB como un promedio de los escalares correspondientes para la métrica FLRW. De hecho, como se muestra en [12], cuando todas las funciones de las fluctuaciones $\delta^{(B)}$, $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(H)}$, $\delta^{(J)}$ se eliminan en el límite $r \to \infty$ para todos los tiempos t, lo que equivale al hecho de que en este límite el sistema completo anterior se reduce a las ecuaciones de evolución del modelo FLRW (15a-15d) y la ecuación de Friedman en (16). El sistema autónomo (15a-15h) se puede resolver numéricamente para una elección de w y J_q, que determina $\delta^{(J)}$ mediante la ecuación (9).

Consideraremos un término de interacción J_q proporcional a la suma de las densidades de energía de la materia oscura fría y energía oscura y el escalar cuasi-local de Hubble de la siguiente manera:

$$J_q = 3\mathcal{H}_q\alpha(\rho_{mq} + \rho_{eq}), \tag{18}$$

$$\delta^{(J)} = \delta^{(\mathcal{H})} + \frac{\rho_{mq}\delta^{(m)}}{(\rho_{mq} + \rho_{eq})} + \frac{\rho_{eq}\delta^{(e)}}{(\rho_{mq} + \rho_{eq})}, \tag{19}$$

donde α es una constante de acoplamiento adimensional. Este término de acoplamiento se considera en la literatura (ver [2, 3, 59, 61]), en el contexto de la cosmología FLRW. También representa una generalización de los términos de acoplamiento utilizados en [23, 24]. Dada la evolución de las densidades de energía cuasi-locales de la materia oscura fría y energía oscura (donde la materia oscura fría domina la expansión inicial del universo, mientras que la energía oscura domina la expansión tardía), se espera que el acoplamiento (18) se comporte como el acoplamiento en [23] (proporcional a la densidad de energía de la materia oscura fría) en el universo temprano y también se comporte como el acoplamiento en [24] (proporcional a la densidad de energía oscura) para la expansión tardía de la métrica LTB. Hay que tener en cuenta que la interacción fluye de la energía oscura a la materia oscura fría para $\alpha > 0$. Se consideraron mezclas cuya interacción tiene ecuación de estado (13) y (14) y el término de interacción (18) para una métrica FLRW en [2, 32, 55]. Este tipo de modelo para una métrica FLRW nos proporciona antecedentes para un tratamiento de perturbaciones de primer orden, produciendo ecuaciones de evolución lineal para las perturbaciones asociadas de todas las fuentes, incluido el término de interacción J, que puede considerarse como fenomenológico o (idealmente en principio) relacionado con alguna (aún desconocida) física del universo temprano. Como se muestra en [62], la dinámica de la métrica LTB en el formalismo de los escalares cuasi-locales produce (a través de ecuaciones de evolución como (15a-15h)) una generalización no lineal de soluciones exacta para las fluctuaciones cosmológicas invariantes lineales (para cualquier fuente compatible con la métrica LTB). La ventaja de utilizar soluciones numéricas de (15a-15h) radica en la posibilidad de examinar en el régimen no lineal la conexión entre la interacción de la materia oscura fría-energía oscura dada por J, y por las observaciones sobre la formación de estructura en las escalas de cúmulos y supercúmulos de galaxias.

3. Construcción del sistema dinámico adimensional

Es conveniente definir funciones adimensionales que nos permitan transformar (15a-15h), con el fin de linealizar el sistema dinámico autónomo resultante, encontrar y caracterizar los puntos críticos existentes. Definimos las funciones de densidad de energía Ω como:

$$\hat{\Omega}_b = \frac{\kappa}{3\mathcal{H}_q^2}\rho_{bq}, \qquad \hat{\Omega}_m = \frac{\kappa}{3\mathcal{H}_q^2}\rho_{mq}, \qquad \hat{\Omega}_e = \frac{\kappa}{3\mathcal{H}_q^2}\rho_{eq}. \tag{20}$$

Las ecuaciones de evolución para $\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$ y $\hat{\Omega}_e$ se obtienen de (15a), (15b), (15c), y (15d) como:

$$\frac{1}{\mathcal{H}_q}\dot{\Omega}_A = \frac{\kappa}{3\mathcal{H}_q^3}\dot{\rho}_{Aq} - \Omega_A\frac{\dot{\mathcal{H}}_q}{\mathcal{H}_q}, \tag{21}$$

donde $A = b, m, e$. Las restricciones (16) y (17) en términos de funciones Ω son:

$$\hat{\Omega}_b + \hat{\Omega}_m + \hat{\Omega}_e + \Omega_{\mathcal{K}} = 1, \tag{22}$$

$$2\delta^{(\mathcal{H})} = \hat{\Omega}_b\delta^{(B)} + \hat{\Omega}_m\delta^{(m)} + \hat{\Omega}_e\delta^{(e)} + \Omega_{\mathcal{K}}\delta^{(\kappa)}. \tag{23}$$

donde $\Omega_{\mathcal{K}} = -\mathcal{K}_q/\mathcal{H}_q^2$. Es conveniente definir una coordenada de tiempo adimensional $\xi(t, r)$ que, para todas las curvas comóviles $r = r_i$ [18]:

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{\mathcal{H}_q}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{3}{\Theta_q}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{24}$$

en términos de ξ, y por medio de (18) y (19), el sistema (15a-15h) se convierte en:

$$\frac{\partial\hat{\Omega}_b}{\partial\xi} = \hat{\Omega}_b\Big(-1 + \hat{\Omega}_m + (1+3w)\hat{\Omega}_e + \hat{\Omega}_b\Big), \tag{25a}$$

$$\frac{\partial\hat{\Omega}_m}{\partial\xi} = \hat{\Omega}_m\Big(-1 + 3\alpha + \hat{\Omega}_m + (1+3w)\hat{\Omega}_e + \hat{\Omega}_b\Big) + 3\alpha\hat{\Omega}_e, \tag{25b}$$

$$\frac{\partial\hat{\Omega}_e}{\partial\xi} = \hat{\Omega}_e\Big(-1 - 3w - 3\alpha + \hat{\Omega}_m + (1+3w)\hat{\Omega}_e + \hat{\Omega}_b\Big) - 3\alpha\hat{\Omega}_m, \tag{25c}$$

$$\frac{\partial\delta^{(\mathcal{H})}}{\partial\xi} = -\delta^{(\mathcal{H})}(1+3\delta^{(\mathcal{H})}) + \frac{\hat{\Omega}_m(\delta^{(\mathcal{H})} - \delta^{(m)})}{2} + \frac{(1+3w)\hat{\Omega}_e(\delta^{(\mathcal{H})} - \delta^{(e)})}{2} + \frac{\hat{\Omega}_b(\delta^{(\mathcal{H})} - \delta^{(B)})}{2}, \tag{25d}$$

$$\frac{\partial\delta^{(B)}}{\partial\xi} = -3\delta^{(\mathcal{H})}\Big(1 + \delta^{(B)}\Big), \tag{25e}$$

$$\frac{\partial\delta^{(m)}}{\partial\xi} = -3\delta^{(\mathcal{H})}\Big(1 + \delta^{(m)}\Big) + 3\alpha\delta^{(m)} - \frac{3\alpha\delta^{(m)}(\hat{\Omega}_m + \hat{\Omega}_e)}{\hat{\Omega}_m} + \frac{3\alpha\delta^{(\mathcal{H})}(\hat{\Omega}_m + \hat{\Omega}_e)}{\hat{\Omega}_m} + \frac{3\alpha\delta^{(e)}\hat{\Omega}_e}{\hat{\Omega}_m}, \tag{25f}$$

$$\frac{\partial\delta^{(e)}}{\partial\xi} = -3\delta^{(\mathcal{H})}\Big(1 + w + \delta^{(e)}\Big) - 3\alpha\delta^{(e)} + \frac{3\alpha\delta^{(e)}(\hat{\Omega}_m + \hat{\Omega}_e)}{\hat{\Omega}_e} - \frac{3\alpha\delta^{(\mathcal{H})}(\hat{\Omega}_m + \hat{\Omega}_e)}{\hat{\Omega}_e} - \frac{3\alpha\delta^{(m)}\hat{\Omega}_m}{\hat{\Omega}_e}. \tag{25g}$$

El sistema dinámico autónomo (25a-25g) tiene siete dimensiones y puede resolverse numéricamente para algunas condiciones de valores iniciales para cada capa comóvil $r = r_i$.

Las funciones escalares $\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$ y $\hat{\Omega}_e$ forman un subsistema independiente (como las ecuaciones (25a-25c), representan ecuaciones de evolución Ω que no están acopladas a las funciones δ y es formalmente idéntico al de las funciones Ω del modelo FLRW. Nos referiremos a las ecuaciones (25a-25c) como la proyección homogénea o (subsistema). Por otro lado, las funciones

δ dependen de las funciones δ y Ω, y sólo forman un subsistema independiente cuando las funciones Ω son constantes durante la evolución (es decir, cuando las funciones Ω no evolucionan en los puntos críticos de la proyección homogénea). Nos referiremos al conjunto de ecuaciones de evolución de δ (25d–25g) como la proyección no homogénea. Con ambas proyecciones tenemos una representación completa del sistema dinámico. Una vez que fijamos los valores de los parámetros libres del modelo, w y α se puede resolver completamente todo el sistema dinámico para cada capa $r = r_i$. Podemos calcular después $\mathcal{H}_q(\xi, r_i)$ integrando:[3]

$$\frac{\partial H_q}{\partial \xi} = \frac{\dot{H}_q}{H_q} = -H_q\left(1 + \frac{1}{2}\hat{\Omega}_b + \frac{1}{2}\hat{\Omega}_m + \frac{1+3w}{2}\hat{\Omega}_e\right). \tag{26}$$

Una vez que hemos calculado las variables del espacio de las fases $\hat{\Omega}_b, \hat{\Omega}_m, \hat{\Omega}_e, \delta^{(B)}, \delta^{(m)}, \delta^{(e)}, \delta^{(H)}$ y $\mathcal{H}_q(\xi, r_i)$ se pueden obtener todas las cantidades relevantes: los escalares cuasi-locales asociados con las densidades de materia bariónica, materia oscura fría y energía oscura a partir de sus definiciones (20), la curvatura espacial y su fluctuación $\delta^{(\kappa)}$ se obtienen directamente de las restricciones (17), y las cantidades locales $A = \mathcal{H}, \mathcal{K}, \rho_b, \rho_m, \rho_e, J$ de la relación $A = A_q(1 + \delta^A)$. Además, es posible recuperar el tiempo cósmico del parámetro de evolución del espacio de fase $\xi(t, r)$ en cada $r = r_i$ como:

$$t(r_i) = \int_0^{\xi(t,r_i)} \frac{d\xi'}{\mathcal{H}_q(\xi', r_i)}, \tag{27}$$

Tabla 1. Puntos críticos y sus respectivos valores propios del sistema dinámico (25a–25c) [elaboración propia].

