Universidad Autónoma Del Estado De México

Facultad de Ciencias

Sobre las superficies minimales

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Hector Fernando Illana Mascada

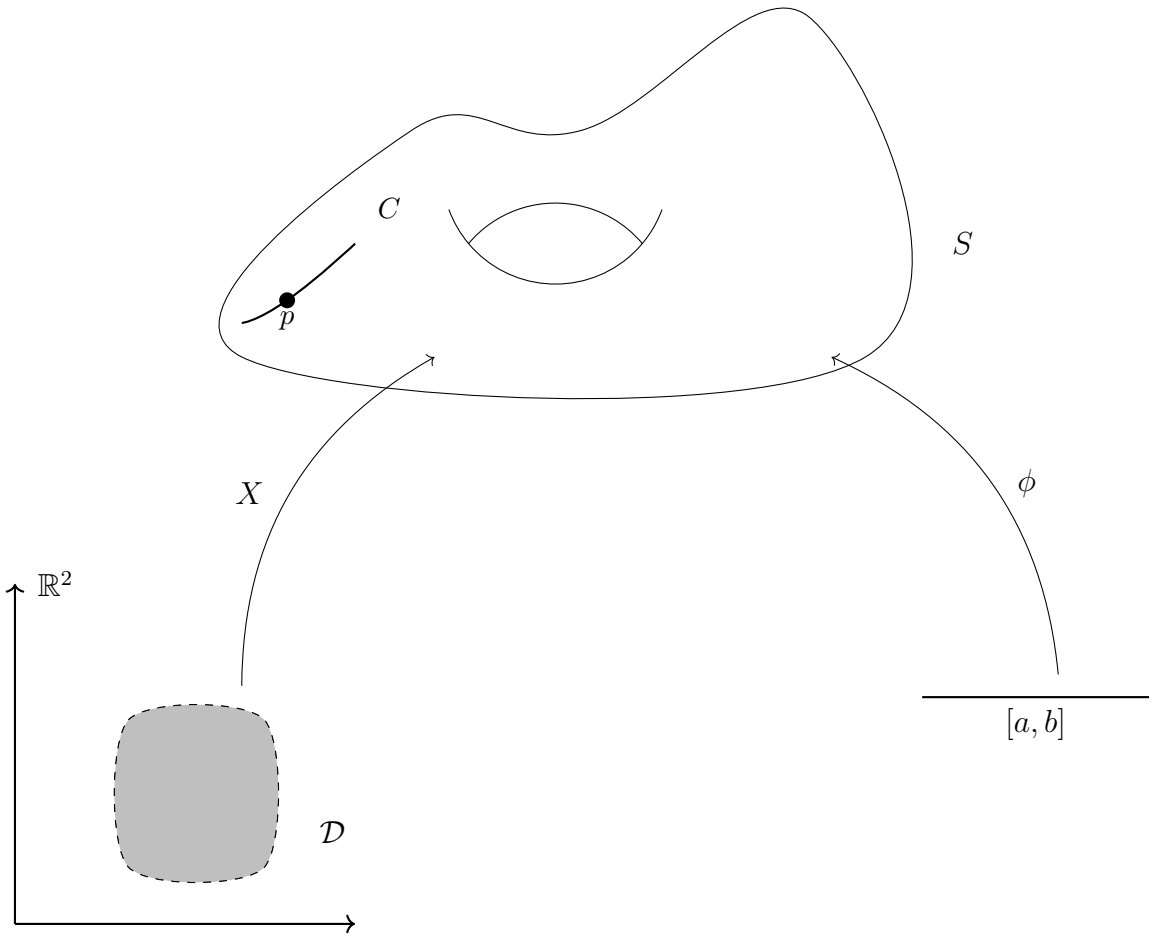
ASESOR:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
06 de marzo de 2025

"El único modo de lograr lo imposible es convenciéndose de que sí es posible."

— El Sombrerero Loco, *Alicia en el País de las Maravillas* (2010).



Índice general

Índice general **IV**

Índice de figuras **V**

Introducción **1**

1 Teoría local de las superficies minimales no paramétricas **5**

1.1 Superficies no paramétricas 9

1.2 Ecuación de las superficies minimales. 17

1.3 Ejemplos de superficies minimales 19

1.4 Superficies minimales no paramétricas en $\mathbb{R}^n$ 28

2 El problema de minimizar el área de una superficie **35**

2.1 Superficies que minimizan el área 40

3 Parámetros isotérmicos **47**

4 Teorema de Bernstein **65**

5 Teoría global de superficies paramétricas **79**

5.1 Superficies minimales con frontera 86

5.2 Representación de Enneper y Weierstrass de una superficie minimal en $\mathbb{R}^3$ . . 96

5.3 La apliación de Gauss para superficies en $\mathbb{R}^3$ 111

5.4 Curvatura Gaussiana y curvatura total de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$ 122

6 Superficies de revolución, regladas y la de Catalán **151**

6.1 Superficies de revolución 151

6.2 Superficies regladas 155

6.3 Deformación de la Helicoide en la Catenoide 160

6.4 Superficie de Catalán 165

Apéndices **171**

Apéndice A **173**

Apéndice B **191**

Apéndice C **199**

Bibliografía **205**

Índice de figuras

1.1 Superficie S en $\mathbb{R}^n$ 5

1.2 Superficie minimal de la Helicoide 19

1.3 Superficie minimal de la Catenoide 21

1.4 Superficie minimal de Scherk 23

1.5 (a) Punto de concavidad y (b) Punto de no concavidad 32

1.6 Tablero de ajedrez donde esta definida la superficie de Scherk 34

2.1 Variación normal de $X(\mathcal{D})$ para $\lambda > 0$ 36

3.1 Superficie minimal de Enneper 56

5.1 Una n-variedad $\mathcal{M}$ con una estructura determinada por $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta$ 80

5.2 Proyección estereográfica desde el polo norte 82

5.3 A es simétrico con respecto a L 87

5.4 Curva cerrada simple Γ y la superficie acotada Σ. 89

5.5 Superficie minimal de Henneberg 111

5.6 $\mathbb{S}^2$ menos un punto 116

5.7 $\mathbb{S}^2$ menos dos puntos 117

5.8 $\mathbb{S}^2$ menos 4 puntos 118

5.9 Superficie minimal de Chen-Gackstatter 120

5.10 $\mathbb{S}^2$ sin puntos removidos 121

5.11 R es una región de S . . . 130

5.12 (a) Región regular y (b) Región no regular . . . 131

5.13 Regiones simples . . . 131

5.14 El triángulo $\mathcal{T}$ es una región simple . . . 132

5.15 Triangulación de $\mathbb{S}^2$ . . . 132

5.16 Toro de revolución . . . 133

5.17 Esfera con una asa . . . 133

5.18 Intersección de la Catenoide con $\mathbb{S}^2_r$ . . . 138

5.19 Extremos de la Catenoide . . . 138

5.20 Perfiles de la Catenoide a medida que nos movemos hacia el infinito. . . . 139

5.21 Triedro de Frenet-Serret . . . 140

5.22 Curvatura geodésica y curvatura normal de la curva γ . . . 141

6.1 Superficie de revolución . . . 151

6.2 Superficie reglada . . . 156

6.3 Deformación isométrica en $t = 0$ . . . 164

6.4 Deformación isométrica en $t = \frac{\pi}{10}$ . . . 164

6.5 Deformación isométrica en $t = \frac{\pi}{5}$ . . . 164

6.6 Deformación isométrica en $t = \frac{3\pi}{15}$ . . . 164

6.7 Deformación isométrica en $t = \frac{2\pi}{5}$ . . . 164

6.8 Deformación isométrica en $t = \frac{\pi}{2}$ . . . 164

6.9 Superficie minimal de Catalán . . . 165

6.10 Cicloide . . . 167

A.1 (a) Simplemente conexo y (b) No simplemente conexo . . . 189

A.2 La función exponencial es una función cubriente de $\mathbb{S}^1$ . . . 190

Introducción

Las superficies minimales son superficies que minimizan el área localmente, bajo ciertas restricciones. En matemáticas, las superficies minimales se estudian a través de la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales parciales elípticas no líneales de segundo orden, la topología, el análisis complejo, el cálculo de variaciones (véase [5]), entre otras áreas. Mientras que en otras áreas del saber humano, como la física, las superficies minimales aparecen en el estudio de fenómenos que implican la minimización de energía, como en el modelado de membranas elásticas y películas delgadas (tensión superficial). Hoy en día, las superficies minimales continúan siendo un área activa de investigación, especialmente en la intersección con otras ramas de la matemática.

El estudio de las superficies minimales se remonta a los trabajos pioneros de Joseph-Louis Lagrange en 1760, quien formuló la ecuación diferencial de las superficies minimales (véase [8, Cap.2, pp.60-61]), la cual describe la condición para que una superficie sea minimal. Como puede verse en [18, §3, pp.20-23], estas superficies son definidas como aquellas que localmente minimizan el área bajo ciertas restricciones y que se encuentran comúnmente en problemas de variación de superficies, como las películas de jabón, que naturalmente toman la forma de superficies minimales.

A lo largo del tiempo, múltiples matemáticos han contribuido al desarrollo teórico de las superficies minimales. Destacan los aportes de Karl Weierstrass y Hermann Amandus Schwarz, quienes exploraron los ejemplos clásicos de estas superficies, como la superficie de la Catenoide y del Helicoide. Otros matemáticos como Heinrich Scherk y Ernst Lebrecht Henneberg, descubrieron otras superficies minimales con propiedades geométricas interesantes, mientras que otros como Alfred Enneper a parte de descubrir una superficie minimal (la superficie de Enneper), aportaron novedosos métodos para determinar cuando una superficie es minimal, como puede verse en [8, Cap.3, pp.151-155]. Y como ejemplo reciente de superficie minimal con propiedades geométricas y topológicas interesantes destacamos la superficie de Jorge y Meeks (ver [12]), la cual fue descubiera por los matemáticos Luis A. Jorge y William H. Meeks III en 1983.

El presente trabajo está dirigido a lectores que cursan una licenciatura en matemáticas y cuentan con un nivel avanzado, idealmente con más de la mitad de los créditos completados. Se asume que el lector posee sólidas bases en cálculo vectorial, álgebra lineal, geometría diferencial, topología de conjuntos, análisis matemático y variable compleja.

Sin embargo, conscientes de que algunos lectores interesados podrían no dominar por completo estas herramientas o desear profundizar en ciertos temas específicos, hemos diseñado este trabajo con un enfoque autocontenido. Para ello, se han incorporado los apéndices A y B al final del texto, donde se desarrolla la teoría fundamental de análisis matemático, topología y variable compleja necesaria para abordar el contenido principal.

De igual forma, extendemos una invitación al lector con experiencia en estos temas a omitir dichos apéndices si así lo desea, y proceder directamente al desarrollo del trabajo. Este esfuerzo busca hacer que el presente documento sea accesible tanto para quienes buscan consolidar conocimientos como para quienes desean profundizar de manera directa en el núcleo de las ideas expuestas.

La originalidad de esta tesis radica en su enfoque exhaustivo y riguroso del estudio de las superficies minimales, integrando tanto resultados clásicos como algunos recientes en el campo. Cada tema se desarrolla de manera completa y detallada. Se llevan a cabo todos los cálculos necesarios, se incluyen demostraciones precisas y claras, y se ejemplifican los resultados para ilustrar su relevancia y aplicaciones. Además, se incluyen ilustraciones y explicaciones detalladas con el objetivo de proporcionar una visión integral y accesible sobre las superficies minimales.

Tomamos como referencia el libro clásico de Osserman [18], una obra fundamental en el estudio de las superficies minimales. Sin embargo, este trabajo se distingue por presentar de forma meticulosa y cuidadosamente explicada cada uno de los resultados, abordando aspectos que en la literatura suelen estar poco desarrollados o resumidos. Esta atención al detalle asegura que el lector cuente con una base sólida para comprender plenamente la teoría y apreciar la belleza de las superficies minimales.

El documento se estructura en 6 capítulos y 3 apéndices, los cuales abarcan tanto los fundamentos teóricos como las herramientas necesarias para su estudio. A continuación, se presenta una breve descripción de su contenido.

En el Capítulo 1 se analizá la teoría de las superficies minimales no paramétricas, donde introducimos las nociones de superficie regular, formas fundamentales, curvatura media y la definición formal de superficie minimal. Además se hace un estudio detallado de las superficie minimales vistas como solución de una ecuación en derivadas parciales. Se continua con la exposición de los ejemplos clásicos de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$, y, finalmente, se concluye este capítulo con en el estudio de superficies minimales no paramétricas en $\mathbb{R}^n$ a través de las soluciones de la ecuación de las superficies minimales al comparar una solución desconocida de esta ecuación con una solución fija, cuyas propiedades son conocidas. Siendo uno de los resultados principales el Principio del Máximo para superficies minimales.

Por otro lado, en el Capítulo 2, se aborda el problema que, históricamente, dio origen a la teoría de las superficies minimales: la caracterización de aquellas superficies que, entre todas las que comparten una misma frontera, poseen el área más pequeña. Logrando esta descripción estudiando las superficies minimales desde un enfoque del cálculo de variaciones (variaciones normales), y, determinando bajo que circunstancias una superficie minimiza su área, siendo esto último equivalente a decir que su curvatura media se anule o bien que satisfaga la ecuación diferencial de las superficies minimales.

En el Capítulo 3, se utiliza como herramienta la variable compleja para introducir las nociones de parámetros isotérmicos. Esto permite interpretar el vector de curvatura media de una parametrización X de una superficie S en términos del laplaciano $\nabla^2 X$. Además, se estudia la relación entre que las funciones coordenadas de una parametrización sean armónicas y el hecho de que la superficie sea minimal. Asimismo, se presenta un método para obtener superficies minimales definidas en dominios simplemente conexos a partir de funciones analíticas, destacando la importancia de este resultado para definir la superficie conjugada a una superficie minimal. Finalmente, se concluye con un hecho relevante: para cada punto regular de una superficie minimal S, existe una vecindad en la que S admite una reparametrización en términos de parámetros isotérmicos.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio del Teorema de Bernstein. En particular, se examina el caso tridimensional, que establece que la única superficie minimal en su forma no paramétrica definida sobre todo el plano es el plano. Este resultado es relevante para analizar las superficies en $\mathbb{R}^3$ estudiadas en este trabajo. Por otro lado, se presenta un ejemplo de una superficie minimal en $\mathbb{R}^4$ que es una solución global a la ecuación de superficies minimales, destacando la importancia del Teorema de Bernstein en dimensiones mayores o iguales a cuatro.

El Capítulo 5, correspondiente a la teoría global de las superficies minimales, comienza con algunos conceptos básicos sobre variedades diferenciables e introduce la noción de superficie minimal generalizada en $\mathbb{R}^n$. También se menciona el Teorema de Uniformización de Koebe, fundamental para esta teoría, ya que implica que toda superficie minimal simplemente conexa S puede ser parametrizada como $X : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde D es el disco unitario abierto o el plano complejo completo.

En este capítulo se analizan propiedades de las superficies minimales con frontera, lo que permite enunciar y demostrar el principio de reflexión para estas superficies, así como esbozar la prueba del teorema fundamental de existencia de Douglas. Este teorema establece que, dada una curva de Jordan Γ en $\mathbb{R}^n$, existe una superficie minimal generalizada simplemente conexa acotada por Γ. Asimismo, se estudia el hecho de que una solución de la ecuación de las superficies minimales no puede presentar singularidades aisladas.

También se estudia la representación de Enneper-Weierstrass de una superficie minimal en $\mathbb{R}^3$, un método que facilita el análisis de sus propiedades mediante funciones analíticas. Además, se introduce la aplicación de Gauss para superficies en $\mathbb{R}^3$, explorando la imagen de las superficies minimales bajo esta aplicación. Finalmente, se presentan las nociones de curvatura gaussiana y curvatura total en el contexto de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$.

Por último, el Capítulo 6 presenta dos caracterizaciones importantes de las superficies minimales: las superficies de rotación y las superficies regladas. En esta familia, se incluye la deformación entre la Helicoide y la Catenoide, mostrando que estas superficies son localmente isométricas. Además, se estudia la superficie de Catalán como último ejemplo de superficie minimal, analizando algunas de sus propiedades, incluyendo sus geodésicas.

Como se mencionó anteriormente, los apéndices A y B constituyen un material de apoyo y consulta que puede omitirse sin pérdida de continuidad en los temas abarcados en esta tesis. El documento incluye más de 40 figuras, todas elaboradas de manera cuidadosa y

detallada. Estas fueron creadas personalmente utilizando LaTeX y los paquetes `pgfplots`, `tikz` y `3d-plot`, salvo la Figura 5.22, que fue realizada manualmente con un lápiz táctil, el software OneNote, y con un gran nivel de paciencia.

En el Apéndice C se incluyen los detalles técnicos de las figuras presentadas, especificando los paquetes utilizados, el código fuente de algunas figuras seleccionadas, y las indicaciones necesarias para su interpretación. Aunque no se incluyen los códigos de todas las figuras debido a restricciones de tiempo y extensión, los ejemplos proporcionados permiten que el lector interesado pueda generar sus propias figuras y diseños basados en los conceptos aquí desarrollados.

El documento incluye un índice general, un índice de figuras y una sección de referencias bibliográficas, que facilitan al lector la rápida identificación de temas específicos y la consulta de fuentes relevantes. Además, la versión digital de esta tesis está enriquecida con referencias internas mediante hipervínculos, lo que permite una navegación más ágil y una mejor experiencia de lectura.

CAPÍTULO 1

Teoría local de las superficies minimales no paramétricas

En este capítulo, exploramos la teoría local de las superficies minimales en el contexto no paramétrico. Comenzamos definiéndolas y caracterizándolas, estableciendo así el marco teórico necesario para su estudio. Denotamos por $x = (x_1, \ldots, x_n)$ a un punto del espacio euclidiano $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ (donde $n \in \mathbb{N}$) y consideraremos a $\mathcal{D}$ un dominio sobre el plano $\mathbb{R}^2$, por lo que, los elementos de $\mathcal{D}$ en el plano $\mathbb{R}^2$ son pares ordenados de la forma $u = (u_1, u_2)$.

