



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

PUNTOS EN EL BORDE DE  
UN CONTINUO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**MATEMÁTICO**

PRESENTA:

**Eslí Yael Rosas Moreno**

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Félix Capulín Pérez

Dr. Fernando Orozco Zitli

Toluca, México, 4 de Noviembre 2024.



# Introducción

Diferentes autores han investigado varias propiedades de conjuntos especiales dentro de un continuo, especialmente se han estudiado conjuntos que en cierta forma están en el borde de él. Por ejemplo, Grace en [4] proporciona un estudio que relaciona los puntos de aposindesis y los puntos de corte débil. Los puntos orilla fueron introducidos por L. Montejano, V. Neumann-Lara e I. Puga como un reforzamiento de la idea de un punto de no corte, así como también para el estudio de las dendritas ; R. Leonel en [8] extendió el resultado de Moore al demostrar que cada continuo no degenerado tiene al menos puntos orilla ; V. Nall en [6] explora la relación entre los puntos de centro y los puntos orilla en un dendroide; A. Illanes introduce la noción de puntos de bloque. Posteriormente, A. Illanes y P. Krupski en [6] estudian los puntos de bloque y no bloque de varios tipos de continuos. En continuos encadenables la noción de punto final se usa generalmente en otro sentido (al convencional) y se sabe que en ellos los puntos finales están estrechamente relacionados con los puntos de no bloque.

La Teoría de Continuos se ha ocupado en estudiar las propiedades de estos espacios y de clasificar los puntos dentro de ellos según sus características. La intención de este trabajo es dar una presentación básica de algunos puntos importantes en el "borde" de un continuo, así como algunas de sus propiedades. Aquí, proporcionaremos una introducción a la clasificación de puntos en el "borde" de un continuo, incluyendo ejemplos, implicaciones y teoremas importantes. Por ejemplo, se sabe que un arco es un continuo homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$  y los puntos de los extremos son puntos terminales, mientras que cualquier punto interior es un punto de corte. En un círculo, no hay puntos de corte ya que eliminar cualquier punto deja el resto del espacio conexo, ya que en cierta forma, todos los puntos en un círculo son similares. En el intervalo cerrado  $[0, 1]$  de la recta real, cada punto diferente de 0 y 1 es un punto de bloque.

Este trabajo está basado principalmente en el artículo [3].

El trabajo se encuentra distribuido de la siguiente manera: el primero trata de nociones básicas de topología y continuos; en el segundo, damos algunos resultados sobre espacios cociente, pues dentro de la teoría de continuos son muy usados para construir ejemplos; en el tercero definimos cierta clase de puntos en el "borde" de continuos, veremos que tipo de puntos implican cuales, daremos ejemplos en donde se aprecie que estos tipos de puntos son diferentes. Daremos una equivalencia entre ellos cuando el continuo es semilocalmente conexo; finalizando el capítulo con 3 caracterizaciones del intervalo usando algún tipo de puntos en el "borde"; en el capítulo

cuatro hablaremos de los conjuntos  $G_\delta$  y  $F_\sigma$  y la relación que tiene con los puntos mencionados.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Espacios Topológicos . . . . .	2
1.2. Conexidad y compacidad . . . . .	6
1.3. Continuos . . . . .	9
1.3.1. Ejemplos de Continuos. . . . .	9
1.4. Dendroides y dendritas . . . . .	13
1.5. Métrica de Hausdorff . . . . .	17
<b>2. Topología cociente</b>	<b>20</b>
<b>3. Puntos en el borde de un Continuo</b>	<b>27</b>
3.1. Comparación de los puntos en el borde . . . . .	33
3.2. Existencia de puntos en el borde . . . . .	41
3.3. Caracterizaciones del intervalo con puntos en el borde . . . . .	44
3.4. Continuos encadenables, irreducibilidad y puntos en el borde . . . . .	51
3.5. Conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$ y puntos en el borde . . . . .	54
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos que necesitamos conocer de la Teoría de Continuos y algunos resultados para el desarrollo del presente trabajo.

### 1.1. Espacios Topológicos

Sea  $X$  un conjunto. Una familia  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  es llamada una **topología** en  $X$  si satisface las siguientes propiedades:

- $\emptyset, X \in \tau$ .
- Si  $U, V \in \tau$ , entonces  $U \cap V \in \tau$ .
- Si  $\{U_\alpha \subseteq X : \alpha \in I\}$  tal que  $U_\alpha \in \tau$ , para toda  $\alpha \in I$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$ .

A la pareja  $(X, \tau)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $\tau$  una topología en  $X$  es llamada **espacio topológico**. Los elementos de  $\tau$  son llamados conjuntos **abiertos** del espacio topológico  $(X, \tau)$ . Si  $(X, \tau)$  es espacio topológico y  $A \subseteq X$ , entonces el conjunto  $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$  es una topología para  $A$  llamada la **topología relativa** con respecto a  $(X, \tau)$ . En tal caso diremos que  $(A, \tau_A)$  es un **subespacio** de  $(X, \tau)$ .

Algunos ejemplos de topologías son:

- Topología discreta  
 $\tau_D = \mathcal{P}(X), X \neq \emptyset$
- Topología indiscreta  
 $\tau_i = \{\emptyset, X\}, X \neq \emptyset$
- Topología cofinita  
 $\tau = \{A \subseteq X : A^c \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$
- Topología de Sierpinski  
 $\tau_s = \{\emptyset, X, \{1\}\}, X = \{0, 1\}$

**Definición 1.1.1.** Sea  $(X, \tau)$  es un espacio topológico.

Sea  $F \subseteq X$ . Diremos que  $F$  es **un conjunto cerrado** de  $X$ , si  $F^c \in \tau$ .

Obsérvese que si  $A$  no es abierto no significa que sea cerrado. Si  $F$  no es cerrado no significa que sea abierto.

Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ .

**Definición 1.1.2.** Si  $p \in A$  diremos que  $p$  es un **punto interior** de  $A$ . Si existe  $U \in \tau$  tal que  $p \in U \subseteq A$ . Al conjunto de puntos interiores lo denotaremos por  $\text{int}(A)$  y se llama el **interior** de  $A$ .

**Definición 1.1.3.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$  y  $p \in X$ . Diremos que  $p$  es un **punto de adherencia** de  $A$ , si para cada abierto  $U$  que contiene a  $p$  se tiene que  $U \cap A \neq \emptyset$ .

Al conjunto de puntos de adherencia se le suele llamar la **adherencia** de  $A$  o la **cerradura** de  $A$ , la cual denotaremos por  $\bar{A}$ .

**Definición 1.1.4.** Si  $p \in X$ . Diremos que  $p$  es un **punto frontera** de  $A$ . Si para todo  $U \in \tau$  tal que  $p \in U$ ,  $U \cap A \neq \emptyset$  y  $U \cap A^c \neq \emptyset$ . Al conjunto de puntos frontera lo denotaremos por  $\text{Fr}(A)$  y le llamaremos la **frontera** de  $A$ .

**Definición 1.1.5.** Un conjunto  $A$  es **denso** en un espacio topológico  $X$  si su cerradura coincide con todo el espacio  $X$ . Es decir,  $\bar{A} = X$ .

**Definición 1.1.6.** Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $V \subseteq X$  y  $x \in V$ . Diremos que  $V$  es **vecindad** de  $x$  si existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U \subseteq V$ . El conjunto  $\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X : V \text{ es vecindad de } x\}$  es llamado el **sistema de vecindades** de  $x$ .

Sea  $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}(x)$ . Diremos que  $\mathcal{V}'$  es una **base local de vecindades** de  $x$  si para cada  $V \in \mathcal{V}(x)$  existe  $V' \in \mathcal{V}'$  tal que  $V' \subseteq V$ .

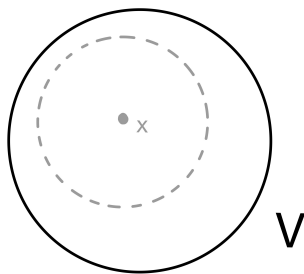


Figura 1.1:

**Definición 1.1.7.** Una función  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos se dice que es **continua** si para todo conjunto abierto  $V \subseteq Y$ ,  $f^{-1}(V) \subseteq X$  es un conjunto abierto en  $X$ .

**Definición 1.1.8.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios topológicos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es un **homeomorfismo** si cumple las siguientes condiciones:

1.  $f$  es una función inyectiva (uno a uno) y sobreyectiva (sobre).
2. La función  $f$  es continua.
3. La función inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  también es continua, es decir, para cada conjunto abierto  $U \subseteq X$ , la imagen  $(f^{-1})^{-1}(U) \subseteq Y$  es un conjunto abierto en  $Y$ .

**Definición 1.1.9.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, una función  $f : X \rightarrow Y$  se llama función **cerrada** si para cada conjunto cerrado  $C \subseteq X$ , la imagen  $f(C)$  es un conjunto cerrado en  $Y$ .

**Definición 1.1.10.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, una función  $f : X \rightarrow Y$  es **abierta** si para cualquier conjunto abierto  $U$  en  $X$ , la imagen  $f(U)$  es abierta en  $Y$ .

**Proposición 1.1.11.** Sea  $\varphi : X \rightarrow Y$  una función continua, biyectiva y abierta (cerrada) entre espacios topológicos. Entonces,  $\varphi$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Para que  $\varphi$  sea homeomorfismo hay que probar que su función inversa  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$  es continua.

Sea  $F \subseteq X$  un cerrado. Tenemos que demostrar que  $(\varphi^{-1})(F)$  es cerrado en  $Y$

Como  $\varphi$  es cerrada, entonces  $\varphi(F) = E$  es un conjunto cerrado y dado que  $(\varphi^{-1})^{-1}(F) = \varphi(F)$ , se tiene que  $\varphi^{-1}$  es continua.

La prueba se hace semejante si suponemos que  $\varphi$  es abierta. □

**Definición 1.1.12.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es un espacio topológico  $T_1$ , si para cualesquiera dos puntos  $x, y \in X$ , existen dos abiertos  $U, V$  de  $X$  tal que  $x \in U \setminus V$  y  $y \in V \setminus U$ . Véase la Figura 1.2.

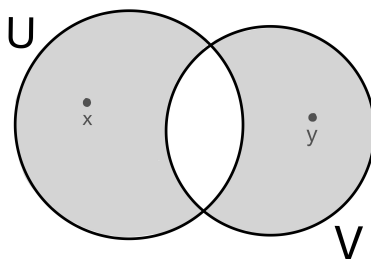


Figura 1.2:

**Definición 1.1.13.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es un espacio topológico  $T_2$  o de **Hausdorff** si para cualesquiera dos puntos distintos  $x, y \in X$ , existen dos abiertos ajenos  $U$  y  $V$  de  $X$ , tal que  $x \in U$  y  $y \in V$ . Véase la Figura 1.3.

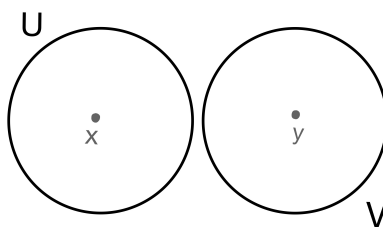


Figura 1.3:

**Definición 1.1.14.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Un espacio topológico  $X$  es un **espacio regular** o  $T_3$  si satisface las siguientes condiciones:

1.  $X$  es un espacio  $T_1$ ;
2. Para cualquier  $F \subseteq X$  cerrado y  $x \in X \setminus F$  existen conjuntos abiertos ajenos  $U$  y  $V$  tales que  $x \in U$  y  $F \subseteq V$ . Véase la Figura 1.4

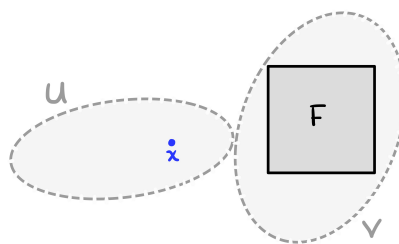


Figura 1.4:

Como en los espacios  $T_1$  todos los conjuntos unipuntuales son cerrados, todo espacio  $T_3$  es un espacio  $T_2$ .

**Definición 1.1.15.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Un espacio topológico  $X$  es **normal** o  $T_4$  si satisface las siguientes condiciones:

1.  $X$  es un espacio  $T_1$ ;
2. Para cualquiera subconjuntos cerrado y ajenos  $F_1$  y  $F_2$  de  $X$ , existen abiertos ajenos  $A_1$ , y  $A_2$  de  $X$  tales que  $F_1 \subseteq A_1$  y  $F_2 \subseteq A_2$ . Véase la Figura 1.5.

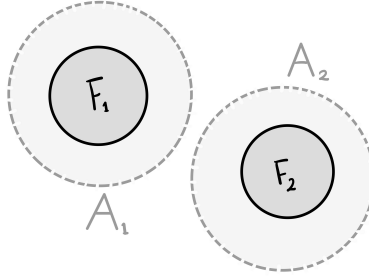


Figura 1.5:

Todo espacio normal es un espacio regular o  $T_3$ .

**Definición 1.1.16.** Un **espacio métrico** es un par ordenado  $(M, \rho)$  que consta de un conjunto  $M$  y una función  $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  que llamaremos métrica que satisface:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ;
2.  $\rho(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ ;
3.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
4.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ ; para toda  $x, y, z \in M$  (desigualdad del triángulo).

**Definición 1.1.17.** Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $p \in X$  y  $A \subseteq X$ , se definen los conjuntos:

$$B(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p, q) < \varepsilon\} \text{ y}$$

$$N(\varepsilon, A) = \{q \in X : \text{existe } x \in A \text{ tal que } d(x, q) < \varepsilon\} = \bigcup_{x \in A} B(\varepsilon, x)$$

Estos conjuntos los llamaremos la **bola de radio  $\varepsilon$  centrada en  $p$**  y la **nube de radio  $\varepsilon$  centrada en  $A$** .

**Definición 1.1.18.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es **metrizable** si existe una métrica tal que  $\tau(d) = \tau$ , donde  $\tau(d)$  es la topología generada por la métrica.

Recordemos que si  $(X, \tau)$  es un espacio métrico,  $d$  genera una topología, la cual está dada a partir de uniones arbitrarias de bolas abiertas, junto con el conjunto vacío.

No es difícil ver que todo espacio métrico satisface los axiomas de separación antes descritos.

## 1.2. Conexidad y compacidad

**Definición 1.2.1.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es **disconexo** si existen dos abiertos (cerrados) ajenos y no vacíos  $U$  y  $V$  tales que  $X = U \cup V$ . En tal caso diremos que  $U$  y  $V$  forman una separación de  $X$ .

Diremos que  $X$  es **conexo** si no es desconexo.

Un subespacio  $C$  de  $X$  se dirá que es disconexo si como subespacio es disconexo. De igual manera si no es disconexo se dirá que es conexo.

Se puede mostrar que un subespacio  $C$  de  $X$  es disconexo si y sólo si existen 2 subconjuntos no vacíos  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $C = A \cup B$  y  $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ . En tal caso se dice que  $A$  y  $B$  forman una separación de  $C$  y se suele escribir que  $C = A|B$ .

Cuando 2 subconjuntos  $H$  y  $K$  de  $X$  satisfacen que  $H \cap \overline{K} = \emptyset = \overline{H} \cap K$  se dice que son o están mutuamente separados y se escribe  $H|K$  cuando consideramos la unión  $H \cup K$  con  $H$  y  $K$  mutuamente separados.

Con esta notación se suele describir que  $C$  es disconexo si existen  $A, B \subseteq X$  no vacíos tales que  $C = A|B$ .

Notemos que cuando  $C \subseteq X$  es abierto o cerrado con  $C$  disconexo y  $C = A|B$ , podemos elegir a los conjuntos  $A$  y  $B$  abiertos ambos o cerrados según sea el caso.

No es difícil ver que un espacio  $X$  es conexo si y sólo si los únicos abiertos y cerrados de  $X$  son el conjunto vacío y el mismo  $X$ .

**Proposición 1.2.2.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $C \subseteq X$ . Si  $C$  es un espacio conexo,  $U$  y  $V$  de  $X$  no vacíos tales que  $C \subseteq U|V$  entonces  $C \subseteq U$  ó  $C \subseteq V$ .

*Demostración.* Si  $C \cap U \neq \emptyset$  y  $C \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $C = (C \cap U) \cup (C \cap V)$ . Mostraremos que  $C = C \cap U | C \cap V$ . Para ello, solo basta con mostrar que  $(\overline{C \cap U}) \cap (C \cap V) = \emptyset$  y  $(\overline{C \cap V}) \cap (C \cap U) = \emptyset$ .

Notemos que  $(\overline{C \cap V}) \cap (C \cap U) \subseteq \overline{C} \cap \overline{V} \cap C \cap U = C \cap U \cap \overline{V} = \emptyset$ . Por lo que  $(\overline{C \cap V}) \cap (C \cap U) = \emptyset$ . De igual manera se tiene que  $(\overline{C \cap U}) \cap (C \cap V) = \emptyset$ . Así,  $C$  es disconexo. Lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto,  $C \subseteq U$  ó  $C \subseteq V$ .  $\square$

**Definición 1.2.3.** Una **componente conexas** de un espacio topológico  $X$  es un subconjunto conexo  $C \subseteq X$  que es maximal con respecto a la inclusión. Eso quiere decir que:

1.  $C$  es un conjunto conexo.
2. Si  $C$  está contenido en algún subconjunto conexo  $D \subseteq X$ , entonces  $C = D$ .

**Lema 1.2.4.** Sea  $X$  un espacio topológico y sea  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  con un número finito de componentes. Si  $x \in \text{int}(A)$  y  $C$  es una componente de  $A$  tal que  $x \in C$ , entonces  $x \in \text{int}(C)$ .

*Demostración.* Sean  $C, C_1, \dots, C_n$  los componentes de  $A$ . Como  $x \in \text{int}(A)$ , existe un subconjunto abierto  $U$  de  $X$ , tal que  $x \in U \subset A$ . Como  $A$  es cerrado en  $X$ , cada  $C, C_1, \dots, C_n$  es cerrado en  $X$ . Sea  $V = U \cap (X \setminus \bigcup_{j=1}^n C_j)$ . Entonces  $V$  es un conjunto abierto de  $X$  tal que  $x \in V \subset A$  y  $V \cap (\bigcup_{j=1}^n C_j) = \emptyset$ . Por lo que,  $V \subset C$ . Por lo tanto  $x \in \text{int}(C)$ .  $\square$

**Definición 1.2.5.** Un espacio topológico  $X$  es **semilocalmente conexo en un punto**  $x \in X$ , si para cada abierto  $U$ , existe otro conjunto abierto  $V$  tal que  $x \in V \subseteq U$  y  $X \setminus V$  tiene una cantidad finita de componentes.

Diremos que  $X$  es **semilocalmente conexo** si es semilocalmente conexo en cada punto de  $X$ .

**Definición 1.2.6.** Un espacio topológico  $X$  es **localmente conexo** en un punto  $x \in X$  si para cada vecindad  $N$  de  $x$  existe un conjunto abierto conexo  $V$  tal que  $x \in V \subset N$ . Si  $X$  es **localmente conexo** en cada uno de sus puntos, se dirá que  $X$  es **localmente conexo**.

Esta definición es equivalente a que para cada  $x \in X$  y cada abierto  $U$  que contiene a  $x$ , se tiene que las componentes de  $U$  son conjuntos abiertos.

**Definición 1.2.7.** Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es **arco conexo** si para cualquiera dos puntos en  $X$ , existe un arco en  $X$  que los contiene.

**Definición 1.2.8.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Decimos que  $X$  es **compacto** si y sólo si para toda cubierta abierta de  $X$  existe una subcubierta finita. Es decir,  $X$  es compacto si para cualquier familia de conjuntos abiertos de  $X$ ,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tal que:

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

existe un subconjunto finito  $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$  de esa familia tal que:

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

Sea  $K \subseteq X$ . Diremos que  $K$  es compacto, si como subespacio de  $X$  es compacto.

**Teorema 1.2.9.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $K \subseteq X$  si  $X$  es compacto y  $K$  es cerrado, entonces  $K$  es compacto.

*Demostración.* Sea  $K \subseteq X$  cerrado. Queremos demostrar que  $K$  es compacto. Sea  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una cubierta de abiertos relativos de  $K$ , es decir,  $K = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ .

Para cada  $\alpha \in A$ , sea  $V_\alpha$  un abierto en  $X$  tal que  $U_\alpha = V_\alpha \cap K$ . Nótese que  $U_\alpha \subseteq V_\alpha$ . Por otra parte como  $K$  es cerrado,  $X \setminus K$  es abierto. Así la familia  $\{V_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{X \setminus K\}$  es una cubierta abierta de  $X$ , pues  $X = (X \setminus K) \cup K \subseteq (X \setminus K) \cup (\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha)$ .

Dado que  $X$  es compacto, y dado que  $(X \setminus K) \cap K = \emptyset$  se tiene que existe una cantidad finita  $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}$  tal que  $X \subseteq (X \setminus K) \cup (\bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i})$ . Esto es,  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i} - (1)$

Por lo que  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$  será una subcubierta de  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , pues de (1),  $K = \bigcup_{i=1}^n (K \cap V_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ .

Así, se concluye que  $K$  es compacto.  $\square$

**Teorema 1.2.10.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $K \subseteq X$ . Si  $K$  es compacto y  $X$  es  $T_2$ , entonces  $K$  es cerrado.

*Demostración.* Para demostrar que  $K$  es cerrado, necesitamos mostrar que su complemento  $X \setminus K$  es abierto. Si  $X \setminus K = \emptyset$ , ya terminamos.

Si  $x \in X \setminus K$  y dado que  $X$  es un espacio de Hausdorff entonces para cada punto  $k \in K$ , existen abiertos de  $X$  disjuntos  $U_k$  y  $V_k$  tales que  $k \in U_k$ ,  $x \in V_k$ .

La colección  $\{U_k \cap K\}_{k \in K} = \{B_k\}_{k \in K}$  es una cubierta abierta de  $K$ . Como  $K$  es compacto, de esta cubierta abierta, podemos tomar una subcubierta finita  $\{B_{k_1}, B_{k_2}, \dots, B_{k_n}\}$ . Esto implica que,  $K \subseteq U_{k_1} \cup U_{k_2} \cup \dots \cup U_{k_n}$ . Sean  $V_{k_1}, V_{k_2}, \dots, V_{k_n}$  los abiertos asociados al punto  $x$ , donde cada  $V_{k_i}$  es disjunto de  $U_{k_i}$ .

Sea  $V = V_{k_1} \cap V_{k_2} \cap \dots \cap V_{k_n}$ . El conjunto  $V$  es abierto y es tal que  $x \in V$  y no interseca  $K$ , porque  $V \subseteq V_{k_i}$  para todo  $i$  y cada  $V_{k_i}$  es disjunto  $U_{k_i}$ . Por lo tanto,  $V \cap K = \emptyset$ ; esto es  $V \subseteq X \setminus K$ . Dado que esto es cierto para cualquier punto  $x \in X \setminus K$ , concluimos que  $X \setminus K$  es abierto. Por lo tanto,  $K$  es cerrado.  $\square$

## 1.3. Continuos

En esta sección definiremos algunos conceptos que nos ayudarán para demostrar teoremas principales de este trabajo.

**Definición 1.3.1.** Decimos que  $X$  es un **continuo**, si  $X$  es un espacio métrico, compacto y conexo. Decimos que  $C \subseteq X$  es un **subcontinuo** de  $X$ , si  $C$  como subespacio es un continuo.

### 1.3.1. Ejemplos de Continuos.

1. El continuo más sencillo, es el intervalo  $[0, 1]$ , o cualquier espacio topológico homeomorfo a él le llamaremos **arco**. Obsérvese la Figura 1.6.

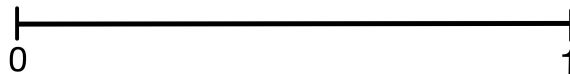


Figura 1.6:

Otros continuos muy sencillos son:

2. La **circunferencia**  $S^1$ , **el disco** (relleno). A cualquier espacio homeomorfo a  $S^1$  le llamaremos una curva cerrada simple y una  $n$ -celda es un espacio homeomorfo al producto  $[0, 1]^n$ . Las  $n$ -celdas también son ejemplos de continuos. Obsérvese la Figura 1.7.

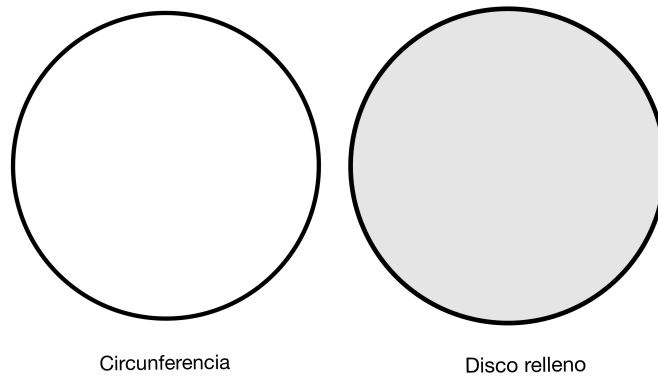


Figura 1.7:

3. También podemos tomar el continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  que es la cerradura en  $\mathbb{R}^2$  de la gráfica de la función  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  definida en el intervalo  $(0, 1]$ . Obsérvese la Figura 1.8.

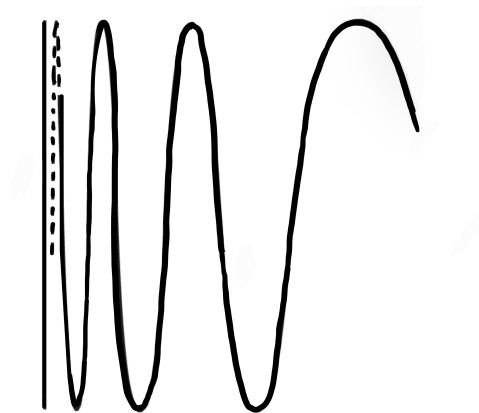


Figura 1.8:

4. Si agregamos al continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  un arco como en la figura de abajo, se obtiene el continuo llamado **Círculo de Varsovia**. Obsérvese la Figura 1.9.

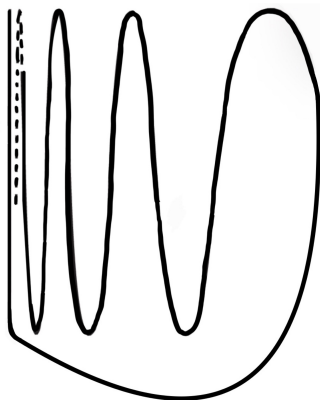


Figura 1.9:

También se pueden construir continuos uniendo segmentos siempre que resulten compactos. Algunos ejemplos importantes son:

5. **Abanico armónico**  $X$ . Cuya construcción está dada por la sucesión armónica  $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ , con  $p = (0, 0)$ ,  $q = (1, 0)$  y para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = (1, \frac{1}{n})$ .  $X = pq \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} pa_n)$  donde  $pa_n$  representa el segmento de recta que une a  $p$  con  $a_n$  y  $pq$  es el segmento de recta que une a  $p$  con  $q$ .

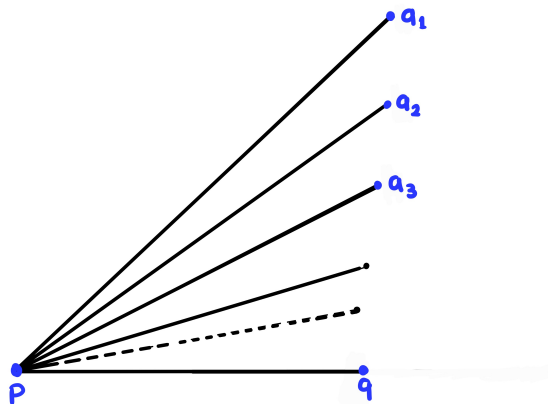


Figura 1.10:

6. **Espacio Peine**. Sean  $A_j = [0, 1] \times \{\frac{1}{j}\}$  para  $j \in \mathbb{N}$ ,  $I = (\{0\} \times [0, 1])$  y  $J = ([0, 1] \times \{0\})$ . Consideremos al continuo  $X = (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cup I \cup J$ . Este es llamado el Espacio Peine. Obsérvese la Figura 1.11.

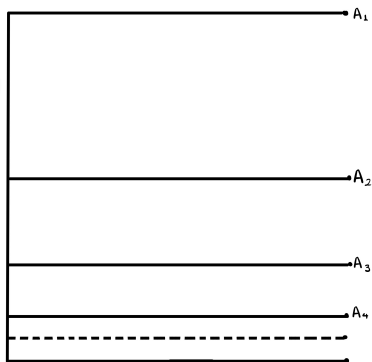


Figura 1.11:

7. **Abanico de Cantor.** El abanico de Cantor resulta de unir cada punto del Conjunto de Cantor con segmentos de líneas a un punto que no pertenece a él, como se muestra en la Figura 1.12.

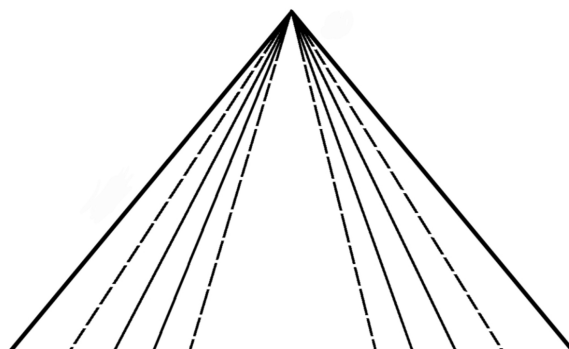


Figura 1.12:

Un resultado que es muy usado es el siguiente:

**Teorema 1.3.2.** *Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico conexo, y sea  $L$  un subconjunto conexo de  $X$ . Si  $X \setminus L = U \mid V$ , entonces  $L \cup U$  y  $L \cup V$  son conexos. Si  $X$  y  $L$  son continuos, entonces  $L \cup U$  y  $L \cup V$  son continuos.*

*Demostración.* Supongamos que  $L \cup V = A \mid B$ . Dado que  $L$  es conexo, se tiene por la Proposición 1.2.2. que  $L \subseteq A$  o  $L \subseteq B$ . Digamos que  $L \subseteq A$ .

De esto y de la igualdad anterior tenemos que  $B \subseteq V$ . Dado que  $\overline{U} \cap V = \emptyset = \overline{V} \cap U$  tenemos que  $\overline{B} \cap U = \emptyset$  y  $\overline{U} \cap B = \emptyset$ .

Sea  $W = A \cup U$ . De esta manera  $X = (X \setminus L) \cup L = (U \cup V) \cup L = U \cup (V \cup L) = U \cup (A \cup B) = (U \cup A) \cup B = W \cup B$ .

Nótese que  $W$  y  $B$  son no vacíos pues  $A$  y  $B$  son no vacíos. Además,  $\overline{W} \cap B = (\overline{U \cup A}) \cap B \subseteq \overline{U} \cap \overline{A} \cap B = \emptyset$ . Por lo que  $\overline{W} \cap B = \emptyset$  y  $W \cap \overline{B} = U \cap A \cap \overline{B} = \emptyset$ .

Por lo que  $W$  y  $B$  forman una separación de  $X$  lo cual es una contradicción, pues  $X$  es conexo. Así,  $L \cup V$  es conexo. De forma similar se puede mostrar que  $L \cup K$  es conexo.

Si  $L$  es un continuo  $X \setminus L$  es abierto, de la definición de desconexidad se pueden elegir 2 abiertos,  $U$  y  $V$  no vacíos ajenos tales que  $X \setminus L = U \cup V$ . Lo que implica que  $L \cup U = X \setminus V$  y  $L \cup V = X \setminus U$  son conjuntos cerrados y por lo tanto compactos.

De lo anterior  $U \cup L$  y  $V \cup L$  son continuos. □

**Lema 1.3.3.** *Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico conexo. Supongamos que  $x, y \in X$  tal que:  $X \setminus \{x\} = K \setminus L, X \setminus \{y\} = M \setminus N$ . Si  $x \in M$  y  $y \in K$ , entonces  $N \cup \{y\} \subseteq K$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 1.3.2.,  $N \cup \{y\}$  es conexo. Como  $x \in M, x \notin N \cup \{y\}$ . Dado que  $y \in K$ , se tiene que  $[N \cup \{y\}] \cap K \neq \emptyset$ . Por lo que,  $N \cup \{y\}$  es un subconjunto conexo de  $X \setminus \{x\}$  y  $N \cup \{y\}$  intersecciona a  $K$ . Por lo tanto, como  $X \setminus \{x\} = K \setminus L$  se tiene que  $N \cup \{y\} \subseteq K$ . □

## 1.4. Dendroides y dendritas

**Definición 1.4.1.** *Un continuo  $X$  es **unicoherente** si  $A \cap B$  es conexo, para cualquiera subcontinuos  $A, B \in X$  tales que  $X = A \cup B$ . Decimos que  $X$  es **hereditariamente unicoherente** si cada subcontinuo propio de  $X$  es unicoherente.*

El círculo de Varsovia (Figura 1.13) es un ejemplo de un continuo no unicoherente, pues si consideramos  $A$  igual a una copia del continuo  $sen \frac{1}{x}$  y  $B$  un arco que une al punto  $p = (0, -1)$  con el punto  $(1, sen(1)) = q$  como se muestra en la Figura 1.13, se tiene que  $A \cap B = \{p, q\}$  el cual no es conexo.

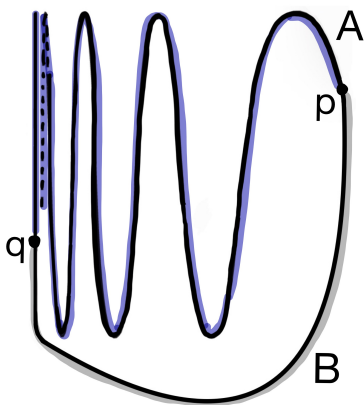
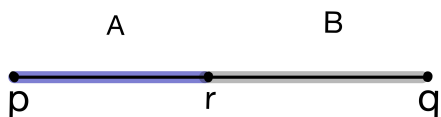


Figura 1.13:

El intervalo (Figura 1.14) es un ejemplo de un continuo unicoherente, pues para cualquier 2 subcontinuos  $A$  y  $B$  cuya unión es el intervalo, se tiene que la intersección es un intervalo; es decir, es un conjunto conexo.

Figura 1.14:



**Definición 1.4.2.** Un *dendroide* es un continuo  $X$  arco conexo y hereditariamente unicoherente. Véase la Figura 1.15.

**Ejemplo:**

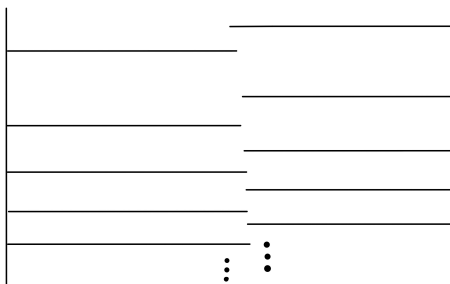


Figura 1.15:

**Lema 1.4.3.** Sea  $X$  un dendroide. Si  $Y$  y  $Z$  son subcontinuos de  $X$ , entonces  $Y \cap Z$  es conexo.

*Demostración.* Si  $Y \cap Z = \emptyset$ , entonces es conexo. Si  $Y \cap Z \neq \emptyset$  y dado que  $X$  es hereditariamente unicoherente, se tiene que  $Y \cup Z$  es un subcontinuo de  $X$  con la propiedad de ser unicoherente. De donde se concluye que  $Y \cap Z$  es conexo.  $\square$

**Lema 1.4.4.** Sean  $X$  un dendroide, y  $x, y \in X$ .

1. Si  $x, y \in Y$  y  $xy$  es un arco en  $X$  que une a  $x$  con  $y$ , entonces  $xy \subseteq Y$ ,
2. Todo subcontinuo de  $X$  es un dendroide,
3. Para todo par de puntos distintos  $p, q \in X$ , existe un único arco con extremos  $p$  y  $q$  al que denotaremos por  $pq$ . También definimos  $pp = \{p\}$ .

*Demostración.* 1. Puesto que  $xy$  y  $Y$  son subcontinuos de  $X$ , y  $X$  es un dendroide, entonces por el lema anterior,  $xy \cap Y$  es un subconjunto conexo del arco  $xy$  que contiene a  $x$  y  $y$ .

Sea  $A = xy \cap Y \subseteq xy$ . Si  $\alpha : [0, 1] \rightarrow xy$  es un homeomorfismo, entonces  $\alpha^{-1}(\{x, y\}) = \{0, 1\}$ . Como  $\{0, 1\} \subseteq \alpha^{-1}(A)$  y  $\alpha^{-1}(A)$  es un subconjunto conexo de  $[0, 1]$  que contiene a los puntos 0 y 1 en el intervalo  $[0, 1]$ , entonces  $\alpha^{-1}(A) = [0, 1]$ , esto implica que  $A = \alpha(\alpha^{-1}(A)) = \alpha([0, 1]) = xy$ , pero  $A = xy \cap Y$  de donde se tiene que  $xy \cap Y = xy$ . Por lo que  $xy \subseteq Y$ .

2. Sea  $Y$  un subcontinuo de  $X$ . Queremos demostrar que  $Y$  es hereditariamente unicoherente y arco conexo.

Para esto, primero veamos que  $Y$  es hereditariamente unicoherente.

Sean  $Z$  un subcontinuo de  $Y$ . Como  $Z$  es un subcontinuo de  $X$ , entonces  $Z$  es unicoherente. Por lo tanto,  $Y$  es hereditariamente unicoherente.

Para demostrar que  $Y$  es arco conexo, sean  $x$  y  $y$  dos puntos distintos en  $Y$ .

Por ser  $X$  arco conexo, existe un arco  $xy$  en  $X$  que une a  $x$  con  $y$ . Por el inciso 1 tenemos que  $xy \subseteq Y$ , por lo tanto  $Y$  es arco conexo.

3. Sean  $p, q \in X$ . Como  $X$  es arco conexo, existe un arco  $\alpha$ , con extremos  $p$  y  $q$ . Debemos demostrar que este arco es único.

Supongamos que existe otro arco  $\beta$  con extremos  $p$  y  $q$ . Puesto que  $\alpha$  es un arco con extremos  $p$  y  $q$  y  $\beta$  es un subcontinuo que contiene a  $p$  y a  $q$ , se tiene por 1) que  $\alpha \subseteq \beta$ . Análogamente se prueba que  $\beta \subseteq \alpha$ . Por lo que,  $\alpha = \beta$ .

□

**Definición 1.4.5.** Un dendroide que es localmente conexo es llamado una **dendrita**. La Figura 1.16 muestra un ejemplo de una dendrita.

**Ejemplo:**

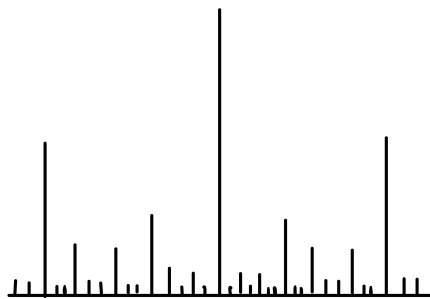


Figura 1.16:

Observación: Se sabe que una dendrita también se puede definir como un continuo localmente conexo, sin curvas cerradas simples.

**Definición 1.4.6.** Un **abanico** es un dendroide con un único punto de ramificación, el cuál es llamado *vértice*.

**Definición 1.4.7.** Un continuo de  $X$  es **descomponible** si existen dos subcontinuos propios no vacíos  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Los continuos que no son descomponibles son llamados **indescomponibles**.

**Definición 1.4.8.** Un continuo  $X$  se dice **hereditariamente indescomponible** si  $X$  y cada subcontinuo no degenerado de  $X$  es indescomponibles.

**Ejemplos:**

1. Sea  $X = S^1$ . Notemos que  $X$  es un continuo **descomponible** pues  $X = H \cup K$  donde  $H = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, \pi]\}$  y  $K = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [\pi, 2\pi]\}$ , son subcontinuos propios de  $X$ . Véase la Figura 1.17.

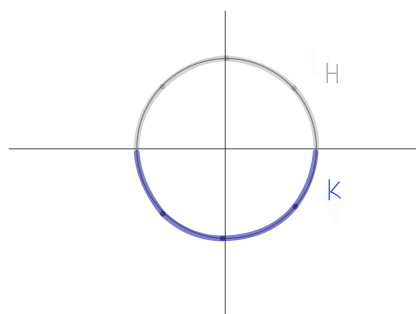


Figura 1.17:

2. El arcoiris de Knaster, el solenoide diádico y el pseudo-arco son ejemplos de continuos **indescomponibles**. Para la prueba de esto se usan herramientas que se escapan de este trabajo por lo que nos conformaremos en creer que son indescomponibles.