Puntos críticos	$(\hat{\Omega}_b, \hat{\Omega}_m, \hat{\Omega}_e)$	Valores propios ($\Delta = \sqrt{1 + 4(\alpha/w)}$)
P1	$\left(0, \frac{(1+\Delta)}{2}\right), \left(\frac{(1-\Delta)}{2}\right)$	$\lambda_1 = -3w\Delta,\ \lambda_2 = \frac{3w}{2}(1-\Delta),\ \lambda_3 = 1 + \frac{3w}{2}(1-\Delta)$
P2	$\left(0, \frac{(1-\Delta)}{2}\right), \left(\frac{(1+\Delta)}{2}\right)$	$\lambda_1 = \frac{3w}{2}(1+\Delta),\ \lambda_2 = 1 + \frac{3w}{2}(1+\Delta),\ \lambda_3 = 3w\Delta$
P3	$(1,\ 0,\ 0)$	$\lambda_1 = -\frac{3w}{2}(1-\Delta),\ \lambda_2 = -\frac{3w}{2}(1+\Delta),\ \lambda_3 = 1$
P4	$(0,\ 0,\ 0)$	$\lambda_1 = -1 - \frac{3w}{2}(1-\Delta),\ \lambda_2 = -1 - \frac{3w}{2}(1+\Delta),\ \lambda_3 = -1$

Aunque es importante tener en cuenta que las hipersuperficies de ξ y t no coinciden, por lo que para cada escalar A tenemos $[\partial A/\partial r]_t \neq [\partial A/\partial r]_\xi$ (las condiciones de integrabilidad apropiadas se discuten en detalle en [18]). Teniendo esto en cuenta, las funciones de la métrica LTB restantes se derivan de la evaluación de $R = \exp\left(\int \mathcal{H}_q dt\right)$ y $R' = R\exp\left(-\int \mathcal{H}_q \delta^{(\mathcal{H})} dt\right)$ para $\mathcal{H}_q, \delta^{(\mathcal{H})}$ como funciones de (t, r).

3.1 Sistema homogéneo y puntos críticos

Como en [18, 23, 24] podemos separar el espacio de las fases de (25a-25g) en un subespacio de proyección homogéneo, que está definido por el espacio de tres variables $\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$ y $\hat{\Omega}_e$, ya que están completamente determinadas por las ecuaciones de evolución (25a-25c), mismas que no involucran a las otras variables de espacio de fases $\delta^{(\mathcal{H})}, \delta^{(B)}, \delta^{(m)}, \delta^{(e)}$. De hecho, para cada tra-

[3] De hecho, para el trabajo numérico es conveniente sumar la ecuación (26) al sistema (25d-25g), y resolver el sistema de ocho dimensiones resultante para un determinado conjunto de condiciones de valores iniciales relacionadas con las restricciones.

yectoria de (r fijo) estas ecuaciones de evolución son idénticas a las ecuaciones del modelo FLRW para las variables de densidad. El estudio del espacio de las fases se realizará observando la evolución de sus trayectorias en términos de estas proyecciones homogéneas. En este punto, podemos obtener los puntos críticos para eliminar el lado derecho de las ecuaciones (25a-25c). También podemos obtener los valores propios relacionados con los puntos críticos por el teorema de linealización del sistema homogéneo cercanos a dichos puntos críticos. Los puntos críticos y los valores propios correspondientes para el sistema dinámico (25a-25c) se resumen en la tabla 1 donde hemos definido $\Delta = \sqrt{1 + 4(\alpha/w)}$.

Hay que tener en cuenta que *P1* y *P2* pueden tener valores no reales para los valores de α y w. Como $w < -1/3$ en general para los modelos de energía oscura en la métrica FLRW (para representar la etapa tardía acelerada de expansión del universo), vemos que los puntos son reales para $\alpha \leqslant -w/4$. Este resultado es similar al encontrado en [61] en el contexto de la cosmología para la métrica FLRW. Considerando los parámetros libres para esta interacción que cumplen con los datos observacionales obtenidos en [2, 3, 59, 61], vemos que ambos puntos críticos son reales, ya que w es cercano a valores menores que -1, mientras que los valores de α cuando son superiores a 0.25 se pueden descartar. Además, a partir de la definición de las densidades de energía, las soluciones *P1* y *P2* con un valor negativo representarían una solución matemáticamente correcta pero no física. Es posible obtener valores positivos de *P1* y *P2* cuando $\alpha > 0$. En [23] se aborda la evolución de la métrica LTB con $\alpha < 0$ para un término de acoplamiento diferente.

En este trabajo nos limitaremos a $\alpha > 0$ para estudiar la relevancia de los puntos críticos *P1* y *P2* en la dinámica de la métrica LTB. El estudio de la evolución del espacio de fases se realizará observando las trayectorias en términos de estas proyecciones homogéneas. Los valores propios respectivos de los puntos críticos también se muestran en la tabla 1 y dependen de los parámetros w y α. Considerando $w \sim -1$ y $0 < \alpha \leq -w/4$, es posible determinar el comportamiento de las trayectorias cerca de los puntos críticos. El punto crítico *P1* es un punto silla ya que $\lambda_1 > 0$, mientras que el resto de los valores propios tienen valores negativos. El punto crítico *P2* es un atractor futuro, ya que todos sus valores propios son negativos. El punto crítico *P3* es un atractor pasado, ya que todos los valores propios son positivos. Y finalmente, el punto crítico *P4* es un punto silla, ya que tiene $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ mientras que $\lambda_3 < 0$.

3.2 Leyes de escala de los escalares cuasi-locales y singularidades

Para resolver el sistema dinámico (25a-25g), debemos considerar los perfiles de valores iniciales para la métrica LTB. Procediendo como en [23, 24], especificamos las condiciones iniciales en una hipersuperficie arbitraria $t = t_0$ (el subíndice $_0$ denotará en adelante evaluación en el instante $t = t_0$).

La métrica LTB (2) se puede reescribir como una métrica FLRW de la siguiente manera:

$$ds^2 = -dt^2 + L^2 \left[\frac{\Gamma^2 {R'_0}^2 dr^2}{1 - \mathcal{K}_{q0} R_0^2} + R_0^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right], \tag{28}$$

$$\Gamma = \frac{R'/R}{R'_0/R_0} = 1 + \frac{L'/L}{R'_0/R_0}, \tag{29}$$

donde $L = L(t, r)$ es similar al factor de escala de los modelos FLRW. La métrica LTB es invariante para un cambio de escala arbitrario de la coordenada radial, y siempre es posible definir la coordenada radial mediante un cambio específico de $R_0(r)$. Podemos identificar $L = 0$ como una singularidad del tipo Big Bang, mientras que $\Gamma = 0$ es una singularidad del tipo cruce de capas [18]. Resolviendo las ecuaciones de evolución (11), (15a), (15b), (15c) y (15d) con respecto a L, podemos obtener las soluciones para los escalares cuasi-locales (equivalentes a las soluciones FLRW).

$$\mathcal{K}_q = \mathcal{K}_{q0}L^{-2}, \tag{30}$$

$$\rho_{bq} = \rho_{bq0}L^{-3}, \tag{31}$$

$$\rho_{eq} = \rho_{eq0}(aL^{\gamma_1} + (1-a)L^{\gamma_2}) + \rho_{mq0}b(-L^{\gamma_1} + L^{\gamma_2}), \tag{32}$$

$$\rho_{mq} = \frac{(\rho_{eq0} + \rho_{mq0})(-1+\Delta) + 2\rho_{eq0}}{2\Delta}L^{\gamma_1} - \frac{(\rho_{eq0} + \rho_{mq0})(-1-\Delta) + 2\rho_{eq0}}{2\Delta}L^{\gamma_2} - \rho_{eq}, \tag{33}$$

donde:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{2\alpha + w}{2w\Delta}, \tag{34}$$

$$b = -\frac{\alpha}{2w\Delta}, \tag{35}$$

$$\gamma_1 = -\frac{3}{2}(2 + w + w\Delta)\,,\ \gamma_2 = -\frac{3}{2}(2 + w - w\Delta) \tag{36}$$

Para integrar el sistema (25a-25g), podemos calcular las condiciones de valores iniciales de los perfiles $\rho_{b0}(r)$, $\rho_{e0}(r)$, $\rho_{m0}(r)$ y $\mathcal{K}_0(r)$ y una elección específica de $R_0(r)$. Los perfiles iniciales de los escalares cuasi-locales $\rho_{bq0}(r)$, $\rho_{eq0}(r)$, ρ_{mq0}, $\mathcal{K}_{q0}(r)$ y las fluctuaciones $\delta_0^{(m)}, \delta_0^{(e)}, \delta_0^{(\mathcal{H})}$ se siguen directamente de (9) con $R = R_0$. Por simplicidad, es conveniente considerar $\xi_0 = \xi(t_0, r) = 0$ para todo r, lo que establece las condiciones de valores iniciales del sistema dinámico: $\hat{\Omega}_b(0,r)$, $\hat{\Omega}_e(0,r)$, $\hat{\Omega}_m(0,r)\delta_0^{(m)} = \delta^{(m)}(0,r)$, $\delta_0^{(e)} = \delta^{(e)}(0,r)$ y $\delta_0^{(\mathcal{H})} = \delta^{(\mathcal{H})}(0,r)$. Esta elección de la condición de valor inicial ξ significa que $\xi = 0$ y $t = t_0$ marca la misma hipersuperficie, aunque las hipersuperficies de t y ξ son constantes pero diferentes para $\xi \neq 0$ y $t \neq t_0$. El conjunto considerado de funciones de los perfiles iniciales podría evolucionar a una singularidad de cruce de capas, por lo cual es conveniente verificar cuidadosamente la evolución de Γ. Aunque Γ se puede definir a partir de la relación $L'/L = R_0'(\Gamma - 1)/R_0$, con las derivadas radiales evaluadas para t constante (ver [23, 24]) es conveniente relacionar Γ con $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(B)}$ o $\delta^{(\mathcal{K})}$ derivando con respecto a la coordenada radial y junto con las ecuaciones dadas por (33). En particular y usando la definición de $\delta^{(\mathcal{K})}$, es sencillo demostrar que:

$$\delta^{(\mathcal{K})} = -\frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{3} + \delta_0^{(\mathcal{K})}}{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{\frac{2}{3} + \delta_0^{(\mathcal{K})}}{\frac{2}{3} + \delta^{(\mathcal{K})}}, \tag{37}$$

y podemos reescribir la ecuación (23), como:

$$\Gamma = \frac{\Omega_{\mathcal{K}}(t,r)}{\Omega_{\mathcal{K}}(0,r)}\left(\frac{\hat{\Omega}_b(\delta_0^{(B)} + \frac{2}{3}) + \hat{\Omega}_i(\delta_0^{(m)} + \frac{2}{3}) + \hat{\Omega}_e(\delta_0^{(e)} + \frac{2}{3}) - 2\delta_0^{(\mathcal{H})} - \frac{2}{3}}{\hat{\Omega}_b(\delta^{(B)} + \frac{2}{3})\hat{\Omega}_m(\delta^{(m)} + \frac{2}{3}) + \hat{\Omega}_e(\delta^{(e)} + \frac{2}{3}) - 2\delta^{(\mathcal{H})} - \frac{2}{3}}\right), \tag{38}$$

que puede en principio usarse para evaluar Γ en cualquier instante de $\delta^{(\mathcal{K})}$. Dado que las soluciones analíticas para Γ sólo pueden existir para valores muy restringidos de α, w, la ecuación (37) no es útil. En general, la evolución de los modelos LTB debe determinarse numéricamente. Si $\Gamma = 0$ tenemos una singularidad de cruce de capas, lo que significa que se deben encontrar las condiciones de valores iniciales para evitar que esto suceda (no es posible proporcionar condiciones de valores iniciales simples para esto, como en soluciones de polvo con constante cosmológica, ver [8, 9, 10, 13]). Como se muestra en el trabajo anterior (por ejemplo [23]), los escalares cuasi-locales fallan en las singularidades de cruce de capas porque las fluctuaciones $\delta^{(e)}$, $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(\mathcal{H})}$ divergen. Por lo tanto, seleccionaremos las condiciones de valores iniciales de manera que se eviten los cruces de capas: $\Gamma > 0$ que se mantiene durante toda la evolución del espacio de fases.

4. Perfiles iniciales, evolución y tiempo de colapso

Para observar la evolución numérica de los perfiles de valores iniciales, definimos el parámetro de tiempo adimensional (que es diferente de ξ) dado por $\bar{t} = H_s t$ donde H_s es una constante arbitraria con unidades inversas de tiempo (en aplicaciones cosmológicas es habitual elegir $H_s = H_0$). Este reescalamiento de tiempo permite también cambiar las variables de la siguiente forma: $\bar{\mathcal{H}}_q = \mathcal{H}_q/H_s$, $\kappa\bar{\rho}_m/3 = \kappa\rho_b/(3H_s^2)$, $\kappa\bar{\rho}_b/3 = \kappa\rho_m/(3H_s^2)$, $\kappa\bar{\rho}_e/3 = \kappa\rho_e/(3H_s^2)$. Para simplificar, dejaremos las variables normalizadas y estableceremos el reescalamiento $H_s = 1$, que fija las variables de densidad de energía como $\kappa/(3H_s^2) = 1$ (ver [23]). Para que los perfiles de valores iniciales tengan un escenario de formación de estructura, necesitamos que algunas de las capas internas (deben tener valores de r alrededor del centro de simetría $r = 0$) que inicialmente se expanden, pero con un rebote del tiempo t y con un colapso en $\mathcal{H}_q$ que debe cambiar de signo de positivo a negativo, mientras que las capas externas continúan expandiéndose ($\mathcal{H}_q > 0$ que debe mantenerse para todo el tiempo t). Vamos a considerar un rebote cuando $\mathcal{H}_q = 0$, por lo que podemos definir para cada r un valor $t = t_{\max}(r)$ tal que $\mathcal{H}_q(t_{\max}(r), r) = 0$. El estudio del sistema dinámico que hemos realizado no examina las trayectorias en el espacio de las fases de las capas que han rebotado y luego llegan a colapsar ($\mathcal{H}_q \to 0$ mientras que la evolución que va hacia $\mathcal{H}_q < 0$), como las coordenadas $[\hat{\Omega}_b, \hat{\Omega}_m, \hat{\Omega}_e]$ de la proyección homogénea divergen como $\mathcal{H}_q \to 0$. El estudio numérico proporcionado en esta sección compensará esta deficiencia. Para el tipo de evolución de la mezcla de materia y energía oscura acoplada con expansión/colapso descrito anteriormente necesitamos las trayectorias del espacio homogéneo: (i) las capas externas siempre que estén en expansión deben evolucionar del repulsor al atractor (o del eje $\hat{\Omega}_e$ cuando $\alpha < 0$); (ii) las capas internas deben evolucionar desde el repulsor hasta el infinito $\hat{\Omega}_b, \hat{\Omega}_e, \hat{\Omega}_m \to \infty$ como $t \to t_{\max}$.Para un régimen con rebote/colapso (y condiciones de valores iniciales específicas), las variables del espacio no homogéneo también podrían diverger o no evolucionar hacia el atractor. El perfil de valor inicial que hemos elegido para el modelo de mezcla de materia y energía oscura acoplada es el siguiente:

$$\rho_{b0} = b_{10} + \frac{b_{11} - b_{10}}{1 + \tan^2(r)}, \qquad b_{10} = 0.90, \quad b_{11} = 1.20; \tag{39}$$

$$\rho_{m0} = m_{10} + \frac{m_{11} - m_{10}}{1 + \tan^2(r)}, \qquad m_{10} = 1.00, \quad m_{11} = 13.10; \tag{40}$$

$$\rho_{e0} = e_{10} + \frac{e_{11} - e_{10}}{1 + \tan^2(r)}, \qquad e_{10} = 0.90, \quad e_{11} = 1.66; \tag{41}$$

$$\mathcal{K}_0 = k_{10} + \frac{k_{11} - k_{10}}{1 + \tan^2(r)}, \qquad k_{10} = -1.10, \quad k_{11} = 2.50; \tag{42}$$

con la función de coordenada $R_0(r) = \tan(r)$. Por lo tanto, consideramos una partición de $n = 20$ para r que va de 0 a $\pi/2$.

En la figura 1, la evolución de $\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$ y $\hat{\Omega}_e$ se grafica en el espacio de fase del sistema homogéneo. Los puntos rojos representan las condiciones de valores iniciales de cada capa. En el ejemplo numérico observamos que la primera y la segunda capa evolucionan desde el repulsor *P3* hasta el infinito (relacionado con un rebote), mientras que el resto de capas evolucionan desde *P3* al atractor *P2*. Lo que debemos asegurar es que no haya ninguna singularidad de cruce de capas durante la evolución.

Para estudiar las posibles singularidades de cruce de capas, es necesario calcular la evolución de $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(B)}$ y $\delta^{(\mathcal{H})}$. Como se mencionó anteriormente, si $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(B)}$ y $\delta^{(\mathcal{H})}$ tienden al infinito en cualquier punto, podemos afirmar que Γ tenderá en consecuencia a ser nulo y se

producirá una singularidad de cruce de capas. La figura 2 muestra la evolución de $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(B)}$ y $\delta^{(\mathcal{H})}$ *vs.* ξ para todas las capas, y podemos concluir que no hay singularidad de cruce de capas para el perfil de valor inicial considerado.

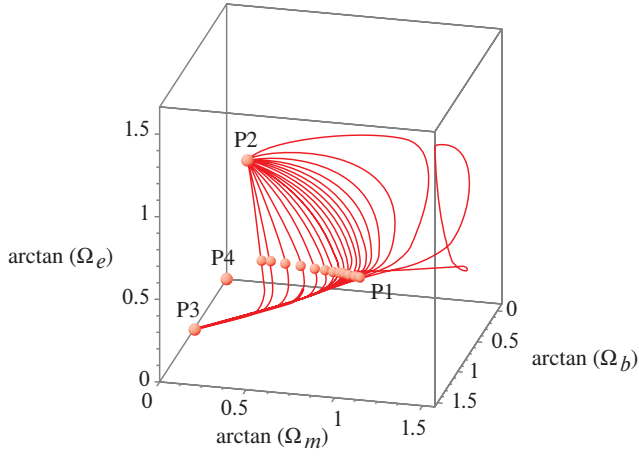


Figura 1. La proyección homogénea de las trayectorias del sistema (25a-25c) para las diferentes capas con condiciones de valores iniciales dadas por (42) y $w = -1.0$ y $\alpha = 0.1$. Los puntos rojos representan los valores iniciales de $\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$ y $\hat{\Omega}_e$ para cada capa $r = r_i$. Los puntos negros representan los puntos críticos del sistema homogéneo [elaboración propia].

Con la solución numérica del sistema dinámico, podemos calcular $\mathcal{H}_q$ a partir de (26) y el tiempo cósmico t definido en (27). Entonces podemos graficar implícitamente la evolución de $\log(\mathcal{H}_q)$ *vs.* t para cada capa $r = r_i$ de la partición. Para las capas internas que rebotan r_1 y r_2 en este caso, es posible calcular numéricamente el instante para el cual $\mathcal{H}_q = 0$ (comportamiento asintótico en $\log(\mathcal{H}_q)$: $t_{\max}(r_1) = 13.71$ y $t_{\max}(r_2) = 17.65$, respectivamente. Debemos de tener en cuenta que esos instantes representan la máxima expansión de ambas capas.

En la figura 3, se representa $\log(\mathcal{H}_q)$ *vs.* t para las capas r_1, r_2, r_3 y r_4. El instante $t_{\max}(r_j)$ ($j = 1, 2$ para el ejemplo numérico anterior) en el modelo LTB tiene un significado similar al tiempo de respuesta en la aproximación newtoniana para un colapso esférico [63] y el colapso esférico de una fluctuación en un modelo FLRW (ver [64] y [65] para un colapso esférico de perfil del tipo *top hat* en un universo Einstein-De Sitter y un ΛCDM, respectivamente), ya que el tiempo máximo de respuesta está definido en el instante máximo de colapso mientras que, en el modelo LTB, las capas $r = r_j$ alcanzan su tiempo máximo en $t = t_{\max}(r_i)$. En el ejemplo numérico de este modelo para los perfiles de valores iniciales en donde dos capas de la partición colapsan (con valores diferentes para $t_{\max}(r_i)$), es razonable promediar ambos tiempos $t_{\max}(r_i)$ para obtener un promedio del instante del tiempo de respuesta: $< t_{\max} > = 15.68$.