Definición 1.1. *Una superficie en $\mathbb{R}^n$ es una función diferenciable $X : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

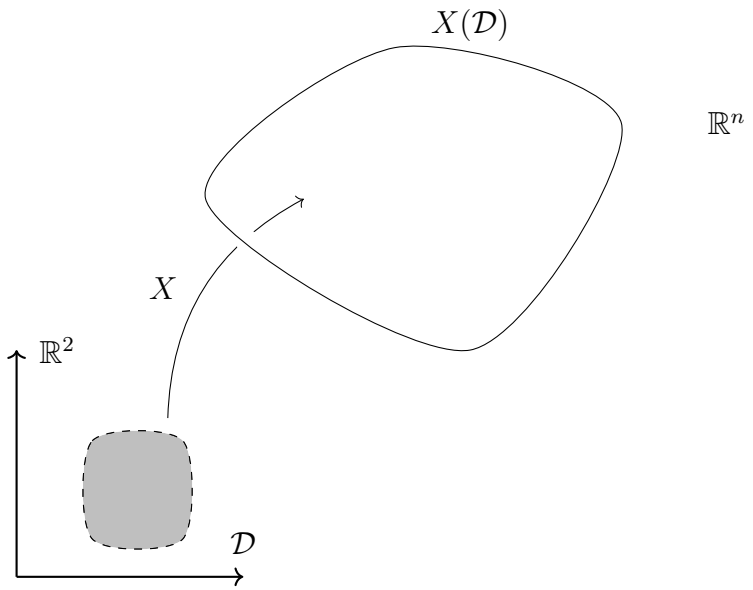


Figura 1.1: Superficie S en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos a la *matriz jacobiana asociada a la función X por*:

$$M = [m_{ij}]\,; \text{ donde } m_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j};\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2.$$

Las columnas de M quedan determinadas como sigue

$$\frac{\partial X}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j}\right),\ j = 1, 2.$$

Por otro lado, dados $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ denotamos su producto interior como

$$v \cdot w = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k,$$

mientras que su producto exterior es denotado por

$$v \wedge w; \;\; v \wedge w \in \mathbb{R}^N, \;\; N = \tbinom{n}{2},$$

en donde las componentes $v \wedge w$ para $i < j$ corresponden a los determinantes

$$\det \begin{pmatrix} v_i & v_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}.$$

Ahora, consideramos la matriz:

$$G = [g_{ij}] = M^t M; \;\; \text{donde} \;\; g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j} = \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}, \tag{1.1}$$

aplicando la identidad de Langrange[1] a los vectores $\dfrac{\partial X}{\partial u_1}$ y $\dfrac{\partial X}{\partial u_2}$, cuyas componentes son $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_1}$ y $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_2}$ respectivamente, se tiene que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\right)^2,$$

con la notación de (1.1) se tiene

$$g_{11} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2, \;\; g_{22} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2, \;\; \text{y} \;\; g_{12} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2},$$

de esta manera, la igualdad se traduce en la siguiente expresión

$$g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\right)^2,$$

como G es una matriz de 2×2 pues $i, j = 1, 2$, tenemos que su determinante está dado por

$$\det(G) = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21},$$

dado que $g_{12} = g_{21}$, se tiene que

$$\det(G) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2,$$

[1] La identidad de Lagrange nos dice que dados $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ números reales, se satisface:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{1 \le i,j \le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

por lo que tenemos la expresión

$$\det(G) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_j}{\partial u_1}\frac{\partial x_i}{\partial u_2} \right)^2.$$

Ya que las componentes de $\dfrac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial u_2}$ son

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} & \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial u_2} & \frac{\partial x_j}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad \text{para } i < j,$$

se tiene que las componentes de este producto exterior es

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right)_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial x_j}{\partial u_1},$$

de esta manera

$$\left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_j}{\partial u_1}\frac{\partial x_i}{\partial u_2} \right)^2.$$

Finalmente, observemos que

$$\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} & \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial u_2} & \frac{\partial x_j}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial x_i}{\partial u_1}\frac{\partial x_j}{\partial u_2} - \frac{\partial x_i}{\partial u_2}\frac{\partial x_j}{\partial u_1}.$$

Por tanto deducimos la siguiente igualdad

$$\det(G) = \left| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \right)^2. \tag{1.2}$$

El siguiente resultado será de gran importancia a lo largo de los próximos capítulos, la demostración del mismo se omite, ya que requiere de una serie de equivalencias de las propiedades del rango de una matriz que consideramos no son necesarios incluir en este trabajo.

Lema 1.1. *Sea $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Para cada punto $u \in \mathcal{D}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1.3) Los vectores $\dfrac{\partial X}{\partial u_1}$ y $\dfrac{\partial X}{\partial u_2}$ son linealmente independientes.

(1.4) Rango$(M) = 2$.

(1.5) Existen i, j con $1 \leq i < j \leq n$ tales que $\dfrac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$.

(1.6) $\dfrac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial u_2} \neq 0$.

(1.7) $\det(G) > 0$.

Definición 1.2. *Una superficie S definida por la función diferenciable $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, es regular en un punto $p \in S$ si satisface alguna de las condiciones del Lema 1.1. Así, diremos que S es regular si es regular para cada $p \in S$.*

Escribimos $S \in C^r$ si $X \in C^r$, es decir, si cada coordenada x_k es $r-$veces diferenciable y sus derivadas parciales son continuas respecto a las variables u_1, u_2 en $\mathcal{D}$, a menos que se diga lo contrario se asume que $S \in C^r$, $r \geq 1$.

Supongamos que S es una superficie tal que $X \in C^r$ y sea $\varphi : \tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{D}$ un difeomorfismo tal que $\varphi \in C^r$, donde $\tilde{\mathcal{D}}$ es también un dominio en el plano $\mathbb{R}^2$, diremos que la superficie $\tilde{S}$ definida por $X \circ \varphi : \tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se obtiene de S mediante un cambio de parámetros. Decimos que una propiedad $\mathbf{P}$ de S es independiente de los parámetros si $\mathbf{P}$ la tiene cualquier superficie $\tilde{S}$ obtenida apartir de S por cambio de parámetros. El objetivo de la geometría diferencial es estudiar precisamente aquellas propiedades que son independientes de los parámetros elegidos. Por ejemplo, veamos que sucede con las matrices asociadas a la función $\varphi : \tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{D}$, la matriz jacobiana de esta función es:

$$U = [u_{ij}], \text{ donde } u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j}; \ i, j = 1, 2.$$

Dado que $\varphi(\tilde{u})$ es un difeomorfismo se tiene que en $\tilde{\mathcal{D}}$

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} = \det(U) \neq 0.$$

Por otro lado, observemos que el cambio de parámetros nos garantiza que si $S \in C^r$ y $\varphi \in C^r$ entonces $\tilde{S} \in C^r$, es decir, la propiedad de que una superificie sea de clase C^r es independiente de la elección de los parámetros, de manera particular se tiene

$$\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{u}_k} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k},$$

por lo que

$$\tilde{M} = MU.$$

Además,

$$\tilde{G} = U^t G U, \tag{1.8}$$

más aún,

$$\det(\tilde{G}) = \det(G)(\det(U))^2 = \det G \left(\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\tilde{u_1}, \tilde{u_2})} \right)^2. \tag{1.9}$$

De esto último obtenemos que $\det(\tilde{G}) > 0$, por tanto la superfice es regular. Así, la propiedad de ser regular en un punto de una superficie S es independiente de los parámetros elegidos.

Consideremos ahora a Δ un subdominio de $\mathcal{D}$ tal que $\bar{\Delta} \subseteq \mathcal{D}$. Sea $\Sigma = X|_{\Delta}$, se define el área de Σ como:

$$A(\Sigma) = \iint_{\Delta} \sqrt{\det(G)}\, du_1 du_2. \tag{1.10}$$

Sea $\varphi : \tilde{\Delta} \longrightarrow \Delta$ el cambio de parámetros que resulta en la superficie $\tilde{\Sigma}$, de esta manera su área quedará determinada como sigue

$$\begin{aligned} A(\tilde{\Sigma}) &= \iint_{\tilde{\Delta}} \sqrt{\det(\tilde{G})}\, d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 \\ &= \iint_{\tilde{\Delta}} \sqrt{\det(G)} \left| \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)} \right| d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 \\ &= \iint_{\Delta} \sqrt{\det(G)}\, du_1 du_2 \\ &= A(\Sigma). \end{aligned}$$

Esto último se sigue en virtud del Teorema de Cambio de Variable para Integrales Dobles (véase [21, p.67]) y de la igualdad (1.9). Con lo anterior, mostramos que el área de una superficie es independiente de la elección de los parámetros en los que esté definida.

§1.1.

Superficies no paramétricas

Otra forma de definir una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es como sigue. Consideremos $i, j \leq n$ con $i \neq j$ y a $\mathcal{D}$ un dominio sobre el plano $\Pi_{x_i x_j}$, las ecuaciones

$$x_k = f_k(x_i, x_j), \;\; k = 1, \ldots, n; \;\; k \neq i, j; \;\; (x_i, x_j) \in \mathcal{D}. \tag{1.11}$$

Estas superficies están descritas en su forma ***no paramétrica***, este tipo especial de superficies son aquellas definidas como la gráfica de una función diferenciable. Se puede ser más explícito para describir a S, como se muestra a continuación:

$$x_i = u_1, \; x_j = u_2, \; x_k = f_k(u_1, u_2), \; k \neq i, j. \tag{1.12}$$

Para que una superficie pueda expresarse en su forma no paramétrica, es necesario considerar la proyección natural sobre el plano $\Pi_{x_i x_j}$

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \Pi_{x_i x_j} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_i, x_j), \end{aligned} \tag{1.13}$$

de esta manera Π restringe a la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sobre el plano $\Pi_{x_i x_j}$ de manera inyectiva. Lo anterior no es cierto en general para cualquier superficie, para ello consideramos el siguiente lema.

Lema 1.2. *Sea S una superficie parametrizada por $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y sea a un punto regular de S. Entonces, existe una vecindad Δ de a, tal que la superficie Σ obtenida de la restricción $X|_{\Delta} : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una reparametrización $\tilde{\Sigma}$ de una superficie en su forma no paramétrica.*

Demostración. Dado que a es un punto regular de S, por (1.5) del Lema 1.1 tenemos que existen i, j con $1 \leq i < j \leq n$ tales que $\dfrac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$, y de esta manera por el Teorema de la Función Inversa existe una vecindad Δ de a en $\mathcal{D}$ y una vecindad Ω de $X(a)$ en el plano $\Pi_{x_i x_j}$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi : \Delta &\longrightarrow \Omega \\ (u_1, u_2) &\mapsto (x_i, x_j), \end{aligned}$$

es un difeomorfismo local, por lo que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : \Omega &\longrightarrow \Delta \\ (x_i, x_j) &\mapsto (u_1, u_2), \end{aligned}$$

es de clase C^r y como también lo es X, si consideramos la función

$$\begin{aligned} \Psi = X \circ \Phi^{-1} : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_i, x_j) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

es de clase C^r, pues resulta de la composición de funciones de clase C^r, de esta manera Ψ es la reparametrización $\tilde{\Sigma}$ de $X|_\Delta$, que satisface lo pedido. ■

Observación 1.1. *Note que la transformación Ψ sigue el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} \Omega \subseteq \Pi_{x_i,x_j} & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & \Delta & \xrightarrow{X|_\Delta} & \mathbb{R}^n \\ (x_i, x_j) & \mapsto & (u_1, u_2) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array} \tag{1.14}$$

En lo que resta de la sección, vamos a suponer que, dada una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^n$, esta se encuentra parametrizada en su forma no paramétrica. Dicho lo anterior, destacamos lo siguiente: en la demostración del Lema 1.2, la función Ψ muestra que en una vecindad V de un punto regular $p \in S$ la función X es inyectiva.

Siguiendo con el estudio de las propiedades locales de una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^n$ consideraremos a todas las curvas contenidas en S que pasan por un punto dado.

Definición 1.3. *Una curva parametrizada diferenciable en $\mathbb{R}^n$ es una función diferenciable*

$$\phi : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{1.15}$$

En donde la imagen $\phi([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamada traza de ϕ.

Observación 1.2. *Note que al pedir que ϕ sea diferenciable estamos en el entendido de que se puede extender localmente a una función diferenciable definida en un conjunto abierto (como se puede ver al final del Apéndice A), es decir, si alrededor de cada punto $x \in [a, b]$ existe un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}$ y una función diferenciable $F : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que es igual a ϕ en $U \cap [a, b]$.*

Para una curva $\phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ estaremos utilizando la siguiente notación:

$$x = \phi(t), \;\; a \leq t \leq b; \;\; \phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \in C^r. \tag{1.16}$$

Sea $t_0 \in \text{Int}([a,b])$ el vector tangente de la curva ϕ en el punto t_0 es el vector

$$x'(t_0) = (\phi_1'(t_0), \ldots, \phi_n'(t_0)). \tag{1.17}$$

Diremos que la curva ϕ es regular en $t_0 \in \text{Int}([a,b])$ si $x'(t_0) \neq 0$. Así, una curva ϕ en $\mathbb{R}^n$ es regular si $x'(t) \neq 0$ para cada $t \in \text{Int}([a,b])$.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie definida por la función $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y una curva $\phi : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que la curva ϕ se encuentra contenida en S si $C = \phi([a,b]) \subseteq S$. Ya que estamos interesados en el estudio local de S, consideramos a b un punto regular de S y la restricción $X|_\Delta$, con Δ una vecindad de b donde sea válido el Lema 1.2. Abusando de la notación, continuaremos denominando a este dominio restringido como $\mathcal{D}$, y a la superficie como S. Así, tenemos la representación (1.14) y el hecho de que la función X es inyectiva en $\mathcal{D}$. Ahora, consideremos todas las curvas $C \subseteq S$ que pasan por $p = X(b)$, y supongamos además que existe un valor fijo t_0 con $a < t_0 < b$, tal que para cada curva C, $\phi(t_0) = p$. En virtud de la representación (1.14), sigue que a cada curva C de este tipo le corresponde una curva $u : [a,b] \longrightarrow \mathcal{D}$ tal que $u(t_0) = b$. Recíprocamente, a cada curva u en $\mathcal{D}$ con $u(t_0) = b$ le corresponde una curva $\phi = X \circ u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\phi(t_0) = p$. En este sentido, para el vector tangente a la curva C, tenemos la fórmula

$$x'(t_0) = u_1'(t_0)\frac{\partial X}{\partial u_1}(b) + u_2'(t_0)\frac{\partial X}{\partial u_2}(b) \tag{1.18}$$

Lema 1.3. *Sean $S \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie definida por la función $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathcal{D}$ un punto para el cual $X(a) = p$ es un punto regular de la superficie S, si consideramos el conjunto de todas las curvas C contenidas en S que pasan por p, entonces el conjunto de los vectores tangentes en p de estas curvas forman un espacio vectorial bidimensional.*

Demostración. Dado que podemos encontrar curvas $u : [a,b] \longrightarrow \mathcal{D}$ tales que $u(t_0) = a$, y como $u_1'(t_0)$, $u_2'(t_0)$ toman valores arbitrarios, por (1.18) se tiene que el conjunto de vectores tangentes $x'(t_0)$ consiste en las combinaciones lineales de los vectores $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ y $\frac{\partial X}{\partial u_2}$, luego por la condición de regularidad y en virtud del Lema 1.1 tenemos que estos vectores son linealmente independientes, y por lo tanto generan un espacio de dimensión 2, justo como queríamos. ■

Definición 1.4. *El espacio vectorial descrito en el Lema 1.3 es llamado el* ***espacio tangente*** *a la superficie S en el punto $p \in S$ al cual denotamos como $\Pi_S(p)$ o simplemente por Π_S.*

De esta manera una superficie regular $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene en cada punto p definido un espacio tangente $\Pi_S(p)$, y además por definición se tiene que es independiente de la parametrización. Para calcular la longitud del vector tangente utilizamos las expresiónes (1.1) y (1.18), de esta manera

$$|x'(t_0)|^2 = x'(t_0) \cdot x'(t_0) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} u_i'(t_0) u_j'(t_0). \tag{1.19}$$

Así, el cuadrado de la longitud expresa una forma cuadrática definida positiva en el correspondiente vector tangente $u'(t_0)$ con matriz G, a esta forma cuadrática la llamamos ***primera forma fundamental*** *de la superficie S.*

Analizamos en (1.10) que el determinante de esta forma cuadrática define áreas en una superficie, por lo que la longitud de las curvas contenidas en una superficie S se obtienen a partir de (1.19), ya que tenemos que la longitud de una curva C en $\mathbb{R}^n$ parametrizada según la representación (1.16) por $x(t)$ con $a \leq t \leq b$ está dada por:

$$\ell = \int_a^b |x'(t)|\, dt. \tag{1.20}$$

Para cada curva $C \subseteq S$ se tiene el número

$$s(t_0) = \int_a^{t_0} |x'(t)|\, dt, \tag{1.21}$$

aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo se deduce

$$s'(t_0) = |x'(t_0)| \geq 0, \text{ para cada } a \leq t_0 \leq b.$$

Si la curva C es regular $s'(t_0) = |x'(t_0)| > 0$, de esta forma podemos considerar la función

$$s(t) : [a, b] \longrightarrow [0, \ell] \tag{1.22}$$

la cual llamamos *función longitud de arco*, de lo anterior, $s(t)$ tiene una función inversa diferenciable, digamos $t(s) : [0, \ell] \longrightarrow [a, b]$, por lo que podemos considerar a la curva $\tilde{C}$ parametrizada como sigue

$$\tilde{\phi}(t) = \phi \circ t(s) : [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \tag{1.23}$$

la cual resulta de la composición de las funciones $t(s)$ y $\phi(s)$, así pues diremos que la curva $\tilde{C}$ es una reparametrización de C por *longitud de arco*.

Observación 1.3. *Note que la función $\tilde{\phi}(s)$ sigue el siguiente diagrama:*

$$[0, \ell] \xrightarrow{t(s)} [a, b] \xrightarrow{\phi(t)} \mathbb{R}^n$$

Para una curva $C \subseteq S$ parametrizada por longitud de arco tenemos en cada punto definido el vector tangente unitario

$$T = \frac{dx}{ds} = \frac{x'(t)}{s'(t)}; \ \left|\frac{dx}{ds}\right| = \frac{|x'(t)|}{s'(t)} = 1 \tag{1.24}$$

En lo que resta vamos a suponer que cada curva C en $\mathbb{R}^n$ es tal que $C \in C^2$ y está parametrizada por longitud de arco, de esta forma definimos en cada punto el ***vector curvatura***:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dT}{ds}, \tag{1.25}$$

que corresponde a la derivada del vector tangente unitario respecto a la longitud de arco.

Supondremos también que S es una superficie de clase C^2 y nos enfocaremos en las curvas $C \subseteq S$ que pasan por el punto regular p. Estas son curvas regulares de clase C^2 contendidas en S. Estamos interesados en estudiar el comportamiento del vector de curvatura en el punto p. Para ello, sea $\Pi_S(p)$ el espacio tangente a la supeficie S en el punto p, y denotemos

por $\Pi_S^{\perp}$ su complemento ortogonal, el cual corresponde a un espacio de dimensión $n-2$, al que llamaremos ***espacio normal*** a S en el punto p. Observemos que cada vector de curvatura está determinado por sus proyecciones sobre Π_S y $\Pi_S^{\perp}$. Por lo tanto, estudiaremos la proyección del vector de curvatura sobre $\Pi_S^{\perp}$.