## 1.5. Métrica de Hausdorff

Denotaremos a  $X$  como un continuo no degenerado (con más de un punto) con la métrica  $d$ . Los *hiperespacios* de  $X$  son ciertas familias de subconjuntos de  $X$  con alguna propiedad en común. Dos de las más conocidos son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

Como  $2^X$  contiene a  $C(X)$ , para darle una métrica a él, bastará dársela a  $2^X$ .

Definamos una métrica para  $2^X$  (métrica de Hausdorff). Dados  $A, B \in 2^X$ , definimos el siguiente número

$$H(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A) \}.$$

**Proposición 1.5.1.**  $H : 2^X \times 2^X \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$H(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\varepsilon, A) \}$$

es una métrica para  $2^X$ .

*Demostración.* Por demostrar que

1.  $H(A, B)$  está bien definida.
2.  $H(A, B) \geq 0$ .
3.  $H(A, B) = H(B, A)$
4.  $H(A, B) = 0$  si y sólo si  $A = B$ .
5.  $H$  satisface la desigualdad del triángulo, es decir:  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$

Para probar (1) y (2) se probará que el  $\text{diám}(X)$  existe. Veamos que  $\{d(x, y) : x, y \in X\} \subseteq [0, \infty)$  y  $\text{diám}(X) = \sup\{d(x, y) : x, y \in X\}$ . Sean  $p \in X$  y la función  $f_p : X \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $f_p(x) = d(p, x)$ .

Se sabe que  $f_p$  es continua y dado que  $X$  es compacto, se tiene que  $f_p$  alcanza su valor máximo. Como  $f_p(X)$  es un continuo no degenerado en  $[0, \infty)$ , tenemos que  $f_p(X) = [0, d(p, x_0)]$  para algún  $x_0 \in X$ . Así, para todo,  $x, y \in X$  se tiene que  $d(x, y) \leq d(x, p) + d(p, y) \leq 2d(p, x_0)$ . Por lo que el conjunto  $\{d(x, y) : x, y \in X\}$

está acotado superiormente y dado que  $d(x, x) = 0$  para todo  $x, y \in X$ , se tiene que  $\{d(x, y) : x, y \in X\}$  es no vacío. Por lo tanto  $\text{diám}(X)$  existe.

Sean  $A, B \in 2^X$ . Definimos el conjunto  $E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subseteq N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subseteq N(\varepsilon, A)\}$ . De esta manera,  $H(A, B) = \inf E(A, B)$ . Ahora veamos que  $H(A, B)$  está bien definida. Mostraremos que el conjunto  $E(A, B)$  es diferente del vacío y está acotado inferiormente como para todo,  $x, y \in X, d(x, y) \leq \text{diám}(X) < \text{diám}(X) + 1 \in E(A, B)$ . Por otra parte, el conjunto  $E(A, B)$  está acotado inferiormente por 0. En conclusión,  $\inf E(A, B)$  existe y por lo tanto  $H(A, B) \geq 0$ .

(3) se sigue de que  $E(A, B) = E(B, A)$ . La prueba se puede ver fácilmente de la definición del conjunto de  $E(A, B)$  pues se pueden intercambiar los conjuntos  $A$  y  $B$  sin que se modifique el conjunto  $E(A, B)$ .

(4)  $\implies$ ) Supongamos que  $H(A, B) = 0$ . Queremos probar que  $A = B$  probando que  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ .

Sean  $a \in A$  y  $\varepsilon > 0$ . Por la definición de ínfimo existe  $0 \leq \delta < \varepsilon$  tal que  $\delta \in E(A, B)$ . De esta manera, si  $a \in A$ , existe  $b \in B$  tal que  $d(a, b) < \delta < \varepsilon$ , es decir  $B(\varepsilon, a) \cap B \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $a \in \overline{B}$ . Dado que  $B$  es cerrado,  $\overline{B} = B$ . Así,  $a \in B$ . La otra contención se prueba de manera similar a la anterior. Por lo que  $A = B$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $A = B$  eso quiere decir que  $H(A, B) = H(A, A) = \inf E(A, A) = \inf([0, \infty)) = 0$ . Por lo que,  $H(A, B) = 0$ .

(5) Sean  $A, B, C \in 2^X, \alpha > 0$  y  $\delta = \frac{\alpha}{2}$ . Veamos que  $H(A, B) < H(A, B) + \delta$ , existe  $\varepsilon \in E(A, B)$  tal que  $0 \leq H(A, B) \leq \varepsilon < H(A, B) + \delta$ . Dado que  $0 \leq H(B, C) < H(B, C) + \delta$ , existe  $\varepsilon_1 \in E(B, C)$  tal que  $0 \leq H(B, C) \leq \varepsilon_1$ . De donde  $B \subseteq N(\varepsilon_1, C)$ , entonces  $b$  existe  $c \in C$  tal que  $d(b, c) < \varepsilon_1 < H(B, C) + \delta$ . De esta forma,  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) < H(A, B) + \delta + H(B, C) + \alpha$  así  $A \subseteq N(H(A, B) + H(B, C) + \alpha, C)$ . De manera similar se prueba que  $C \subseteq N(H(A, B) + H(B, C) + \alpha, A)$ . Por lo tanto,  $H(A, B) + H(B, C) + \alpha \in E(A, B)$ , así  $H(A, C) = \inf E(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C) + \alpha$ . Concluimos que  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C) + \alpha$ , para  $\alpha > 0$ . Por lo que,  $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$   $\square$

Intuitivamente, esta métrica nos dice que tan cerca están dos conjuntos cerrados, como se muestra en la imagen siguiente:

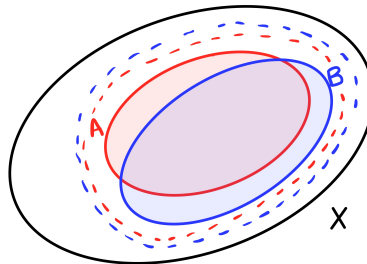


Figura 1.18:

Una forma de probar que tan cercanos están 2 conjuntos nos la da la siguiente proposición.

**Proposición 1.5.2.** Sean  $A, B \in 2^X$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces  $H(A, B) < \varepsilon$  si y sólo si  $A \subseteq N(\varepsilon, B)$  y  $B \subseteq N(\varepsilon, A)$ .

*Demostración.*  $\implies$ ) Tomemos  $\varepsilon > 0$ . Supongamos que  $H(A, B) < \varepsilon$ , así  $\inf E(A, B) < \varepsilon$ , por lo que  $\varepsilon$  no es cota superior entonces existe  $\delta \in E(A, B)$  tal que  $\delta < \varepsilon$ , por lo que  $A \subset N(\delta, B)$  y  $B \subset N(\delta, A)$ . Sea  $x \in N(\delta, A)$ , tomemos  $y \in A$  tal que  $d(x, y) < \delta < \varepsilon$ , es decir  $d(x, y) < \varepsilon$  entonces  $x \in N(\varepsilon, A)$ . Por lo anterior  $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$  y  $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ , por lo tanto  $A \subset N(\varepsilon, B)$  y  $B \subset N(\varepsilon, A)$

$\impliedby$ ) Supongamos que  $A \subset N(\varepsilon, B)$  y  $B \subset N(\varepsilon, A)$ . Como  $N(\delta, B)$  es abierto en  $X$  para toda  $\delta > 0$ . Definimos  $D = \{N(\delta, B) : \delta \in (0, \varepsilon)\}$ . Queremos probar que  $D$  es una cubierta abierta de  $A$ . Sea  $a \in A$ , tenemos que  $a \in N(\varepsilon, B)$ , tomemos  $b \in B$  de tal manera que  $d(a, b) < \varepsilon$ . Sea  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $d(a, b) < \beta < \varepsilon$ , tenemos que  $\beta \in (0, \varepsilon)$  y  $a \in N(\beta, B)$  entonces  $D$  es una cubierta abierta de  $A$ .

Como  $A$  es compacto, existen  $\delta_1, \dots, \delta_n \in (0, \varepsilon)$  de tal manera que  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n N(B, \delta_i)$ . Sea  $\delta_A = \max\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ . Así  $A \subseteq N(\delta_A, B)$  y  $0 < \delta_A < \varepsilon$ , con el mismo procedimiento se puede encontrar  $\delta_B \in (0, \varepsilon)$  tal que  $B \subseteq N(\delta_B, A)$  y  $0 < \delta_B < \varepsilon$ . Sea  $\delta = \max\{\delta_A, \delta_B\}$  entonces  $0 < \delta < \varepsilon$  y  $\delta \in E(A, B)$ , así  $H(A, B) \leq \delta \leq \varepsilon$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Topología cociente

En este capítulo hablaremos brevemente de la topología cociente. Este tipo de topologías son una herramienta muy importante en la construcción de continuos y espacios topológicos en general.

Sea  $(X, \tau_X)$  un espacio topológico y  $Y$  un conjunto no vacío.

Sea  $p : X \rightarrow Y$  una función suprayectiva, definimos el conjunto:

$$\tau_p = \{U \subseteq Y : p^{-1}(U) \in \tau_X\}.$$

**Proposición 2.0.3.**  $\tau_p$  es una topología para  $Y$ .

*Demostración.* La familia  $\tau_p$  cumple que:

1. El conjunto vacío y  $Y$  son elementos de  $\tau_p$ , pues  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  y  $p^{-1}(Y) = X$ .
2. Sean  $A, B \in \tau_p$ . Nótese que  $p^{-1}(A) \cap p^{-1}(B) = p^{-1}(A \cap B)$ . Dado que  $p^{-1}(A)$  y  $p^{-1}(B)$  son abiertos en  $X$ , entonces  $p^{-1}(A) \cap p^{-1}(B)$  es abierto en  $X$ . Por lo que  $p^{-1}(A \cap B)$  es abierto en  $X$ . Así,  $A \cap B \in \tau_p$ .
3. Si  $\{A_i : i \in I\}$  es una familia de elementos de  $\tau_p$ , entonces  $p^{-1}(A_i)$  es abierto de  $X$ , para todo  $i \in I$  y su unión:

$$\bigcup_{i \in I} p^{-1}(A_i)$$

también es abierto de  $X$  y como  $\bigcup_{i \in I} p^{-1}(A_i) = p^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i)$ , luego  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es elemento de  $\tau_p$ .

Por lo tanto,  $\tau_p$  es una topología para  $Y$  □

No es difícil ver que  $p^{-1}(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ . En tal caso  $\mathcal{A} \subseteq Y$  es abierto en  $Y$  si y sólo si  $\bigcup \mathcal{A}$  es abierto en  $X$ . Nótese que por la definición de  $\tau_p$ ,  $p$  resulta continua. También se puede mostrar fácilmente que  $B$  es un conjunto cerrado en  $Y$  si y sólo si  $p^{-1}(B)$  es un conjunto cerrado en  $X$ .

**Teorema 2.0.4.** *Sea  $p : (X, \tau_X) \longrightarrow Y$  una función suprayectiva. Si  $\tau$  es una topología en  $Y$  que hace continua a  $p$ , entonces  $\tau \subseteq \tau_p$ ; es decir,  $\tau_p$  es la topología más grande que hace continua a  $p$ .*

*Demostración.* Sea  $\tau$  una topología en  $Y$  que hace continua a  $p$ . Por demostrar que  $\tau \subseteq \tau_p$ . Para ello, sea  $V \in \tau$ , entonces por la continuidad de  $p$ , se tiene que  $p^{-1}(V) \in \tau_X$ . Esto implica que  $V \in \tau_p$ , por definición de  $\tau_p$ . Por lo tanto  $\tau \subseteq \tau_p$ .  $\square$

**Definición 2.0.5.** *Sean  $(X, \tau_X)$  y  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos. Una función  $p : X \longrightarrow Y$  continua y suprayectiva es llamada función de identificación si  $\tau_Y = \tau_p$ .*

Observemos que como  $\tau_Y$  es una topología que hace continua a  $p$ , entonces por el resultado anterior  $\tau_Y$  siempre es un subconjunto de  $\tau_p$ .

Por lo que para mostrar que  $p$  es una función de identificación basta con probar que  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ .

Un resultado importante relacionado a funciones de identificación lo dice el siguiente teorema:

**Teorema 2.0.6.** *Sea  $p : X \longrightarrow Y$  una función suprayectiva entre espacios topológicos. Si  $p$  es abierta o cerrada, entonces  $p$  es una función de identificación.*

*Demostración.* Por la observación anterior, basta mostrar que  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ . Para ello, tomemos  $V \in \tau_p$ , esto implica que  $p^{-1}(V) \in \tau_X$ . Así, como  $p$  es suprayectiva  $X \setminus p^{-1}(V)$  es cerrado en  $X$ . Supongamos que  $p$  es cerrada. De esta manera  $p(X \setminus p^{-1}(V)) = p(X) \setminus p(p^{-1}(V)) = Y \setminus V$ .

De donde se tiene que  $Y \setminus V$  es cerrado en  $Y$ . Así,  $V$  es abierto en  $Y$ , es decir  $V \in \tau_Y$ . Por lo tanto  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ .

Supongamos ahora que  $p$  es abierta, si  $V \in \tau_p$  entonces  $p^{-1}(V) \in \tau_X$ . Dado que  $p$  es abierta y suprayectiva se tiene que  $V = p(p^{-1}(V)) \in \tau_Y$ . Por lo que  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ .  $\square$

**Definición 2.0.7.** *Sean  $(X, \tau_X)$  y  $(Y, \tau_Y)$  espacios topológicos. Una función  $p : X \longrightarrow Y$  continua y suprayectiva es llamada función de identificación si  $\tau_Y = \tau_p$ .*

Observemos que como  $\tau_Y$  es una topología que hace continua a  $p$ , entonces por el resultado anterior  $\tau_Y$  siempre es un subconjunto de  $\tau_p$ .

Por lo que para mostrar que  $p$  es una función de identificación basta con probar que  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ .

Un resultado importante relacionado a funciones de identificación lo dice el siguiente teorema:

**Teorema 2.0.8.** *Sea  $p : X \longrightarrow Y$  una función suprayectiva entre espacios topológicos. Si  $p$  es abierta o cerrada entonces  $p$  es una función de identificación.*

*Demostración.* Por la observación anterior, basta mostrar que  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ . Para ello, tomemos  $V \in \tau_p$ , esto implica que  $p^{-1}(V) \in \tau_X$ . Así  $X \setminus p^{-1}(V)$  es cerrado en  $X$ . Supongamos que  $p$  es cerrada. De esta manera  $p(X \setminus p^{-1}(V))$  es cerrado en  $Y$ . Por la suprayectividad  $p(X \setminus p^{-1}(V)) = p(X) \setminus p(p^{-1}(V)) = Y \setminus V$ .

De donde se tiene que  $Y \setminus V$  es cerrado en  $Y$ . Así,  $V$  es abierto en  $Y$  es decir,  $V \in \tau_Y$ . Por lo tanto  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ .

Supongamos ahora que  $p$  es abierta, si  $V \in \tau_p$  entonces  $p^{-1}(V) \in \tau_X$ . Dado que  $p$  es abierta y suprayectiva se tiene que  $V = p(p^{-1}(V)) \in \tau_Y$ . Por lo que  $\tau_p \subseteq \tau_Y$ .  $\square$

**Teorema 2.0.9.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua si  $X$  es compacto y  $Y$  es de Hausdorff, entonces  $f$  es cerrada y como consecuencia es una función de identificación.*

*Demostración.* Sea  $F$  un conjunto cerrado de  $X$ . Dado que  $X$  es compacto, entonces  $F$  es compacto. De la continuidad de  $f$ , se tiene que  $f(F)$  es compacto. Pero todo conjunto compacto en un espacio de Hausdorff es cerrado, por lo que  $f(F)$  es cerrado. Así,  $f$  es una función cerrada y por tanto una identificación.  $\square$

**Corolario 2.0.10.** *Si  $X$  y  $Y$  son continuos y  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y suprayectiva, entonces  $f$  es una función de identificación.*

*Demostración.* Como  $X$  y  $Y$  son continuos,  $X$  es compacto y  $Y$  es de Hausdorff. Por el teorema anterior, se sigue que  $f$  es cerrado y por lo tanto  $f$  es una identificación.  $\square$

**Proposición 2.0.11.** *Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función de identificación. Si  $g : Y \rightarrow Z$  es una función. Entonces  $g \circ f$  es continua si y sólo si  $g$  es continua.*

*Demostración.*  $\implies$ ) La función  $g$  es continua,  $f$  es continua entonces la composición de ambas es continua.

$\impliedby$ ) Queremos ahora probar que la imagen inversa de  $g$  de cualquier abierto de  $Y$ , es un abierto de  $X$ .

Sea  $B \subseteq Y$  un abierto. Entonces, su imagen inversa  $A = (g \circ f)^{-1}(B)$  es un abierto de  $X$ , puesto que  $g \circ f$  es continua.

Veamos que,  $A = (g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ . Como  $f^{-1}(g^{-1}(B))$  es abierto, por definición de la topología sobre  $X$ , el conjunto  $g^{-1}(B)$  es abierto.  $\square$

**Teorema 2.0.12. Teorema de la Transgresión.** *Sea  $p : X \rightarrow Y$  una función de identificación y  $h : X \rightarrow Z$  una función continua. Si  $hp^{-1}$  tiene valor único; esto es,  $h$  es constante en cada fibra  $p^{-1}(y)$ . Entonces  $hp^{-1} : Y \rightarrow Z$  es continua y el diagrama de la Figura 2.1. conmuta.*

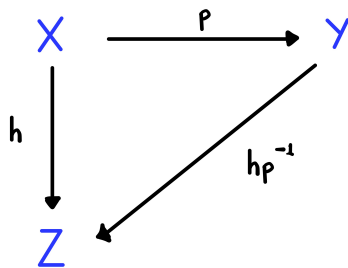


Figura 2.1:

*Demostración.* Por la Proposición 2.0.9, basta probar que la composición  $(hp^{-1}) \circ p$  es continua para concluir que  $hp^{-1}$  es continua. Realmente probaremos que  $(hp^{-1}) \circ p = h$ .

Sea  $x \in X$ , entonces por definición de fibra  $p^{-1}(p(x)) = \{w \in X : p(w) = p(x)\}$ , de aquí  $x \in p^{-1}(p(x))$ . Dado que  $h$  es constante en cada fibra, se tiene que  $h(p^{-1}(p(x))) = z$  para algún  $z \in Z$ . Como  $x \in p^{-1}(p(x))$ ,  $h(x) = z = h(p^{-1}(p(x)))$ . Así,  $(hp^{-1}) \circ p = h$ . Por ser  $h$  continua y  $p$  ser una función de identificación tenemos que  $hp^{-1}$  es continua.  $\square$

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Una relación de equivalencia  $\sim$  sobre el conjunto  $X$  es una relación binaria sobre  $X$  cumpliendo las siguientes propiedades:

1. *Reflexividad.* Para cada  $x \in X$  si tiene que  $x \sim x$ .
2. *Simetría.* Para cada  $x, y \in X$  tal que  $x \sim y$  entonces  $y \sim x$ .
3. *Transitividad.* Para cada  $x, y, z \in X$  tal que  $x \sim y$  y  $y \sim z$  entonces  $x \sim z$ .

Si  $X$  es un conjunto no vacío y  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $X$ , para  $x \in X$ , se define la clase de equivalencia de  $x$  como:

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

El conjunto de todas las clases de equivalencia sobre  $X$  se denota por  $X \setminus \sim$  se denomina conjunto cociente:

$$X \setminus \sim := \{[x] : x \in X\}.$$

Llamamos proyección natural a la función de  $X$  sobre el conjunto cociente  $X \setminus \sim$  dada por  $p : X \rightarrow X \setminus \sim$ , definida por  $p(x) = [x]$ .

Sean  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $\sim$  una relación de equivalencia sobre  $X$  y  $p : X \rightarrow X \setminus \sim$  su proyección natural. Llamamos espacio cociente a la pareja  $(X \setminus \sim, \tau_{\sim})$ , siendo  $\tau_{\sim} = \{\mathcal{A} \subseteq X \setminus \sim : \bigcup \mathcal{A} \in \tau\}$ ; esto es  $\tau_{\sim} = \tau_p$  ya que  $p^{-1}(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$ .