Hay que tener en cuenta que $< t_{\max} >$ depende, no sólo de la dinámica (parámetros libres w y α, densidades de energía/tasa de expansión), como en el caso del colapso esférico de una fluctuación en un modelo FLRW, sino también de los perfiles de valores iniciales locales utilizados, como $< t_{\max} >$ se obtiene después del cálculo numérico. No es posible generalizar el resultado a otros perfiles de valores de parámetros libres. Por otro lado, la metodología presentada en este ejemplo se puede utilizar para evaluar $< t_{\max} >$ caso por caso y representa una solución exacta en vez de una aproximación de orden lineal al colapso esférico.

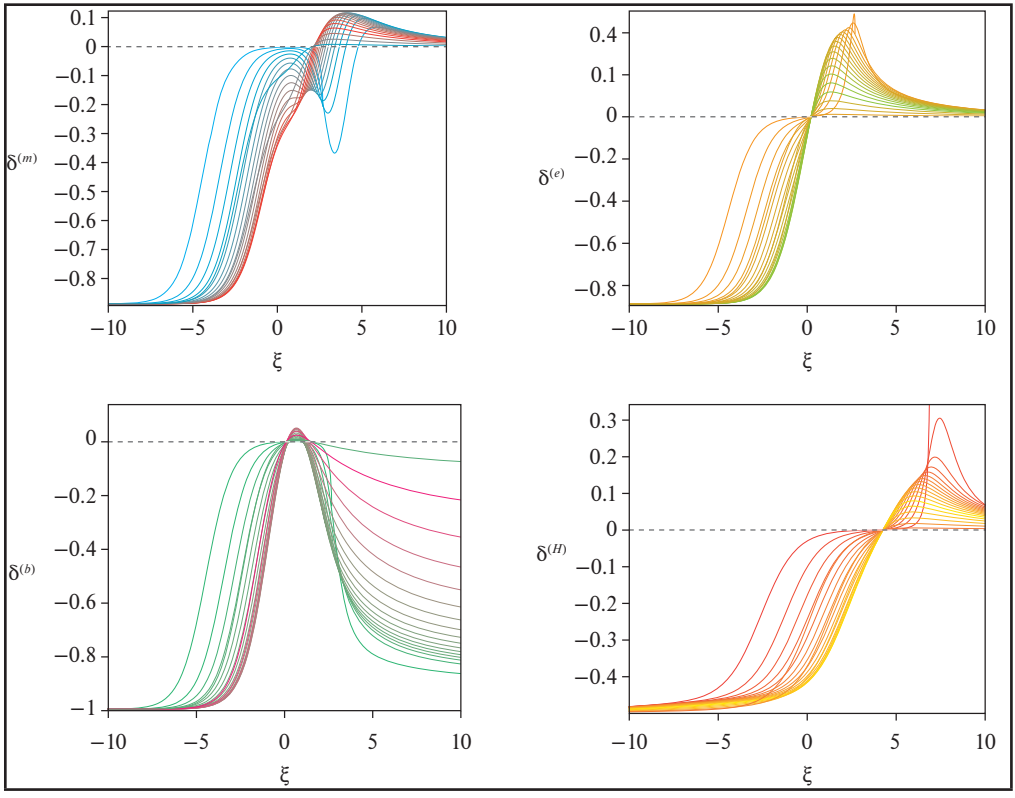


Figura 2. Evolución de las funciones $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(B)}$ y $\delta^{(\mathcal{H})}$ *vs.* ξ para las capas $r = r_i$ con condiciones de valores iniciales dadas por (42) y $w = -1.0$ y $\alpha = 0.1$ [elaboración propia].

5. Conclusiones

La métrica LTB se utiliza para obtener soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que se complementan en este trabajo, generalizando los resultados que se obtuvieron de trabajos anteriores [23, 24], a medida que abordamos la dinámica de las soluciones LTB que contienen tres fuentes: materia bariónica, materia oscura fría y energía oscura acoplada. Mediante los escalares cuasi-locales y sus fluctuaciones, transformamos de forma natural las ecuaciones de Einstein en un sistema dinámico que evoluciona en un espacio de fase de siete dimensiones. Estudiamos el sistema dinámico en dos proyecciones espaciales: el espacio homogéneo tridimensional cuyas variables son escalares cuasi-locales ($\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$, $\hat{\Omega}_e$) análogos a escalares covariantes de un modelo FLRW con el mismo tipo de mezcla de materia bariónica, materia oscura fría y energía oscura, y un espacio de cuatro dimensiones que involucra las fluctuaciones de los escalares cuasi-locales ($\delta^{(B)}$, $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(\mathcal{H})}$) que definen la no homogeneidad de los modelos FLRW. En el caso de la proyección homogénea obtenemos cuatro puntos críticos resumidos en la tabla 1: un punto silla *P1*, un atractor futuro *P2*, un atractor pasado *P3* y un punto silla *P4*. El comportamiento de los puntos críticos se basa en el supuesto de que w es de orden menor que -1 y $0 < w < 0.25$,

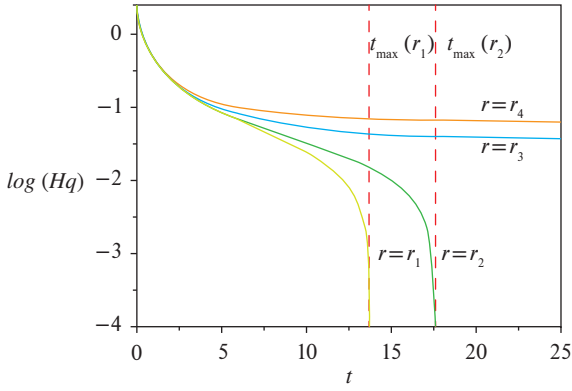


Figura 3. Evolución de $\log(\mathcal{H}_q)$ (desde (26) *vs.* tiempo cósmico t (definido en (27))) para cada capa r_1, r_2, r_3 y r_4 con condiciones de valores iniciales dadas por (42) y $w = -1.0$, $\alpha = 0.1$. Mientras que $\mathcal{H}_q$ para las capas interiores r_1, r_2 no es nula, $\log(\mathcal{H}_q)$ es asintóticamente para $-\infty$. Para las capas exteriores r_3 y r_4, $\mathcal{H}_q$ es una función continua, también lo es $\log(\mathcal{H}_q)$ [elaboración propia].

con base en los límites observacionales obtenidos para este acoplamiento en la cosmología FLRW [2, 3, 59, 61]. Por otro lado, la proyección no homogénea debe resolverse para un conjunto de condiciones de valores iniciales con el fin de evitar la singularidad del cruce de capas (instante para el cual $\Gamma = 0$), ya que Γ se define por (38) y una divergencia en cualquiera de las funciones $\delta^{(B)}$, $\delta^{(m)}$, $\delta^{(e)}$, $\delta^{(\mathcal{H})}$ implicaría una singularidad de cruce de capas.

Finalmente, para ilustrar cómo resolver numéricamente la evolución de un caso concreto, damos un ejemplo de evolución para los modelos LTB para un conjunto dado de perfiles de valores iniciales (42), con una partición de capas para la coordenada r y parámetros libres ($w = -1$ y $\alpha = 0.1$). En este ejemplo, dos capas internas (r_1 y r_2) tienen funciones $\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$, $\hat{\Omega}_e$ que evolucionan hasta el infinito en un tiempo finito, mientras que el resto de las capas evolucionan hacia el atractor futuro (figura 1). Como no hay cruce de capas durante la evolución (figura 2), podemos concluir que la divergencia en $\hat{\Omega}_b$, $\hat{\Omega}_m$, $\hat{\Omega}_e$ para las capas internas está relacionada con un instante para el cual $\mathcal{H}_q = 0$ y, por lo tanto, un escenario de colapso. Es posible caracterizar el colapso calculando el instante de tiempo $< t_{\max} >$ (figura 3), que puede interpretarse como el equivalente al tiempo de respuesta de otros modelos de colapso en la literatura. Aunque este resultado no puede generalizarse, la metodología utilizada en el ejemplo numérico representa una solución relativista exacta que puede utilizarse caso por caso.

6. Referencias

[1] P. A. R. Ade, *et al.*, arXiv:1303.5076v1 2013.
[2] Olivares G Atrio-Barandela F y Pavón D. *Phys. Rev.,* D 71, 063523, 2005.
[3] Olivares G Atrio-Barandela F y Pavón D. *Phys. Rev.,* D 74, 043521, 2006.
[4] Ziaeepour, H. Cosmic equation of state, quintessence y decaying dark matter, arXiv:astro-/0002400, 2000. M. Sami y T. Padmanabhan. *Phys. Rev.*, D 67, 083509, 2003. D. Comelli, M. Pietroni y A. Riotto. *Phys. Lett.*, B 571, 115, 2003. L. P. Chimento, A. S. Jakubi, D. Pavon y W. Zimdahl. *Phys. Rev.*, D 67, 083513, 2003. L. Amendola y C. Quercellini. *Phys. Rev.*, D 68, 023514, 2003. M. B. Hoffman. arXiv:astro-ph/0307350. H. Ziaeepour, M. Axenides y K. Dimopoulos. *JCAP*, 0407, 010, 2004. U. Fran-

ca y R. Rosenfeld. *Phys. Rev.*, D 69, 063517, 2004. A. V. Maccio *et al. Phys. Rev.*, D 69, 123516, 2004. G. Huey y B. D. Wyelt. arXiv:astro-ph/0407196. M. Nishiyama, M. Morita y M. Morikawa. arXiv:astro-ph/0403571. X. Zhang. *Mod. Phys. Lett.*, A 20, 2575, 2005. T. Koivisto. *Phys. Rev.*, D 72, 043516, 2005. S. Lee, G. C. Liu y K. W. Ng, *Phys. Rev.*, D 73, 083516, 2006. H. Wei y R. G. Cai. arXiv:astro-ph/0603052, 2006. A. Zanzi. arXiv:hep- ph/0603026, 2006. P. Brax y J Martin. arXiv:hep-th/0605228, 2006. J. L. P. Karthauser y P. M. Saffin. arXiv:hep-th/0604046, 2006. W. Fang, H. Q. Lu, Z. G. Huang. arXiv:hep-th/0606032, 2006. S. Nojiri y S. D. Odintsov. arXiv:hep-th/0606025, 2006.