Un vector arbitrario N se llama ***normal*** a S, si $N \in \Pi_S^{\perp}$, de manera particular $N \perp \dfrac{\partial X}{\partial u_1}$ y $N \perp \dfrac{\partial X}{\partial u_2}$. Así, de la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dx}{ds} = \sum_i \frac{du_i}{ds}\frac{\partial X}{\partial u_i},$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\sum_i \frac{du_i}{ds}\frac{\partial X}{\partial u_i}\right) \\
&= \sum_i \frac{d^2u_i}{ds^2}\frac{\partial X}{\partial u_i} + \sum_{i,j} \frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}.
\end{aligned}$$

Haciendo el producto interior con $N \in \Pi_S^{\perp}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{ds^2}\cdot N &= \left(\sum_i \frac{d^2u_i}{ds^2}\frac{\partial X}{\partial u_i} + \sum_{i,j} \frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}\right)\cdot N \\
&= \left(\sum_i \frac{d^2u_i}{ds^2}\frac{\partial X}{\partial u_i}\right)\cdot N + \left(\sum_{i,j} \frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}\right)\cdot N \\
&= \sum b_{ij}(N)\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds},
\end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{d^2x}{ds^2}\cdot N = \sum b_{ij}(N)\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}. \tag{1.26}$$

Aquí hemos introducido la siguiente notación

$$b_{ij}(N) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}\cdot N, \tag{1.27}$$

donde el vector $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}$ está evaluado en el punto $u = a$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left(|x'(t)|\right)^2 \\
&= x'(t)\cdot x'(t) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}u_i'(t)u_j'(t),
\end{aligned}$$

de la regla de la cadena se deduce

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{\left(\frac{du_i}{dt}\right)}{\left(\frac{ds}{dt}\right)},$$

de esta manera $\frac{d^2x}{ds^2} \cdot N$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{ds^2} \cdot N &= \sum b_{ij}(N)\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} \\
&= \sum b_{ij}(N)\frac{\frac{du_i}{ds}}{\frac{ds}{dt}}\frac{\frac{du_j}{ds}}{\frac{ds}{dt}} \\
&= \sum b_{ij}(N)\frac{\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \\
&= \frac{\sum b_{ij}(N)u_i^{'}(t_0)u_j^{'}(t_0)}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \\
&= \frac{\sum b_{ij}(N)u_i^{'}(t_0)u_j^{'}(t_0)}{\sum g_{ij}u_i^{'}(t_0)u_j^{'}(t_0)},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{d^2x}{ds^2} \cdot N = \frac{\sum b_{ij}(N)u_i^{'}(t_0)u_j^{'}(t_0)}{\sum g_{ij}u_i^{'}(t_0)u_j^{'}(t_0)}. \tag{1.28}$$

El numerador del lado derecho es una forma cuadrática en el vector tangente $u'(t_0)$, cuya matriz $b_{ij}(N)$ depende del punto de la superficie y del vector normal N, en este sentido a

$$\sum b_{ij}(N)u_i^{'}(t_0)u_j^{'}(t_0) \tag{1.28.1}$$

la llamamos la ***segunda forma fundamental*** de S con respecto a N.

Note que la expresión (1.28.1) depende de la curva C y, siendo más específicos, depende solo del vector tangente a C en dicho punto. Sin embargo, de la homogeneidad del lado derecho de la igualdad en las componentes de $u'(t_0)$, se verifica que depende solo de la dirección del vector tangente y, más aún, de la dirección del vector tangente unitario T. Teniendo en cuenta esto, se puede escribir $\frac{d^2x}{ds^2} \cdot N$ como sigue:

$$\frac{d^2x}{ds^2} \cdot N = k(N,T), \;\; N \in \Pi_S^{\perp}, \; T \in \Pi_S, \tag{1.29}$$

observe que el lado derecho de la igualdad nos dice que para un punto $p \in S$ existe una función bien definida del vector normal N y del vector tangente T, a dicha función se le llama ***curvatura normal*** de S en la dirección T con respecto al normal N . Fijando a N y haciendo variar a T, obtenemos las cantidades

$$k_1(N) = \max_T k(N,T) \quad \text{y} \quad k_2(N) = \min_T k(N,T), \tag{1.30}$$

a las que se les conoce como ***curvaturas principales*** de S en el punto p con respecto al normal N. Con lo anterior, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.5. *Se define la* ***curvatura media*** *de la superficie S en el punto p respecto al vector normal N como*

$$H(N) = \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2}. \tag{1.31}$$

Ahora vamos a obtener una expresión explícita para $H(N)$ a partir de $\dfrac{d^2x}{ds^2} \cdot N$ que resulta en el cociente de formas cuadráticas, donde su máximo y su mínimo, k_1 y k_2 respectivamente, son las raíces de la ecuación

$$\det(b_{ij}(N) - \lambda g_{ij}) = 0. \tag{1.32}$$

Por lo que al considerar las matrices

$$[b_{ij}] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

y

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

donde se ha omitido la dependencia del vector normal N para simplificar los cálculos, se sigue que

$$\begin{aligned} b_{ij}(N) - \lambda g_{ij} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} - \lambda g_{11} & b_{12} - \lambda g_{12} \\ b_{21} - \lambda g_{21} & b_{22} - \lambda g_{22}. \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} b_{11} - \lambda g_{11} & b_{12} - \lambda g_{12} \\ b_{21} - \lambda g_{21} & b_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} &= (b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - ((b_{12} - \lambda g_{12})(b_{21} - \lambda g_{21})) \\ &= b_{11}b_{22} + \lambda^2 g_{11}g_{22} - \lambda b_{11}g_{22} - \lambda b_{22}g_{11} \\ &\quad + \lambda b_{12}g_{21} - \lambda^2 g_{12}g_{21} - b_{12}b_{21} + \lambda b_{21}g_{12} \\ &= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + \lambda^2 g_{11}g_{22} - \lambda^2 g_{12}g_{21} - \lambda b_{11}g_{22} \\ &\quad + \lambda b_{12}g_{21} + \lambda b_{21}g_{12} - \lambda b_{22}g_{11} \\ &= (\det(g_{ij}))\lambda^2 - (b_{11}g_{22} - b_{12}g_{21} - b_{21}g_{12} + b_{22}g_{11})\lambda \\ &\quad + \det(b_{ij}) \\ &= (\det(g_{ij}))\lambda^2 - (b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12} + b_{22}g_{11})\lambda + \det(b_{ij}). \end{aligned}$$

Así, tenemos la ecuación cuadrática en la variable λ

$$(\det(g_{ij}))\lambda^2 - (b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12} + b_{22}g_{11})\lambda + \det(b_{ij}) = 0.$$

Procedemos a encontrar sus raíces mediante la fórmula general

$$\lambda = \frac{-\left(-\left(b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12} + b_{22}g_{11}\right)\right) \pm \sqrt{\left(-\left(b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12} + b_{22}g_{11}\right)\right)^2 - 4\det\left(g_{ij}\right)\det\left(b_{ij}\right)}}{2\det\left(g_{ij}\right)}$$

$$= \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} \pm \sqrt{\left(-\left(b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12} + b_{22}g_{11}\right)\right)^2 - 4\det\left(g_{ij}\right)\det\left(b_{ij}\right)}}{2\det\left(g_{ij}\right)},$$

de donde

$$\lambda_1 = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} + \sqrt{\left(-\left(b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12} + b_{22}g_{11}\right)\right)^2 - 4\det\left(g_{ij}\right)\det\left(b_{ij}\right)}}{2\det\left(g_{ij}\right)}$$

$$\lambda_2 = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} - \sqrt{\left(-\left(b_{11}g_{22} - 2g_{12}b_{12} + b_{22}g_{11}\right)\right)^2 - 4\det\left(g_{ij}\right)\det\left(b_{ij}\right)}}{2\det\left(g_{ij}\right)},$$

de aquí que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{\det\left(g_{ij}\right)},$$

como las raíces resultan ser el máximo y mínimo de $\dfrac{d^2x}{ds^2} \cdot N$ se sigue

$$k_1 + k_2 = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{\det\left(g_{ij}\right)}.$$

Por lo tanto

$$H\left(N\right) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N)}{2\det\left(g_{ij}\right)}. \tag{1.33}$$

Notemos que $b_{ij}(N) = \dfrac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \cdot N$ es lineal para cada $N \in \Pi_S^{\perp}$, así pues, hemos expresado a $H(N)$ en términos de b_{ij}, es decir, $H(N)$ resulta ser una combinación lineal de las entradas de $[b_{ij}]$, de esta manera $H(N)$ también es lineal para cada $N \in \Pi_S^{\perp}$. Entonces, existe un único vector $\mathbf{H} \in \Pi_S^{\perp}$ tal que

$$H(N) = \mathbf{H} \cdot N \text{ para cada } N \in \Pi_S^{\perp}. \tag{1.34}$$

El vector $\mathbf{H}$ definido de esta manera es llamado ***vector curvatura media*** de S. Considerando a $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\}$ una base ortonormal para $\Pi_S^{\perp}$ se sigue directamente de (1.34) que el vector curvatura media $\mathbf{H}$ puede expresarse

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n-2} [H(e_k)]e_k. \tag{1.35}$$

Definición 1.6. *Una superficie S es **minimal** si su vector de curvatura media $\mathbf{H}$ se anula para cada $p \in S$.*

De esta manera $\mathbf{H} = 0$ si y sólo si $H(N) = 0$ para cada $N \in \Pi_S^{\perp}$, por lo que de la expresión explícita que obtuvimos para $H(N)$ en términos de b_{ij} y g_{ij}, se tiene una caracterización para las superficies minimales en términos de su primera y segunda forma fundamental mediante la ecuación

$$g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N) = 0. \tag{1.36}$$

§1.2.

Ecuación de las superficies minimales.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie en su forma no paramétrica. Así, queda expresada en términos de la ecuación

$$x_k = f_k(x_1, x_2), \;\; k = 3, \ldots, n, \tag{1.37}$$

o equivalentemente

$$x_1 = u_1, \;\; x_2 = u_2, \;\; x_k = f_k(u_1, u_2), \;\; k = 3, \ldots, n. \tag{1.38}$$

De esta manera

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right), \;\; \frac{\partial X}{\partial u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f_3}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial u_2}\right), \tag{1.39}$$

y

$$g_{11} = \left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right|^2 = \frac{\partial X}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2, \tag{1.39.1}$$

$$g_{22} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2, \tag{1.39.2}$$

$$g_{12} = \frac{\partial X}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} = \sum_{k=3}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \frac{\partial f_k}{\partial u_2}. \tag{1.39.3}$$

Recordemos que los vectores $\dfrac{\partial X}{\partial u_1}$ y $\dfrac{\partial X}{\partial u_2}$ son linealmente independientes, esto último muestra que toda superficie S expresada en su forma no paramétrica es regular.

Lema 1.4. *Sean $N_3, \ldots, N_n \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces existen N_1, N_2 únicos tales que el vector $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \Pi_S^{\perp}$.*

Demostración. Tenemos que $N \in \Pi_S^{\perp}$ si y sólo si $N \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u_i} = 0$ con $i = 1, 2$, luego por (1.39) se deduce que

$$\begin{aligned} N \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} &= (N_1, N_2, \ldots, N_n) \cdot \left(1, 0, \frac{\partial f_3}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right) \\ &= N_1 + N_3 \frac{\partial f_3}{\partial u_1} + \cdots + N_n \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ &= N_1 + \sum_{k=3}^{n} N_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right). \end{aligned}$$

Pero tenemos que $N \cdot \dfrac{\partial X}{\partial u_1} = 0$, por lo tanto

$$N_1 = -\sum_{k=3}^{n} N_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right).$$

De esta manera para $i = 1, 2$ consideramos

$$N_i = -\sum_{k=3}^{n} N_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_i} \right),$$

y el resultado se sigue. ■

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente lema.

Lema 1.5. *Sean $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que define una superficie $S \in C^r$, $a \in \mathcal{D}$ tal que $p = X(a)$ es un punto regular de S, y N el vector normal a S en dicho punto. Entonces existe una vecindad Δ de a, y $N \in C^{r-1}$ en Δ tal que $N \in \Pi_S^{\perp}$ y $N(a) = N$.*

Demostración. Dado que $p = X(a)$ es un punto regular de S por el Lema 1.2 existe una vecindad Δ de a tal que la superficie se puede escribir en su foma no paramétrica. Sea $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \Pi_S^{\perp}$ y consideremos a

$$N_i = -\sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial f_k}{\partial u_i}, \;\; i = 1, 2.$$

De esta manera N satisface las condiciones pedidas. ■

Ya que $S \in C^2$, de (1.39) se sigue que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f_3}{\partial u_i \partial u_j}, \ldots, \frac{\partial^2 f_n}{\partial u_i \partial u_j} \right). \tag{1.40}$$

De modo que para $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \Pi_S^{\perp}$, se tiene

$$b_{ij}(N) = \sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_i \partial u_j}. \tag{1.41}$$

De esta manera la ecuación de las superficies minimales (1.36) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2} \right)^2 \right) \left(\sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1^2} \right) - 2 \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial u_1} \frac{\partial f_k}{\partial u_2} \right) \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1 \partial u_2} \right) \\ &+ \left(1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1} \right)^2 \right) \left(\sum_{k=3}^{n} N_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_2^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Por la linealidad y homogeneidad de la suma se deduce que para $N \in \Pi_S^{\perp}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{n} \Bigg[&\left(1 + \sum_{m=3}^{n} \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_2} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1^2} - 2 \left(\sum_{m=3}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial u_1} \frac{\partial f_m}{\partial u_2} \right) \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_1 \partial u_2} \\ &+ \left(1 + \sum_{m=3}^{n} \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_1} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 f_k}{\partial u_2^2} \Bigg] N_k = 0. \end{aligned}$$

Dado que las componentes $N_3, \ldots, N_n$ son arbitrarios, se tiene que cada uno de los coeficientes N_k con $k \in \{3, \ldots, n\}$ se anulan. Así, obtenemos $n-2$ ecuaciones para las $n-2$ funciones $f_3, \ldots, f_n$. Recordemos que $x_1 = u_1$ y $x_2 = u_2$ por lo que introducimos la siguiente notación vectorial:

$$u_1 = x_1,\ u_2 = x_2\ ,\ f\left(x_1, x_2\right) = \left(f_3\left(x_1, x_2\right), \ldots, f_n\left(x_1, x_2\right)\right), \tag{1.42}$$

de esta manera la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0. \tag{1.43}$$

A la ecuación en derivadas parciales anterior se le conoce como ***ecuación de las superficies minimales en su forma no paramétrica*** en $\mathbb{R}^n$. En virtud del Lema 1.2 se tiene que cada superficie regular minimal proporciona una solución local a esta ecuación.

§1.3.

Ejemplos de superficies minimales

A continuación, analizaremos algunos ejemplos de superficies minimales cuando $n = 3$. En este caso, su notación vectorial se expresa como: $f\left(x_1, x_2\right) = f_3\left(x_1, x_2\right)$.

La Helicoide

$$f\left(x_1, x_2\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{1.44}$$

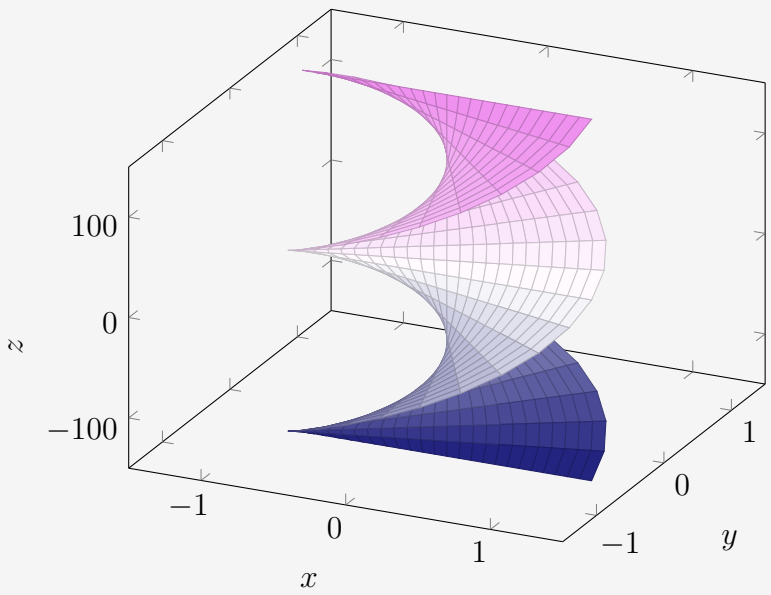


Figura 1.2: Superficie minimal de la Helicoide

Para verificar que la Helicoide satisface (1.43) calculamos sus derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}.$$

Sustituyendo en (1.43)

$$\begin{aligned}&\left(1+\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)^2\right)\frac{2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2} - 2\left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)\left(-\frac{\left(x_1^2-x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\right)\\ &+\left(1+\left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)^2\right)\left(-\frac{2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\right)\\ =\ &\frac{2x_1x_2\left(x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^4\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^4} - \frac{2x_1x_2\left(x_1^2-x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^4}\\ &-\frac{2x_1x_2\left(x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4+x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^4}\\ =\ &\frac{2x_1x_2\left(x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4+x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^4} - \frac{2x_1x_2\left(x_1^4+2x_1^2x_2^2+x_2^4+x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^4}\\ =\ &0.\end{aligned}$$

De esta manera la Helicoide es una superficie minimal, además, como se puede mirar en los cálculos de las derivadas parciales la función dada en (1.44) es armónica, ya que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2} - \frac{2x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2} = 0.$$

Por otro lado, la Helicoide es un ejemplo de superficie reglada, esto es, una superficie descrita geométricamente por una línea recta que se desliza de manera suave a lo largo de una curva. En particular, la Helicoide tiene una característica adicional interesante: salvo movimientos rígidos, es la única superficie reglada que es también minimal. Este tipo de superficies minimizan el área para una frontera dada, similar a la forma en que una película de jabón se adapta para minimizar su energía superficial. Esta propiedad de minimización es el contenido del Teorema 6.2, cuya demostración y discusión preliminar se encuentra en el Capítulo 6. La unicidad de la Helicoide como superficie reglada minimal subraya su relevancia en el estudio de superficies con curvatura media cero y plantea conexiones importantes con aplicaciones en física y arquitectura. Cabe señalar que la Helicoide fue descubierta en 1774 por Leonhard Euler y clasificada como superficie minimal en 1776 por Baptiste Meusnier.