Esto significa que  $\tau_{\sim}$  es una topología de identificación y por tanto  $p$  es continua y de identificación, por lo que  $p$  satisface los resultados para funciones de identificación.

Un resultado importante que relaciona las siguientes funciones de identificación con el espacio cociente es el siguiente:

**Teorema 2.0.13.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función de identificación. Si  $D_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ , entonces  $D_f$  es homeomorfo a  $Y$ .

*Demostración.* Notemos primero que  $D_f$ , me define una familia de clases de equivalencia, bajo la relación de equivalencia siguiente: 2 elementos  $x$  y  $y$  están relacionados si y sólo si  $x, z \in f^{-1}(y)$  para algún  $y \in Y$ .

Sea  $p : X \rightarrow D_f$  la proyección natural. Notemos primero que  $p$  es constante en cada fibra  $f^{-1}(y)$ , pues  $p(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y)$ . Como  $f$  es una función de identificación, se tiene por el Teorema de la Transgresión que  $h = pf^{-1}$  es continua.

Por otra parte, notemos que  $f$  es constante en cada fibra  $p^{-1}(f^{-1}(y))$ , pues  $f(p^{-1}(f^{-1}(y))) = f(f^{-1}(y)) = y$ .

Dado que  $p$  es una función de identificación entonces del Teorema de la Transgresión se tiene que  $g = fp^{-1}$  es continua.

Finalmente se mostrará que  $h$  y  $g$  son funciones inversas. Si  $f^{-1}(y) \in D_f$ , entonces

$$\begin{aligned} (h \circ g)(f^{-1}(y)) &= h(g(f^{-1}(y))) \\ &= h(f(p^{-1}(f^{-1}(y)))) \\ &= h(f(f^{-1}(y))) \\ &= h(y) \\ &= \pi f^{-1}(y) \\ &= I_D(f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $y \in Y$  se tiene que

$$\begin{aligned} (g \circ h)(y) &= g(h(y)) = g(p(f^{-1}(y))) \\ &= g(f^{-1}(y)) \\ &= f(p^{-1}(f^{-1}(y))) \\ &= f(f^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

Por lo tanto  $h$  y  $g$  son funciones inversas y continuas. Por lo que se tiene un homeomorfismo  $\square$

**Ejemplos:** (Espacios cocientes)

1. Sean  $I = [0, 1]$ . Definamos una relación de equivalencia de la siguiente manera, sean  $x, y \in I$ ,  $x$  y  $y$  están relacionados si y sólo si  $x = y$  ó  $x = 0$  y  $y = 1$ .

Las clases de equivalencia se ven como siguen:

- a)  $[x] = \{x\}, x \neq 0, 1$
- b)  $[0] = [1] = \{0, 1\}$

Lo que hace la relación intuitivamente es *pegar* los dos extremos, del intervalo. Así, podemos imaginar que su espacio cociente es homeomorfo a una circunferencia. Véase la Figura 2.2.

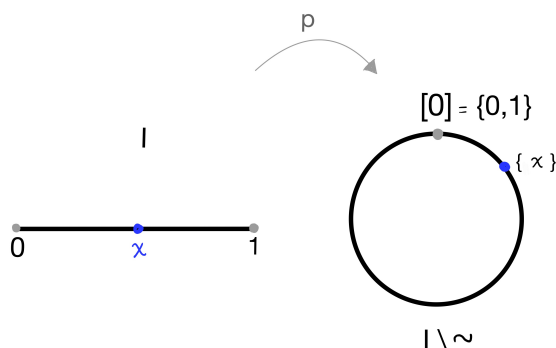


Figura 2.2:

Veamos que en efecto  $I/\sim$  es homeomorfo a una circunferencia.

Sea  $f : I \rightarrow S^1$ , definida por  $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ . Esta función es continua, por que cada función coordenada es continua, y es cerada pues es una función definida de un conjunto compacto a un espacio de Hausdorff y como  $f$  es suprayectiva, entonces  $f$  es una función de identificación.

De esta manera tenemos que  $f$  y  $p : I \rightarrow I/\sim$  satisfacen el teorema anterior, pues  $D_f = I/\sim$ . Por lo que  $I/\sim$  es homeomorfo a la circunferencia unitaria.

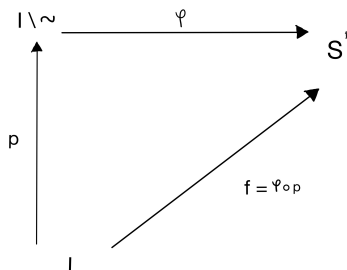


Figura 2.3:

- Para el siguiente ejemplo, definamos sobre el conjunto  $J = [0, 2\pi] \times [0, 1]$  la siguiente relación de equivalencia: para 2 elementos  $(x, y), (x', y') \in J$ ,  $(x, y) \sim (x', y')$  si y sólo si  $(x, y) = (x', y')$  ó  $x = 0, x = 2\pi$  y  $y' = 1 - y$  para todo  $y \in Y$ .

Intuitivamente se *pegan* en un cuadro los lados laterales en sentido contrario.

Si  $\mathcal{B}$  = banda de Möbius y la función  $f : J \rightarrow \mathcal{B}$  está dada por  $f(x, y) = (U(x, y), V(x, y), W(x, y))$  donde

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \left(1 + \frac{y}{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \cos x \\
 V(x, y) &= \left(1 + \frac{y}{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \sin x \\
 W(x, y) &= \frac{y}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)
 \end{aligned}$$

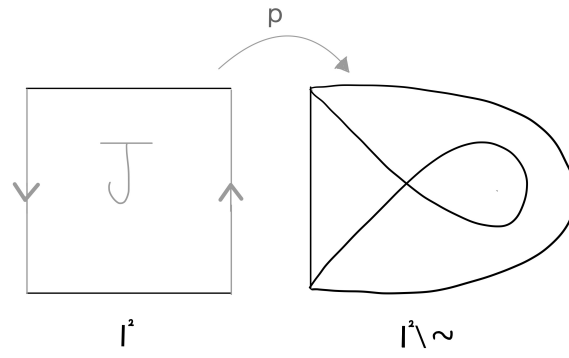


Figura 2.4:

Se puede ver que  $D_f = J/\sim$  y razonando como en el ejemplo anterior se tiene que  $J/\sim$  es homeomorfo a  $\mathcal{B}$ .



**Definición 3.0.15.** Dado un continuo  $X$  diremos que  $p$  es un **punto de no corte débil** si cada par de puntos distintos a  $p$  están contenidos en un subcontinuo que no contiene a  $p$ .

**Ejemplo:**

Consideremos el espacio peine  $X$  dibujado en la Figura 3.2 y  $A = pq$ . Si  $x \in A \setminus \{q\}$ , este no es un punto de no corte débil, pues existen 2 elementos  $y, z \in X$  y cada continuo que los contiene, contiene también a  $x$ . Sin embargo,  $q$  y cada  $q_i, i = 1, \dots, n, \dots$  son puntos de no corte débil. Siempre es posible encontrar para cada par de puntos diferentes de  $q$  o  $q_i$  un subcontinuo que no contenga a  $q$  o  $q_i$ , dependiendo del caso.

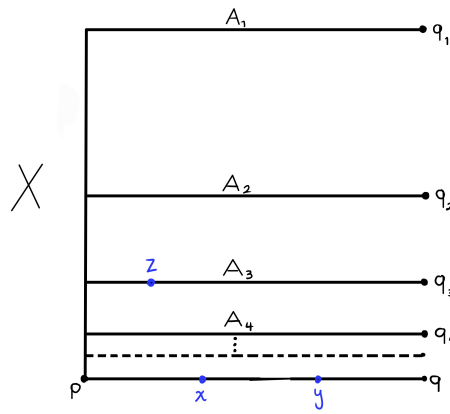


Figura 3.2:

El siguiente resultado nos da otra forma de identificar puntos de no corte débil.

**Proposición 3.0.16.** Sean  $X$  un continuo y  $x \in X$ . Entonces  $x$  es un punto de no corte débil si y sólo si existen subcontinuos  $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset X$  tal que  $X \setminus \{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

*Demostración.*  $\implies$ ) Supongamos que  $x \in X$  es un punto de no corte débil. Tomemos un punto  $p \in X \setminus \{x\}$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $p \notin B_{\frac{1}{n}}(x)$  y sea  $A_n$  la componente conexa de  $X \setminus B_{\frac{1}{n}}(x)$  que contiene a  $p$ . Entonces para cada  $n$  suficientemente grande, los conjuntos  $A_n$  son subcontinuos donde  $p \in A_n$ . Podemos suponer  $A_1 \neq \emptyset$ , entonces  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subseteq X$ .

Queremos demostrar que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \{x\}$ . Por construcción,  $\bigcup A_n \subseteq X \setminus \{x\}$ . Ahora veamos que  $X \setminus \{x\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Para ello, sea  $y \in X \setminus \{x\}$ , entonces existe  $L \in C(X)$  tal que  $p, y \in L \subseteq X \setminus \{x\}$ .

*Afirmación.* Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $L \subseteq X \setminus B_{\frac{1}{n}}(x)$ . Para demostrar la afirmación, supongamos que para todo  $n \in \mathbb{N}, L \cap B_{\frac{1}{n}}(x) \neq \emptyset$ . Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $a_n \in L \cap B_{\frac{1}{n}}(x)$ . Como  $L$  es compacto la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiene una subsucesión convergente, sin pérdida de generalidad para la prueba podemos suponer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,

para algún  $a \in L$ . Como  $d(a_n, x) < \frac{1}{n}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ . Así,  $x = a \in L \subseteq X \setminus \{x\}$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $L \subseteq X \setminus B_{\frac{1}{n}}(x)$ . De esta manera, como  $p \in L \cap A_n$  y dado que  $A_n$  es una componente de  $X \setminus B_{\frac{1}{n}}(x)$ , se tiene la implicación  $L \subseteq A_n$  y como  $y \in L$ , entonces  $y \in A_n$ . Por lo que,  $X \setminus \{x\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Con esto se concluye la implicación. Así,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \{x\}$

$\Leftarrow$ ) Supongamos ahora que existe  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C(X)$  tal que  $X \setminus \{x\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  y  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subseteq X \setminus \{x\}$ . Sean  $p, q \in X \setminus \{x\}$ . Existen  $i, j \in \mathbb{N}$  tal que  $p \in A_i, q \in A_j$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $i \leq j$ . Así,  $p \in A_i \subseteq A_j$  y como  $q \in A_j, p, q \in A_j$ . Por lo que,  $x$  es un punto de no corte débil.  $\square$

**Definición 3.0.17.** Dado un continuo  $X$  diremos que un punto  $p$  de  $X$  es un **punto de no bloque** si existe una sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  de subcontinuos de  $X$  que no contienen al punto  $p$  y  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$  y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  es densa en  $X$ . Si no existe tal sucesión diremos que  $p$  **bloquea o es de bloque**.

**Ejemplo:**

Consideremos el continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  que llamaremos  $S$ . Si  $p$  es un punto en la barra límite, entonces  $p$  es un punto de no bloque. Para visualizarlo, sea  $r = (1, \text{sen}(1))$  y sea  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos en  $S$  que converge a  $p$  como en la Figura 3.3. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , sea  $A_i$  el arco que une a  $r$  con  $p_i$ . Entonces tenemos que para cada  $i \in \mathbb{N}, A_i \subseteq A_{i+1}, p \notin A_i$  y  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S$ , por lo que  $p$  es de no bloque.

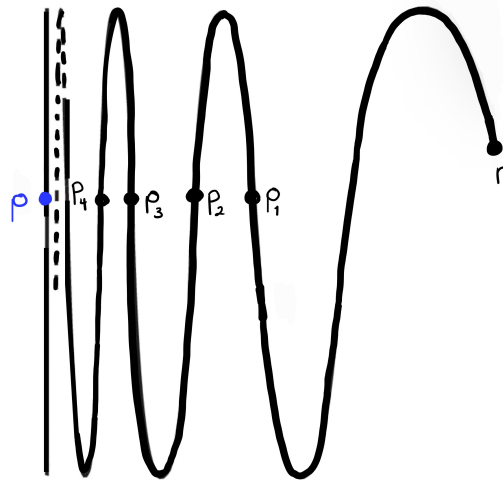


Figura 3.3:

Por otra parte, si  $q$  es un punto en el continuo que no está en el segmento límite, tenemos que  $q$  es un punto de bloque.

Cada sucesión creciente de elementos de  $C(X)$  que no contengan a  $q$ , se tiene que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset K_1$  o bien  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset K_2$ , donde  $K_2$  es el arco que va de  $r$  a  $q$  y  $K_1$  es una copia homeomorfa a  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  con punto final en  $q$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \neq X$ .

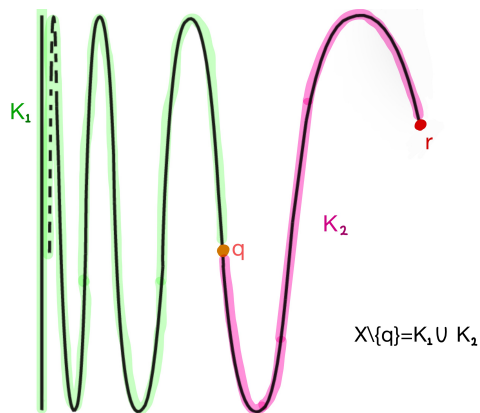


Figura 3.4:

**Definición 3.0.18.** Dado un continuo  $X$  diremos que un punto  $p$  de  $X$  es un **punto orilla** si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un subcontinuo  $C$  de  $X$  tal que  $p \notin C$  y  $H(C, X) < \varepsilon$ .

**Ejemplo:**

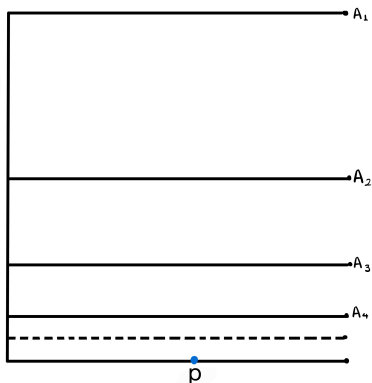


Figura 3.5:

Sea  $X$  el espacio del peine como en la Figura 3.5 (Véase la descripción en el Ejemplo 6) y sea  $p$  un punto en la barra límite  $A$ . Mostraremos que  $p$  es un punto orilla. Para ello, sea  $\varepsilon > 0$ , por el Axioma Arquimiliano existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ . Nótese que  $C = (\bigcup_{j=1}^n A_j) \cup (\{0\} \times [0, 1])$  es un subcontinuo de  $X$  que no contiene a  $p$ . La afirmación es que  $H(A, X) < \varepsilon$ , es decir,  $A \subseteq N(\varepsilon, X)$  y  $X \subseteq N(\varepsilon, A)$ .

Como  $A \subseteq X$ , entonces  $A \subseteq N(\varepsilon, X)$ . Para probar que  $X \subseteq N(\varepsilon, A)$  consideremos  $x \in X$ . Si  $x \notin A$ , entonces podemos tomar 2 casos: 1)  $\bar{x} = (x, \frac{1}{m})$ ,  $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  o 2)  $\bar{x} = (x, 0)$ . Si,  $a = (x, a_n) \in A_n$  y  $(x, \frac{1}{m}) \in A_m$ , entonces  $d((x, \frac{1}{m}), (x, \frac{1}{n})) = d(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

Si  $\bar{x} = (x, 0)$ , se tiene que  $d((x, 0), (x, \frac{1}{n})) = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$

Por lo tanto,  $X \subseteq N(\varepsilon, A)$ .

De donde se concluye que  $p$  es un punto orilla.

Un concepto relacionado al concepto anterior es el siguiente:

**Definición 3.0.19.** *Un subconjunto no vacío  $A$  de un continuo  $X$  con  $\text{int}(A) = \emptyset$  es un **conjunto orilla**, si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un subcontinuo  $C$  de  $X$  tal que  $A \cap C = \emptyset$  y  $H(X, C) < \varepsilon$ , con  $H$  la métrica de Hausdorff.*

**Lema 3.0.20.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $A$  es un subconjunto propio de  $X$  tal que  $X \setminus A$  es arco conexo, entonces  $A$  es un conjunto orilla de  $X$  si y sólo si  $\text{Int}(A) = \emptyset$ .*

*Demostración.* Si  $A$  es un conjunto orilla, de la definición se tiene que  $\text{Int}(A) = \emptyset$ . Supongamos que  $\text{Int}(A) = \emptyset$ ,  $X \setminus A$  es arco conexo. Queremos demostrar que  $A$  es un conjunto orilla.

Sea  $\varepsilon > 0$ . De la compacidad de  $X$  existen bolas abiertas  $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_1), \dots, B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n)$  tales que  $X = \bigcup_{n=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n)$ .

Sea  $y \in X \setminus A$  y  $z_i \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \setminus A$ . Consideremos el arco  $yz_i = \alpha_i$  que va de  $y$  a  $z_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  en  $X \setminus A$ .

Sea  $D = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$ . Notemos que por construcción,  $D$  es un subcontinuo de  $X$  tal que  $D \cap A = \emptyset$ , resta demostrar que  $H(D, X) < \varepsilon$ .

Claramente  $D \subseteq N(\varepsilon, X)$ . Veamos ahora que si  $x \in X$ , entonces  $x \in N(\varepsilon, D)$ , es decir existe un  $z \in D$  tal que  $d(x, z) < \varepsilon$ . Tomemos  $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ . Como  $z_i \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ , entonces  $d(x, z_i) \leq d(x, x_i) + d(x_i, z_i) < \varepsilon$ . Así,  $d(x, z_i) < \varepsilon$ .

De esta manera,  $H(D, X) < \varepsilon$ . Por lo tanto,  $A$  es un conjunto orilla. □

**Definición 3.0.21.** *Dado un continuo  $X$ , diremos que  $p$  es un **punto de no centro fuerte** si para cada par de abiertos  $A, B$  de  $X$  no vacíos, existe un subcontinuo  $K$  que no contiene a  $p$  y  $K \cap A \neq \emptyset$  y  $K \cap B \neq \emptyset$ .*

**Ejemplo:**

Sea  $X$  el continuo  $\text{sen}(\frac{1}{x})$  y sea  $\bar{x} = \bar{0}$ . El punto  $\bar{x}$  es de no centro fuerte, ya que cualquier par de conjuntos abiertos  $A$  y  $B$  de  $X$  es el continuo, siempre se puede encontrar un subcontinuo que intersekte ambos conjuntos sin incluir el punto  $\bar{0}$ , pues continuo oscila infinitamente cerca de  $\bar{x}$ , y por lo que intersekte a los conjuntos abiertos.

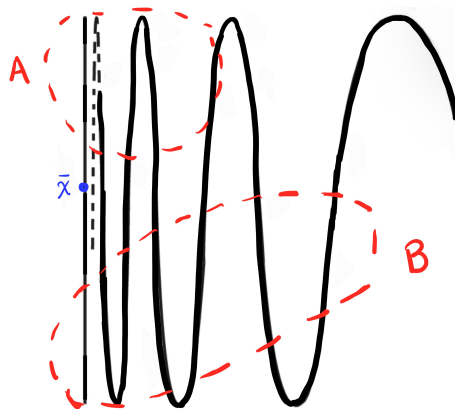


Figura 3.6:

**Definición 3.0.22.** Dado un continuo  $X$ , diremos que un punto  $p$  de  $X$  es un **punto de no corte** si  $X \setminus \{p\}$  es conexo; en caso contrario se dirá que  $p$  es un **punto de corte**.

*Observación:* La propiedad de tener puntos de corte se conserva bajo homeomorfismos, pero para las funciones continuas no siempre se conservan los puntos de corte. Vamos a definir que es una cortadura para lo que sigue:

Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Si  $p$  es un punto de corte y  $U$  y  $V$  son 2 abiertos de  $X$  tales que  $X \setminus \{p\} = U \cup V$ , entonces el conjunto  $\{p, U, V\}$  es llamada una cortadura de  $X$ .

Si  $X$  es un continuo y  $\{p, U, V\}$  una cortadura. Entonces por el Teorema 1.3.2,  $U \cup \{p\}$  y  $V \cup \{p\}$  son continuos.

### Ejemplo:

En el continuo Abanico armónico con el segmento límite alargado, el punto  $q$  marcado en la Figura 3.7. es un punto de no corte, pues  $X \setminus \{q\}$  es conexo.