[5] Chevallier, M. y Polarski, D. Int. *J. Mod. Phys.* D 10, 213, 2001.

[6] Barboza Jr., E. M. y Alcaniz, J. S. *Phys. Lett.* B 666, 415, 2008.

[7] Lemaître, G. *Gen. Relativ. Gravit.,* 29, 641 (English translation with historical comments), 1997. Tolman, R. C. *Gen. Relativ. Gravit.,* 29, 935 (Reprint with historical comments), 1997. Bondi, H. *Gen. Relativ. Gravit.,* 31, 1783 (Reprinted with historical introduction), 1999.

[8] Krasiński, A. *Inhomogeneous Cosmological Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[9] Plebanski, J. y Krasiński, A. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[10] Bolejko, K.; Krasiński, A.; Hellaby, C. y Célérier, M. N. *Structures in the Universe by exact methods: formation, evolution, interactions.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[11] Bolejko, K.; Célérier, M. N. y Krasiński, A. *Class. Quant. Grav.,* 28**,** 164002, 2011.

[12] Sussman, R. A. *Gen. Rel. Grav.,* 42, 2813-2864 (*Preprint* arXiv:1002.0173 [gr-qc]), 2010.

[13] Sussman, R. A. *Class. Quant. Grav.,* 27, 175001 (*Preprint* arXiv:1005.0717 [gr-qc]), 2010.

[14] [14] Sussman, R. A. *Class. and Quantum Grav.*, 30, 065015, 2013.

[15] Sussman, R. A. *Class. and Quantum Grav.*, 30, 065016, 2013.

[16] Sussman, R. A. *Class. Quantum Grav.,* 25, 015012, 2008.

[17] Sussman, R. A. *Class Quantum Grav.,* 30, 235001, 2013.

[18] Sussman, R. A. y Izquierdo, G. *Class. and Quantum Grav.*, 28, 045006, 2011.

[19] Sussman, R. A.; Hidalgo, J. C.; Dunsby, P. K. S. y German, G. *Physical Review*, D91, 063512, 2015.

[20] Sussman, R. A.; Quirós, I. y González Osmel, M. *Gen. Rel. Gravit.,* 37, 2117, 2005.

[21] Sussman, R. A. *AIP Conf. Proc.,* 1083, 228, 2008.

[22] Sussman, R. A. *Phys Rev,* D 79, 025009, 2009.

[23] Izquierdo, G. R.; Blanquet Jaramillo, C. y Sussman, R. A. *European Physical Journal*, C 78(3), 2017.

[24] Izquierdo, G. R.; Blanquet Jaramillo, Roberto C. y Sussman, R. A. *General Relativity and Gravitation*, 50(1), 2017.

[25] Sussman, R. A. *PR,* D 79, 025009 (Preprint arXiv:0801.3324), 2009.

[26] Planck Collaboration. *I Astron. Astrophys,* 571(1), 2014.

[27] Spergel, D. N. *et al*. [WMAP Collaboration], Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology, arXiv:astro-ph/0603449, 2007.

[28] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, Inc., 1972.

[29] Kolb, E. W. y Turner, M. *The Early Universe*, Addison-Wesley, 1990.

[30] Perlmutter, S. *et al.* Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys*, 517, 565, 1999.

[31] Weinberg, S. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61(1), 1989.

[32] Copeland, E. J.; Sami, M.; Tsujikawa, S. *Int. J. Mod. Phys.,* D 15, 1753-1936, 2006, (arXiv:hep-th/0603057). Sahni, V. Lect. *Notes Phys.,* 653, 141-180 (LANL preprint astro-ph/0403324v3), 2004.

[33] Linder, E. V. *Phys. Rev. Lett.*, 90, 091301, 2003.

[34] Linder, E. V. The dynamics of quintessence, The quintessence of dynamics. *Gen. Rel. Grav*., *40*, 329-356, 2008.

[35] Caldwell, R. R. *Phys. Lett.*, B 545, 23-29, 2002.

[36] Carroll, S. M.; Hoffman, M. y Trodden, M. *Phys. Rev.*, D 68, 023509, 2003.

[37] Cline, J. M.; Jeon, S. y Moore, G. D. The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts. *Phys. Rev.*, D 70, 043543, 2004.
[38] Izquierdo, G. y Pavon, D. Phantom and non-phantom dark energy and the generalized second law, arXiv:astro-ph/0505601, 2005.
[39] Nojiri, S. y Odintsov, S. D. *Phys. Lett.*, B 562, 147, 2003.
[40] Gonzalez Diaz, P. F. You need not be afraid of phantom energy. *Phys. Rev.*, D 68, 021303, 2003.
[41] Gonzalez Diaz, P. F. y Siguenza, P. F. Phantom thermodynamics. *Nucl. Phys.* B 697, 363, 2004.
[42] Bouhmadi Lopez, M. y Jimenez Madrid, J. A. Escaping the Big Rip? *JCAP*, 0505, 005, 2005.
[43] Dabrowski, M. P.; Stachowiak, T. y Szydlowski, M. Phantom cosmologies. *Phys. Rev.* D 68, 103519, 2003.
[44] Dabrowski, M. P. y Stachowiak, T., arXiv:hep-th/0411199, 2004.
[45] Hao, J. G. y X. Z. Li. Phantom cosmic doomsday: a tale of two attractors. *Phys. Rev.* D 70, 043529, 2004.
[46] Chimento, L. P. y Lazkoz, R. On the link between phantom and standard cosmologies. *Phys. Rev. Lett.* 91, 211301, 2003.
[47] Chimento, L. P. Interacting fluids generating identical, dual and phantom cosmologies, arXiv:gr-qc/0503049, 2005.
[48] Chimento, L. P. y Pavon, D. Dual interacting cosmologies and the coincidence problem, arXiv:-gr-qc/0505096, 2006.
[49] Perivolaropoulos, L. *Phys. Rev.* D 71, 063503, 2005.
[50] Tsujikawa, S. *Class. Quant. Grav.*, 20, 1991, 2003.
[51] Onemli, V. K. y Woodard, R. P. Super-acceleration from massless, R minimally coupled phi**4. *Class. Quant. Grav.*, 19, 4607, arXiv:gr-qc/0406098, 2002.
[52] Feinstein, A. y Jhingan, S. Ghosts in a mirror. *Mod. Phys. Lett.*, A 19, 457, 2004.
[53] Stefancic, H. Generalized phantom energy. *Phys. Lett.*, B 586, 5, 2004.
[54] Sola, J. y Stefancic, H. *Phys. Lett.* B 624, 147, 2005.
[55] Valiviita, J.; Majerotto, E. y Maartens, R. *JCAP,* 0807, 020, 2008.
[56] Gavela, M. B.; Hernández, D.; López Honórez, L.; Mena, O. y Rigolin, S. *JCAP,* 0907, 034, 2009.
[57] Salvatelli, V.; Marchini, A; López Honórez, L. y Mena, O. *Phys. Rev.*, D 88, 023531, 2013.
[58] García Zúñiga, R. C. e Izquierdo, G. *Mod. Phys. Lett.*, A 29(33), 1450175, 2014.
[59] Wang, B.; Atrio-Barandela, F.; Abdalla, E. y Pavón, D. *Reports Progress on Physics,* 79, 096901, 2016.
[60] Izquierdo, G. y Pavón, D. *Physics Letters*, B 688, 115, 2010.
[61] Olivares, G.; Atrio-Barandela, F. y Pavón, D. *Phys. Rev.,* D 77, 063513, 2008.
[62] Sussman, R. A.; Hidalgo, J. C.; Dunsby, P. K. S. y Germán, G. *Physical Review*, D 91, 063512, 2015.
[63] Padmanabhan, T. *Structure formation in the universe*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
[64] Gunn, J. E. y Gott, III. *J. R. ApJ*, 176, 1, 1972.
[65] Mo, H.; van den Bosch, F. C. y White, S. *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

CAPÍTULO 9

ONDAS GRAVITACIONALES PRIMORDIALES EN MODELOS DE ENERGÍA OSCURA ACOPLADA[1]

Germán Izquierdo[2], Gildardo Alonzo[2], Jaime Besprosvany[3]

1. Introducción

La cosmología física describe el universo observable a partir de diferentes datos observacionales existentes, de los cuales los más relevantes son las mediciones del corrimiento al rojo de la luz de supernovas tipo Ia, las observaciones de las anisotropías del fondo cósmico de microondas (CMB, *cosmic microwave background*) y los catálogos de abundancias de clústeres galácticos. El modelo de universo favorecido por las observaciones es el ΛCDM: un universo plano, homogéneo e isótropo que contiene materia bariónica ordinaria, materia oscura fría (CDM, *cold dark matter*) y una constante cosmológica, de modo que las dos últimas no se observan directamente (son oscuras) y sólo sabemos de su existencia a través de efectos gravitacionales. La densidad de energía-materia según las observaciones se divide de modo que la materia bariónica es un 5% del total, la CDM es un 27% y la constante cosmológica es el 68%. Las densidades de energía de las dos fuentes oscuras son del mismo orden de magnitud en la actualidad, no obstante, sus evoluciones en el tiempo son muy diferentes. El modelo ΛCDM adolece del problema de la coincidencia. Recientemente se ha planteado un segundo problema: el problema de la constante de Hubble [1]. Dicho problema aparece cuando se comparan las mediciones locales de la constante de expansión de Hubble (73.04 ± 1.04km/(Mpsc s)) con el valor obtenido a través de los datos de anisotropías de CMB (67.27 ± 0.60km/(Mpsc s)), ambos valores difieren en 5σ. Los modelos

[1] Los autores quieren agradecer el apoyo de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, de la Universidad Nacional Autónoma de México, a través del Proyecto IN117020.

[2] Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, Instituto Literario núm. 100 Ote., col. Centro, C.P. 50000, Toluca, Estado de México, México. Enlace de correspondencia: german.izquierdo@gmail.com

[3] Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, Ciudad de México, C.P. 01000, México.

de energía oscura acoplada (CDE, *coupled dark energy*) se presentan como alternativa al modelo ΛCDM, ya que permiten resolver (o aliviar) los problemas de este [1]. En los modelos CDE la constante cosmológica es reemplazada por una energía oscura dinámica que presenta un intercambio de energía con la CDM.