La Catenoide

$$f(x_1, x_2) = \cosh^{-1}(r),\ r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},\ \text{ o bien, } x_1^2 + x_2^2 = (\cosh(x_3))^3 \tag{1.45}$$

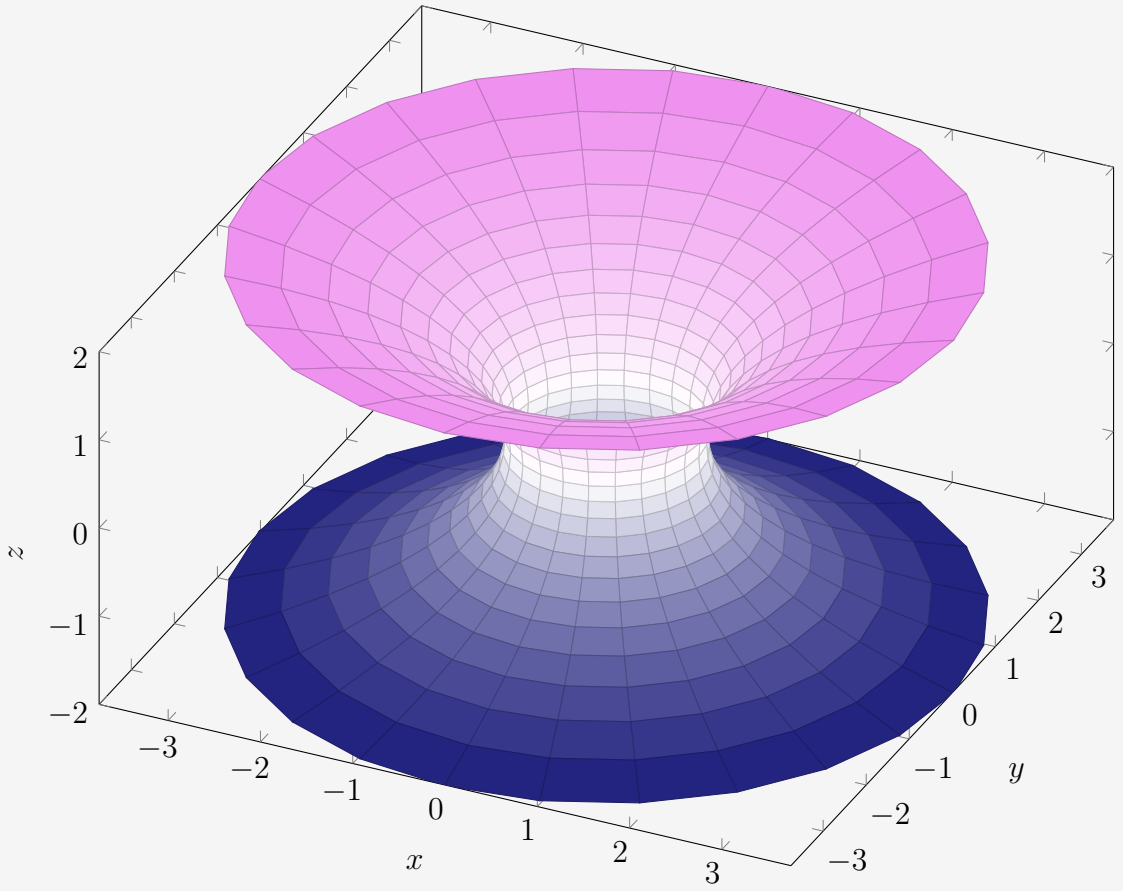


Figura 1.3: Superficie minimal de la Catenoide

Procediendo como en el ejemplo anterior

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -\frac{x_1^4 - x_2^4 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}(x_1^2 + x_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{-x_1^4 + x_1^2 + x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}(x_1^2 + x_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 - 1}{(x_1^2 + x_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Sustituyendo en (1.43)

$$\begin{aligned}
&\left(1+\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}}\right)^2\right)\left(-\frac{x_1^4-x_2^4+x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&-2\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}}\right)\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}}\right)\left(-\frac{x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{2x_1^2+2x_2^2-1}{\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&+\left(1+\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}}\right)^2\right)\left(-\frac{-x_1^4+x_1^2+x_2^4}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
=\;&-\frac{x_1^8+2x_1^6x_2^2-x_1^6+x_1^4x_2^2-2x_1^2x_2^6+3x_1^2x_2^4-x_1^2x_2^2-x_2^8+x_2^6}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{5}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{5}{2}}}+2x_1^2\frac{x_2^2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{5}{2}}}\frac{2x_1^2+2x_2^2-1}{\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{5}{2}}}\\
&-\frac{-x_1^8-2x_1^6x_2^2+x_1^6+3x_1^4x_2^2+2x_1^2x_2^6+x_1^2x_2^4-x_1^2x_2^2+x_2^8-x_2^6}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{5}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{5}{2}}}\\
=\;&\frac{-x_1^8-2x_1^6x_2^2+x_1^6+3x_1^4x_2^2+2x_1^2x_2^6+x_1^2x_2^4-x_1^2x_2^2+x_2^8-x_2^6}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{5}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{5}{2}}}\\
&-\frac{-x_1^8-2x_1^6x_2^2+x_1^6+3x_1^4x_2^2+2x_1^2x_2^6+x_1^2x_2^4-x_1^2x_2^2+x_2^8-x_2^6}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{5}{2}}\left(x_1^2+x_2^2-1\right)^{\frac{5}{2}}}\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

Mostramos que la Catenoide es una superficie minimal; además, es un ejemplo de superficie de revolución, esto es, una superficie obtenida al rotar una curva alrededor de un eje. En este caso, la Catenoide se obtiene al rotar la curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = \left(t, a\cosh\left(\frac{t}{a}+b\right)\right),$$

alrededor del eje x. Más aún, como puede consultarse en el Capítulo 6, en el Teorema 6.1, es, salvo movimientos rígidos, la única superficie minimal de revolución.

La Catenoide fue descubierta por Leonhard Euler en 1744 y posteriormente fue clasificada como superficie minimal por Baptiste Meusnier en 1776, además, muchas de las propiedades que conocemos de esta superficie son consecuencia del estudio de Karl Weierstrass y Hermann Amandus Schwarz. Esto la convierte en una de las superficies minimales más estudiadas y en un ejemplo clásico en geometría diferencial.

Resulta ser que la Catenoide y la Helicoide son superficies localmente isométricas (consultar [9, Cap.2, §2, pp.220-224]), lo que significa que, en una vecindad alrededor de cualquier punto, ambas superficies tienen la misma geometría intrínseca, lo cual implica que las distancias medidas sobre las superficies (con sus respectivas métricas) son las mismas en esas vecindades, y, por tanto, otras propiedades que dependen de la métrica son idénticas localmente, por ejemplo, la curvatura Gaussiana (ver la Definición 5.24 del Capítulo 5 sección §5.4). Siendo esto último lo que establece el afamado Teorema Egregio de Gauss[2] (ver [9, Cap.4, §4, pp.232-234]).

[2]Este teorema prueba que si dos superficies en $\mathbb{R}^3$ son localmente isométricas, entonces tienen la misma curvatura Gaussiana en sus puntos correspondientes.

Superficie de Scherk

$$f(x_1, x_2) = \log\left(\frac{\cos x_2}{\cos x_1}\right). \tag{1.46}$$

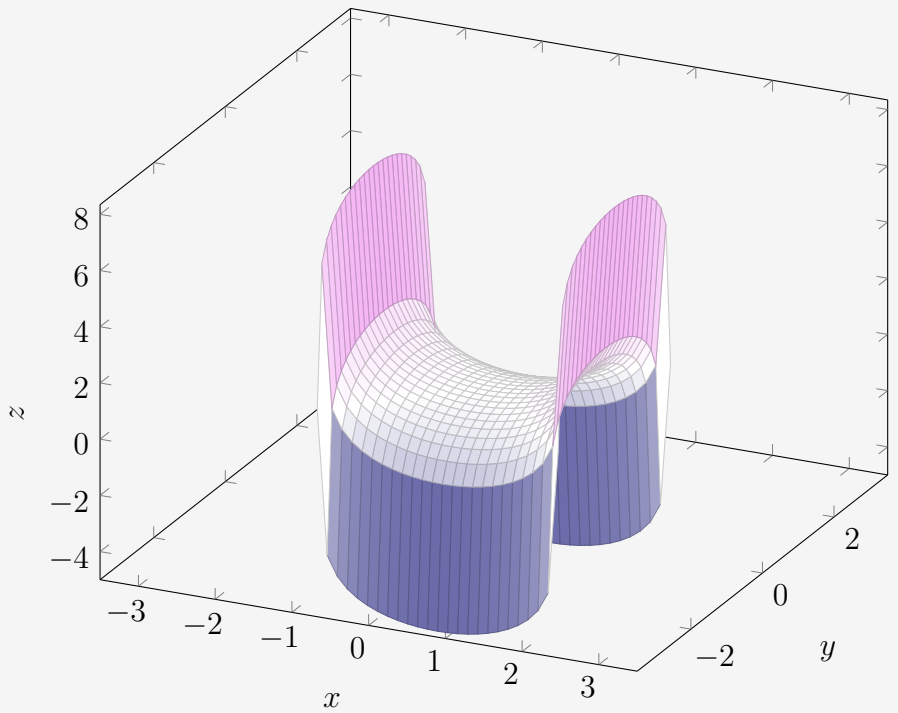


Figura 1.4: Superficie minimal de Scherk

Para mostrar que es minimal tomamos las derivadas parciales de $f(x_1, x_2)$. Así, tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \tan x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\cos^2 x_1} = \sec^2 x_1 \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= -\frac{\sin x_2}{\cos x_2} = -\tan x_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{\cos^2 x_2} = -\sec^2 x_2
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Sustituyendo en (1.43)

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \left(-\frac{\sin x_2}{\cos x_2}\right)^2\right)\left(\sec^2 x_1\right) \\
&+ \left(1 + \left(\frac{\sin x_1}{\cos x_1}\right)^2\right)\left(-\sec^2 x_2\right) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x_1 \cos^2 x_2} - \frac{1}{\cos^2 x_1 \cos^2 x_2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La superficie de Scherk es obra del matemático alemán Heinrich Scherk, quien la descubrió en 1835. Esta superficie está definida únicamente cuando $\dfrac{\cos(x_2)}{\cos(x_1)} > 0$ y es, además, periódica. Por ejemplo, una parte de esta superficie está definida sobre el cuadrado $-\dfrac{\pi}{2} < x_1 < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$, como se ilustra en la Figura 1.4.

Por otro lado, la superficie de Scherk es la única superficie minimal que se puede escribir de la forma

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2),$$

En efecto, al sustituir en (1.43)

$$g''(x_1)(1 + (h'(x_2))^2) + h''(x_2)(1 + (g'(x_1)^2) = 0,$$

lo cual es equivalante a la expresión

$$-\frac{g''(x_1)}{1 + (g'(x_1))^2} = \frac{h''(x_2)}{1 + (h'(x_2))^2}.$$

Como las variables x_1 y x_2 son independientes, cada uno de los lados de la igualdad es constante, digamos c, así tenemos dos ecuaciones diferenciales

$$-\frac{g''(x_1)}{1 + (g'(x_1))^2} = c \text{ y } \frac{h''(x_2)}{1 + (h'(x_2))^2} = -c,$$

la primera se reescribe como

$$g''(x_1) = -c(1 + (g'(x_1)^2),$$

tomando a $g'(x_1) = u$, se tiene que $g''(x_1) = \dfrac{du}{dx_1}$, así

$$\frac{du}{dx_1} = -a(1 + u^2),$$

la cual hemos reducido a una ecuación diferencial por variables separables,

$$\frac{du}{1 + u^2} = -c dx_1,$$

integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1 + u^2} &= -c \int dx_1 \\ \arctan(u) &= -cx_1 + C \\ u &= \tan(C - cx_1) \\ g'(x_1) &= \tan(C - cx_1), \end{aligned}$$

por lo que, volviendo a integrar, en virtud del Teorema Fundamental del Cálculo

$$g(x) = \int \tan(C - cx_1) dx_1,$$

para esta última integral tomamos el cambio de variable $v = C - cx_1$, de modo que $dv = -cdx_1$, o bien $dx_1 = -\dfrac{dv}{c}$

$$\begin{aligned} g(x_1) &= -\frac{1}{c}\int \tan(v)dv \\ g(x_1) &= -\frac{1}{c}\log(\sec(C - cx_1)) + A \\ g(x_1) &= -\frac{1}{c}\log\left(\frac{1}{\cos(C - cx_1)}\right) + A \\ g(x_1) &= \frac{1}{c}\log(\cos(C - cx_1)) + A, \end{aligned}$$

ya que no tenemos condiciones iniciales, podemos suponer que $C = A = 0$, de esto

$$g(x_1) = \frac{\log(\cos(cx_1))}{c}.$$

De manera similar obtenemos

$$h(x_2) = -\frac{\log(\cos(cx_2))}{c}.$$

Con lo anterior

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= g(x_1) + h(x_2) \\ &= \frac{\log(\cos(cx_1))}{c} - \frac{\log(\cos(cx_2))}{c} \\ &= \frac{1}{c}\log\left(\frac{\cos(cx_1)}{\cos(cx_2)}\right). \end{aligned}$$

Observemos que si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ está representada como en (1.38) y satisface (1.43), entonces, para cualquier función $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que sea una rotación, una traslación, una reflexión o una homotecía, o una composición de estas, la imagen $T(S)$ sigue siendo una superficie minimal. Esto proporciona un método para obtener otras soluciones de (1.43).

En cuanto a las soluciones de (1.43) presentadas anteriormente, podemos notar que no hemos enfatizado mucho en su dominio de definición. Sin embargo, es claro que ninguna de ellas está definida para todo los valores x_1 y x_2. Esto último no es casualidad, pues como veremos en el Capítulo 4, el Teorema de Bernstein afirma que para $n = 3$ no existen soluciones no triviales para (1.43) en todo el plano.

Volviendo al caso general, si cada f_k es lineal en las variables x_1 y x_2, esto es, según la representación dada en (1.38) para $k = 3, \ldots, n$

$$f_k(x_1, x_2) = a_k x_1 + b_k x_2 + c_k,$$

donde a_k, b_k y c_k son constantes, en esta situación (1.43) se satisface directamente, ya que los cálculos indican que para $k = 3, \ldots, n$

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2} = 0,$$

por lo que al sustituir en (1.43) se obtiene la solución trivial, por lo que en este caso S es un plano.

Para terminar esta sección tomemos $n = 4$, $z = x_1 + ix_2$ y $g_1(z)$ una funcion analítica. Definimos

$$f_k(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{Re}\{g_1(z)\}, & \text{si } k = 3 \\ \mathrm{Im}\{g_1(z)\}, & \text{si } k = 4. \end{cases}$$

Escribiendo $g_1(z) = u_1(z) + iv_1(z)$, tenemos según (1.38) una superficie en su forma no paramétrica. Así, utilizando la notación vectorial (1.42), esta queda representada por

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (f_3(x_1, x_2), f_4(x_1, x_2)) \\ &= (u_1(z), v_1(z)). \end{aligned}$$

Veamos que se verifica (1.43), para esto, calculamos primero las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_1}\right). \end{aligned}$$

Al sustituir en (1.43) se tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & \left(1 + \left|\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\right|^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right) \\ & -2\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \\ & + \left(1 + \left|\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)\right|^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right) \\ = & \left(1 + \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right) \\ & -2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right) \\ & \left(1 + \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right). \end{aligned}$$

Agregado a lo anterior, como $g_1(z)$ es analítica satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial v_1}{\partial x_1},\end{aligned}$$

Por lo que el segundo miembro de la última expresión se anula, esto es

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)=0,$$

se sigue de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
&\left(1+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right)\\
&-2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)\\
&+\left(1+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\\
=\;&\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right)\\
&+\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\\
=\;&\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\left(\left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\left(\left(-\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right)\\
&+\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\\
=\;&\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}\right)\\
&+\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2},\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2\right)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, en esta última expresión podemos observar que sus entradas son

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right)$$

y

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\left(\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right),$$

pero u_1 y v_1 son armónicas, por lo que $f(x_1,x_2)$ es solución de (1.43) y en consecuencia es una superficie minimal.

Bajo el mismo argumento concluimos que si tomamos $z = x_1 + ix_2$, $g_1(z), \ldots, g_m(z)$ funciones analíticas y $n = 2m + 2$, y definimos

$$f_k(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{Re}\{g_p(z)\}, & \text{si } k = 2p + 1 \\ \mathrm{Im}\{g_p(z)\}, & \text{si } k = 2p + 2. \end{cases}$$

para $p = 1, \ldots, m$ obtenemos soluciones a (1.43), de esta forma, mostramos que la gráfica de una curva analítica, considerada como una superficie en el respectivo $\mathbb{R}^n$, es una superficie minimal.

Volveremos a analizar estos ejemplos en los capítulos 3 y 5, donde haremos mención de otras propiedades que nos servirán para ejemplificar algunos resultados propios de la teoría desarrollada en tales apartados.

§1.4.

Superficies minimales no paramétricas en $\mathbb{R}^n$

Antes de comenzar con esta sección, consideramos conveniente recordar algunos hechos acerca de la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden. De esta manera si $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, es una función de clase C^2, en general una ecuación en derivadas parciales (lineal o no lineal[3]), de segundo orden, homogénea y con coeficientes constantes puede ser escrita como

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

en donde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, donde el orden de la ecuación (el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación) queda explícito en su parte principal

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Diremos que una ecuación en derivadas parciales es:

- Elíptica si $ac - b^2 > 0$,
- Parabólica si $ac - b^2 = 0$, e
- Hiperbólica si $ac - b^2 < 0$.

La ecuación de las superficies minimales

$$\left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0,$$

[3]Una ecuación en derivadas parciales es lineal si la función incógnita u y todas sus derivadas parciales aparecen de forma lineal, es decir, no están elevadas a ninguna potencia mayor que 1 y no se multiplican entre sí.

de acuerdo a esta clasificación es una ecuación en derivadas parciales elíptica no lineal de segundo orden.

El estudio de las superficies minimales no paramétricas, consiste en el estudio de las soluciones de la ecuación de las superficies minimales, la cual, escribiremos a continuación en su forma vectorial:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie representada en su forma no parámetrica (1.37)

$$x_k = f_k(x_1, x_2), \;\; k = 3, \ldots, n.$$

Introducimos la notación vectorial siguiente:

$$f = (f_3, \ldots, f_n), \;\; p = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \;\; q = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \;\; r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \;\; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \;\; t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \tag{1.47}$$

por tanto (1.43) puede expresarse como:

$$\left(1 + |q|^2\right) \frac{\partial p}{\partial x_1} - (p \cdot q) \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial q}{\partial x_1} \right) + \left(1 + |p|^2\right) \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0, \tag{1.48}$$

o bien

$$\left(1 + |q|^2\right) r - 2 \left(p \cdot q\right) s + \left(1 + |p|^2\right) t = 0. \tag{1.49}$$

La idea subyacente en la presente sección es la comparación de una solución desconocida de (1.49) con una solución fija, cuyas propiedades sean bien conocidas. Este método es posible gracias al siguiente lema, cuya demostración puede ser consultada en [6, p.323].

Lema 1.6. *Sean F y G soluciones de (1.49) en un dominio acotado $\mathcal{D}$. Supongamos que $\lim F - G \leq M$ para cada sucesión de puntos que se aproximan a la frontera de $\mathcal{D}$. Entonces $F - G \leq M$ en todo $\mathcal{D}$.*

Mostraremos a continuación que, para ciertos dominios $\mathcal{D}$, la conclusión del Lema 1.6 puede ser válida incluso si la hipótesis se conoce solo en una parte de la frontera de $\mathcal{D}$. Para ver esto, introducimos la siguiente notación.