El punto  $p$  es de corte. Consideremos  $H$  como el abanico armónico sin el punto  $p$  y  $K$  el intervalo  $(p, q]$ , entonces  $X \setminus \{p\} = H \cup K$  donde  $H$  y  $K$  son abiertos ajenos no vacíos. Por lo tanto,  $p$  es de corte.

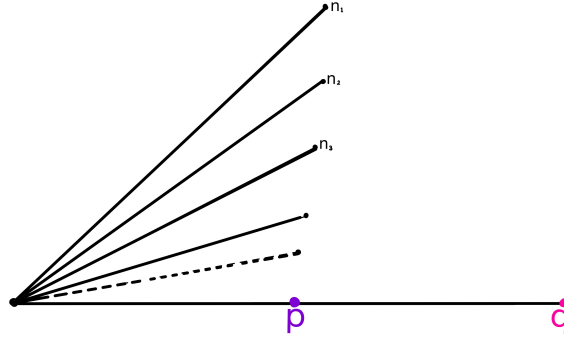


Figura 3.7:

### 3.1. Comparación de los puntos en el borde

Para probar que ser punto de conexión colocal implica ser punto de no corte débil, probaremos el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.1.** *Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Si  $p$  es de conexión colocal entonces existen subcontinuos  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset X$  tales que  $X \setminus \{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in X$  tal que  $x$  es un punto de conexión colocal. Esto implica por definición que existe un sistema local de vecindades abiertas  $\mathcal{V}_x$  de  $x$  tal que para todo  $V \in \mathcal{V}_x$ ,  $X \setminus V$  es conexo, y como  $V$  es abierto,  $X \setminus V$  es cerrado y por lo tanto compacto. Esto es  $X \setminus V$  es un continuo para todo  $V \in \mathcal{V}_x$ .

Sea  $x \in V_2$ , para alguna  $V \in \mathcal{V}_x$ . Por lo anterior  $X \setminus V = A_1$  es un continuo. Como  $V_1$  es un abierto, existe  $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$  tal que  $x \in B_{\varepsilon_1}(x) \subseteq V_1$ . Por lo que existe  $V_2 \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V_2 \subseteq B_{\varepsilon_1}(x)$ . Sea  $A_2 = X \setminus V_2$ , el cual cumple que  $A_1 \subseteq A_2$ . De manera inductiva existe  $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2^n}$  tal que  $B_{\varepsilon_n}(x) \subseteq V_n$  y existe  $V_{n+1} \in \mathcal{V}_x$  tal que  $V_{n+1} \subseteq B_{\varepsilon_n}(x)$  y además si  $A_{n+1} = X \setminus V_{n+1}$ , entonces  $A_{n+1}$  es un continuo tal que  $A_n \subseteq A_{n+1}$ .

*Afirmación.*  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \{x\}$ .

Como  $A_n = X \setminus V$  y  $x \in V$ , entonces  $A_n \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus \{x\}$ . Por lo que  $A_n \subseteq X \setminus \{x\}$ . De esta manera  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq X \setminus \{x\}$ .

Por otra parte, si  $y \in X \setminus \{x\}$ , sea  $\varepsilon = d(x, y) > 0$ . Tomemos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\varepsilon_n < \varepsilon$ . Esto implica que  $y \notin B_{\varepsilon_n}(x)$  y como  $V_{n+1} \subseteq B_{\varepsilon_n}(x)$ , entonces  $y \notin V_{n+1}$ . Así,  $y \in X \setminus V_{n+1} = A_{n+1}$ . De donde concluimos que  $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .  $\square$

**Proposición 3.1.2.** *Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Si  $p$  es un punto de conexión colocal entonces  $p$  es un punto de no corte débil.*

*Demostración.* La demostración se sigue de la Proposición 3.0.3 y del Teorema 3.1.1.  $\square$

Ser punto de no corte débil no implica ser punto de conexión colocal. Para eso veamos el continuo que se observa en la Figura 3.8.

Sea  $X$  el dendroide en el plano construido de la siguiente manera: si  $p = (0, 0)$ ,  $q = (1, 0)$ ,  $a_n = (1, \frac{1}{n})$ ,  $b_n = (1, -\frac{1}{n})$  y  $c_n = (0, -\frac{1}{n})$  son puntos en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $X = pq \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} (pa_n \cup S_n \cup b_n c_n))$  es un dendroide, donde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  es la semi-circunferencia con centro en  $q$  que contiene a los puntos  $a_n$  y  $b_n$ . El punto  $q$  es un punto de no corte débil, y no es punto de conexidad colocal.

Pues cada abierto  $V$  lo suficientemente pequeño que contiene a  $q$  satisface que  $X \setminus V$  no es conexo, al menos hay 2 componentes: una que contiene a  $p$  y otra que contiene  $c_n$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ .

Y si  $y, z \in X \setminus \{q\}$ , entonces siempre hay un arco  $yz$  que no contiene a  $q$ . Por lo que  $q$  es un punto de no corte débil.

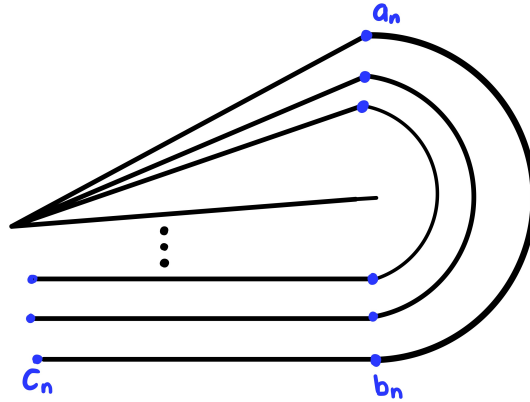


Figura 3.8:

**Proposición 3.1.3.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Si  $p$  no es un punto de no corte débil, entonces  $p$  es un punto de no bloque.

*Demostración.* Sea  $p$  un punto de no corte débil entonces por la Proposición 3.0.3. existe una sucesión de subcontinuos  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset X$  tal que  $X \setminus \{p\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

Por lo que tenemos que demostrar que  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = X$ . Para ello, basta mostrar que  $X \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ .

Notemos primero que si  $X$  es un espacio métrico conexo, entonces para cada  $x \in X$  y  $\varepsilon > 0$ , las  $B_\varepsilon(x)$  son no degeneradas, pues si  $B_\varepsilon(x) = \{x\}$ , entonces  $\{x\}$  sería un abierto en  $X$ . Además, como  $X$  es métrico,  $\{p\}$  es cerrado en  $X$ . Lo cual contradice que un espacio es conexo si y solo si los únicos abiertos y cerrados son el conjunto vacío y el mismo  $X$ .

Por lo que,  $B_\varepsilon(x)$  es no degenerada.

Comencemos la prueba, sea  $p \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea  $q \in B_\varepsilon(x) \setminus \{p\}$ , entonces  $q \in X \setminus \{p\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , por lo que para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in A_n$ . Por lo tanto,  $q \in B_\varepsilon(p) \cap A_n$ , lo que significa que  $p \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ . Así,  $p$  es un punto de no bloque.  $\square$

Ser punto de no bloque no implica ser punto de no corte débil. Consideremos el continuo  $X = sen(\frac{1}{x})$ . El continuo  $X$  se puede ver como la unión de  $L$  con  $S$

donde  $L = \{0\} \times [-1, 1]$  y  $S$  es la gráfica de la función  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = \text{sen}(\frac{1}{x})$ .

Si  $x \in L$ , ya vimos por la Figura 3.3 que  $x$  es de no bloque.

Sin en cambio, si  $x \in L$  y  $y \in L$  ( $x \neq y$ ) y  $z \in S$ , no hay forma de tener un continuo que contenga a  $y$  y  $z$  que no contenga a  $x$  pues todo continuo que contiene a  $y$  y  $z$  debe contener a  $L$  y  $x \in L$ . Por lo que  $x$  no es punto de no corte débil.

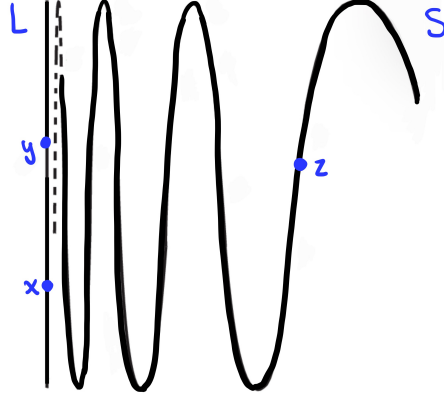


Figura 3.9:

**Teorema 3.1.4.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Si  $p$  es un punto de no bloque, entonces  $p$  es un punto orilla.

*Demostración.* Supongamos que  $p$  no es un punto orilla; es decir, supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que para todo  $C \in \mathcal{C}(X)$  tal que  $p \notin C$  se tiene que  $H(C, X) \geq \varepsilon$ . De acuerdo a la Proposición 1.5.2,  $X \not\subseteq N(\varepsilon, C)$ . Por otra parte, dado que  $p$  es un punto de no bloque, existe una sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , de continuos tal que  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $\overline{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} = X$ . Por lo supuesto, para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $X \not\subseteq N(\varepsilon, A_n)$ ; es decir, existe  $x_n \in X \setminus N(\varepsilon, A_n)$ . De aquí  $B_\varepsilon(x_n) \cap A_n = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Hemos construido una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  en  $X$  que de la compacidad de  $X$ , existe una subsucesión convergente. Sin perder generalidad podemos suponer que la sucesión converge a un punto  $x \in X$ . Dado que  $\overline{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} = X$ , se tiene que  $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_m \neq \emptyset$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Como  $A_n \subseteq A_{n+1}$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$  para toda  $n \geq m$ . Por otra parte, de la convergencia de la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  tenemos que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \geq N$ ,  $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ . Para  $n_0 = \max\{N, m\}$  se tiene que  $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$  y  $x_{n_0} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ . De lo anterior si  $z \in B_\varepsilon(x) \cap A_{n_0}$ ,  $d(x_{n_0}, z) \leq d(x_{n_0}, x) + d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . Por lo que  $B_\varepsilon(x_{n_0}) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$  contradiciendo el hecho de que  $B_\varepsilon(x_n) \cap A_n = \emptyset$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ .

Por lo tanto estuvo mal suponer que  $p$  no es punto orilla. Así,  $p$  es un punto orilla.  $\square$

**Definición 3.1.5.** Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y  $\varepsilon > 0$ , un subconjunto  $S \subseteq X$  es una  $\varepsilon$ -red si para todo punto  $x \in X$ , existe un punto  $s \in S$  tal que  $d(x, s) < \varepsilon$ .

Ser punto orilla no implica ser punto de no bloque. Para ello construiremos un dendroide auxiliandonos del abánico de Cantor.

Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de Cantor y  $A$  el abánico de Cantor construido de la siguiente manera:

Tomamos el conjunto de Cantor como base y altura 1, luego identificamos a la altura  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  y así sucesivamente. Para ello nos vamos a auxiliar del abánico de Cantor. Para construir el dendroide de Cantor.

Para ello construiremos un dendroide  $X$  de la siguiente manera: Sean  $\mathcal{C}$  el conjunto de Cantor y  $p = (0, 1)$ . El abanico de Cantor  $Y$  está dado como  $Y = \bigcup_{c \in \mathcal{C} \times \{0\}} pc \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Ahora para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos una  $\frac{1}{n}$ -red finita de  $\mathcal{C} \times \{0\}$  que denotaremos por  $D_n = \{d_1^n, \dots, d_{k(n)}^n\}$ . Tomemos el espacio cociente  $X$  de  $Y$ , cuyos elementos no degenerados están dados por conjuntos finitos  $M_\alpha^n$  dados de la siguiente manera:

Para cada  $\alpha \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$  y  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos  $M_\alpha^n = l_\alpha \cap (\bigcup_{i=1}^{m(n)} pd_i^m)$  donde  $l_\alpha = \{(t, \alpha) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Figura 3.10:

El espacio cociente  $X$  bajo esta descomposición, que resulta ser semicontinua superiormente, es un dendroide donde  $\{p\}$  es un punto orilla pero no es de bloque.

Figura 3.11:

**Proposición 3.1.6.** *Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$  si  $p$  es un punto orilla, entonces  $p$  es un punto de no centro fuerte.*

*Demostración.* Sea  $p$  un punto orilla de  $X$  y sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos abiertos distintos de  $X$ . Tomemos  $a \in A, b \in B$  tales que  $a \neq p \neq b$  y  $a \neq b$ . Sea  $0 < \varepsilon < \min\{d(a, p), d(a, b), d(b, p)\}$  y que además se cumpla que  $B_\varepsilon(a) \subseteq A$  y  $B_\varepsilon(b) \subseteq B$ .

Por hipótesis existe  $C \in \mathcal{C}(X)$  tal que  $p \notin C$  y  $H(X, C) < \varepsilon$  es decir,  $X \subseteq N(\varepsilon, C)$ . Por lo anterior, como  $a, b \in X$ , existen  $c_a, c_b \in C$  tales que  $d(c_a, a) < \varepsilon$  y  $d(c_b, b) < \varepsilon$ . Esto implica que  $C \cap B_\varepsilon(b) \neq \emptyset$  y  $C \cap B_\varepsilon(a) \neq \emptyset$ . Por lo que  $C \cap A \neq \emptyset$  y  $C \cap B \neq \emptyset$ . De donde se concluye que  $p$  es un punto de no centro fuerte.  $\square$

Ser punto de no centro fuerte no implica ser punto orilla. Veamos el siguiente ejemplo:

Figura 3.12:

Consideremos de nuevo el conjunto de Cantor  $\mathcal{C}$  y el abanico de Cantor  $Y$ .

Sea  $D = \{(a_1^n, a_2^n) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} : a_1^n \neq a_2^n \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ y } \{a_1^m, a_2^m\} \cap \{a_1^n, a_2^n\} = \emptyset \text{ para } m \neq n\}$  denso en  $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ . Definimos una descomposición  $\tau$  del abánico de Cantor y cuyos elementos no degenerados constan de  $K_\alpha^n = l_\alpha \cap \bigcup_{i=1}^2 pa_i^n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $\alpha \in [1 - \frac{1}{n}, 1)$ , donde  $l_\alpha$  es como en el ejemplo anterior.

El espacio cociente  $X = Y/\tau$  es nuevamente un dendroide, donde el punto  $\{p\}$  mostrado en la Figura 3.12 es un punto de no centro fuerte pero no es punto orilla.

**Proposición 3.1.7.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$  si  $p$  es un punto de no centro fuerte, entonces  $p$  es un punto de no corte.

*Demostración.* Procederemos por contraposición.

Supongamos que  $p$  es un punto de corte, entonces  $X \setminus \{p\} = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos ajenos no vacíos de  $X$ . Sea  $Y \in C(X)$  tal que  $p \notin Y$ . Esto implica que  $Y \subseteq X \setminus \{p\}$ . De la Proposición 1.2.2,  $Y \subseteq U$  o  $Y \subseteq V$ . Si  $Y \subseteq U$  entonces  $Y \cap V = \emptyset$ . De esta manera hemos encontrado un subcontinuo  $Y$  tal que  $p \notin Y$  y no intersecciona a la vez a 2 abiertos. Esto implica que  $p$  no es de no centro fuerte.  $\square$

Ser punto de no corte no implica ser punto de no centro fuerte. Veamos el siguiente ejemplo:

Sea  $X$  un continuo definido de la siguiente manera: Tomemos  $S^1$  la circunferencia unitaria. Sea  $V_1$  una espiral que se va acercando desde afuera hacia la circunferencia y sea  $V_2$  una espiral que se va acercando desde adentro hacia la circunferencia como se muestra en la Figura 3.13.

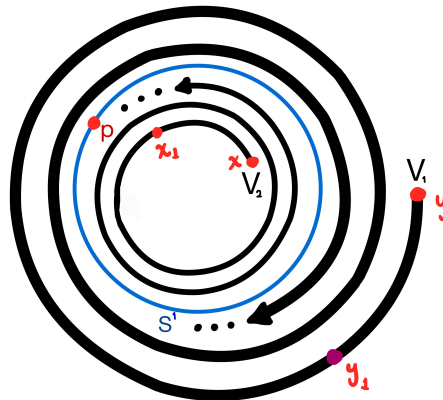


Figura 3.13:

Cualquier punto de la circunferencia  $S^1$  es un punto de no corte, pues  $X \setminus \{p\}$  es conexo.

Sin embargo,  $p$  no es de no centro fuerte. Para ello, consideremos a  $x$  el punto extremo de la espiral  $V_1$  y  $y$  el punto extremo de la espiral  $V_2$ .

Sea  $0 < \epsilon < \min d(x, S^1), d(y, S^1)$ . Si consideramos un subcontinuo  $C$  que interseccione a  $B_\epsilon(x) \cap X$  y  $B_\epsilon(y) \cap X$ , forzosamente debe contener a  $S^1$ , por lo que  $p$  estaría en  $C$ . De esto  $p$  puede ser de no centro fuerte.

El siguiente resultado muestra que los conceptos arriba definidos son equivalentes en los continuos semilocalmente conexos.

**Proposición 3.1.8.** Si  $X$  es un continuo semilocalmente conexo entonces los siguientes conceptos son equivalentes:

1. punto de conexidad colocal.
2. punto de no corte débil.

3. punto de no bloque.
4. punto orilla.
5. punto de no centro fuerte.
6. punto de no corte.

*Demostración.* Por las implicaciones mostradas anteriormente es suficiente mostrar que 6)  $\Rightarrow$  1).

Sea  $x$  un punto de no corte. Tomemos una vecindad  $U$  de  $X$ . Dado que  $X$  es semi-localmente conexo en  $x$ , existe un abierto  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V \subseteq U$  y  $X \setminus V$  tiene una cantidad finita de componentes  $C_1, \dots, C_m$ . Como  $X \setminus U \subseteq X \setminus V$ . Consideremos sin pérdida de generalidad que  $C_1, \dots, C_n$  ( $n \leq m$ ) cubren a  $X \setminus U$ .

Por [18, (6.2)], existen subcontinuos  $X_{ij} \subseteq X \setminus \{x\}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , tal que  $X_{ij}$  intersecciona a  $C_i$  y  $C_j$  para toda  $i \neq j$ . Consideremos el conjunto  $W = U \setminus (\bigcup_{i=1}^n C_i \cup \bigcup_{i \neq j} X_{ij})$ .

*Afirmación.*  $W$  es un abierto tal que  $X \setminus W$  es conexo.

Claramente  $W$  es un conjunto abierto, pues  $W = U \setminus (\bigcup_{i=1}^n C_i \cup \bigcup_{i \neq j} X_{ij}) = U \cap (\bigcup_{i=1}^n C_i \cup \bigcup_{i \neq j} X_{ij})^c$ , es la intersección de 2 conjuntos abiertos de  $X$ .

Para probar que  $X \setminus W$  es conexo, vamos a probar que  $X \setminus W = \bigcup_{i=1}^n C_i \cup (\bigcup_{i \neq j} X_{ij})$ . Notemos que:

$$\begin{aligned}
 X \setminus W &= X \setminus (U \setminus (\bigcup_{i=1}^n C_i \cup (\bigcup_{i \neq j} X_{ij}))) \\
 &= X \setminus (U \cap (X \setminus (\bigcup_{i=1}^n C_i \cup (\bigcup_{i \neq j} X_{ij})))) \\
 &= (X \setminus U) \cup (\bigcup_{i=1}^n C_i \cup (\bigcup_{i \neq j} X_{ij})) \\
 &= \bigcup_{i=1}^n C_i \cup (\bigcup_{i \neq j} X_{ij}), \quad \text{pues } X \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i.
 \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que  $X \setminus W = \bigcup_{i=1}^n C_i \cup (\bigcup_{i \neq j} X_{ij})$ . Dado que cada par de componentes  $C_i, C_j$  son interseccionadas por un continuo  $X_{ij}$ , se tiene que  $X \setminus W$  es conexo que es lo que queriamos probar.  $\square$

**Definición 3.1.9.** Sean  $X$  un continuo y  $p, q \in X$ . Diremos que  $X$  es **aposindético en  $p$  con respecto de  $q$**  si existe un subcontinuo  $W$  de  $X$  y un conjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $p \in U \subseteq W \subseteq X \setminus \{q\}$ . El continuo  $X$  es **aposindético en  $p$**  si es aposindético en  $p$  con respecto a cualquier otro punto. Y diremos que  $X$  es **aposindético** si  $X$  es aposindético en cada uno de sus puntos.