Las ondas gravitacionales primordiales (PGW, *primordial gravitational waves*) pueden proporcionarnos nuevos datos observacionales del universo, ya que su evolución depende de la expansión de este y, en particular, de la época de expansión donde la energía oscura está presente [2]. Si bien aún no existe la tecnología para detectar directamente estas ondas, esperamos que en un futuro muy cercano se dé una detección indirecta a través de la polarización tipo B del CMB. Con las mediciones del experimento PLANK actuales podemos limitar el valor de la fracción de energía por unidad de frecuencia de las PGW de muy baja frecuencia. En este trabajo vamos a utilizar este límite observacional para obtener información de los parámetros libres de un modelo concreto de CDE: el modelo de gas de Bose-Einstein con interacción acoplado (IBEG, *interacting Bose-Einstein gas*).

A lo largo del trabajo, utilizamos unidades tales que $c = \hbar = k_B = 1$, usamos la convención de subíndce 0 para designar el valor de las cantidades observables en el instante actual y elegimos el factor de escala del universo de modo que $a_0 = 1$.

2. Metodología empleada

El universo plano homogéneo, isótropo y en expansión queda descrito por la métrica Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2\left[dr^2 + r^2 d\Omega^2\right] = a(\eta)^2\left[-d\eta^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2\right], \tag{1}$$

donde t es el tiempo cósmico, r es la coordenada de espacio radio, Ω es el ángulo sólido, $a(t)$ es una función creciente del tiempo (factor de escala) y η es el tiempo conforme definido como $a(\eta)\, d\eta = dt$. Las ecuaciones de la gravitación de Einstein aplicadas a dicha métrica se reducen a:

$$H^2 = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{2}$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \tag{3}$$

donde H es el factor de expansión de Hubble, ρ y p son, respectivamente, densidad de energía y presión del fluido contenido en dicho universo. Las observaciones existentes sugieren que la evolución del universo sigue una serie de fases de expansión (historia térmica):

- Inflación: el universo se expande rápidamente desde un estado inicial muy denso (*Big Bang*) gobernado por un campo escalar (inflatón). Hay diferentes modelos para describir la inflación, pero el más aceptado es el modelo *slow-roll*, donde el factor de escala sigue una ley exponencial (universo De Sitter) $a \sim e^{H_1 t}$ y el factor de Hubble es constante $H = H_1$. Dicha época acaba en un proceso de recalentamiento donde el inflatón cede su energía a la radiación.
- Era de la radiación: el universo contiene un fluido perfecto de radiación (formado por fotones y partículas masivas muy relativistas) con presión de la forma $p = 1/3\rho$ y el factor de escala evoluciona como $a \sim t^{1/2}$. Durante esta época se da la síntesis de núcleos atómicos ligeros (nucleosíntesis).

- Era de la materia: debido a la propia expansión del universo, los fotones y partículas masivas se enfrían y dejan de interactuar entre ellas. Los fotones se desacoplan y siguen su evolución formando el fondo de radiación cósmica de microondas (CMB), con una densidad de energía mucho menor que la de la materia bariónica y la CDM presentes. Dado que la presión de estas dos fuentes es nula, la expansión sigue un ritmo tal que $a \sim t^{2/3}$. Los electrones se combinan con los núcleos para formar átomos neutros que forman nubes de gases frías. Se dan las condiciones para los colapsos gravitatorios de las sobredensidades de dichos gases, formando estructuras astrofísicas a diferentes escalas de longitud (clústeres de galaxias, galaxias, etc.).
- Era de la energía oscura: durante la última etapa de expansión, el universo experimenta una expansión acelerada gobernada por la mezcla de la materia bariónica, la CDM y la energía oscura (constante cosmológica, CDE, etc.). Tanto el factor de escala como el factor de Hubble en esta etapa siguen unas evoluciones muy dependientes del modelo considerado, mismas que se deben obtener a partir de las ecuaciones de evolución.

Las PGW son perturbaciones tensoriales a orden lineal de la métrica de fondo FLRW, generadas en todo el universo a gran escala (es decir, no son generadas por un evento local, como sí lo son las ondas gravitacionales de los colapsos de agujeros negros u otros eventos astrofísicos), propagándose a la velocidad de la luz en forma de ondas. Si consideramos dichas perturbaciones en el espacio de Fourier (en el gauge transverso y sin traza), estas se definen como [3]:

$$h_{ij}^{(\mathbf{k})}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\mu(\eta)}{a(\eta)} G_{ij}(\mathbf{k}, \mathbf{x}), \tag{4}$$

donde $\mathbf{k}$ representa el vector de onda comóvil, $\mathbf{x}$ representa las coordenadas de tipo espacio de la métrica FLRW (de fondo) y los índices latinos se refieren a las coordenadas espaciales. Las ecuaciones de evolución a primer orden perturbativo son:

$$G_{i;m}^{j;m} = -k^2 G_i^j, \qquad G_{i;\,j}^{j} = G_i^i = 0, \tag{5}$$

$$\mu''(\eta) + \left[k^2 - \frac{a''(\eta)}{a(\eta)} \right] \mu(\eta) = 0, \tag{6}$$

donde $k = |\mathbf{k}|$ es el número de onda comóvil de la PGW (que hoy día coincide con su frecuencia) y la ecuación (5) tiene como solución combinaciones lineales de armónicos esféricos que contienen las dos polarizaciones conocidas de la onda. La ecuación para la amplitud de la PGW (ecuación (6)) es una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo con el término $\frac{a''(\eta)}{a(\eta)}$ jugando el papel de potencial. La evolución de la amplitud de la PGW depende de la historia del universo a través de dicho término.

Asumiendo que las etapas expansivas de inflación y radiación son comunes, la evolución de la amplitud μ depende del término potencial:

$$\frac{a''(a)}{a} = 2a^2 H^2(a) + a^3 H(a) \frac{dH(a)}{da}, \tag{7}$$

por medio del factor de Hubble $H(a)$ y su derivada $\frac{dH(a)}{da}$, que tomarán diferentes formas en las eras de materia y de energía oscura según el modelo de CDE considerado. Es conveniente reali-

zar el cambio de variable $ad\eta = dt = da/(Ha)$ para resolver la ecuación (6) en términos del factor de escala:

$$a^4H^2(a)\frac{d^2\mu(a)}{da^2} + \left[2a^3H^2(a) + a^4H(a)\frac{dH(a)}{da}\right]\frac{d\mu(a)}{da} + \left[k^2 - 2a^2H^2(a) + a^3H(a)\frac{dH(a)}{da}\right]\mu(a) = 0. \quad (8)$$

con las condiciones iniciales correctas en el instante en que acaba la época de radiación (instante de desacoplo radiación-materia, donde $a = 0.0001$) para cada número de onda k.

En este trabajo vamos a considerar el modelo de IBEG [2], para el cual el factor de Hubble es:

$$H = H_0\sqrt{a^{5(x-1)} + (\Omega_{b0} + \Omega_{m0})(a^{-3} - a^{5(x-1)}) + \frac{\Omega_{i0}}{1-2x}(a^{6(x-1)} - a^{5(x-1)})}, \quad (9)$$

donde H_0 es el factor de expansión actual, Ω_{b0} es la fracción de densidad de energía de la materia bariónica, Ω_{m0} es la fracción de energía relacionada con la masa de las partículas del IBEG, $\Omega_{i0} < 0$ es la fracción de energía relacionada con la autointeracción de las partículas del IBEG y x es un parámetro que modela el proceso de creación de partículas/acoplamiento de IBEG (a un ritmo tal que el número de partículas aumente como $N_{IBEG} \propto V^x$ donde V es el volumen considerado). Los datos observacionales existentes nos proporcionan los mejores ajustes y la correspondiente región 1 σm de los parámetros libres del modelo IBEG como [4]: $H_0 = 70 \pm 2$ km/(Mpsc s), $\Omega_{m0} = 0.52 \pm 0.08$, $\Omega_{i0} = -3.60 \pm 12.38$, $\Omega_{b0}H_0^2 = 0.022 \pm 0.001$ y $x = 0.97 \pm 0.01$. El potencial (7) es proporcional a H_0^2 y no varía de manera significativa al tomar diferentes valores de los parámetros Ω_{b0}, Ω_{i0} y x en la región considerada. Su dependencia en el parámetro Ω_{m0} se muestra en la figura 1. Como consecuencia de la dependencia del potencial, la amplitud de las PGW va a depender de los parámetros H_0 (a través de una ley de escala del número de ondas) y de Ω_{m0}, mientras va a permanecer prácticamente idéntico ante variaciones del resto de parámetros en los intervalos considerados [2].

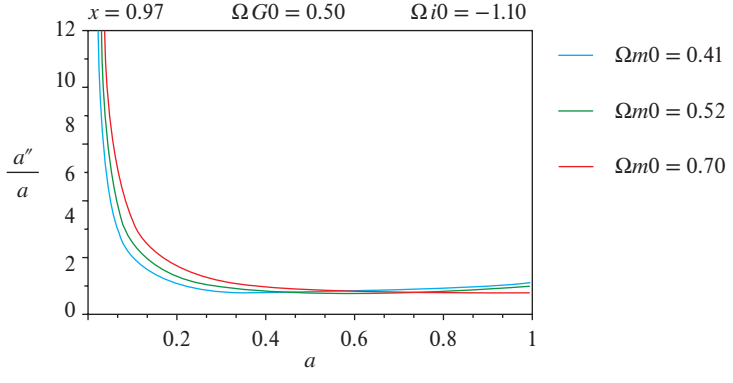


Figura 1. Potencial a''/a *vs.* a para diferentes valores del parámetro Ω_{m0} desde el instante de desacoplo ($a = 0.0001$) hasta el instante presente [elaboración propia].