Sea

$$G(r; r_1) = r_1 \cosh^{-1} \frac{r}{r_1}; \;\; r \geq r_1; \;\; G(r : r_1) \leq 0. \tag{1.50}$$

La ecuación

$$x_3 = G(r : r_1); \;\; r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \tag{1.51}$$

define la mitad inferior de la superficie de la Catenoide, y es una solución (1.49) en el exterior de círculo $x_1^2 + x_2^2 = r_1^2$, tomando los valores cero en su frontera.

Lema 1.7. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio contenido en el anillo $r_1 < r < r_2$ y sea $F(x_1, x_2)$ una solución de (1.49) en $\mathcal{D}$ si, se satisface*

$$\overline{\lim}(F(x_1, x_2) - G(r; r_1)) \leq M \tag{1.52}$$

para cada sucesión de puntos que tienda a un punto frontera de $\mathcal{D}$, pero no en el círculo $r = r_1$, entonces

$$F(x_1, x_2) \leq G(r : r_1) + M \tag{1.53}$$

en todo $\mathcal{D}$.

Demostración. Sea r_1' tal que $r_1 < r_1' < r_2$, y tomemos

$$\epsilon = \max_{r_1' \leq r \leq r_2} |G(r; r_1) - G(r : r_1')| .$$

Entonces, por (1.52), se tiene que

$$\overline{\lim}(F(x_1, x_2) - G(r; r_1')) \leq M + \epsilon, \tag{1.54}$$

para cualquier sucesión de puntos que tiendan a un punto frontera de $\mathcal{D}$ contenido en el anillo $r_1' \leq r \leq r_2$. Deseamos mostrar que

$$F(x_1, x_2) \leq G(r; r_1') + M + \epsilon \tag{1.55}$$

en el dominio $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \{r_1' < r < r_2\}$, pues, el resultado se sigue si hacemos $r_1' \to r_1$.

De esta manera, para mostrar (1.55), por el Lema 1.6, es suficiente mostrar que (1.54) se satisface para cada punto en la frontera de $\mathcal{D}'$. Dado que ya se cumplen en los puntos de la frontera de $\mathcal{D}$, bastará con mostrar que (1.55) se cumple en el interior de $\mathcal{D}$ que se encuentran contenidos en el círculo $r = r_1'$.

Supongamos lo contrario, entonces la función $F(x_1, x_2) - G(r : r_1')$ tendría un máximo $M_1 > M + \epsilon$ en algún punto (a_1, a_2) de este círculo, interior a $\mathcal{D}$. Por el Lema 1.6, tenemos que $F(x_1, x_2) - G(r : r_1') \leq M_1$ en todo $\mathcal{D}'$. Por otro lado, F tiene gradiente finito en el punto (a_1, a_2), siempre que en (1.50),

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial G(r; r_1')}{\partial r}\right]_{r=r_1'} &= \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r_1' \cosh^{-1}\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\right]_{r=r_1'} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{-\frac{(r_1')^2 - r^2}{(r_1')^2}}}\right]_{r=r_1'} \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{(r_1')^2} - 1}}\right]_{r=r_1'} \\
&= \lim_{r \to r_1'} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{(r_1')^2} - 1}} = -\infty.
\end{aligned}$$

Dado que $F - G = M_1$ en (a_1, a_2), se sigue que $F - G > M_1$ para todos los puntos en $\mathcal{D}'$ suficientemente cercanos a (a_1, a_2) y del origen. Entonces, nuestro supuesto de que (1.55) no se cumple nos lleva a una contradicción, así el resultado queda demostrado. ■

En lo que sigue, proporcionamos varias aplicaciones del lema anterior, siendo la primera de estas el principio generalizado del máximo para las soluciones de (1.49).

Teorema 1.1 (**Principio del Máximo**). *Sea $F(x_1, x_2)$ una solución de (1.49) en un dominio acotado $\mathcal{D}$. Supongamos que para cada punto frontera $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$, se satisface*

$$\overline{\lim}_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} F(x_1, x_2) \leq M \tag{1.56}$$

y

$$\underline{\lim}_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} F(x_1, x_2) \geq m \tag{1.57}$$

excepto en número finito de puntos, entonces

$$m \leq F(x_1, x_2) \leq M \tag{1.58}$$

en todo $\mathcal{D}$.

Demostración. Es suficiente con mostrar la desigualdad $F(x_1, x_2) \leq M$, pues, para la otra desigualdad, solo resta considerar la función $-F$.

Supongamos que $\sup F = M_1 > M$, entonces existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}$ donde $F(p_n) \to M_1$ cuando $n \to \infty$, y una subsucesión $\{p_{n_j}\}$ de $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $p_{n_j} \to q$ donde q es un punto frontera de $\mathcal{D}$.

Si F alcanza su máximo en un punto interior de $\mathcal{D}$, entonces F es constante (ya que x_3 es una función armónica), de esta forma, podemos suponer por una traslación en el espacio que este punto está en el origen, por lo que, tomando a $r_2 > 0$, de tal manera que ningún otro punto frontera este en el disco $r < r_2$. Luego, eligiendo r_1 de manera que $0 < r_1 < r_2$ y haciendo $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \{r_1 < r < r_2\}$.

Finalmente, sea $M_2 = \sup F$ para los puntos de $\mathcal{D}$ en el círculo $r = r_2$. Afirmamos que $M_2 < M_1$. Es decir, dada $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en el círculo $r = r_2$ para la cual $F((y_n)) \to M_2$ cuando $n \to \infty$, tienen un punto de acumulación que o bien se encuentra en la frontera de $\mathcal{D}$, con lo cual $M_2 \leq M$, o bien en el interior de $\mathcal{D}$, en cuyo caso $F < M_1$ en dicho punto, ya que de otra manera tendríamos que $F \equiv M_1 > M$, lo cual nos lleva a una contradicción con (1.56). Combinando todos estos hechos, concluimos que

$$\overline{\lim}(F(x_1, x_2) - G(r; r_1)) \leq M_3 - G(r_2; r_1),$$

para todos los puntos frontera de $\mathcal{D}'$ para los cuales $r > r_1$, donde

$$M_3 = \max\{M, M_2\} < M_1.$$

Aplicando el Lema 1.7 se sigue que

$$F(x_1, x_2) \leq G(r; r_1) - G(r_2; r_1) + M_3, \tag{1.59}$$

en todo $\mathcal{D}'$. Ahora para cada r fijo, se tiene de (1.50) que $G(r : r_1) \to 0$ cuando $r_1 \to 0$, de esta manera, deducimos que $F(x_1, x_2) \leq M_3 < M_1$ para $0 < r < r_2$. Pero esto es una contradicción con el hecho de que $F \to M_1$ a lo largo de una sucesión de puntos que tienden al origen. Así, el resultado se sigue. ■

Definición 1.7. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio plano y P un punto en la frontera de $\mathcal{D}$. Decimos que P es un punto de concavidad de $\mathcal{D}$ si existe una círculo $\mathcal{C}$ que pasa por P y alguna vecindad de P cuya intersección con el exterior de $\mathcal{C}$ está en P. El círculo $\mathcal{C}$ se llama círculo interior de contacto de P.*

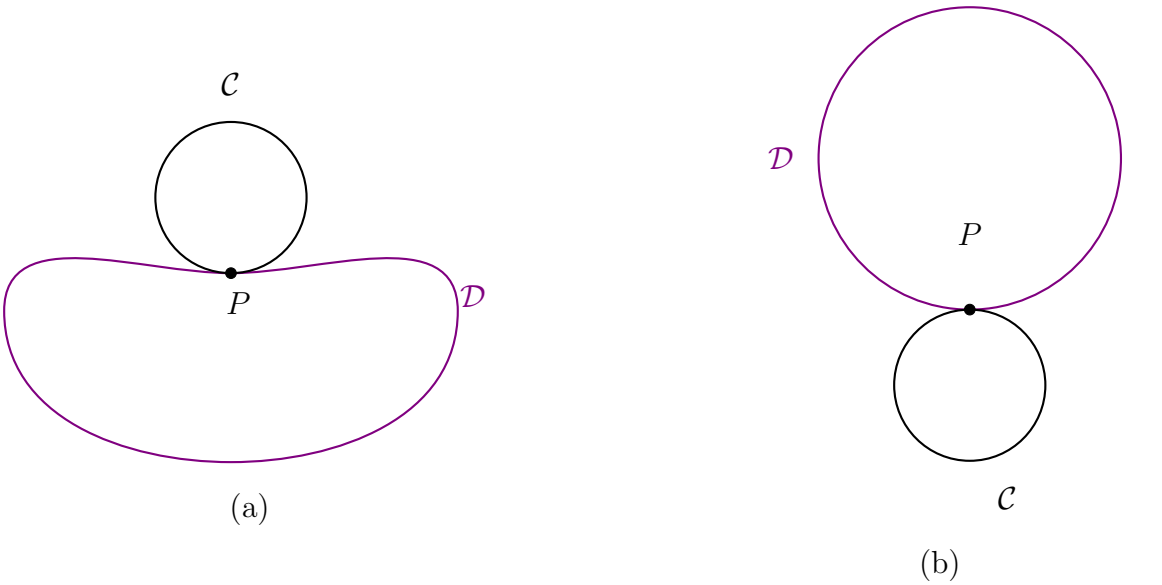


Figura 1.5: (a) Punto de concavidad y (b) Punto de no concavidad

Lema 1.8. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio plano acotado, P un punto de concavidad en la frontera de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ el círculo interior de contacto de P. Si F es una solución de la ecuación de las superficies minimales (1.49) en $\mathcal{D}$, entonces los valores en la frontera de F en el punto P están limitados por los valores en la frontera de F en la parte de la frontera exterior a $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sea P un punto de concavidad en la frontera del dominio $\mathcal{D}$, supongamos que el círculo interior de contacto de P, $\mathcal{C}$, tiene centro en el origen y es de radio $r_1 > 0$, por otro lado, el dominio $\mathcal{D}$ está contenido en algún disco $r < r_2$. Supongamos que $\overline{\lim} F \leq M$ para todos los puntos en la frontera de $\mathcal{D}$ exteriores a $\mathcal{C}$, entonces por el Lema 1.7 aplicado a la intersección de $\mathcal{D}$ con el exterior de $\mathcal{C}$, tendremos que

$$F(x_1, x_2) \leq G(r; r_1) - G(r_2; r_1) + M, \quad \text{para } r_1 < r < r_2,$$

y por lo tanto

$$\lim_{Q \to P} F(Q) \leq M - G(r_2; r_1). \tag{1.60}$$

■

Lema 1.9. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio plano acotado. Entonces $\mathcal{D}$ es convexo si y sólo si no existe un punto de concavidad en la frontera de $\mathcal{D}$.*

Demostración. Para la necesidad, supongamos que P es un punto de concavidad en la frontera de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ es el círculo interior de contacto en P. Entonces el segmento de recta tangente a $\mathcal{C}$ en P, digamos L, tendrá sus puntos extremos en $\mathcal{D}$, pero $P \in L$ y $P \in \mathrm{Fr}(\mathcal{D})$, es decir, el propio segmento L contiene el punto P y P no está en $\mathcal{D}$, por tanto $\mathcal{D}$ no es convexo, lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis. Concluyendo de esta manera que no existen puntos de concavidad en la frontera de $\mathcal{D}$.

Por otro lado, si $\mathcal{D}$ no es convexo, existen dos puntos $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}$ tales que el segmento que los une no está en $\mathcal{D}$. Sea $\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{D}$, una curva tal que $\alpha(0) = Q_1$ y $\alpha(1) = Q_2$. Ya

que α es continua y $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, existe un valor mínimo $t_0 \in [0,1]$, para el cual el segmento L que une los puntos Q_1 y $\alpha(t_0)$ no está completamente contenido en $\mathcal{D}$. Tenemos que $t_0 > 0$, y para todos los valores menores que $t < t_0$ en $[0,1]$ suficientemente cercanos, los segmentos de recta desde Q_1 hasta $\alpha(t)$ están en $\mathcal{D}$ y se encuentran del mismo lado de L.

Por tanto existe un subconjunto abierto $\Delta \subseteq \mathcal{D}$ que consta de todos los puntos de un lado de L y lo suficientemente cercanos a L, junto con todos los puntos en un disco alrededor de cada uno de los extremos.

Eligiendo un arco circular en Δ que una los puntos extremos de L y trasladarlo hasta que intersecte por primera vez la frontera de $\mathcal{D}$, se encuentra un punto de concavidad P. ■

Teorema 1.2. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio que tiene un punto de concavidad P en su frontera. Entonces, una solución a la ecuación de las superficies minimales (1.49) en $\mathcal{D}$ no puede tender al infinito en P.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ es círculo interior de contacto de P. Al elegir, si es necesario, un círculo ligeramente más grande, tangente a $\mathcal{C}$ en P, podemos suponer que existe un arco γ de $\mathcal{C}$ que contiene a P, pero que no contiene a ningún otro punto de la frontera de $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{C}'$ es un círculo más grande concéntrico con $\mathcal{C}$ y lo suficientemente cercano, entonces la región $\mathcal{D}'$ delimitada por γ, dos segmentos radiales y un arco γ' de $\mathcal{C}'$, es tal que $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$. Así, cualquier solución F de (1.49) en $\mathcal{D}$, por el principio del máximo tendrá una cota superior, digamos M en la parte de la frontera de $\mathcal{D}'$ exterior a $\mathcal{C}$. Entonces, aplicando el Lema 1.8 al dominio $\mathcal{D}'$, y por la ecuación (1.60) se tiene que F no puede tender al infinito en el punto P. ■

El interés del Teorema 1.2 radica en que las soluciones de la la ecuación de las superficies minimales (1.49) pueden, de hecho, tomar valores infinitos en la frontera, inclusive a lo largo de todo un arco en la frontera, como en el caso de la superficie de Scherk

$$F(x_1, x_2) = \log\left(\frac{\cos x_2}{\cos x_1}\right),$$

que está definida en el cuadrado $|x_1| < \frac{\pi}{2}$, $|x_2| < \frac{\pi}{2}$, y que tiende ya sea a ∞ o $-\infty$ en cada punto de la frontera, excepto en los vértices (ver Figura 1.4). Observemos que si $\mathcal{D}$ es cualquier dominio que se encuentre en el interior de este cuadrádo cuya frontera es tangente a uno de los lados, entonces F es una solución en $\mathcal{D}$ que tiende el infinito en el punto de tangencia.

Podemos profundizar en la idea expuesta en el párrafo anterior, teniendo en cuenta que la superficie de Scherk solo existe cuando $\cos(x_1)$ y $\cos(x_2)$ son ambos mayores que cero o ambos menores que cero, es decir, en los interiores de los cuadrados blancos del siguiente patrón de tablero de ajedrez (ver Figura 1.6), en el cual los cuadrados tienen vértices en los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, y no hay dos cuadrados con un borde común que tengan el mismo color. El cuadrado que contiene el origen es blanco.

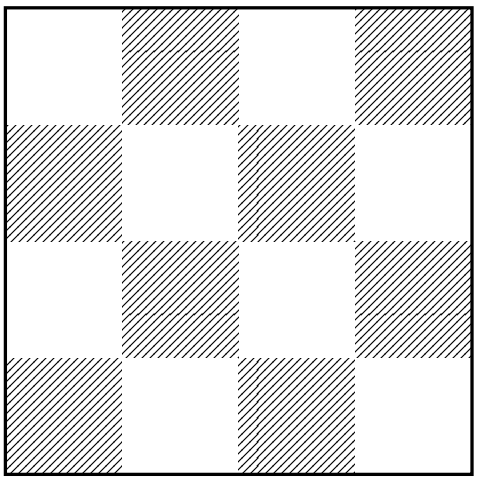


Figura 1.6: Tablero de ajedrez donde esta definida la superficie de Scherk

Los cuadrados blancos tienen centros de la forma $(m\pi, n\pi)$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m+n$ es par. Dado que para tales enteros m y n se satisface que

$$\frac{\cos(x_2 + n\pi)}{\cos(x_1 + m\pi)} = \frac{\cos(x_2)}{\cos(x_1)},$$

se sigue que la parte de la superficie sobre el cuadrado con centro en $(m\pi, n\pi)$ se obtiene de la parte sobre el cuadrado con centro en $(0,0)$ mediante la traslación $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + m\pi, x_2 + n\pi, x_3)$. Es por esta razón que basta con mostrar la parte de la superficie sobre un solo cuadrado. Es decir, por cada cuadrado indicado en la Figura 1.6, se obtiene una parte de la superficie de Scherk.

El siguiente resultado complementa al Teorema 1.2, el cual muestra que los valores infinitos en la frontera no pueden ocurrir a lo largo de un arco convexo.

Teorema 1.3. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio plano, γ un arco en la frontera de $\mathcal{D}$, L es segmento de recta que une los puntos extremos de γ. Si γ y L forman la frontera de un subdominio $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ entonces ninguna solución de la ecuación de las superficies minimales (1.49) en $\mathcal{D}$ puede tender al infintio en cada punto de γ.*

Demostración. Sea P un punto $\mathcal{D}'$ y sea $\mathcal{C}$ el círculo que pasa por P y los extremos del segmento L. Entonces existe un subdominio $\mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{D}'$ que se encuentra en el exterior de $\mathcal{C}$ y que está delimitado por partes de $\mathcal{C}$ y γ. Si F es una solución de la ecuación de las superficies minimales (1.49) en $\mathcal{D}$ que tiende al infinito en cada punto de γ, por el Lema 1.7 aplicado a la función $-F$ implica que $F = \infty$ en $\mathcal{D}''$ lo cual no es posible. ■

Combinando los teoremas 1.2 y 1.3 se observa lo siguiente: Si una solución de la ecuación de las superficies minimales (1.49) tiende a infinito a lo largo de todo un arco en la frontera, entonces ese arco es un segmento de línea recta. Que es precisamente el comportamiento exhibido por la superficie de Scherk.

CAPÍTULO 2

El problema de minimizar el área de una superficie

En este capítulo discutiremos el problema que históricamente condujo a la teoría de las superficies minimales, a saber, el de caracterizar aquellas superficies que tienen menor área de entre todas las superficies con la misma frontera.

Sean $S \in C^2$ una superficie regular definida por $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, Γ una curva cerrada en $\mathcal{D}$ que es la frontera del subdominio Δ y Σ la superficie definida por la restricción $X|_\Delta$, suponiendo que el área de Σ es menor o igual que el área de cada superficie $\tilde{\Sigma}$ definida por $\tilde{X} : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{X} = X$ en Γ, esta situación nos lleva a preguntarnos ¿Qué implica esto sobre el área de la superficie X?