**Ejemplos:**

Consideremos el arco  $pq$  como en la Figura 3.8. El arco es aposindético. Para cualesquiera 2 puntos  $x, y$  distintos en  $pq$ , siempre es posible encontrar un subcontinuo  $Y$  de  $x$ , tal que  $x \in \text{int}(Y) \subseteq Y \subseteq pq \setminus \{y\}$ .

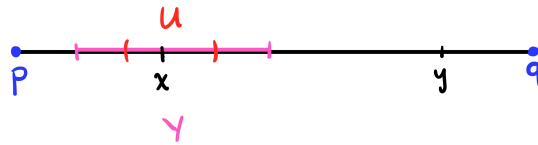


Figura 3.14:

Para el siguiente ejemplo consideremos el abanico armónico  $X$ . No es difícil convencerse que si  $x$  pertenece a la barra límite y que es diferente del vértice,  $X$  no es aposindético en  $x$ . Cualquier continuo  $Y$  que contenga a  $x$  en su interior, forzosamente debe contener a  $y$ . Por lo que  $X$  no es aposindético. A pesar de eso,  $X$  es aposindético en el vértice.

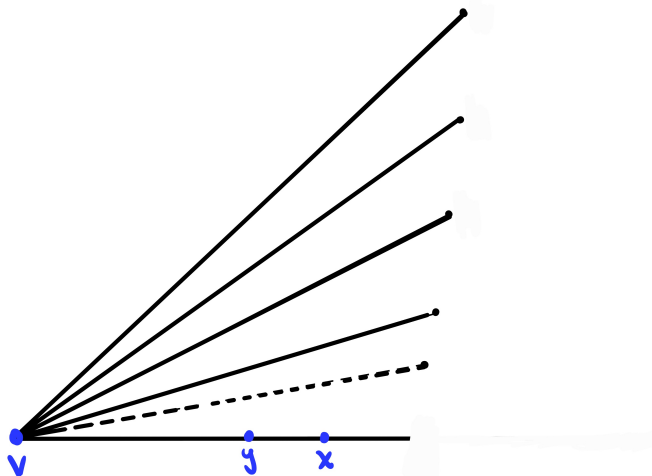


Figura 3.15:

**Teorema 3.1.10.** *Un continuo  $X$  es aposindético si y sólo si este es semilocalmente conexo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es aposindético. Sea  $x \in X$ . Mostraremos que  $X$  es semilocalmente conexo en  $x$ .

Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $X$  que contiene a  $x$ . Como  $x$  es aposindético, para cada  $y \in X \setminus U$  existe un subcontinuo  $W_y$  de  $x$  y un abierto  $V$  de  $x$  tal que  $y \in V \subseteq W_y \subseteq X \setminus \{x\}$ . La propiedad anterior se puede escribir como  $y \in \text{int}(W_y) \subseteq W_y \subseteq X \setminus \{x\}$  ..... (1)

Como para cada  $y \in X \setminus U$  se puede obtener un continuo  $W_y$  como en (1) y dado que  $X \setminus U$  es cerrado y por tanto compacto, se tiene que la familia  $C = \{\text{int}(W_y) : y \in X \setminus U\}$  es una cubierta abierta  $X \setminus U$  por lo que existen  $y_1, \dots, y_n \in X \setminus U$  tales que  $X \setminus U \subseteq \bigcup_{j=1}^n \text{int}(W_{y_j})$ .

Sea  $V = X \setminus (\bigcup_{j=1}^n W_{y_j})$ . Afirmamos que  $V$  es el abierto buscado pues  $x \in V \subseteq U$  y como  $X \setminus V = \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$ ; es decir, es la unión de un número finito de continuos entonces  $X \setminus V$  tiene a lo más un número finito de componentes. Por lo tanto  $X$  es semilocalmente conexo, pues  $x$  fue arbitrario.

Ahora supongamos que  $X$  es semilocalmente conexo. Sean  $x, y \in X$ . Mostraremos que  $x$  es aposindético en  $x$  con respecto a  $y$ . Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $x$  tal que  $y \in U \subset X \setminus \{x\}$ . Como  $X$  es  $T_3$ , existe un conjunto abierto  $U'$  de  $X$  tal que  $y \in U' \subseteq \overline{U'} \subseteq U$ . Dado que  $X$  es semilocalmente conexo, existe un conjunto abierto de  $X$  tal que  $y \in V \subseteq U'$  y  $X \setminus V$  tiene una cantidad finita de componentes. Por el Lema 1.2.4,  $x$  pertenece al interior de la componente de  $X \setminus V$  que contiene a  $x$ .

Como la componente es cerrada y conexo, es un continuo que contiene a  $x$  en su interior y que está contenido en  $X \setminus \{y\}$ . Por lo que  $X$  es aposindético en  $x$  con respecto a  $y$ . Así,  $X$  es aposindético, debido a que  $x$  y  $y$  fueron arbitrarios.  $\square$

**Teorema 3.1.11.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es localmente conexo entonces  $X$  es aposindético.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in X$ . Dado que  $X \setminus \{x\}$  es un abierto que contiene a  $y$ , existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $y \in U \subseteq \bar{U} \subseteq X \setminus \{x\}$ . De la conexidad local existe un abierto y conexo  $V$  tal que  $x \in V \subseteq U$ . De esta manera  $\bar{V}$  es un subcontinuo de  $X$  tal que  $x \in \text{int}(\bar{V}) \subseteq X \setminus \{x\}$ . Así,  $X$  es aposindético.  $\square$

Por los Teorema 3.1.10 y Teorema 3.1.11 se tiene como corolario el siguiente resultado.

**Corolario 3.1.12.** *Si  $X$  es continuo localmente conexo, entonces  $X$  es semilocalmente conexo.*

De los resultados anteriores tenemos que si  $X$  es continuo localmente conexo, entonces todos los puntos en el borde dados en la Proposición 3.1.8 también son equivalentes en este tipo de espacios.

## 3.2. Existencia de puntos en el borde

En esta sección veremos que cualquier continuo no degenerado, tienen puntos orilla, no bloque, de no centro fuerte y de no corte.

**Teorema 3.2.1.** [2, Teorema 5, pp. 500]. *Sea  $X$  un continuo y  $A$  un subconjunto propio de  $X$ . Entonces existe  $x \in X \setminus A$  tal que  $\bigcup \{C \in C(X) : C \subseteq X \setminus \{x\} \text{ y } C \cap A \neq \emptyset\}$  es densa en  $X$ .*

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces,  $X$  tiene al menos 2 puntos orilla.*

*Demostración.* Sea  $p \in X$ , por el Teorema 3.2.1, existe un punto  $q \in X \setminus \{x\}$ , tal que  $D = \bigcup \{C \in C(X) : x \in C \text{ y } q \notin C\}$  es un conjunto denso en  $X$ . Ahora bien para  $\epsilon > 0$ , podemos cubrir a  $X$  con los elementos de la familia  $\mathcal{B} = \{B_{\frac{\epsilon}{2}}(x) : x \in X\}$ . Por la compacidad de  $X$ , existen  $x_1, \dots, x_n \in X$  tal que  $X = \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$ .

Dado que  $D$  es un conjunto denso,  $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i) \cap D \neq \emptyset$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Esto quiere decir que existe un subcontinuo  $C_i$  tal que  $x \in C_i, q \notin C_i$  y  $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i) \cap C_i \neq \emptyset$ .

Consideremos el continuo  $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ . Notemos que por la definición del conjunto  $D$ ,  $q \notin C_i$ . Mostraremos que  $q$  es un punto orilla, probando que  $H(C, X) < \epsilon$ . Dado que  $C \subseteq N_\epsilon(X)$ . Basta probar que  $X \subseteq N_\epsilon(C)$ .

Sea  $y \in X$ . Entonces existe  $i = 1, \dots, n$  tal que  $y \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i)$ . De aquí,  $d(y, x_i) < \frac{\epsilon}{2}$  y como  $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_i) \cap C_i \neq \emptyset$  entonces existe  $z_i \in C_i$  tal que  $d(x_i, z_i) < \epsilon$ . Por lo que,  $d(y, z_i) \leq d(y, x_i) + d(x_i, z_i) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Así,  $X \subseteq N_\epsilon(A)$ .

Por lo tanto  $q$  es un punto orilla. Repitiendo el mismo argumento de la prueba para  $q$ , obtenemos un punto  $p$  distinto de  $q$  que es orilla. De esta manera,  $X$  tiene al menos 2 puntos orilla.  $\square$

De las implicaciones dadas en el capítulo anterior tenemos lo siguiente.

**Corolario 3.2.3.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces  $X$  tiene al menos 2 puntos de no centro fuerte.*

Probaremos que pasa lo mismo para puntos de no bloque.

Sea  $NB = \{p \in X : p \text{ es un punto de no bloque}\}$ .

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces no existe un subcontinuo propio de  $X$  que contenga a  $NB$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $Y$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $NB \subseteq Y$ . Por el Teorema 3.2.1 existe  $x \in X \setminus Y$  tal que el conjunto  $\mathcal{B} = \bigcup \{C \subseteq C(X) : C \subseteq X \setminus \{x\} \text{ con } C \cap Y \neq \emptyset\}$  es denso en  $X$ . Como  $x \notin Y$ ,  $x$  es de bloque y  $d(x, Y) > 0$ . Sea  $\varepsilon = d(x, Y)$ . Consideremos la sucesión  $(\frac{\varepsilon}{2^n})_{n=1}^\infty$ . Claramente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = 0$ . Ahora consideremos  $C_n$  la componente de  $X \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(x)$  que contiene a  $Y$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que el conjunto  $B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(x)$  es abierto, entonces  $C_n$  es cerrado en  $X$ . Por lo que  $C_n$  es un subcontinuo de  $X$ . Por construcción  $C_n \subseteq C_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Mostraremos que  $\bigcup_{n=1}^\infty C_n = X$ .

Para ello mostraremos que  $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ . De esta manera tendremos que  $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^\infty C_n} = X$ . Por lo que  $\bigcup_{n=1}^\infty C_n$  sería densa en  $X$ .

Sea  $C \in \mathcal{B}$  tal que  $C \cap Y \neq \emptyset$  y  $C \subseteq X \setminus \{x\}$ . Si  $r = d(x, C) > 0$  entonces existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que  $0 < \frac{\varepsilon}{2^N} < r$ . Esto implica que  $X \setminus B_r \subseteq X \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2^N}}$ . Dado que  $C_n$  es la componente de  $X \setminus B_{\frac{\varepsilon}{2^N}}$  que contiene a  $Y$  y  $C \cap Y \neq \emptyset$ , entonces  $C \subseteq C_n$ .

Por lo que  $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ . De donde se concluye que  $x$  es de bloque, lo cual contradice la elección de  $x$ .  $\square$

**Corolario 3.2.5.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces  $X$  contiene al menos 2 puntos de no bloque.*

*Demostración.* Primero mostraremos la existencia de un punto de no bloque. Si  $p \in X$  es arbitrario, entonces por el Teorema 3.2.1 existe  $x \in X \setminus \{p\}$  tal que el conjunto  $\bigcup \{C \subseteq C(X) : C \subseteq X \setminus \{x\} \text{ y } p \in C\}$  es denso en  $X$ . Usando la misma prueba del teorema anterior se prueba que  $x$  es un punto de bloque.

Si fuera el único, entonces el subcontinuo  $\{x\}$  sería un subcontinuo propio que contiene a  $x$ . Lo cual contradice el teorema anterior. Por lo que al menos  $X$  debe tener 2 puntos de no bloque.  $\square$

Lo que sigue es mostrar que todo continuo tiene al menos 2 puntos de no corte.

Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Si  $p$  es un punto de corte y  $U$  y  $V$  son 2 abiertos de  $X$  tales que  $X \setminus \{p\} = U \cup V$ , entonces el conjunto  $\{p, U, V\}$  es **llamado una cortadura de  $X$** .

Si  $X$  es un continuo y  $\{p, U, V\}$  es una cortadura, entonces por el Teorema 1.3.2,  $U \cup \{p\}$  y  $V \cup \{p\}$  son continuos.

**Teorema 3.2.6.** *Si  $X$  es un continuo y  $\{p, U, V\}$  es una cortadura entonces cada uno de los conjuntos  $U$  y  $V$  contiene algún punto que no es de corte.*

*Demostración.* Sea  $NC = \{p \in X : p \text{ es de no corte}\}$ . Supongamos que  $NC \cap U = \emptyset$ ; es decir, todos los puntos de  $U$  son de corte. Entonces para cada  $x \in U$  tenemos una cortadura  $\{x, V_x, U_x\}$ . Como  $U_x \cup \{x\}$  y  $V_x \cup \{x\}$  son conexos. Observemos que si  $p \in V_x$  entonces  $U_x \cup \{x\} \subset U$  y si  $p \in U_x \cup \{x\}$  se tiene que  $V_x \cup \{x\}$ . Sin pérdida de generalidad, llamemos  $V_x$  al elemento de la cortadura que contiene a  $p$ . De esta observación se tiene que  $U_x \cup \{x\} \subset U$ .

Consideremos la familia  $\mathcal{F} = \{U_x : x \in U\}$  ordenada parcialmente de la siguiente manera: diremos  $U_x \geq U_y$  si y sólo si  $U_x \subseteq U_y$ .

Sea  $\mathfrak{F} = \{\{U_{x_a}\}_{a \in A} : \{U_{x_a}\}_{a \in A} \text{ es una cadena}\}$  y definamos un orden parcial de la siguiente forma:  $\{U_{x_a}\}_{a \in A} < \{U_{x_b}\}_{b \in B}$ , si  $\{U_{x_a}\}_{a \in A} \subseteq \{U_{x_b}\}_{b \in B}$  ó  $\{x_a\}_{a \in A} \subseteq \{x_b\}_{b \in B}$ .

*Afirmación:* Toda cadena de  $\mathfrak{F}$  tiene cota superior. Para probarlo, sea  $\mathcal{C} = \{\{U_{x_{a_i}}\}_{a_i \in A} : i \in I\}$  una cadena de elementos de  $\mathfrak{F}$ . Mostraremos que  $\mathfrak{C} = \bigcup \{\{U_{x_{a_i}}\}_{a_i \in A} : i \in I\} = \{U_{x_{a_i}}\}_{a_i \in A, i \in I}$  es un elemento de  $\mathfrak{F}$ . Si  $a_k$  y  $b_j$  pertenecen a  $A_i$  entonces  $U_{x_{a_k}}$  y  $U_{x_{b_j}}$  pertenecen a la misma cadena  $\{U_{x_{a_i}}\}_{a_i \in A}$ . Por lo que  $U_{x_{a_i}} < U_{x_{b_j}}$  o viceversa.

Si  $a_k$  pertenece a  $A_i$  y  $b_j$  pertenece a  $A_j$  con  $A_i \neq A_j$  entonces  $U_{x_{a_k}} \in \{U_{x_{a_j}}\}_{a_j \in A_j}$  y  $U_{x_{b_j}} \in \{U_{x_{a_i}}\}_{a_i \in A_i}$ .

Dado que las cadenas anteriores están contenidas en  $\mathcal{C}$  sucede que  $\{U_{x_{a_j}}\}_{a_j \in A_j} \subseteq \{U_{x_{a_i}}\}_{a_i \in A_i}$  o  $\{U_{x_{a_i}}\}_{a_i \in A_i} \subseteq \{U_{x_{a_j}}\}_{a_j \in A_j}$  o viceversa. Por lo tanto se concluye que  $\mathfrak{C}$  es un elemento de  $\mathfrak{F}$  y además es una cota superior. Usando el Lema de Zorn,  $\mathfrak{F}$  tiene un elemento maximal  $\{U_{x_a}\}_{a \in A}$ .

Ahora veamos que  $\bigcap_{a \in A} U_{x_a} = \bigcap_{a \in A} [U_{x_a} \cup \{x_a\}] \dots (1)$

Claramente,  $\bigcap_{a \in A} U_{x_a} \subseteq \bigcap_{a \in A} [U_{x_a} \cup \{x_a\}]$ .

Para la otra contención, queremos ver que para toda  $a \in A$ , existe  $b \in A$  tal que  $x_a \notin U_b$ , así tendremos que las  $x_a$  no están en la intersección  $\bigcap_{a \in A} [U_{x_a} \cup \{x_a\}]$ . Por lo que al tomar la intersección anterior obtenemos (1).

Si existiera  $x_b$  tal que  $x_b \in U_{x_a}$  para toda  $a \neq b$  entonces  $V_{x_a} \cup \{x_a\} \subset U_{x_b} \cup V_{x_b}$ , pero como  $p \in V_{x_a} \cap V_{x_b}$  se tiene que  $V_{x_a} \cup \{x_a\} \subset V_{x_b}$ , por lo que  $x_a$  pertenecería a  $V_{x_b}$ . Entonces  $U_{x_b} \cup \{x_b\} \subseteq U_{x_a} \cup V_{x_a}$ , pero como se supuso que  $x_b \in U_{x_a}$ , se tiene que  $U_{x_b} \cup \{x_b\} \subseteq U_{x_a}$ .

Por lo tanto,  $U_{x_b} \cup \{x_b\} \subseteq \bigcap_{a \in A} [U_{x_a} \cup \{x_a\}] = (\bigcap_{a \neq b} [U_{x_a} \cup \{x_a\}]) \cap U_{x_b} \cup \{x_b\} \subseteq U_{x_b} \cup \{x_b\}$ . De aquí,  $U_{x_b} \cup \{x_b\} = \bigcap_{a \in A} [U_{x_a} \cup \{x_a\}]$ .

Si  $x_b \in U_z$  entonces  $V_{x_b} \cup \{x_b\} \cap U_z \neq \emptyset \dots (2)$ .

Sea  $z \in U_{x_b}$  entonces  $x_b \notin U_z$ .

*Afirmación.* Si  $z \in U_{x_b}$ , entonces  $x_b \notin U_z$ .

Pues  $x_b \in V_{x_b} \cup \{x_b\} \cap U_z$ , de aquí se tiene que  $V_{x_b} \cup \{x_b\} \cap V_z \neq \emptyset \dots (3)$ , porque  $p \in V_{x_b} \cap V_z$ .

De (2) y (3) tenemos que  $V_{x_b} \cup \{x_b\} \subset U_z \cup V_z$ , por lo tanto  $U_z \cup V_z$  es una separación de  $V_{x_b} \cup \{x_b\}$  contradiciendo el hecho de que  $V_{x_b} \cup \{x_b\}$  es conexo. Por lo que  $x_b \notin U_z$ .

De lo anterior, tenemos que  $U_z \cup \{z\} \subset U_{x_b}$ . Por lo tanto,  $U_z \subset U_{x_b} \subset U_{x_a}$  y como  $x_b \notin U_z$ , resulta que  $U_z \neq U_{x_a}$  para toda  $a \in A$ , además  $U_z \geq U_{x_a}$  por lo que la familia  $\{U_{x_a}\}_{a \in A} \cup \{U_z\}$  es una cadena con un elemento más que  $\{U_{x_a}\}_{a \in A}$  lo que contradice lo maximal de la misma. Por lo tanto se tiene (1).

También tenemos que cada conjunto  $U_{x_a} \cup \{x_a\}$  es cerrado y la familia satisface la propiedad de la intersección finita. Así existe un punto  $x_0 \in \bigcap_{a \in A} U_{x_a}$ . Ahora, si  $q$  es un punto de  $U_{x_a}$  entonces  $x_0 \notin U_q$ , de donde  $U_q \subset U_{x_a}$  .... (4)

Como  $x_0 \in U_{x_a}$  para toda  $a \in A$ , se tiene que  $V_{x_a} \cup \{x_a\} \subset V_{x_0}$  de lo que se tiene  $U_{x_a} \subseteq U_{x_{a_0}} \cup \{x_{a_0}\} \subseteq U_{x_a}$  .... (5)

De (4) y (5) se tiene que  $U_q \subset U_{x_a}$  para toda  $a \in A$  y como  $x_0 \notin U_q$  resulta que  $U_q \neq U_{x_a}$  para toda  $a \in A$ , luego la familia  $\{U_{x_a}\}_{a \in A} \cup \{U_q\}$  contiene propiamente a  $\{U_{x_a}\}_{a \in A}$  contradiciendo lo maximal de la familia. La contradicción proviene de suponer que  $NC \cap U = \emptyset$ .