3. Resultados

Resolvemos numéricamente la ecuación (8) para diferentes valores de Ω_{m0}, fijando el resto de parámetros al valor de mejor ajuste de los datos observacionales descritos anteriormente para diferentes valores del número de onda. Con dicha solución numérica es posible calcular la amplitud de μ en el último periodo de oscilación como:

$$|\mu_{rms}|^2 = \frac{2}{(1-a_p)} \int_{a_p}^{1} \mu(a)^2 da, \tag{10}$$

donde a_p se calcula a partir de $k\eta(a_p) = 2\pi$ y representa el valor del factor de escala al iniciar el último periodo de oscilación. Podemos calcular el espectro de potencias de las ondas gravitacionales para cada elección del parámetro Ω_{m0} como:

$$P(k) = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^3} k^3 |\mu_{rms}|^2. \tag{11}$$

En este punto, necesitamos dar un valor a los parámetros de inflación: elegimos $H_1 = 10^{35}$ s^{-1} y la amplitud inicial de las PGW (generadas a partir de las fluctuaciones cuánticas del campo inflatón) siguiendo un espectro gaussiano (amplitud inicial proporcional a k^2). El espectro obtenido a frecuencias bajas para diferentes valores del parámetro Ω_{m0} puede verse en el panel de la izquierda de la figura 2. Dado que las PGW de baja frecuencia presentes en la superficie de última interacción (*last scattering surface*) del CMB inducen una polarización tipo B en fondo de microondas de manera específica [5], la detección de dicha polarización demostrará la existencia de estas, y proporcionará información única de la inflación del universo temprano y de la época de expansión actual. Con los datos existentes de las anisotropías de CMB del experimento PLANK, podemos limitar la fracción de energía de las PGW por unidad de frecuencia en el instante presente definida como:

$$\Omega_{g\omega}(k) = \frac{4}{3\pi H_0^2} \frac{H_1}{M_{pl}^2} |(\mu/a)'|^2, \tag{12}$$

donde M_{pl} es la masa de Planck, a frecuencias del orden de $k \sim 10^{-17}$, de manera que $\Omega_{gw} h^2 < 10^{-15}$ donde $h = H_0/(100 \text{ km/(Mpc s)})$ [5].

A partir del mismo cálculo numérico utilizado anteriormente, calculamos $(\mu/a)'$ y $\Omega_{gw}(k)$ en varios valores de las frecuencias en el rango de $10^{-17} s^{-1}$ en función del parámetro Ω_{m0}. El resultado se muestra en el panel de la derecha en la figura 2. Para valores grandes de Ω_{m0} obtenemos valores de $\Omega_{gw}(k)$ cercanos al límite observacional. Si consideramos un valor del parámetro de inflación H_1 mayor al del cálculo anterior obtenemos valores de $\Omega_{gw}(k)$ descartados por el límite observacional para valores grandes de Ω_{m0}. De esta forma podemos obtener información del modelo IBEG a través de las PGW.

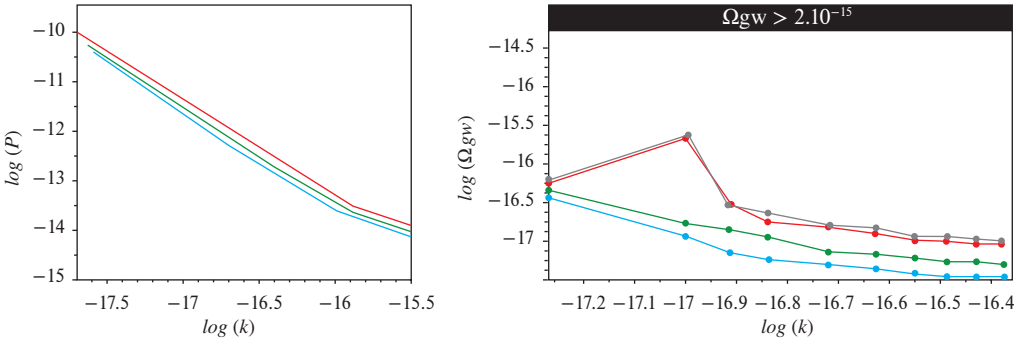


Figura 2. Panel de la izquierda: espectro de potencias para diferentes valores del parámetro Ω_{m0} y el mejor ajuste del resto de parámetros. La línea negra representa $\Omega_{m0} = 0.41$, la verde $\Omega_{m0} = 0.52$ y la roja $\Omega_{m0} = 0.70$. P y el número de onda k tienen unidades de erg s/cm^3 y de s^{-1}, respectivamente. Panel de la derecha: fracción de energía por unidad de frecuencia de las PGW con los mismos valores de parámetros descritos en el panel de la izquierda y la línea gris $\Omega_{m0} = 0.75$ [elaboración propia].

4. Conclusiones

En este trabajo hemos demostrado cómo el modelo de aceleración tardía considerado tiene impacto en la amplitud, el espectro de potencias P y en la fracción de energía por unidad de frecuencia Ω_{gw} a una frecuencia dada k de las PGW. La dependencia del factor de Hubble en el factor de escala de la etapa de expansión tardía es clave a la hora de resolver la ecuación de evolución de las PGW. Dicha ecuación se puede resolver numéricamente para un número de onda dado una vez se fijan los parámetros del modelo a tener en cuenta. En particular, en el modelo IBEG observamos que diferentes elecciones del parámetro Ω_{m0} llevan a diferentes valores de la amplitud (y en consecuencia de P y Ω_{gw}), mientras que el resto de parámetros libres no provocan variaciones considerables.

Además, dado el límite observacional actual de $\Omega_{gw}(k)$ a frecuencias $k \sim 10^{-17}$, podemos concluir que los valores más grandes de Ω_{m0} pueden ser descartados, ya que predicen un valor por encima de dicho límite (en función del modelo de inflación considerado). Dado que existe un gran interés en la detección de la polarización B de la anisotropía del CMB, esperamos que en un futuro próximo se obtengan valores observacionales de $\Omega_{gw}(k)$ a frecuencias bajas, que podrán ser utilizados para descartar y limitar los modelos de inflación y de expansión tardía mediante procedimientos numéricos similares a los descritos en este trabajo.

5. Referencias

[1] Di Valentino, E.; Melchiorri, A. y Mena, O. *Phys. Rev. D.*, 96(4), 2017.
[2] Izquierdo, G.; Alonzo, G.; Jaime Besprosvany, B. *General Relativity and Gravitation*, 54(14), 2022.
[3] Grishchuk, L. P. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 67(825), 1975 [*Sov. Phys. JETP*, 40(409), 1975].
[4] Lucatero Villaseñor, H. E.; Izquierdo, G. y Besprosvany, J. *General Relativity and Gravitation*, 50(151), 2018.
[5] Guzzetti, M. C.; Bartolo, N.; Liguori, M. y Matarrese, S. *Rivista del Nuovo Cimento*, 39(9), 399-495, 2016.

EPÍLOGO

El panorama actual de la física sería de difícil dilucidación de no ser por los más recientes estudios realizados en torno a los fenómenos no lineales. En la presente obra, especialistas en el área nos ofrecen una perspectiva moderna de los problemas recurrentes de la física no lineal, así como su solución, presentados de manera detallada y concisa.

Como punto de partida se describió uno de los métodos más recientes para resolver ecuaciones diferenciales no lineales de manera exacta. Desde que se propuso inicialmente, el método F se ha ido generalizado, aplicándose en numerosas ocasiones para estudiar diversos fenómenos físicos. Los métodos asintóticos han probado ser una excelente herramienta para resolver un gran número de problemas dentro de la frontera de la física lineal. Podríamos mencionar como otros ejemplos de métodos asintóticos el método variacional iterativo o el método de He que, al igual que el método F generalizado, ha sido aplicado con éxito. Siguiendo con la misma línea de implementación de nuevos métodos, se aplica la formulación de la mecánica cuántica supersimétrica para estudiar el comportamiento de haces de luz en fibras ópticas, un tema recurrente dentro de la física no lineal. La mecánica cuántica supersimétrica ha sido ampliamente estudiada desde sus inicios y, actualmente, es común aplicar sus formulaciones en problemas actuales como la multicapa de grafeno y la superconductividad. Uno de los modelos más importantes dentro de los fenómenos no lineales es la ecuación de Schrödinger con no linealidad cúbica-quinta, la cual aparece de manera repetida al estudiar fenómenos biológicos, químicos, físicos, entre otros. La versatilidad de tal modelo ha hecho que está ecuación sea de las más estudiadas y referenciadas. Es por eso que se realiza una excelente presentación de tal modelo y sus soluciones, a través de una brillante exposición del surgimiento del concepto de *solitón* y la importancia de la inestabilidad modulacional. También se presenta de manera detallada uno de los temas modernos más inquietantes: los solitones no autónomos. La dinámica de fluidos es una de las ramas de la física que ha tenido un fascinante desarrollo histórico, y es de vital importancia en la actualidad; en el libro se presenta y resuelve uno de los problemas claves de esta área. Primero, los autores hacen una detallada revisión biográfica del problema, así como de los avatares que se presentaron históricamente para resolverlo. Las soluciones; se van construyendo al descartar hipótesis antiguas y contrastándolas con nuevos enfoques; cabe destacar la minuciosa y ardua labor de investigación histórica de los autores. Si bien en este libro se toma como punto de partida la descripción de un método semianalítico, y se nos sugiere la importancia de los métodos híbridos, después se nos hace una detallada exposición de la dinámica molecular al estudiar la fase líquida y la interfase líquido-vapor, lo anterior con un término de corrección introducido para ahorrar tiempo de cómputo en la parte de Fourier; el método está inspirado en el bien conocido método de Wolf.

El descubrimiento de la radioactividad y los materiales radioactivos fue uno de los mayores hitos en la ciencia contemporánea, es por eso que en la parte central de este trabajo se exponen temas centrales de la física nuclear. Primero se presentan y discuten los resultados del efecto que el halo neutrónico de ^{6}He tiene sobre el potencial de polarización, posteriormente se hace una excelsa presentación histórica de la fusión nuclear y su aplicación en la tecnología soviética y mundial, desde la cámara toroidal con bobinas magnéticas —con hidrógeno en su interior y un dispositivo eléctrico que ioniza el hidrógeno hasta convertirlo en plasma— hasta los últimos avances, y se discuten los aspectos teóricos de este fascinante tema. Finalmente el libro aborda

tópicos de la cosmología y la gravitación clásica; está de más decir que las métricas con las cuales se trabaja han sido ampliamente aplicadas en los más diversos estudios para comprender la naturaleza del universo y su origen. Actualmente se han encontrado discrepancias significativas entre la teoría y la práctica, como se nos menciona en el séptimo capítulo. Lo cual nos lleva a reformular las teorías que se aceptaban como teorías clásicas. En el marco de la teoría de perturbaciones se estudia la evolución del universo y las ondas gravitacionales. Estos temas han tenido un auge reciente debido a los últimos avances de la tecnología y la detección de las ondas gravitacionales, predichas por A. Einstein desde el origen de la relatividad general, pero recientemente detectadas. Cabe resaltar que los modelos que describen estas ondas gravitacionales son completamente no lineales. Esta última observación nos permite concluir el presente trabajo, resaltando el hecho de que los grandes enigmas actuales de la física se pueden describir con modelos no lineales, lo cual nos permite regresar a la afirmación inicial de este epílogo.