Supongamos que $N \in C^1$ tal que N es normal a la superficie S con parametrización $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, esto es

$$N \cdot \frac{\partial X}{\partial u_i} = 0, \text{ para } i = 1, 2. \tag{2.1}$$

Derivando parcialmente con respecto a u_j se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial u_j}\left(N \cdot \frac{\partial X}{\partial u_i}\right) = \frac{\partial N}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_i} + N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j},$$

despejando

$$\frac{\partial N}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_i} = -N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = -b_{ij}(N). \tag{2.2}$$

Siendo las superficies minimales el objeto de estudio del presente documento, un posible cuestionamiento es el siguiente: ¿por qué minimales?, una forma de explicar el porque de esta palabra es introducir la noción de variación normal.

Sean $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que define una superficie regular S y $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. La ***variación normal*** de $X(\mathcal{D})$ determinada por h es la función (ver la Figura 2.1) $\tilde{X} : \mathcal{D} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\tilde{X}(u, \lambda) = X(u) + \lambda h(u) N(u), \;\; u \in \mathcal{D} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La cual para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ define una superficie S_λ, y, será regular si $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$ para $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, como se analizará más adelante.

Derivando parcialmente con respecto a u_i

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i}(X(u)+\lambda h(u)N(u)) \\ &= \frac{\partial X}{\partial u_i}+\lambda\left[\frac{\partial}{\partial u_i}(h(u)N(u))\right] \\ &= \frac{\partial X}{\partial u_i}+\lambda\left[h\frac{\partial N}{\partial u_i}+\frac{\partial h}{\partial u_i}N\right].\end{aligned}$$

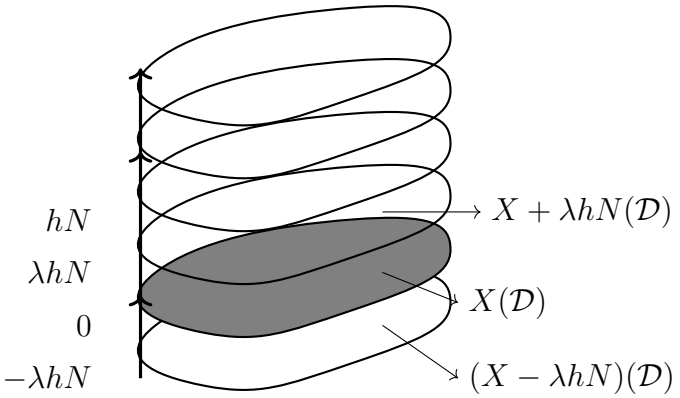


Figura 2.1: Variación normal de $X(\mathcal{D})$ para $\lambda > 0$

De (1.1), (2.1) y (2.2) obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= \frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_j} \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial u_i}+\lambda\left[h\frac{\partial N}{\partial u_i}+\frac{\partial h}{\partial u_i}N\right]\right)\cdot\left(\frac{\partial X}{\partial u_j}+\lambda\left[h\frac{\partial N}{\partial u_j}+\frac{\partial h}{\partial u_j}N\right]\right) \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial X}{\partial u_j}\right)+\left(\frac{\partial X}{\partial u_i}\cdot\lambda\left(h\frac{\partial N}{\partial u_j}+\frac{\partial h}{\partial u_j}N\right)\right)+\left(\frac{\partial X}{\partial u_j}\cdot\lambda\left(h\frac{\partial N}{\partial u_i}+\frac{\partial h}{\partial u_i}N\right)\right) \\ &\quad +\lambda^2\left[\left(h\frac{\partial N}{\partial u_i}+\frac{\partial h}{\partial u_i}N\right)\cdot\left(h\frac{\partial N}{\partial u_j}+\frac{\partial h}{\partial u_j}N\right)\right] \\ &= g_{ij}+\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial u_i}\cdot h\frac{\partial N}{\partial u_j}\right)+\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial h}{\partial u_j}N\right)+\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial u_j}\cdot h\frac{\partial N}{\partial u_i}\right) \\ &\quad +\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial h}{\partial u_i}N\right)+\lambda^2 c_{ij} \\ &= g_{ij}+\lambda h\left(\frac{\partial X}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial N}{\partial u_j}+\frac{\partial X}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial N}{\partial u_i}\right) \\ &\quad +\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial h}{\partial u_j}N+\frac{\partial X}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial h}{\partial u_i}N\right)+\lambda^2 c_{ij} \\ &= g_{ij}+\lambda h\left(-2b_{ij}\left(N\right)\right)+\lambda^2 c_{ij} \\ &= g_{ij}-2\lambda h b_{ij}\left(N\right)+\lambda^2 c_{ij},\end{aligned}$$

donde c_{ij} corresponde a una función continua para $u \in \mathcal{D}$. Además, note que en el tercer miembro de la antepenúltima igualdad anterior estamos utilizando el hecho de que $N \perp \dfrac{\partial X}{\partial u_1}$ y $N \perp \dfrac{\partial X}{\partial u_2}$. Ahora, al ser c_{ij} una función continua sobre $\mathcal{D}$ podemos encontrar el determinante de $\tilde{g}_{ij}$.

Para esto consideramos las matrices $[g_{ij}]$ y $[b_{ij}]$ como sigue:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \\ b_{ij} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \det(\tilde{g}_{ij}) &= \det\left(g_{ij} - 2\lambda h b_{ij}\left(N\right) + \lambda^2 c_{ij}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} - 2\lambda h \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \lambda c_{ij}\right) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} - 2\lambda h \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) + \lambda^2 c_{ij} \\ &= \det\begin{pmatrix} g_{11} - 2h\lambda b_{11} & g_{12} - 2h\lambda b_{12} \\ g_{21} - 2h\lambda b_{21} & g_{22} - 2h\lambda b_{22} \end{pmatrix} + \lambda^2 c_{ij} \\ &= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} + 4h^2\lambda^2 b_{11}b_{22} - 4h^2\lambda^2 b_{12}b_{21} - 2h\lambda b_{11}g_{22} \\ &\quad + 2h\lambda b_{12}g_{21} + 2h\lambda b_{21}g_{12} - 2h\lambda b_{22}g_{11} + \lambda^2 c_{ij} \\ &= \det\left(g_{ij}\right) - 2h\lambda\left(g_{11}b_{22}\left(N\right) + g_{22}b_{11}\left(N\right) - 2g_{12}b_{12}\left(N\right)\right) \\ &\quad + \left(4h^2\lambda^2 b_{11}b_{22} - 4h^2\lambda^2 b_{12}b_{21} + \lambda^2 c_{ij}\right) \\ &= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2. \end{aligned}$$

De los cálculos previos destacamos la siguiente relación

$$\det(\tilde{g}_{ij}) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2, \tag{2.3}$$

la cual será de gran utilidad posteriormente, por otro lado adquirimos la siguiente notación

$$a_0 = \det\left(g_{ij}\right), \;\; a_1 = -2h\left(g_{11}b_{22}\left(N\right) + g_{22}b_{11}\left(N\right) - 2g_{12}b_{12}\left(N\right)\right), \tag{2.4}$$

donde a_2 es una función continua que depende de u, y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como consecuencia de la expresión (2.3) se tiene que al ser S una superficie regular en virtud del Lema 1.1 se tiene que $\det(\tilde{g}_{ij}) > 0$, y como a_0 es una función continua y está definida en el compacto $\overline{\Delta}$, alcanza su máximo y su mínimo, en particular alcanza su mínimo. Además, al ser a_1 y a_2 continuas en $\mathcal{D}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\det(\tilde{g}_{ij}) > 0$ para $|\lambda| < \epsilon$ y $u \in \overline{\Delta}$, esto es, para $|\lambda| < \epsilon$ las superficies Σ_λ definidas al restringir $\tilde{X}$ a Δ son superficies regulares.

En el párrafo anterior definimos a las superficies Σ_λ, nos interesa calcular su área $A(\lambda) = A(\Sigma_\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$, para ello, observe que de (2.3) y el Teorema de Taylor se puede aproximar

a la función $f(\lambda) = \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}$ en el punto $\lambda_0 = 0$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} &\approx f(\lambda_0) + f'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + R(\lambda^2) \\ &= \sqrt{a_0} + \frac{a_1 + 2a_2\lambda}{2\sqrt{a_0}}\lambda + R(\lambda^2) \\ &= \sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda + MR(\lambda^2),\end{aligned}$$

donde $R(\lambda^2)$ es el residuo y M es una constante positiva. Ahora, despejando la expresión de arriba

$$\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} - \left(\sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda\right) \approx MR(\lambda^2),$$

por lo que

$$\left|\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} - \left(\sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda\right)\right| < M\lambda^2. \tag{2.5}$$

De la definición de área de una superficie se deduce

$$\begin{aligned}A(0) &= A(\Sigma) \\ &= \int\int_\Delta \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}du_1du_2 \\ &= \int\int_\Delta \sqrt{a_0}du_1du_2.\end{aligned}$$

De las propiedades de la integral doble sobre el valor absoluto tenemos

$$\left|\int\int_\Delta \left(\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} - \left(\sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda\right)\right)du_1du_2\right| \leq \int\int_\Delta \left|\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} - \left(\sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda\right)\right|du_1du_2,$$

al aplicar (2.5) se tiene

$$\begin{aligned}\left|\int\int_\Delta \left(\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})} - \left(\sqrt{a_0} + \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}\lambda\right)\right)du_1du_2\right| &< \int\int_\Delta M\lambda^2 du_1du_2 \\ \left|\int\int_\Delta \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}du_1du_2 - \int\int_\Delta \sqrt{a_0}du_1du_2 - \lambda\int\int_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2\right| &< M_1\lambda^2 \\ \left|A(\lambda) - A(0) - \lambda\int\int_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2\right| &< M_1\lambda^2,\end{aligned}$$

como $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tendremos

$$\left|\frac{A(\lambda) - A(0)}{\lambda} - \int\int_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2\right| < M_1\lambda.$$

En esta última expresión hacemos tender $\lambda \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\left|\frac{A(\lambda) - A(0)}{\lambda} - \int\int_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2\right| &< \lim_{\lambda\to 0} M_1\lambda \\ \lim_{\lambda\to 0} -M\lambda < \lim_{\lambda\to 0}\frac{A(\lambda) - A(0)}{\lambda} - \int\int_\Delta \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2 &< \lim_{\lambda\to 0} M_1\lambda,\end{aligned}$$

Esto nos dice que A es diferenciable y su derivada en cero es

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\frac{A(\lambda)-A(0)}{\lambda}-\int\int_{\Delta}\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2 &= 0\\ A'(0)-\int\int_{\Delta}\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2 &= 0\\ A'(0) &= \int\int_{\Delta}\frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}du_1du_2,\end{aligned}$$

sustituyendo las expresiones a_0 y a_1 dadas en (2.4), y recordando la expresión explícita (1.33) para $H(N)$ se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned}A'(0) &= \int\int_{\Delta}\frac{-2h\left(g_{11}b_{22}(N)+g_{22}b_{11}(N)-2g_{12}b_{12}(N)\right)}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}du_1du_2\\ &= -2\int\int_{\Delta}\frac{\left(g_{11}b_{22}(N)+g_{22}b_{11}(N)-2g_{12}b_{12}(N)\right)}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{\sqrt{\det(g_{ij})}}du_1du_2\\ &= -2\int\int_{\Delta}\frac{\left(g_{11}b_{22}(N)+g_{22}b_{11}(N)-2g_{12}b_{12}(N)\right)}{2\det(g_{ij})}h\sqrt{\det(g_{ij})}du_1du_2\\ &= -2\int\int_{\Delta}H(N)h(u)\sqrt{\det(g_{ij})}du_1du_2.\end{aligned}$$

De esta manera diremos que la ecuación

$$A'(0)=-2\int\int_{\Delta}H(N)h(u)\sqrt{\det(g_{ij})}du_1du_2 \tag{2.6}$$

corresponde a la tasa de cambio de área en función de λ.

Definición 2.1. *Sea $f(u)$ una función continua para $u\in\tilde{\Delta}$, definimos la integral de f con respecto a la superficie Σ como*

$$\int\int_{\Sigma}f(u)dA=\int\int_{\Delta}f(u)\sqrt{\det(g_{ij})}du_1du_2. \tag{2.7}$$

Consideremos una familia de superficies S_λ y tomemos $h(u)=H(N)$ en (2.6), se tiene para esta variación en particular que

$$A'(0)=-2\iint_{\Delta}H^2dA<0.$$

Lo cual significa que si deformamos $X(\Delta)$ según el sentido del vector $H(N)$, el área decrece inicialmente, siendo esto último una interpretación geométrica de $H(N)$.

Ahora ya estamos en condiciones para justificar el uso de término "minimal" en conexión con las superficies de curvatura media nula.

Lema 2.1. *Para que Σ tenga área mínima, su curvatura media debe ser idénticamente cero.*

Demostración. Supongamos que la curvatura media no se anula, entonces existe un punto $a \in \Delta$ con $N = N(a)$ tal que $H(N) \neq 0$. Supongamos que $H(N) > 0$, en virtud del Lema 1.5 existe una vecindad V_1 de a con $N \in C^1$, tal que N es normal a S en X. De esto último se tiene $H(N) > 0$ en toda una vecindad V_2, con $a \in V_2 \subset V_1$, considerando la función $h(u)$ tal que $h(a) > 0$, se tiene que $h(u) \geq 0$ para cada u, y $h(u) = 0$ para $u \notin V_2$. Así,

$$-2 \int \int_{\Delta} H(N)h(u)\sqrt{\det(g_{ij})}du_1du_2 > 0.$$

Sin embargo, si V_2 es lo suficientemente pequeña para que $V_2 \subset \Delta$ entonces $\tilde{X} = X$ en Γ, de tal manera que Σ_λ es una superficie que tiene la misma frontera que Σ y en el supuesto de que Σ minimiza el área esto implicaría que $A(\lambda) \geq A(0)$ para cada λ tal que λ sea lo suficientemente pequeña, de donde $A'(0) = 0$, una contradición. ■

Notemos que si $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define una superficie minimal entonces, $H(N) = 0$, por tanto, en (2.6) se sigue que $A'(0) = 0$.

Combinando el Lema 2.1 y la observación anterior, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *Sean $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de una superficie regular S, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio y $\Delta \subseteq \mathcal{D}$ un subdominio. Entonces, X es minimal si y sólo si $A'(0) = 0$ para todos los subdominios Δ, y todas las variaciones normales de $X(\Delta)$.*

De esta manera, cualquier región acotada $X(\Delta)$ de una superficie minimal X es un punto crítico de la función área para cualquier variación normal de $X(\Delta)$. Debemos observar que este punto crítico no tiene por qué ser un mínimo, lo cual hace que el término "minimal" parezca, en cierto sentido, irrelevante. No obstante, es una terminología clásica, introducida por Joseph-Louis Lagrange (quien fue el primero en definir una superficie minimal) en 1760. De esta manera las superficies minimales surgieron originalmente en conexión con el tema de minimización, y es de esta conexión que derivaron su nombre.

§2.1.

Superficies que minimizan el área

En esta sección usaremos la propiedad de minimizar el área para derivar otras formas de la ecuación de las superficies minimales (1.43).

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ una superficie parametrizada en su forma no paramétrica (1.37), utilizando la notación vectorial (1.47) sabemos que (1.43) queda escrita en su forma vectorial (1.37).

Por otro lado, a partir de (1.47) las ecuaciones (1.39.1), (1.39.2) y (1.39.3) quedan escritas respectivamente como:

$$g_{11} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_1}\right)^2, \quad g_{12} = \sum_{k=3}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial u_1}\frac{\partial f_k}{\partial u_2}, \quad g_{22} = 1 + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_2}\right)^2, \tag{2.8}$$

o lo que es lo mismo

$$g_{11} = 1 + |p|^2, \;\; g_{12} = p \cdot q, \;\; g_{22} = 1 + |q|^2. \tag{2.9}$$

Utilizando la representación matricial

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

tenemos que al ser $S \in C^2$

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \\ &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\det(g_{ij}) = \left(1 + |p|^2\right)\left(1 + |q|^2\right) - (p \cdot q)^2 = 1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2 - (p \cdot q)^2, \tag{2.10}$$

escribiremos

$$W = \sqrt{\det(g_{ij})}. \tag{2.11}$$

A continuación veremos lo que significa hacer variar una superficie no parámetrica, en concreto, consideremos para cada $k = 3, \ldots, n$, las funciones $f_k, h_k : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $h_k \in C^1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, para definir

$$\tilde{f_k} = f_k + \lambda h_k, \;\; \text{para} \;\; k = 3, \ldots, n.$$

Utilizando la notación vectorial $h = (h_3, \ldots, h_n)$ tenemos

$$\tilde{f} = f + \lambda h, \;\; \tilde{p} = p + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_1}, \;\; \text{y} \;\; \tilde{q} = q + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_2}.$$

De esta manera

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i}, \;\; i = 1, 2.$$

Por lo que por (1.1) se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}\right) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}\right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}\right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j}\right), \end{aligned}$$

las cuales corresponden a las entradas de la matriz $[\tilde{g}_{ij}]$, más aún, explícitamente

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) \\ &= g_{11} + 2\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) + \lambda^2 \left|\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|^2, \\ \tilde{g}_{12} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2}\right) \\ &= g_{12} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_1}\right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_2}\right) = \tilde{g}_{21}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{22} &= \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+\lambda^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\\ &= g_{22}+2\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+\lambda^2\left|\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|^2.\end{aligned}$$

Como

$$\det(\tilde{g}_{ij})=\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}-\tilde{g}_{12}^2,$$

al sustituir las entradas de $[g_{ij}]$ obtenemos con un poco de trabajo la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\det(\tilde{g}_{ij}) &= \left(g_{11}+2\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)+\lambda^2\left|\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|^2\right)\left(g_{22}+2\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+\lambda^2\left|\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|^2\right)\\ &\quad-\left(g_{12}+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)+\lambda^2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\right)^2\\ &= g_{11}g_{22}+2\lambda g_{11}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+\lambda^2 g_{11}\left|\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|^2+2\lambda g_{22}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\\ &\quad+4\lambda^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+2\lambda^3\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\left|\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|^2\\ &\quad+\lambda^2 g_{22}\left|\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|^2+2\lambda^3\left|\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+\lambda^4\left|\frac{\partial h}{\partial x_1}\right|^2\left|\frac{\partial h}{\partial x_2}\right|^2\\ &\quad-g_{12}^2-\lambda g_{12}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)-\lambda^2 g_{12}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\\ &\quad-\lambda g_{12}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)-\lambda^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2\\ &\quad-\lambda^3\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)-\lambda^2 g_{12}\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\\ &\quad-\lambda^3\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)-\lambda^4\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)^2\\ &= g_{11}g_{22}-g_{12}^2\\ &\quad+2\lambda\left(g_{11}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+g_{22}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)-g_{12}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\right)\\ &\quad+\lambda Y.\end{aligned}$$

Donde Y es una función continua en las variables x_1 y x_2. Además, con la notación dada en (1.47) esto último puede escribirse como

$$\begin{aligned}\det(\tilde{g}_{ij}) &= \det(g_{ij})\\ &\quad+2\lambda\left(\left(1+|p|^2\right)\left(q\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)+\left(1+|q|^2\right)\left(p\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)-(p\cdot q)\left(p\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}+q\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\right)\\ &\quad+\lambda^2 Y\\ &= \det(g_{ij})+2\lambda\left[\left(\left(1+|q|^2\right)p-(p\cdot q)\,q\right)\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}+\left(\left(1+|p|^2\right)q-(p\cdot q)\,p\right)\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\right]\\ &\quad+\lambda^2 Y.\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la notación descrita en (2.11) y destacando que $\det(g_{ij})$ es como en (2.10), se tiene

$$\det(\tilde{g}_{ij}) \;=\; W^2 + 2\lambda X + \lambda^2 Y,$$

o de manera equivalente

$$\tilde{W}^2 = W^2 + 2\lambda X + \lambda^2 Y,$$

donde hemos escrito

$$X = \left(\left(1+|q|^2\right)p - (p\cdot q)\,q\right)\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1} + \left(\left(1+|p|^2\right)q - (p\cdot q)\,p\right)\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2},$$

y con Y como antes, repitiendo el proceso hecho en (2.5) tenemos por el Teorema de Taylor que podemos aproximar a $f(\lambda) = \sqrt{\tilde{W}^2}$ alrededor de $\lambda_0 = 0$, lo cual nos da como resultado

$$\begin{aligned}
\tilde{W} &\approx f(\lambda_0) + f'(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0) + \frac{f''(\lambda_0)}{2}(\lambda-\lambda_0)^2 + R\left(\lambda^2\right)\\
&= W + \frac{2X+2\lambda Y}{2\sqrt{W^2}}\lambda + R\left(\lambda^2\right)\\
&= W + \lambda\frac{X}{W} + \lambda^2 Z,
\end{aligned}$$

donde Z es una función continua en las variables x_1 y x_2.