Por lo tanto  $U$  tiene puntos que no son de corte. Análogamente se muestra que  $V$  tiene puntos que no son de corte.  $\square$

**Teorema 3.2.7.** *Todo continuo no degenerado  $X$  tiene al menos dos puntos de no corte.*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo no degenerado. Si  $X$  no contiene puntos de corte ya acabamos, pues todo continuo no degenerado tiene más de un punto por lo tanto tiene más de 2 puntos de no corte. Si  $p$  es un punto de corte de  $X$ , entonces  $p$  genera una cortadura  $\{p, U, V\}$  de  $X$ . Por el Teorema 3.2.6,  $U$  y  $V$  tienen puntos que no son de corte.  $\square$

Nótese que otras formas de probar que un continuo tiene al menos dos puntos de no corte, nos las dan el Teorema 3.2.2 y el Corolario 3.2.5, pues sabemos por lo realizado anteriormente que todo punto de bloque y todo punto orilla son puntos de no corte.

### 3.3. Caracterizaciones del intervalo con puntos en el borde

A continuación daremos una caracterización del intervalo  $[0, 1]$ , usando el concepto de gráfica y puntos de no corte.

**Definición 3.3.1.** *Una **gráfica** es un continuo el cual se puede representar como una unión finita de arcos, tales que para cualesquiera 2 arcos, se tiene ó que son disjuntos ó se intersectan en un punto extremo o se intersectan ambos en sus puntos finales.*

**Ejemplos:**

**Definición 3.3.2.** *Un **árbol** es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.*

Para la caracterización del intervalo, usaremos también el concepto de número de disconexión.

**Definición 3.3.3.** *(Número de disconexión). Sea  $X$  un espacio topológico conexo. Un número cardinal  $n \leq \chi_0$  es llamado **número de disconexión** para  $X$  si para cada subconjunto  $B$  de  $X$  con cardinalidad igual a  $n$ ; es decir, si  $|B| = n$ , se tiene que  $X \setminus B$  no es conexo.*

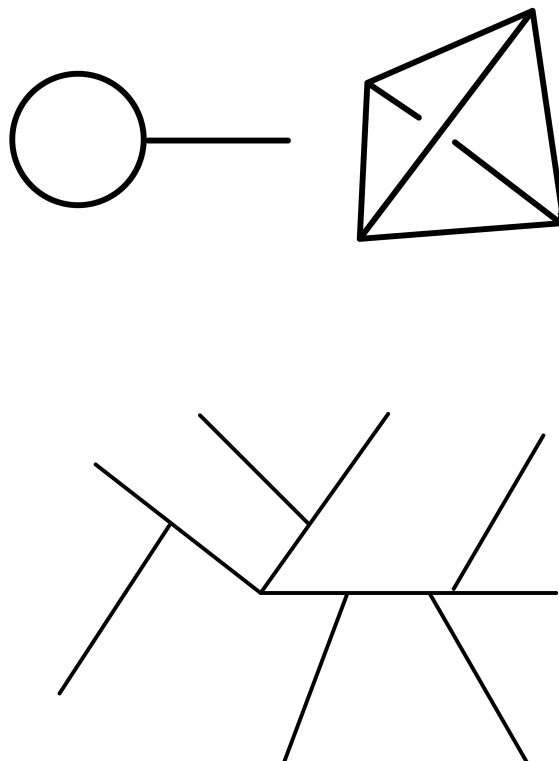


Figura 3.16:

Se denota por  $D(X)$  a un número de desconexión de  $X$  menor o igual que  $\chi_0$ . Denotaremos por  $D^s(X)$  al menor número de desconexión para  $X$ .

### Ejemplos de número de desconexión.

1. Sean  $X = pq$  un arco,  $B = \{p, w, q\}$ ,  $C = \{p, w\}$ ,  $D = \{w\}$ ,  $E = \{p, q\}$  y  $F = \{q\}$ .  
 $|B| = 3$ ,  $|C| = 2$ ,  $|D| = 1$ ,  $|F| = 1$ ,  $|E| = 2$  ni 2, ni 1 son números de desconexión y  $3 = D(X) = D^s(X)$ .
2. Si  $X = S^1$  y  $A = \{p, q, r\}$ , entonces 3 es número de desconexión, sin embargo  $D^s = 2$  ya que al menos necesitamos tener conjuntos de 2 puntos, para tener que su complemento sea desconexo.
3. Si  $X$  representa el continuo de la Figura 3.13., no es difícil convencerse, que 9 por ejemplo es número de desconexión, pero  $D^s(X) = 5$ .

El siguiente resultado no se mostrará pero se dejará la referencia para su consulta.

**Teorema 3.3.4.** ( [12, Teorema 9.24, pp.152] ). Sea  $X$  un continuo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:



Figura 3.17:

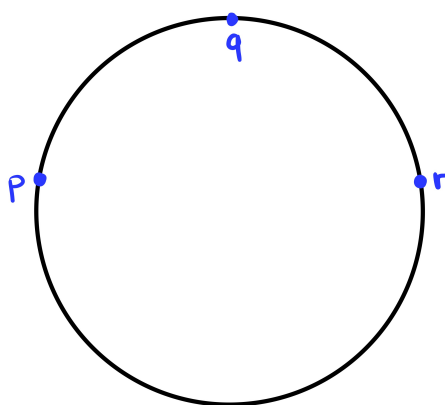


Figura 3.18:

1.  $X$  es una gráfica,
2.  $D(X) < \chi$ .
3. existe  $n \in \mathbb{N}$  el cual es un número de desconexión de  $X$ ; es decir,  $D^n(X) < \chi_0$ .

Definamos a continuación el orden de un conjunto en un continuo.

**Definición 3.3.5.** Sean  $X$  un continuo,  $A \subseteq X$  y  $\beta$  un número cardinal. Se dice que  $A$  **tiene orden**  $\leq \beta$  **en**  $X$ , que denotaremos por  $ord(A, X) \leq \beta$ , si para cada conjunto abierto  $U$  de  $X$ , existe otro abierto  $V$ , tal que  $A \subseteq V \subseteq U$  y  $|Fr(V)| \leq \beta$ .

Diremos que  $A$  es de **orden**  $\beta$  en  $X$ , denotado por  $ord(A, X) = \beta$  si  $ord(A, X) \leq \beta$  y  $ord(A, X) \not\leq \alpha$  para cada número cardinal  $\alpha < \beta$ .

En el caso particular de que  $A = \{p\}$ , se escribe  $ord(p, X)$ , en lugar de  $ord(\{p\}, X)$ , y si  $ord(p, X) = 1$  se dice que  $p$  es un punto extremo de  $X$ .

El siguiente teorema muestra como es el orden de cada punto en una gráfica.

**Teorema 3.3.6.** Si  $X$  es una gráfica, entonces se cumple lo siguiente:

1.  $ord(p, X) < \chi_0$  para todo  $p \in X$ .

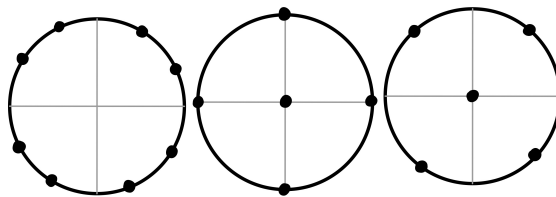


Figura 3.19:

2.  $ord(p, X) \leq 2$  para todo  $p \in X$ , excepto en un número finito de puntos.

*Demostración.* Como  $X$  es la unión finita de arcos que por pares son ajenos ó se unen en un punto extremo ó se unen en sus 2 puntos extremos, entonces podemos tener 3 clases de puntos dentro de la gráfica.

a) **Puntos finales** los cuales tienen orden uno y la cardinalidad de tal conjunto es finito, pues sólo se tienen un número finito de arcos.

b) **Puntos llamados puntos de ramificación** en donde se unen 3 o más arcos cuyo orden es mayor o igual a 3 y menor que  $\chi_0$ . De estos sólo se tiene una cantidad finita, pues la gráfica sólo consiste de un número finito de arcos.

c) **Puntos llamados ordinarios** que son el complemento de la unión de los puntos finales y de ramificación. Dado que  $|X| = 2^{\chi_0}$  y la cardinalidad de los puntos de ramificación unión los puntos finales es finito, entonces la cardinalidad de los puntos de orden 2 es infinita. Esto es,  $ord(p, X) = 2$  para todos excepto para un número finito de puntos.  $\square$

**Teorema 3.3.7.** Si  $X$  es un continuo con una cantidad finita de puntos de no corte, entonces  $X$  es un árbol.

*Demostración.* Sea  $NC = \{p \in X : p \text{ es de no corte}\}$ . Para probar que  $X$  es un árbol, mostraremos primero que  $|NC| + 1$  es un número de desconexión de  $X$ . Sea  $F \subseteq X$  tal que  $|F| = |NC| + 1$ . De lo anterior, existe  $p \in F$  tal que  $p$  es un punto de corte de  $X$ ; es decir,  $X \setminus \{p\}$  es desconexo con al menos 2 componentes, cada cual es no numerable por ser  $X$  no degenerado.

De esta manera como  $p \in F$ , se tiene que  $X \setminus F$  no es conexo y  $|F| < \chi_0$ , de donde se concluye que  $|NC| + 1$  es número de desconexión de  $X$ . Del Teorema 3.3.4.  $X$  es una gráfica.

Supóngase ahora que  $X$  contiene una curva cerrada simple  $S$  y sea  $B = \{w \in S : ord(w, X) > 2\}$ . De la definición de  $B$ , si  $p \in S \setminus B$ , se tiene que  $p$  es de no corte en  $X$ , pues  $S \setminus \{p\}$  es conexo. Si  $x \in X \setminus S$ , existe un arco  $A$  en  $X$ , que va de  $x$  a un punto  $w \in B$  tal que  $A \cap S = \{w\}$ . Dicho de otra manera  $(S \setminus B) \subseteq NC$ . Dado que  $|B| < \chi_0$  por la condición 2) del Teorema 3.3.6, se tiene que  $|S \setminus B| \geq \chi_0$ , lo cual contradice que

$|NC| < \chi_0$ . Por lo tanto  $X$  no tiene curvas cerradas simples. De donde se concluye que  $X$  es un árbol.  $\square$

**Corolario 3.3.8.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado y sea  $N$  el conjunto de todos los puntos de no corte de  $X$ . Entonces ningún subconjunto propio conexo de  $X$  contiene a  $N$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe un subconjunto propio conexo  $C$  de  $X$  tal que  $N \subseteq C$ . Como  $C$  es propio, sea  $z \in X \setminus \{C\}$ . Dado que  $N \subseteq C$ , entonces  $z$  es un punto de corte, es decir  $X \setminus \{z\} = A|B$  para algunos subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $X$ . Dado que  $z \notin C$ , entonces  $C \subseteq X \setminus \{z\}$ .

Por otra parte, por el Teorema 3.2.6  $A$  y  $B$  tienen puntos de no corte, es decir  $N \cap A \neq \emptyset$  y  $N \cap B \neq \emptyset$  y dado que  $N \subseteq C$ , entonces  $C \cap A \neq \emptyset$  y  $C \cap B = \emptyset$ .

De esta manera, como  $C \subseteq X \setminus \{z\} = A|B$  se tiene que  $C$  es desconexo, lo cual es una contradicción. Por lo que estuvo mal suponer que  $C$  es propio.  $\square$

El siguiente resultado muestra una caracterización del arco en términos de sus puntos de no corte.

**Teorema 3.3.9.** *Un continuo  $X$  es un arco si y sólo si  $X$  tiene exactamente dos puntos de no corte.*

*Demostración.*  $\implies$ ) Un arco al ser homeomorfo a un intervalo, solo tiene 2 puntos de no corte.

$\impliedby$ ) Supongamos que  $X$  es un continuo con exactamente dos puntos de corte  $p$  y  $q$ . Por el Teorema 3.3.7  $X$  es un árbol, por definición de árbol es un continuo arco conexo. Así, existe un arco  $\beta$  de  $X$  que va de  $p$  a  $q$ , usando el corolario anterior se deduce que  $\beta = X$  es decir;  $X$  es un arco.  $\square$

A continuación daremos una caracterización del arco en términos de puntos de irreducibilidad.

**Definición 3.3.10.** *Sean  $X$  un continuo y  $A \subseteq X$ . Diremos que  $X$  es **irreducible alrededor de  $A$**  si no existe un subcontinuo propio que lo contenga. Si  $A = \{p, q\}$ , se dice que  $X$  es **irreducible entre  $p$  y  $q$** . A los puntos  $p$  y  $q$  se les suele llamar **puntos de irreducibilidad**.*

*Se dirá que  $X$  es **irreducible** si existen 2 puntos de  $X$  en donde  $X$  es irreducible entre ellos. Diremos que  $p$  es un punto de irreducibilidad si existe otro punto  $q \in X$ , para el cual  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ .*

**Definición 3.3.11.** *Un continuo  $X$  es únicamente irreducible si sólo tiene 2 puntos de irreducibilidad.*

Un resultado importante en teoría de continuos que caracteriza a los continuos indescomponibles es el siguiente.

**Teorema 3.3.12.** ([12, Corolario 11.19]). *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces  $X$  es indescomponible si y sólo si cada punto de  $X$  es de irreducibilidad.*

Como consecuencia de lo anterior tenemos que si un continuo es únicamente irreducible entonces es descomponible.

**Definición 3.3.13.** Sean  $X$  un continuo y  $A, B$  subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ . Decimos que un subconjunto continuo  $C$  de  $X$  es irreducible de  $A$  a  $B$ , y escribimos:

$$C = irr(A, B)$$

siempre que  $C \cap A \neq \emptyset, C \cap B \neq \emptyset$  y ningún subconjunto continuo propio de  $C$  intersecta tanto a  $A$  como a  $B$ . Si  $A$  o  $B$  son conjuntos unipuntuales, omitimos la notación de conjunto; así, por ejemplo, si  $A = \{p\}$  y  $B = \{q\}$  como se indicó antes, decimos que  $C$  es irreducible de  $p$  a  $q$  y escribimos

$$C = irr(p, q)$$

que es la definición de irreducible entre 2 puntos.

**Proposición 3.3.14.** ([12, Proposición 11.30, pp. 212]). Si  $X$  es un continuo y  $A, B$  son subconjuntos compactos de  $X$ , entonces existe un subcontinuo  $C$  de  $X$  que es irreducible entre  $A$  y  $B$ .

**Teorema 3.3.15.** Sea  $X$  un continuo no degenerado.  $X$  es un arco si y sólo si cada subcontinuo no degenerado de  $X$  es únicamente irreducible.

*Demostración.*  $\implies$ ) Si  $X$  es un arco, claramente  $X$  es únicamente irreducible y cada uno de sus subcontinuos no degenerados es únicamente irreducible.

$\impliedby$ ) Supongamos que existen  $p, q \in X$ , tales que  $X$  es únicamente irreducible entre  $p, q$ . Sea  $r \in X \setminus \{p, q\}$ . Sea  $A = \{r, p\}$  y  $B = \{r, q\}$ . Entonces por la Proposición 3.3.14, existen subcontinuos, en este caso propios,  $H$  y  $K$  de  $X$  tales que  $H$  es irreducible entre  $r$  y  $p$ ,  $K$  es irreducible entre  $r$  y  $q$ .

Demostraremos que  $H \cap K = \{r\}$ . Notemos primero que  $X = K \cup H$  pues  $X$  es irreducible.

Supongamos que existe  $s \neq r$  tal que  $s \in H \cap K$ . Como  $H$  es únicamente irreducible, entonces  $s$  no es punto de irreducibilidad de  $H$ . Esto implica que existe  $H'$  un subcontinuo propio de  $H$  tal que  $s, p \in H'$ , más aún  $r \notin H'$ . De igual forma existe un subcontinuo propio  $K'$  de  $K$  tal que  $s, q \in K'$  y  $r \notin K'$ . Por lo que  $H' \cup K'$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene a  $p$  y  $q$ , lo cual contradice que  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ . Por lo que  $H \cap K = \{r\}$ . De esta manera  $r$  es un punto de corte pues  $X \setminus \{r\} = (H \setminus \{r\}) \cup (K \setminus \{r\})$  es decir  $X \setminus \{r\}$  es disconexo.

Así, cada  $r \notin \{p, q\}$  es un punto de corte. Por otra parte sabemos que todo continuo no degenerado tiene al menos 2 puntos de no corte. Esto implica que  $p$  y  $q$  deben ser los únicos puntos de no corte. De la caracterización del arco con puntos de no corte, tenemos que  $X$  es un arco.  $\square$

**Definición 3.3.16.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Definimos **la composante** denotada por  $K(p)$  como la unión de todos los subcontinuos propios de  $X$  que contienen a  $p$ . Equivalentemente,

$$K(p) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo propio } H \text{ tal que } x, p \in H\}.$$

No es difícil probar que las composantes son densas.

**Teorema 3.3.17.** *Sea  $X$  un continuo, si  $p$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ , entonces  $p$  es un punto orilla de  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $p$  y  $q$  puntos de irreducibilidad y  $\varepsilon > 0$ . La familia  $\mathcal{B} = \{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x) : x \in X\}$  es una cubierta abierta de  $X$ . Por la compacidad de  $X$ , existen  $x_i \in X$ ,  $i = 1, \dots, n$  tales que  $X = \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i)$ . Sea  $K(q)$  la composante en  $X$  que contiene a  $q$ . Por la densidad de  $K(q)$ , existe  $K_i \subseteq K(q)$  tal que  $B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i) \cap K_i \neq \emptyset$  y  $K_i \subseteq X \setminus \{p\}$  para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Sea  $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$ . Entonces  $K \in C(X)$ , pues  $q \in \bigcap_{i=1}^n K_i$ ,  $p \notin K$  y por construcción  $H(K, X) < \varepsilon$ . Por lo que  $p$  es un punto orilla.  $\square$

El siguiente resultado se usará sin demostración, pero se deja una referencia para su consulta.

**Teorema 3.3.18.** ([9, Corolario 2, pp.437]). *Sea  $X$  un continuo irreducible y hereditariamente descomponible. Si  $p$  es un punto orilla de  $X$ , entonces  $p$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ .*

**Lema 3.3.19.** *Sea  $X$  un continuo únicamente irreducible entre los puntos  $y$  y  $z$ . Si  $B$  es un subcontinuo propio indescomponible de  $X$ , entonces  $\{z, y\} \cap B = \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $z \in B$  y  $y \notin B$ . Nótese que, no puede ocurrir que  $z, y \in B$ . Pues  $X$  es únicamente irreducible entre  $y$  y  $z$ . Sea  $w \in B$  tal que  $w \neq z$  y  $w$  está en la composante  $K(z)$  en  $B$ . Es posible elegirlo pues  $B$  es no degenerado.

Por definición de composante existe un subcontinuo propio de  $B$  y por tanto de  $X$  que contiene a  $w$  y  $z$ . Por lo que  $w$  no es un punto de irreducibilidad de  $X$ . De esta manera, existe un subcontinuo propio  $K$  de  $X$  tal que  $\{w, y\} \subseteq K$ .

Como  $w \in K(z)$ , existe  $C$  un subcontinuo propio de  $B$  que contiene a  $\{w, z\}$ . Así,  $C \cup K$  es un subcontinuo propio que contiene a  $y$  y  $z$ , lo que contradice la hipótesis.  $\square$

**Teorema 3.3.20.** *Sea  $X$  un continuo únicamente irreducible y  $p$  un punto orilla de  $X$ . Entonces  $p$  es un punto de irreducibilidad.*

*Demostración.* Se sabe que en un continuo indescomponible, todo punto es de irreducibilidad. De esta manera, como  $X$  es únicamente irreducible entonces  $X$  debe ser descomponible. Esto implica que existen subcontinuos propios  $Z$  y  $Y$  de  $X$  tales que  $X = Y \cup Z$ .

Si  $X$  fuera hereditariamente descomponible, entonces por el Teorema 3.3.12,  $p$  sería un punto de irreducibilidad y terminaríamos la prueba.

Si  $X$  no es hereditariamente descomponible, consideremos a  $y$  y  $z$  los únicos puntos de irreducibilidad de  $X$ . Nótese que  $y$  y  $z$  no pueden estar en  $Y$  y  $Z$  a la vez por la irreducibilidad de  $X$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos  $y \in Y \setminus Z$  y  $z \in Z \setminus Y$ . Por el Lema 3.3.19, tanto  $Y$  como  $Z$  son descomponibles. Así, existen  $Y_1, Y_2$  y  $Z_1, Z_2$  subcontinuos propios

de  $Y$  y  $Z$  respectivamente tales que  $Y = Y_1 \cup Y_2$  y  $Z = Z_1 \cup Z_2$ . De igual manera, podemos suponer que  $y \in Y_1 \setminus Y_2$  y  $z \in Z_2 \setminus Z_1$ .