FICHAS CURRICULARES AUTORES

José María Mondragón Alvarez es egresado de la Facultad de Ciencias por la Universidad Autónoma del Estado de México. Participante en el LXV Congreso Nacional de Física; en la XXVIII Escuela de Verano en Física en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM); en el II Simposio Nacional "Retos en Física Nuclear y Procesos No Lineales REFINL 2021" y en la 5ª Escuela de Superconductividad impartida por el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

Jorge Mauricio Paulin Fuentes es Doctor en Ciencias por la Universidad Autónoma del Estado de México. Profesor adscrito a la Dirección Académica de Ciencias Básicas, Cunduacán, de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Líneas temáticas: fluidos, física no lineal y óptica.

Maximino Pérez Maldonado es Doctor en Control y Sistemas Dinámicos por el Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, Maestro por la División de Ciencias e Ingenierías de la Universidad de Guanajuato y Físico por la Universidad Autónoma del Estado de México. Divulgador científico por la OSA y el SPIE en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Profesor e investigador de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Líneas temáticas: óptica no-lineal y supersimétrica.

Haret-Codratian Rosu es Doctor en Física. Fue profesor visitante en el Centro Internacional de Física Teórica Abdus Salam en Trieste, Italia. Profesor investigador en el Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato (IFUG) en León y en IPICyT, San Luis Potosí. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Líneas temáticas: técnicas supersimétricas y sus múltiples aplicaciones.

Misael Erikson Maguiña Palma es Doctor en Ciencias por la Universidad Autónoma del Estado de México. Maestro en Administración de Negocios MBA por la Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo, Especialidad en Muestreo, con experiencia en análisis estadístico espacial, manejo de Base de datos con SQL y moldeamiento con aplicación en física no lineal. Profesor investigador en la escuela de posgrado de la Universidad Privada Norbert Wiener.

Juan Ramón Collantes Collantes es Doctor en Ciencias (PhD) con mención en Física-Matemáticas, por la Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos, Moscú, Rusia. Profesor titular, Docente-investigador del Programa de la Maestría en Ciencias Físicas de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad Tecnológica de Panamá. Líneas temáticas: la dinámica de ondas no lineales en plasmas, en procesos naturales y en la sociedad.

Rolando Alvarado Flores es Maestro y Licenciado en Física por la Universidad Autónoma de Zacatecas. Profesor investigador de la Unidad Académica Preparatoria. Líneas temáticas: la mecánica de los medios granulados, las soluciones simétricas y localizadas de ecuaciones diferenciales no lineales y aspectos teórico especulativos de la teoría del campo electromagnético.

Alberto Vélez Rodríguez es Doctor en Administración. Maestro en Ingeniería Eléctrica. Profesor investigador de la Unidad Académica de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Líneas temáticas: desarrollo y planificación sustentable y ciencias agrícolas.

Lourdes Reyes Cervantes es Doctora en Ciencias (PhD) especialidad en Física, por la Universidad Autónoma del Estado de México. Profesora de asignatura en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Línea temática: simulación de sistemas biológicos.

Gustavo Torres García es Maestro en Ciencias (MSc) especialidad en Física, por la Universidad Autónoma del Estado de México. Estudiante del programa Doctorado en Ciencias con especialidad en Física. Líneas temáticas: simulación de sistemas biológicos, simulación cuántica de sistemas complejos.

Benjamín Ibarra Tandi es Doctor en Ciencias (PhD) por la Universidad Autónoma Metropolitana Campus Iztapalapa en el área de Física Estadística. Profesor investigador en la Facultad de Ciencias de la Uni-

versidad Autónoma del Estado de México. Línea temática: la termodinámica molecular de sistemas simples y complejos.

Jorge López Lemus es Doctor de Ciencias (PhD), especialidad en Física, por la Universidad Autónoma Metropolitana. Posdoctorado en el Instituto Mexicano del Petróleo, área de Ingeniería Molecular. Posdoctorado en la Universidad Pablo de Olavide en Sevilla España, Departamento de Ciencias Ambientales. Profesor investigador en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, nivel II. Líneas temáticas: procesos irreversibles y sistemas complejos.

Elí Francisco Aguilera Reyes es Doctor en Física (PhD) por la Universidad de Notre Dame, Estados Unidos de Norteamérica, especialidad en Física Nuclear. Investigador "E" en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares y miembro del Sistema Nacional de Investigadores, nivel III. Líneas temáticas: reacciones nucleares con proyectiles estables, con proyectiles débilmente ligados o con proyectiles radioactivos, incluyendo reacciones nucleares de interés astrofísico.

Juan Carlos Morales Rivera es Doctor en Ciencias, especialidad en Física, por la Universidad Autónoma del Estado de México. Posdoctorado en el área de Reacciones y Estructura Nucleares en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Profesor en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Líneas temáticas: la espectroscopía gamma y reacciones nucleares.

Fatemeh Torabi es Doctora con especialidad en Física Nuclear (PhD) por la Universidad de Mazandaran, Irán. Profesora temporal en la Universidad Islámica Azad, Irán. Actualmente realiza una estancia de posdoctorado en el Departamento de Física, Instituto Tecnológico de Aeronáutica-CTA, Brasil. Líneas temáticas: análisis de fusión y dispersión elástica, y mecanismo de ruptura en sistemas nucleares.

Amado Augusto Espinoza Garrido es Doctor en Ciencias (PhD) con mención en Física-Matemáticas, por la Universidad Rusa Amistad de los Pueblos, Moscú, Rusia. Posdoctorado en el área de fluidos en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Profesor investigador jubilado en la Unidad Académica de Ciencia y Tecnología de la Luz y la Materia de la Universidad Autónoma de Zacatecas. Línea temática: teoría clásica de campos.

David Antonio Pérez Carlos es Doctor en Física por la Universidad Autónoma de Zacatecas. Profesor investigador en la Unidad Académica en Ciencias Biológicas. Línea temática: invariancia de calibre de los potenciales gravitodinámicos en las teorías gravitatorias.

Roberto Carlos Blanquet Jaramillo es Maestro en Ciencias por la Universidad Autónoma del Estado de México. Participante en foros internacionales de teorías gravitacionales. Líneas temáticas: el proceso de formación de estructura en el universo, energía oscura y ondas gravitacionales.

Germán Izquierdo es Doctor en Física por la Universidad Autónoma de Barcelona, España. Posdoctorado en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México y por el Institut de Mathématiques de Bourgogne de la Université de Bourgogne, Francia. Actualmente, profesor investigador en la Universidad Autónoma del Estado de México. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Líneas temáticas: cosmología y gravitación, en particular, energía oscura y ondas gravitacionales primordiales.

Roberto Sussman es egresado de la Facultad de Ciencias de la UNAM y obtuvo el doctorado en la Queen Mary, University of London, Reino Unido. Investigador en el Posgrado en Ciencias Físicas de Universidad Nacional Autónoma de México. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Líneas temáticas: modelos cosmológicos inhomogéneos y soluciones exactas, y aplicaciones de cómputo simbólico y numérico en la docencia.

Gildardo Alonzo es egresado de la Facultad de Ciencias por la Universidad Autónoma del Estado de México. Participante en el LXV Congreso Nacional de Física; en la XXVIII Escuela de Verano en Física en la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM; en el II Simposio Nacional "Retos en Física Nuclear y Procesos No Lineales" REFINL 2021.

Jaime Besprosvany es Doctor por el Instituto Weizmann de Ciencia. Profesor investigador en física de partículas, cosmología y fundamentos en campos cuánticos, en la Universidad Nacional Autónoma de México. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores. Líneas temáticas: modelo extendido de espín, masa y parámetros en el modelo estándar, y modelos termodinámicos de energía oscura.

Retos de física nuclear y fenómenos no lineales
Coordinado por Tatyana Belyaeva Leonidovna, Maximo Augusto Aguero Granados y Omar Pavón Torres, es una coedición entre McGraw Hill y la Universidad Autónoma del Estado de México, a través de la Dirección de Difusión y Promoción de la Investigación y los Estudios Avanzados, adscrita a la Secretaría de Investigación y Estudios Avanzados, y se terminó de editar el 28 de abril de 2023.

Diego Arroyo Figueroa
Corrección de estilo y ortotipográfica (MHE)

Jean Paul Savage Inchaustegui
Diseño de forros (MHE)

Anahit Indra Ortiz Molina
Formación (MHE)

María de los Ángeles García Moreno
Análisis e interpretación del sistema antiplagio (UAEMEX)

Piedad Liliana Rivera Cuevas
Corrección ortotipográfica (UAEMEX)

Patricia Vega Villavicencio
Coordinación editorial (UAEMEX)

Por disposición del Reglamento de Acceso Abierto de la Universidad Autónoma del Estado de México se publica la versión PDF de este libro en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma del Estado de México.

Retos de física nuclear y fenómenos no lineales será "muy valioso no sólo para especialistas en áreas afines, sino también para estudiantes de posgrado e investigadores en física teórica y aplicada, matemáticas aplicadas y computación; para ingresar a los campos actuales de ciencia moderna de frontera".

Dr. Vladimir Serkin (SNI-III)
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Tatyana Belyaeva Leonidovna es Doctora en Ciencias; integrante del Sistema Nacional de Investigadores (SNI-III); profesora investigadora de tiempo completo en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Premio Estatal de Ciencia y Tecnología 2013. Sus líneas de investigación se enmarcan en física computacional, física matemática y física nuclear.

Maximo Augusto Aguero Granados es Doctor en Ciencias; integrante del Sistema Nacional de Investigadores (SNI-I); profesor investigador de tiempo completo en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Sus líneas de investigación abarcan física matemática, dinámica de procesos no lineales y teorías de campo.

Omar Pavón Torres es Doctor en Ciencias; integrante del Sistema Nacional de Investigadores (SNI-candidato); profesor adscrito a la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México. Sus líneas de investigación están en física matemática, física no lineal y la teoría clásica de campos.

Mc Graw Hill

978-607-15-2102-6
EAN 9 786071 521026 00
ISBN MHE

978-607-633-585-7
EAN 9 786076 335857 00
ISBN UAEMEX
Secretaría de Investigación y Estudios Avanzados

Síguenos en @mhelatam

Encuéntranos en mhelatam

YouTube Visítanos en McGraw-Hill Latam

Compra en línea
www.mheducation.com.mx