Ahora bien, consideremos a Γ una curva cerrada en el dominio de definición de $f(x_1,x_2)$, y sea Δ la región acotada por Γ. Si la superficie $x_k = f(x_1,x_2)$ minimiza el área de entre todas las superficies con la misma frontera sobre Δ, entonces para cualquier función h tal que $h=0$ en Γ se tiene

$$\int\int_\Delta \tilde{W}\; dx_1dx_2 \geq \int\int_\Delta W\; dx_1dx_2,$$

lo cual es posible sólo si

$$\int\int_\Delta \frac{X}{W}dx_1dx_2 = 0.$$

Sustituyendo en la expresión anterior el valor de X

$$\begin{aligned}
\int\int_\Delta \frac{\left[\left(1+|q|^2\right)p - (p\cdot q)\,q\right]\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1} + \left[\left(1+|p|^2\right)q - (p\cdot q)\,p\right]\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}}{W}dx_1dx_2 &= 0\\
\int\int_\Delta \frac{\left[\left(1+|q|^2\right)p - (p\cdot q)\,q\right]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{\left[\left(1+|p|^2\right)q - (p\cdot q)\,p\right]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}dx_1dx_2 &= 0\\
\int\int_\Delta \frac{\left[\left(1+|q|^2\right)p - (p\cdot q)\,q\right]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\; dx_1dx_2 + \int\int_\Delta \frac{\left[\left(1+|p|^2\right)q - (p\cdot q)\,p\right]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}dx_1dx_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Para el primer término de la ecuación anterior integramos por partes, elegimos

$$f = \frac{\left[\left(1+|q|^2\right)p - (p\cdot q)\,q\right]}{W} \;\text{ y }\; g = h,$$

a las que derivamos parcialmente con respecto a la variable x_1, se sigue que

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Delta}\left(\frac{[(1+|q|^2)\,p-(p\cdot q)\,q]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\,dx_1dx_2\\
=\;&\frac{[(1+|q|^2)\,p-(p\cdot q)\,q]}{W}h-\int\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{[(1+|q|^2)\,p-(p\cdot q)\,q]}{W}\right)h\,dx_1dx_2\\
=\;&-\int\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{(1+|q|^2)\,p-(p\cdot q)\,q}{W}\right)h\,dx_1dx_2,
\end{aligned}$$

procedemos de manera similar para el segundo miembro de la ecuación, tomando a

$$f'=\frac{[(1+|p|^2)\,q-(p\cdot q)\,p]}{W}\;\text{ y }\;g'=h,$$

y derivando con respecto a la variable x_2 se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int\int_{\Delta}\frac{[(1+|p|^2)\,q-(p\cdot q)\,p]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\,dx_1dx_2\\
=\;&\frac{[(1+|p|^2)\,q-(p\cdot q)\,p]}{W}h-\int\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{(1+|p|^2)\,q-(p\cdot q)\,p}{W}\right)h\,dx_1dx_2\\
=\;&-\int\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{(1+|p|^2)\,q-(p\cdot q)\,p}{W}\right)h\,dx_1dx_2,
\end{aligned}$$

Observemos que en las dos expresiones de arriba se ha utilizado el hecho de que $h=0$ en Γ, de esta manera

$$\int\int_{\Delta}\frac{[(1+|q|^2)\,p-(p\cdot q)\,q]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_1}\,dx_1dx_2+\int\int_{\Delta}\frac{[(1+|p|^2)\,q-(p\cdot q)\,p]}{W}\cdot\frac{\partial h}{\partial x_2}\,dx_1dx_2=0,$$

se escribe como:

$$-\int\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{(1+|q|^2)\,p-(p\cdot q)\,q}{W}\right)h dx_1dx_2-\int\int_{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{(1+|p|^2)\,q-(p\cdot q)\,p}{W}\right)h dx_1dx_2=0,$$

o de manera equivalente

$$\int\int_{\Delta}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1+|q|^2}{W}p-\frac{p\cdot q}{W}q\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1+|p|^2}{W}q-\frac{p\cdot q}{W}p\right]\right]h\,dx_1dx_2=0.$$

De esto último se deduce la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1+|q|^2}{W}p-\frac{p\cdot q}{W}q\right]+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1+|p|^2}{W}q-\frac{p.\cdot q}{W}p\right]=0. \tag{2.12}$$

Una vez que hemos encontrado esta ecuación, veremos a continuación que es consecuencia de (1.49). De hecho, el lado izquierdo de (2.12) se puede expresar como la suma de tres términos:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1+|q|^2}{W}\frac{\partial p}{\partial x_1}-\frac{p\cdot q}{W}\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}+\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)+\frac{1+|p|^2}{W}\frac{\partial q}{\partial x_2}\right]\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+|q|^2}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p\cdot q}{W}\right)\right]p\\
&+\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+|p|^2}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p\cdot q}{W}\right)\right]q.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Notemos que el primer término de esta suma por (1.48) se anula

$$\left[\frac{1+|q|^2}{W}\frac{\partial p}{\partial x_1}-\frac{p\cdot q}{W}\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}+\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)+\frac{1+|p|^2}{W}\frac{\partial q}{\partial x_2}\right]=0,$$

en lo que sigue vamos a desarrollar los coeficientes del segundo término de (2.13), para lo cual primero calculamos la derivada parcial con respecto a x_1 de $\det(g_{ij})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\det(g_{ij})\right)}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(1+|p|^2+|q|^2+|p|^2|q|^2-(p\cdot q)^2\right)\\ &= 2\left(p\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)+2\left(q\cdot\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)+2|q|^2\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\cdot p\right)+2|p|^2\left(\frac{\partial q}{\partial x_1}\cdot q\right)\\ &\quad -2(p\cdot q)\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\cdot q+p\cdot\frac{\partial q}{\partial x_1}\right)\\ &= 2(p\cdot r)+2(q\cdot s)+2|q|^2(p\cdot r)+2|p|^2(q\cdot s)-2(p\cdot q)(r\cdot q+p\cdot s),\end{aligned}$$

ahora calculamos la derivada parcial respecto a x_2 de $\det(g_{ij})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\det(g_{ij})\right)}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(1+|p|^2+|q|^2+|p|^2|q|^2-(p\cdot q)^2\right)\\ &= 2\left(p\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2}\right)+2\left(q\cdot\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)+2|q|^2\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\cdot p\right)+2|p|^2\left(\frac{\partial q}{\partial x_2}\cdot q\right)\\ &\quad -2(p\cdot q)\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\cdot q+p\cdot\frac{\partial q}{\partial x_2}\right)\\ &= 2(p\cdot s)+2(q\cdot t)+2|q|^2(s\cdot p)+2|p|^2(t\cdot q)-2(p\cdot q)(s\cdot q+p\cdot t).\end{aligned}$$

Con lo anterior calculamos la derivada parcial con respecto a x_1 de W

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_1} &= \frac{\partial\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\right)}{\partial x_1}\\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\det(g_{ij})\right)}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\\ &= \frac{2(p\cdot r)+2(q\cdot s)+2|q|^2(p\cdot r)+2|p|^2(q\cdot s)-2(p\cdot q)(r\cdot q+p\cdot s)}{2W},\end{aligned}$$

y ahora con respecto a x_2

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x_2} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\det(g_{ij})\right)}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}\\ &= \frac{2(p\cdot s)+2(q\cdot t)+2|q|^2(s\cdot p)+2|p|^2(t\cdot q)-2(p\cdot q)(s\cdot q+p\cdot t)}{2W}.\end{aligned}$$

Utilizamos estos cálculos para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+|q|^2}{W}\right) &= \frac{\frac{\partial\left(1+|q|^2\right)}{\partial x_1}W-\left(1+|q|^2\right)\frac{\partial W}{\partial x_1}}{W^2}\\ &= \frac{2(q\cdot s)W-\left(1+|q|^2\right)\left(\frac{2(p\cdot r)+2(q\cdot s)+2|q|^2(p\cdot r)+2|p|^2(q\cdot s)-2(p\cdot q)(r\cdot q+p\cdot s)}{2W}\right)}{W^2}.\end{aligned}$$

Y por otro lado, la otra derivada parcial es

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p\cdot q}{W}\right) &= \frac{\frac{\partial (p\cdot q)}{\partial x_2}W-(p\cdot q)\frac{\partial W}{\partial x_2}}{W^2}\\ &= \frac{(s\cdot q+p\cdot t)\,W-(p\cdot q)\,\frac{2(p\cdot s)+2(q\cdot t)+2|q|^2(s\cdot p)+2|p|^2(t\cdot q)-2(p\cdot q)(s\cdot q+p\cdot t)}{2W}}{W^2}.\end{aligned}$$

Por lo que al restar estas dos últimas expresiones se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+|q|^2}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p\cdot q}{W}\right)\\ =&\frac{1}{W^3}\Bigg[2W(q\cdot s)\\ &-(1+|q|^2)\left(\frac{2(p\cdot r)+2(q\cdot s)+2|q|^2(p\cdot r)+2|p|^2(q\cdot s)-2(p\cdot q)(r\cdot q+p\cdot s)}{2W}\right)\\ &-W(s\cdot q+p\cdot t)\\ &+(p\cdot q)\left(\frac{2(p\cdot s)+2(q\cdot t)+2|q|^2(s\cdot p)+2|p|^2(t\cdot q)-2(p\cdot q)(s\cdot q+p\cdot t)}{2W}\right)\Bigg]\\ =&\frac{2W(q\cdot s)-(1+|q|^2)(p\cdot r+q\cdot s+(p\cdot r)|q|^2+|p|^2(q\cdot s)-(p\cdot q)(r\cdot q+p\cdot s))}{W^3}\\ &-\frac{W(s\cdot q+p\cdot t)+(p\cdot q)(p\cdot s+q\cdot t+(p\cdot s)|q|^2+|p|^2(q\cdot t)-(p\cdot q)(s\cdot q+p\cdot t))}{W^3}\\ =&\frac{[(p\cdot q)\,q-(1+|q|^2)\,p]\cdot[(1+|q|^2)\,r-2\,(p\cdot q)\,s+(1+|p|^2)\,t]}{W^3},\end{aligned}\tag{2.14}$$

pero por (1.49) se tiene que esta última expresión se anula. Ahora, intercambiando p por q, y x_1 por x_2, tenemos que los coeficientes de q en el tercer término también desaparecen mostrando con ello la validez de la expresión dada en (2.12).

Como los coeficientes de p y q en (2.14) se anulan, hemos mostrado que las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1+|q|^2}{W}\right)&=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p\cdot q}{W}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p\cdot q}{W}\right)&=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1+|p|^2}{W}\right)\end{aligned}\tag{2.15}$$

se satisfacen para cualquier solución de (1.49). Estas ecuaciones cobran más relevancia en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO 3

Parámetros isotérmicos

En el estudio de las propiedades que son independientes de la elección de parámetros de una superficie S, es conveniente elegir parámetros tales que las propiedades geométricas de la superficie se vean reflejadas en la plano generado por los parámetros. Por ejemplo, se puede pedir que la transformación del plano de parámetros a la superficie sea conforme, de modo que los ángulos entre curvas en la superficie sean iguales a los ángulos entre las curvas correspondientes en el plano de parámetros. Analíticamente, esta condición es expresada en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental (1.1), por:

$$g_{11} = g_{22}\ ,\ g_{12} = 0, \tag{3.1}$$

o bien

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij},\ \lambda = \lambda\left(u_1, u_2\right) > 0,\ \text{ donde } \delta_{ij} \text{ es la delta de Kronecker.} \tag{3.2}$$

Definición 3.1. *Los parámetros u_1, u_2 que satisfacen las condiciones dadas en (3.1) y (3.2) son llamados* ***parámetros isotérmicos****.*

Trabajar con parámetros isotérmicos nos permite simplificar nuestra notación. Por ejemplo, de (3.2) se tiene que:

$$\det(g_{ij}) = \lambda^4, \tag{3.3}$$

por lo que la curvatura media definida en (1.33) queda expresada como:

$$\begin{aligned} H\left(N\right) &= \frac{g_{22}b_{11}\left(N\right) + g_{11}b_{22}\left(N\right) - 2g_{12}b_{12}\left(N\right)}{2\det(g_{ij})} \\ &= \frac{\lambda^2\left(b_{11}\left(N\right) + b_{22}\left(N\right)\right)}{2\lambda^4} \end{aligned}$$

es decir

$$H(N) = \frac{b_{11}\left(N\right) + b_{22}\left(N\right)}{2\lambda^2}. \tag{3.4}$$

Considerando lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.1. *Sea S una superficie regular definida por $X \in C^2$ con parámetros isotérmicos u_1, u_2, entonces*

$$\nabla^2 X = 2\lambda^2 \mathbf{H} \tag{3.5}$$

donde $\mathbf{H}$ es el vector de curvatura media.

Demostración. Como u_1, u_2 son parámetros isotérmicos tenemos

$$g_{11} = g_{22} \text{ y } g_{12} = 0,$$

esta condición puede ser escrita como

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} = \frac{\partial X}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial X}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} = 0.$$

Derivando la primera expresión con respecto a u_1 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} + \frac{\partial X}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} + \frac{\partial X}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1} \\ 2\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1}\right) &= 2\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2}\right) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} &= \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2}. \end{aligned}$$

Ahora derivando la segunda expresión con respecto a u_2 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} + \frac{\partial X}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} &= -\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} &= \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} \\ &= -\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}\right) \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} &= 0 \\ \nabla^2 X \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} &= 0. \end{aligned}$$

De manera similar, diferenciando la primera expresión con respecto a u_2 y la segunda con respecto a u_1 se sigue que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_1} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} \text{ y } \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_2} + \frac{\partial X}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1} = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial u_2} &= -\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial u_2}\\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial u_2}+\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}\cdot\frac{\partial X}{\partial u_2} &= 0\\
\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial u_2} &= 0\\
\nabla^2 X\cdot\frac{\partial X}{\partial u_2} &= 0,
\end{aligned}$$

en este sentido $\nabla^2 X$ es un vector perpendicular al espacio tangente Π_S de S. Sea $N\in\Pi_S^{\perp}$ un vector normal a S, se sigue:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 X\cdot N &= \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}\right)\cdot N\\
&= \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}\cdot N+\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}\cdot N\\
&= b_{11}(N)+b_{22}(N)\\
&= 2\lambda^2 H(N),
\end{aligned}$$

de aquí que $\dfrac{\nabla^2 X}{2\lambda^2}$ es un vector normal que satisface

$$\frac{\nabla^2 X}{2\lambda^2}\cdot N = H(N),$$

esto es, satisface la ecuación del vector de curvatura media (1.34), de modo que $\mathbf{H}=\frac{\nabla^2 X}{2\lambda^2}$, es decir, $\nabla^2 X = 2\lambda^2\mathbf{H}$. ■

El resultado anterior muestra una conexión entre los parámetros isotérmicos y la curvatura media de una superficie S, además de este tiene como consecuencia lo siguiente.

Lema 3.2. *Sea $X\in C^2$ que define una superficie regular S con parámetros isotérmicos u_1, u_2. La superficie S es minimal si y sólo si las funciones coordenadas $x_k(u_1,u_2)$ son armónicas.*

Demostración. Si $X(u_1,u_2)$ es una superficie minimal, tenemos que $\mathbf{H}=0$ para cada $p\in S$, lo cual por el Lema 3.2 implica que $\nabla^2 X=0$, de esta manera sus funciones coordenadas $x_k(u_1,u_2)$ son armónicas.

Por otro lado, si las funciones coordenadas $x_k(u_1,u_2)$ de $X(u_1,u_2)$ son armónicas tenemos que se satisface que $\nabla^2 X=0$, y como u_1,u_2 son parámetros isotérmicos, se deduce del Lema 3.2 que $\mathbf{H}$ se anula para cualquier punto. ■

A continuación, estudiaremos la relación que tienen las superficies minimales con las funciones armónicas, para ello introducimos la siguiente notación: Dada una superficie $X:\mathcal{D}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, consideramos las funciones complejas:

$$\phi_k(\varsigma)=\frac{\partial x_k}{\partial u_1}-i\frac{\partial x_k}{\partial u_2},\quad \text{donde } \varsigma=u_1+iu_2 \text{ y } k=1,\ldots,n. \tag{3.6}$$

Las cuales cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\phi_k^2(\varsigma) &= \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2 - 2i\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right) - \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2, \\ |\phi_k(\varsigma)|^2 &= \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\phi_k^2(\varsigma) &= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2 - 2i\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right) - \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2 - 2i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \\ &= \left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right|^2 - \left|\frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2 - 2i\frac{\partial X}{\partial u_1}\frac{\partial X}{\partial u_2} \\ &= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} \end{aligned} \tag{3.7}$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\phi_k(\varsigma)|^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)^2 \\ &= \left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2 \\ &= g_{11} + g_{22}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Además, las funciones $\phi_k(\varsigma)$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. La función $\phi_k(\varsigma)$ es analítica en ς si y sólo si x_k es armónica en u_1, u_2.