Si suponemos que  $p \notin \{y, z\}$ , entonces  $p \notin Y_1 \cup Z_2$ .

Sea  $0 < \varepsilon < r = \frac{\min}{4}\{d(z, Z_1), d(z, Y), d(y, Z), d(y, Y_2)\}$  tal que  $B_\varepsilon(y) \subseteq X \setminus (Y_2, Z) \subseteq Y_1$  y  $B_\varepsilon(z) \subseteq X \setminus (Z_1 \cup Y) \subseteq Z_2$ . Dado que  $p$  es un punto orilla, existe  $C \in C(X)$  tal que  $p \notin C$  y  $H(C, X) < \varepsilon$ . Notemos que  $Y_1 \cup C \cup Z_2$  es un continuo que no contiene a  $p$ . Como  $y, z \in X$ , entonces existen  $c_1$  y  $c_2$  en  $C$  tales que  $d(y, c_1) < \varepsilon$  y  $d(z, c_2) < \varepsilon$ ; esto es,  $c_2 \in B_\varepsilon(z)$  y  $c_1 \in B_\varepsilon(y)$ . Por lo que  $C \cap Y_1 \neq \emptyset$  y  $C \cap Z_2 \neq \emptyset$ .

Así,  $Y_1 \cup C \cup Z_2$  es subcontinuo propio que contiene a  $y$  y  $z$ , lo cual contradice que  $X$  es irreducible entre  $y$  y  $z$ . Por lo tanto,  $p \in \{y, z\}$ ; es decir,  $p$  es un punto de irreducibilidad.  $\square$

**Proposición 3.3.21.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces  $X$  es únicamente irreducible si y sólo si  $X$  tiene sólo 2 puntos orilla.*

*Demostración.*  $\implies$ ) Si  $X$  es únicamente irreducible, entonces por el Teorema 3.3.18 cada punto de irreducibilidad es orilla. Entonces al menos los 2 puntos de irreducibilidad son orilla, si existiera otro punto orilla diferente, entonces el Teorema 3.3.20 el punto sería de irreducibilidad distinto a los de irreducibilidad únicos de  $X$ . Lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, sólo se tienen 2 puntos orilla.

$\impliedby$ ) Notemos primero que  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$  donde  $p$  y  $q$  son los puntos orilla. De no ser así, existiría un subconjunto propio  $K$  de  $X$  tal que  $\{p, q\} \subset K$ . Por el Teorema 3.2.1 existe  $w \in X \setminus K$  tal que  $D = \bigcup\{C \in C(X) : C \subseteq X \setminus \{w\} \text{ y } C \cap K \neq \emptyset\}$  es denso en  $X$ . Por algunas pruebas ya realizadas  $w$  sería un punto orilla, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto,  $X$  es irreducible. Si  $X$  tuviera más puntos de irreducibilidad,  $X$  tendría más puntos orilla, por el Teorema 3.3.20. Así,  $X$  es únicamente irreducible.  $\square$

**Corolario 3.3.22.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado  $X$  es un arco si y sólo si cada subcontinuo no degenerado tiene exactamente 2 puntos orilla.*

*Demostración.*  $\implies$ ) Es claro.

$\impliedby$ ) Si cada subcontinuo  $K$  de  $X$  tiene sólo 2 puntos orilla, entonces por la Proposición 3.3.21,  $K$  es únicamente irreducible y por el Teorema 3.3.15,  $X$  es un arco.  $\square$

## 3.4. Continuos encadenables, irreducibilidad y puntos en el borde

A continuación veremos que los puntos de irreducibilidad también son de no bloque.

**Teorema 3.4.1.** *Cada punto de irreducibilidad en un continuo no degenerado es de no bloque.*

*Demostración.* Si  $p$  es un punto de irreducibilidad, entonces existe  $q \in X \setminus \{p\}$  tal que  $q$  es de irreducibilidad. Esto implica que no existe subcontinuo propio que contenga a

$p$  y  $q$ . Dicho de otra manera  $p$  no está en la composante  $K(p)$ , que como sabemos es densa. Por [12, Proposición 11.14, pp. 203] se puede expresar como unión numerable y creciente de subcontinuos que no contienen a  $p$ . Así,  $p$  es punto de no bloque.  $\square$

Como consecuencia inmediata del resultado anterior y del Teorema 3.4.1, se tiene que todo punto en un continuo indescomponible no degenerado es de no bloque.

Además, de las implicaciones mostradas en la Sección 3.1 y del teorema anterior se tiene que los puntos de irreducibilidad son entonces de orilla, de no centro fuerte y de no corte.

**Definición 3.4.2.** *Un continuo  $X$  se dice que es **encadenable** si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe una colección finita de subconjuntos abiertos  $\{U_i\}_{i=1}^n$  de  $X$  tal que:*

1. Cada  $U_i$  tiene un diámetro menor que  $\varepsilon$ , es decir,  $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
2.  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$  (es decir, la colección  $\{U_i\}_{i=1}^n$  cubre  $X$ ).
3. Para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ ,  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ .

**Lema 3.4.3.** *Sea  $X$  un continuo encadenable y descomponible. Si  $X = A \cup B$  con  $A, B \in C(X) \setminus \{X\}$ , entonces cada  $p \in A \cap B$  es punto de centro fuerte.*

*Demostración.* Sea  $p \in A \cap B$  y supongamos que  $p$  no es un punto de centro fuerte. Consideremos los conjuntos abiertos no vacíos  $X \setminus A$  y  $X \setminus B$ . Como  $p$  no es de centro fuerte, existe un continuo  $M$  que intersecta a  $A$  y  $B$  pero no contiene a  $p$ . Esto implica que

$$M \cup (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B) \cup (A \cap B)$$

forma un triodo débil. Esto es una contradicción con el hecho de que los continuos encadenables no contienen triodos débiles. [12, Corolario 12.7]  $\square$

**Proposición 3.4.4.** *Sean  $X$  un continuo encadenable y  $p \in X$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1.  $p$  es un punto de irreducibilidad.
2.  $p$  es un punto de bloque.
3.  $p$  es un punto orilla.
4.  $p$  es un punto de no centro fuerte.

*Demostración.* Por el Teorema 3.4.2, 1)  $\Rightarrow$  2) y Teorema 3.1.4, Proposición 3.1.6, 2)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  4). Para probar 4)  $\Rightarrow$  2). Tomaremos dos casos:  $X$  indescomponible y  $X$  descomponible. Si  $X$  es indescomponible por el Teorema 3.3.12,  $p$  es un punto de irreducibilidad. Así, por el Teorema 3.4.1  $p$  es de no bloque. Supongamos que  $X$  es descomponible. Sea  $X = K \cup L$ , con  $L$  y  $K$  subcontinuos propios de  $X$ . Por el Lema 3.4.3,  $p \notin K \cap L$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $p \in K \setminus L$ .

Como  $X$  es métrico compacto, es separable y por lo tanto segundo numerable. Sea  $\mathcal{B}' = \{B'_m : m \in \mathbb{N}\}$  una base de  $X$  y por lo tanto existe una base  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$  numerable para  $X \setminus \{p\}$ . Digamos que  $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Dado que  $p$  es de no centro fuerte, existe para cada  $n \in \mathbb{N}$  un continuo  $M_n$  que interseca a  $B_n$  y a  $X \setminus K$  y  $p \notin M_n$ .

Si consideramos  $P_n = L \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$ , tenemos que  $P_n$  es un continuo para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \notin P_n$  y  $P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \dots \subseteq P_n$  y por la elección de  $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$  y  $\bigcup P_n$  es densa en  $X$ . Por lo que  $p$  es de no bloque. Por lo que 4)  $\Rightarrow$  2).

Para tener toda la equivalencia es suficiente mostrar que 2)  $\Rightarrow$  1). Procediendo como en la implicación anterior, podemos suponer que  $X$  es descomponible es decir, existen  $H$  y  $L$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = H \cup L$ . Así mismo, podemos suponer que  $p \in K \setminus L$ . Como sabemos todo continuo tiene al menos 2 puntos de no bloque y además no existen subcontinuos propios que contengan al conjunto de puntos de no bloque. Así, existiría otro punto de no bloque  $q$  tal que  $q \in L \setminus K$ . Se mostrará que  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$  y con ello terminaríamos la prueba.

Supongamos que existe un subcontinuo propio  $K$  de  $X$  tal que  $p, q \in K$ . Sea  $a \in K \cap H \cap L$ . Notemos que  $a$  es un punto de centro fuerte por el Lema 3.4.3. Por otra parte al menos uno de los conjuntos  $H \setminus K$  ó  $L \setminus K$  son no vacíos, de lo contrario  $H \setminus K = \emptyset = L \setminus K$  del hecho de que  $X = H \cup L$  tendríamos que  $X = H \cup L = K$ , lo que implicaría que  $K$  no es propio, contradiciendo que  $K$  es propio.

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $H \setminus K \neq \emptyset$ . Así, dado que  $p$  es un punto de no bloque existe una sucesión  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  de subcontinuos de  $X$  tal que  $p \notin A_n$ ,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  y  $\overline{\bigcap A_n} = X$ .

Por ello existe  $N$  lo suficientemente grande tal que  $x \in A_N$  y  $(H \setminus K) \cap A_N \neq \emptyset$ .

Con ello  $(L \cap A) \cup (K \cap A) \cup (K \cap B)$  es un triod débil, lo cual contradice que  $X$  es encadenable. (Ver [12, Corolario 12.7])

Por o tanto  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ , lo que implica que  $p$  es de irreducibilidad de  $X$ .  $\square$

Como corolario tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.4.5.** *Sea  $X$  un continuo encadenable. Entonces,  $X$  es indescomponible si y sólo si cada punto es de no bloque si y sólo si cada punto es de no centro fuerte.*

Otro corolario es el siguiente:

**Corolario 3.4.6.** *Sea  $X$  un continuo encadenable. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1.  $X$  es un arco.
2.  $X$  tiene exactamente 2 puntos de no corte.
3. Cada subcontinuo no degenerado de  $X$  es únicamente irreducible.
4. Cada subcontinuo no degenerado de  $X$  tiene exactamente 2 puntos orilla.
5. Cada subcontinuo no degenerado de  $X$  tiene exactamente 2 puntos de no bloque.

6. Cada subcontinuo no degenerado de  $X$  tiene exactamente 2 puntos de no centro fuerte.

*Demostración.* Por el Teorema 3.3.9, 1)  $\iff$  2).

Por el Teorema 3.3.15, 1)  $\iff$  3).

Por la Proposición 3.3.21, 3)  $\iff$  4).

Por el Corolario 3.3.22, 1)  $\iff$  4) y por la Proposición 3.4.4, 4)  $\iff$  5)  $\iff$  6).

Con todo ello tenemos prueba de la equivalencia.  $\square$

Como observación los puntos de no corte bajo esta caracterización son de bloque, orilla, de no centro fuerte y de irreducibilidad.

### 3.5. Conjuntos $G_\delta$ y $F_\sigma$ y puntos en el borde

**Definición 3.5.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un subconjunto  $A \subseteq X$  es un **conjunto**  $G_\delta$  si existe una sucesión  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$  de conjuntos abiertos en  $X$  tal que  $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ . Es decir,  $A$  puede ser expresado como la intersección numerable de conjuntos abiertos de  $X$ .

**Definición 3.5.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Un subconjunto  $A \subseteq X$  es un **conjunto**  $F_\sigma$  si existe una sucesión  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  de conjuntos cerrados en  $X$  tal que  $A = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ . Es decir,  $A$  puede ser expresado como la unión numerable de conjuntos cerrados en  $X$ .

**Proposición 3.5.3.** El complemento de un conjunto  $F_\sigma$  es un conjunto  $G_\delta$ , y el complemento de un conjunto  $G_\delta$  es un conjunto  $F_\sigma$ .

*Demostración.* Supongamos que  $A \subseteq X$  es un conjunto  $F_\sigma$ . Entonces podemos escribir a  $A$  como la unión numerable de conjuntos cerrados  $A = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ .

Necesitamos demostrar que  $X \setminus A$  es un conjunto  $G_\delta$ .

El complemento de  $A$  en  $X$  es  $X \setminus A = X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ . Por las leyes de De Morgan, sabemos que el complemento de la unión es la intersección de los complementos.

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty F_n = \bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus F_n)$$

Cada  $X \setminus F_n$  es abierto porque  $F_n$  es cerrado. Por lo tanto,  $X \setminus A = \bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus F_n)$ . Por lo que,  $X \setminus A$  es un conjunto  $G_\delta$ .

Ahora debemos demostrar que el complemento de  $G_\delta$  es  $F_\sigma$ .

Supongamos que  $B \subseteq X$  es un conjunto  $G_\delta$ . Entonces, podemos escribir  $B$  como una intersección numerable de conjuntos abiertos  $B = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$  donde  $U_n$  es un abierto en  $X$ .

Por último, tenemos que demostrar  $X \setminus B$  es un conjunto  $F_\sigma$ .

El complemento  $B$  en  $X$  es  $X \setminus B = X \setminus \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ . Utilizando las leyes de De Morgan, sabemos que el complemento de una intersección es la unión de los complementos

$$X \setminus \bigcap_{n=1}^\infty U_n = \bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus U_n)$$

Cada  $X \setminus U_n$  es cerrado porque  $U_n$  es abierto. Por lo tanto,  $X \setminus B$  es una unión numerable de conjuntos cerrados

$$X \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n)$$

Por lo que,  $X \setminus B$  es un conjunto  $F_{\sigma}$  □

**Proposición 3.5.4.** *Sea  $X$  un continuo. Se cumple:*

1. *El conjunto de puntos de conexidad colocal es  $G_{\delta}$ .*
2. *El conjunto de puntos orilla es  $G_{\delta}$*
3. *El conjunto de puntos de no centro es  $G_{\delta}$*

*Demostración.* 1. Sea  $C$  el conjunto de todos los puntos de conexidad colocal.

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe una cubierta abierta  $\mathcal{B}_n$  de  $C$  por conjuntos abiertos de diámetro menor que  $\frac{1}{n}$  cuyos complementos en  $X$  son conexos. Demostraremos que  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_n$ .

Para demostrar que  $C \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_n$ . Sea  $x \in C$ . Por definición de  $C$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe una cubierta abierta  $\mathcal{B}_n$  de  $C$  que consiste en conjuntos abiertos de diámetro menor que  $\frac{1}{n}$  y cuyos complementos en  $X$  son conexos. Esto significa que para cada  $n$ , existe un conjunto  $B_n \in \mathcal{B}_n$  tal que  $x \in B_n$ . Por lo tanto,  $x \in \bigcup \mathcal{B}_n$  para cada  $n$ , lo que implica que  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_n$ .

Para la otra contención. Supongamos que  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup \mathcal{B}_n$ . Esto implica que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe algún conjunto  $B_n \in \mathcal{B}_n$  tal que  $x \in B_n$ . Como  $\mathcal{B}_n$  es una cubierta de  $C$  con los conjuntos de diámetro menor que  $\frac{1}{n}$  y cuyos complementos en  $X$  son conexos, esto implica que  $x$  es un punto de conexidad colocal. Por lo tanto,  $x \in C$ .

2. Para  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $G_n$  un conjunto de todos los puntos  $p$  en  $X$  para el cual existe un continuo  $\frac{1}{n}$ -denso en  $X \setminus \{p\}$  entonces  $G_n$  es abierto y necesitamos demostrar que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  es el conjunto de todos los puntos orilla de  $X$ .

Sea  $p \in X$  tal que  $p$  es orilla y  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $\epsilon = \frac{1}{n}$ , existe  $Y \in C(X)$  tal que  $p \notin Y$  y  $H(Y, X) < \frac{1}{n}$ . Por lo que,  $p \in G_n$ .

Sea  $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  y  $\epsilon > 0$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \epsilon$ . Como  $p \in G_n$ , existe  $Y \in C(X)$  tal que  $p \notin Y$  y  $H(Y, X) < \frac{1}{n} < \epsilon$ . Por lo que,  $p$  es orilla.

3. Sea  $\mathcal{B}$  una base numerable de  $X$ . El conjunto de todos los puntos de no centro fuerte se puede expresar como:

$$F = \bigcap_{A, B \in \mathcal{B}} (\bigcup \{X \setminus K : K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap B, K \text{ continuo}\} = K(A, B))$$

$\subseteq$  Sean  $p \in F$  y  $A, B \in \mathcal{B}$  tales que dados  $A$  y  $B$  existe  $K$  un continuo que no contiene a  $p$ ,  $K \cap A$  y  $K \cap B$ .

$\supseteq$  Sea  $p \in \bigcap_{A, B \in \mathcal{B}} (\bigcup \{X \setminus K : K \cap A \neq \emptyset \neq K \cap B, K \text{ continuo}\} = K(A, B))$ . Tenemos que demostrar que para cada par de abiertos distintos del vacío  $U$  y  $V$ , hay un subcontinuo  $K$  tal que  $U \cap K \neq \emptyset \neq V \cap K$  y no contiene a  $p$ .

Tomemos  $x \in U$  y  $y \in V$  existen  $A_0, B_0 \in \mathcal{B}$  tales que  $x \in A_0 \subseteq U$  y  $y_0 \in B_0 \subseteq V$ , entonces  $K \cap A_0 \neq \emptyset \neq K \cap B_0$ , por lo que  $p \in K(A_0, B_0) = \bigcup \{X \setminus K : K \cap A_0 \neq \emptyset \neq K \cap B_0, K \text{ continuo}\}$ , entonces  $p \in X$  y  $p \notin K$ .

□

# Bibliografía

- [1] D. Anderson, *Shore and non-block points in Hausdorff continua*, Topology and its Appl. 193 (2015), 152-161.
- [2] R. H. Bing, *Some characterizations of arcs and simple closed curves*, Amer. J. Math. 70 (1948), 497- 506.
- [3] J. Bobok, P. Pyrih, B.Vejnar, *Non-cut, shore and non-block points in continua*, Glas. Mat. (2016), 237-253.
- [4] J. Bobok, *Union of shore sets in a dendroid*, C.T.University in Prague. (2010), 37-47.
- [5] E. E. Grace, *Aposyndesis and weak cutting*, General topology and modern analysis, Academic Press, New York (1981), 71-82.
- [6] B. Honari, Y.Bahrampour, *cut point spaces*, Proc. Amer. Mat. Soc. 127 (1999), 2797-2803.
- [7] A. Illanes, P.Krupski, *Blockers in hyperspaces*, Topology and its Applications. 158 (2011), 653-659.
- [8] A. Illanes *Hiperespacios de continuos*, Ap. Mat. (2004).
- [9] R. Leonel, *Shore points of a continuum*, Topology and its Application. 161 (2014), 433-441
- [10] L. Montejano, I. Puga, *Shore points in dendroids and Canonical pointed hyperspaces*, Topology and its Applications 46 (1992), 41-54.
- [11] R. L. Moore, *Concerning simple continuous curves*, Trans. Math. Soc. 21 (1920), 333-347.
- [12] S. B. Nadler, Jr. *Continuum theory an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math, Vol. 158, Marced Dekker, New York (1992).
- [13] V. Nall, *Center and Shore points of a dendroid*, Topology and its Applications. 154 (2007), 2167-2172.
- [14] V. Neumann-Lara, I. Puga, *Shore points and dendrites*, Proc.Amer, Math. Soc. 118 (1993), 939-942.

- [15] S. Pérez Trejo, F. Capulín Pérez, *Caracterizaciones del Intervalo*, Tesis, UNAM (2002).
- [16] P. Pyrih, B. Vejnar, *A lambda-dendroid with two shore points whose union is not a shore set*, *Topology and its Applications* 159 (2012), 64-74.
- [17] A. L. Ramírez, R. Leonel, *Puntos de no corte, orilla, no bloque y z-puntos*, Tesis, UAEH (2017).
- [18] G. Whyburn, *Concerning the cut points of continua*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 30 (1928), 597-609.
- [19] G. Whyburn, *Semi-Locally Connected Sets*, *American Journal Mathematics*, Vol.61, No. 3 (1939), 733-749.