   En efecto, pues $\phi_k(\zeta) = \dfrac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\dfrac{\partial x_k}{\partial u_2}$ es analítica si y sólo si en una vecindad de ζ, $\phi_k(\zeta)$ es diferenciable en el sentido real y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de donde

   $$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right) = \frac{\partial}{\partial u_2}\left(-\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right)$$

   y

   $$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1}\right) = -\frac{\partial}{\partial u_1}\left(-\frac{\partial x_k}{\partial u_2}\right),$$

   es decir,

   $$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_1^2} = -\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_2^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_2 \partial u_1} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_1 \partial u_2},$$

lo cual sucede si y sólo si

$$\nabla^2 x_k = \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_2^2} = 0,$$

esto es si y sólo si x_k es armónica.

2. Los parámetros u_1, u_2 son isotérmicos si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k^2(\varsigma) = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = 0. \tag{3.9}$$

La necesidad se sigue directamente de (3.7) y (3.1). Para la suficiencia tenemos

$$g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = 0,$$

igualando las partes real e imaginaria se deducen las expresiones

$$g_{11} = g_{22} \text{ y } g_{12} = 0,$$

de esta manera u_1 y u_2 son parámetros isotérmicos.

3. Si u_1, u_2 son parámetros isotérmicos, entonces S es regular si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi_k(\varsigma)|^2 = g_{11} + g_{22} \neq 0. \tag{3.10}$$

Dado que u_1 y u_2 son parámeros isotérmicos tenemos por (3.2) que $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$ y por (3.3) se tiene que $\det(g_{ij}) = \lambda^4$. Ahora, en virtud de (1.1), (1.2) y el Lema 1.1 sabemos que S es regular si y sólo si $\det(g_{ij}) \neq 0$, de esta manera $\lambda^4 \neq 0$, de donde $\lambda \neq 0$ y de acuerdo con (3.8) se tiene que $g_{11} + g_{22} = 2\lambda^2 \neq 0$.

Con las propiedades anteriores tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.3. *Sea $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una superficie regular minimal, con parámetros isotérmicos u_1, u_2. Entonces las funciones $\phi_k(\varsigma)$ definidas en (3.6) son analíticas y satisfacen (3.9) y (3.10). Recíprocamente, dadas $\phi_1(\varsigma), \ldots, \phi_k(\varsigma)$ funciones analíticas en la variable ς que satisfacen (3.9) y (3.10) en un dominio simplemente conexo $\mathcal{D}$, existe una superficie regular minimal X definida sobre $\mathcal{D}$, tal que las ecuaciones (3.6) se satisfacen. Además, X está determinada de manera única por las funciones $\phi_k(\zeta)$ salvo una traslación.*

Demostración. Como X es una superficie regular minimal con parámetros isotérmicos tenemos por el Lema 3.2 que cada una las funciones coordenadas $x_k(u_1, u_2)$ es armónica, así por la propiedad 1 tenemos que las funciones $\phi_k(\zeta)$ son analíticas. Asimismo, al ser u_1 y u_2 parámetros isotérmicos tenemos de las propiedades 2 y 3 que se satisfacen (3.9) y (3.10).

Ahora, sean $(u_1^{'}, u_2^{'}), (u_1, u_2) \in \mathcal{D}$, definamos a la superficie como

$$x_k = \mathrm{Re}\left\{\int_\gamma \phi_k(\varsigma)\ d\varsigma\right\}, \tag{3.11}$$

donde $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathcal{D}$ con $\epsilon > 0$, es una curva que une los puntos $(u_1^{'}, u_2^{'})$ y (u_1, u_2) en $\mathcal{D}$. Como $\mathcal{D}$ es simplemente conexo se tiene por el Teorema de Cauchy que $\displaystyle\int_\gamma \phi_k(\zeta)d\zeta$ es independiente de la curva γ que consideremos, por tanto la superficie x_k también lo es. Ahora, $\psi_k(\zeta) = \displaystyle\int_\gamma \phi_k(\zeta)d\zeta$ es una función analítica, así, por el Teorema Fundamental del Cálculo Complejo $\psi_k^{'}(\zeta) = \phi_k(\zeta)$ donde $\zeta = u_1 + iu_2$ y, al satisfacerse las relaciones $\psi_k^{'}(\zeta) = \dfrac{\partial \psi_k}{\partial u_1}(\zeta)$ y $\psi_k^{'}(\zeta) = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial \psi_k}{\partial u_2}(\zeta)$ se deducen las siguientes igualdades

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_1} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \psi_k}{\partial u_1}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\psi_k^{'}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\phi_k\right\},$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_2} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \psi_k}{\partial u_2}\right\} = \mathrm{Re}\left\{i\psi_k^{'}\right\} = -\mathrm{Im}\{\psi_k^{'}\} = -\mathrm{Im}\left\{\phi_k\right\},$$

por lo que $\phi_k(\zeta) = \dfrac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\dfrac{\partial x_k}{\partial u_2}$. Además, estas son analíticas. Así, por la propiedad 1, tenemos en principio que x_k son armónicas en las variables u_1 y u_2. Luego, por hipótesis se cumplen (3.9) y (3.10), por lo que al aplicar las propiedades 2 y 3 tenemos una superficie regular con parámetros isotérmicos, pero al aplicar el Lema 3.2, obtenemos una superficie minimal, con las condiciones pedidas.

Para concluir la prueba consideremos, como en (3.11) otra superficie minimal $\tilde{x}_k$ con parámetros isotérmicos u_1 y u_2, determinada por las funciones $\phi_k(\zeta)$ de x_k. Así $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_1} = \dfrac{\partial \tilde{x}_k}{\partial u_1}$ y $\dfrac{\partial x_k}{\partial u_2} = \dfrac{\partial \tilde{x}_k}{\partial u_2}$ en $\mathcal{D}$, lo que implica que $\tilde{x}_k - x_k$ es constante, digamos c, esto es, $\tilde{x}_k$ se obtiene de x_k mediante una traslación por el vector c. ■

Con los argumentos expuestos en la demostración anterior podemos observar que si $\phi_k(\zeta)$ satisface las condiciones del lema anterior, también lo hace $i\phi_k(\zeta)$, de modo que, si $\phi_k(\zeta)$ son las funciones analíticas asociadas a la superficie minimal S, la superficie minimal asociada a las funciones analíticas $i\phi_k(\zeta)$ se llama ***conjugada*** de S y está bien definida por S salvo traslaciones.

El resultado de arriba nos dice que el estudio local de superficies minimales regulares en $\mathbb{R}^n$ es equivalente al estudio de n-adas de funciones analíticas que satisfacien las condiciones (3.9) y (3.10).

En lo que sigue ilustramos algunos ejemplos de superficies minimales donde se aplica el Lema 3.3 y el concepto de superficie minimal conjugada.

Superficie conjugada de la Catenoide

Consideremos la siguiente parametrización de la Catenoide dada en (1.45)

$$X(u_1, u_2) = (\cosh(u_1)\cos(u_2), \cosh(u_1)\sin(u_2), u_1),$$

la cual como sabemos, es una superficie minimal. Veamos que satisface el Lema 3.3, en efecto pues

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u_1} &= (\sinh(u_1)\cos(u_2), \sinh(u_1)\sin(u_2), 1)\\ \frac{\partial X}{\partial u_2} &= (-\cosh(u_1)\sin(u_2), \cosh(u_1)\cos(u_2), 0)\end{aligned}$$

de esta manera

$$\begin{aligned}g_{11} &= \sinh^2(u_1)\cos^2(u_2) + \sinh^2(u_1)\sin^2(u_2) + 1\\ &= \sinh^2(u_1)\left(\cos^2(u_2) + \sin^2(u_2)\right) + 1\\ &= \sinh^2(u_1) + 1\\ &= \cosh^2(u_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{22} &= \cosh^2(u_1)\sin^2(u_2) + \cosh^2(u_1)\cos^2(u_2)\\ &= \cosh^2(u_1)\left(\cos^2(u_2) + \sin^2(u_2)\right)\\ &= \cosh^2(u_1),\end{aligned}$$

y

$$g_{12} = -\sinh(u_1)\cosh(u_1)\cos(u_2)\sin(u_2) + \sinh(u_1)\cosh(u_1)\sin(u_2)\cos(u_2) = 0.$$

De esta manera manera X es una parametrización en parámetros isotérmicos, y donde las funciones holomorfas asociadas a la parametrización X son:

$$\begin{aligned}\phi_1(\zeta) &= \sinh(u_1)\cos(u_2) - i(-\cosh(u_1)\sin(u_2))\\ &= \sinh(u_1)\cos(u_2) + i\cosh(u_1)\sin(u_2)\\ &= \sinh(u_1 + iu_2)\\ &= \sinh(\zeta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2(\zeta) &= \sinh(u_1)\sin(u_2) - i(\cosh(u_1)\cos(u_2))\\ &= \sinh(u_1)\sin(u_2) - i\cosh(u_1)\cos(u_2)\\ &= -i\cosh(u_1 + iu_2)\\ &= -i\cosh(\zeta),\end{aligned}$$

y

$$\phi_3(\zeta) = 1$$

Notemos que las condiciones del lema se satisfacen, en primer lugar

$$\phi_1^2(\zeta)+\phi_2^2(\zeta)+\phi_3^2(\zeta)=\sinh^2(u_1+iu_2)-\cosh^2(u_1+iu_2)+1=0$$

y claramente

$$|\phi_1(\zeta)|^2+|\phi_2(\zeta)|^2+|\phi_3(\zeta)|^2\neq 0,$$

por lo que el resultado se verifica.

Ahora vamos a determinar la superficie minimal conjugada $\tilde{X}$ de X, tenemos de la prueba del Lema 3.3 que

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_\gamma i\sinh(\zeta)\,d\zeta\right\}\\
&= \operatorname{Re}\left\{i\int_\gamma \sinh(\zeta)\,d\zeta\right\}\\
&= \operatorname{Re}\{i\cosh(\zeta)\}\\
&= \operatorname{Re}\{i\cosh(u_1+iu_2)\}\\
&= \operatorname{Re}\{i(\cosh(u_1)\cos(u_2)+i\sinh(u_1)\sin(u_2))\}\\
&= \operatorname{Re}\{-\sinh(u_1)\sin(u_2)+i\cosh(u_1)\cos(u_2)\}\\
&= -\sinh(u_1)\sin(u_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_\gamma \cosh(\zeta)\,d\zeta\right\}\\
&= \operatorname{Re}\{\sinh(\zeta)\}\\
&= \operatorname{Re}\{\sinh(u_1+iu_2)\}\\
&= \operatorname{Re}\{\sinh u_1\cos u_2+i\cosh u_1\sin u_2\}\\
&= \sinh(u_1)\cos(u_2),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_3 &= \operatorname{Re}\left\{i\int_\gamma d\zeta\right\}\\
&= \operatorname{Re}\{i\zeta\}\\
&= \operatorname{Re}\{-u_2+iu_2\}\\
&= -u_2
\end{aligned}$$

De esta manera salvo traslaciones la superficie minimal conjugada a X es

$$\tilde{X}(u_1,u_2)=(-\sinh(u_1)\sin(u_2),\sinh(u_1)\cos(u_2),-u_2).$$

Observemos en el ejemplo anterior que si reparametrizamos tomando $\tilde{u}_1=\sinh u_1$ y $\tilde{u}_2=u_2+\frac{\pi}{2}$, se tiene la superficie $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)\overset{\hat{X}}{\longmapsto}(\tilde{u}_1\cos(\tilde{u}_2),\tilde{u}_1\sin(\tilde{u}_2),-\tilde{u}_2)$, esto al trasladar por el vector $\left(0,0,-\frac{\pi}{2}\right)$. Esta última corresponde a la parametrización de la superficie minimal de la Helicoide reflejada en el eje z. Donde la parametrización de la Helicoide en su forma

no paramétrica (1.44), tiene de manera general la parametrización:

$$Y(u_1, u_2) = (u_2 \cos(u_1), u_2 \sin(u_1), \mu u_1),$$

con $\mu \in \mathbb{R}$.

Pero esta última no es una parametrización con parámetros isotérmicos, pues

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u_1} &= (-u_2 \sin(u_1), u_2 \cos(u_1), \mu) \\ \frac{\partial Y}{\partial u_2} &= (\cos(u_1), \sin(u_1), 0). \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} g_{11} &= u_2^2 \sin^2(u_1) + u_2^2 \cos^2(u_1) + \lambda^2 \\ &= u_2^2 \left(\sin^2(u_1) + \cos^2(u_1)\right) + \lambda^2 \\ &= u_2^2 + \lambda^2, \end{aligned}$$

$$g_{22} = \cos^2(u_1) + \sin^2(u_1) = 1,$$

y

$$g_{12} = -u_2 \sin(u_1) \cos(u_1) + u_2 \cos(u_1) \sin(u_1) = 0.$$

De esta forma

$$g_{11} \neq g_{22},$$

por tanto, las construcciones dadas en el Lema 3.3 no pueden aplicarse.

A continuación, presentamos otro ejemplo de superificie minimal, la cual, estrictamente hablando no es una superficie regular, pues no es inyectiva, como puede apreciarse en la Figura 3.1, con las autointersecciones de la misma. Sin embargo, si restringimos los parámetros a una vecindad lo suficientemente pequeña, esta es inyectiva en virtud del Teorema de la Función Inversa.

En 1864, tras sus estudios sobre superficies minimales, el matemático aleman Alfred Enneper introduce la superficie que desde entonces lleva su nombre. Dentro de las propiedades que posee esta superficie que a continuación discutimos, destacamos: La superficie de Enneper es una superficie minimal conjugada así misma, que además es invariante bajo isometrías en $\mathbb{R}^3$.

La superficie de Enneper

La superficie de Enneper

$$X(u_1, u_2) = \left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2, u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_1^2 u_2, u_1^2 - u_2^2\right). \tag{3.11.1}$$

Observemos que, al cambiar (u_1, u_2) por $(-u_2, u_1)$ cambiamos, en la superficie, (x, y, z) por $(-y, x, -z)$. Entonces, si rotamos la superficie un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje z y después aplicamos una simetría en el plano xy, la superficie permanece invariante.

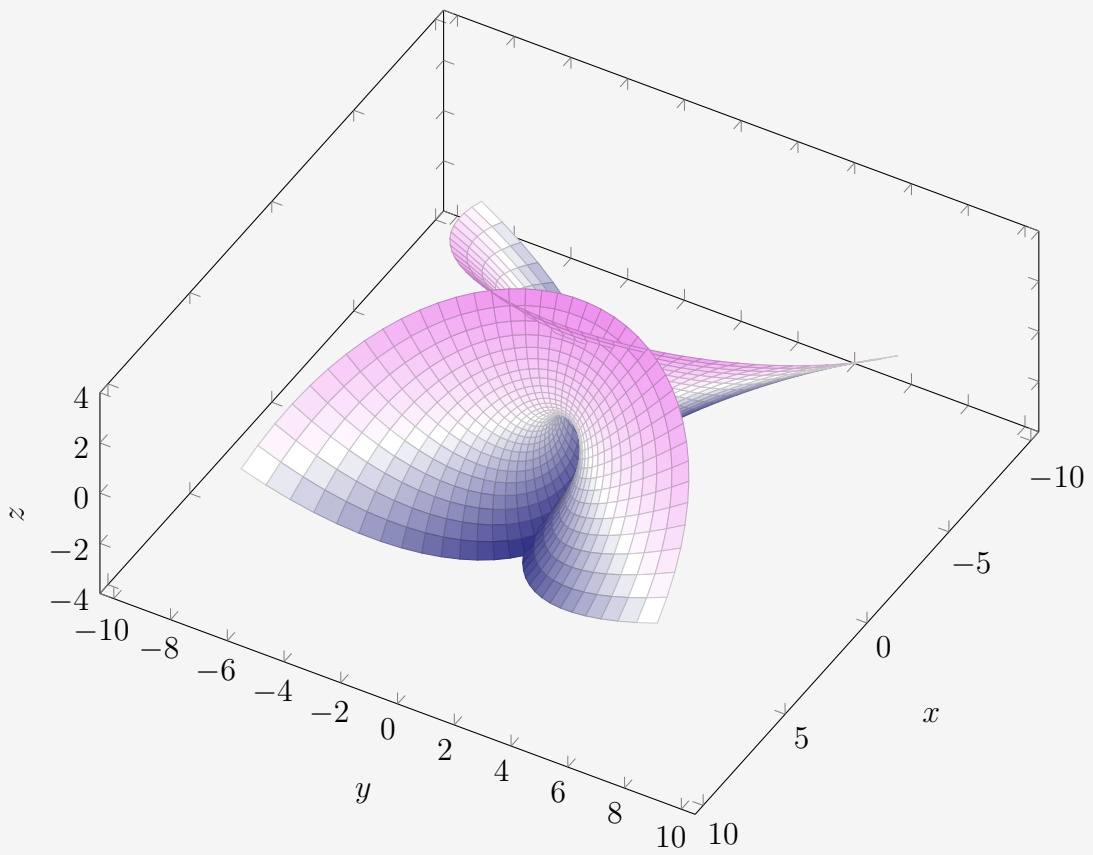


Figura 3.1: Superficie minimal de Enneper

Verifiquemos primero que es una superficie minimal, para esto, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u_1} &= \left(-u_1^2+u_2^2+1, 2u_1u_2, 2u_1\right), \\
\frac{\partial X}{\partial u_2} &= \left(2u_1u_2, u_1^2-u_2^2+1, -2u_2\right), \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= \left(-2u_1, 2u_2, 2\right), \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} &= \left(2u_1, -2u_2, -2\right).
\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left(-u_1^2+u_2^2+1\right)^2 + 4u_1^2u_2^2 + 4u_1^2 \\
&= u_1^4 + 2u_1^2u_2^2 + 2u_1^2 + u_2^4 + 2u_2^2 + 1 \\
&= \left(u_1^2+u_2^2+1\right)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22} &= 4u_1^2u_2^2 + \left(u_1^2 - u_2^2 + 1\right)^2 + 4u_2^2 \\ &= u_1^4 + 2u_1^2u_2^2 + 2u_1^2 + u_2^4 + 2u_2^2 + 1 \\ &= \left(u_1^2 + u_2^2 + 1\right)^2, \end{aligned}$$

y

$$g_{12} = \left(-u_1^2 + u_2^2 + 1\right) 2u_1u_2 + 2u_1u_2\left(u_1^2 - u_2^2 + 1\right) - 4u_1u_2 = 0.$$

De esta manera u_1 y u_2 son parámetros isotérmicos, además, de los cálculos anteriores se tiene

$$\nabla^2 X = 0,$$

luego, según el Lema 3.1 se tiene que $\mathbf{H} = 0$, lo cual sucede si y sólo si X es una superficie minimal.

Ahora, vamos a encontrar las funciones holomorfas como en el Lema 3.3, ya que $\zeta = u_1 + iu_2$, se tiene

$$\begin{aligned} \phi_1(\zeta) &= -u_1^2 + u_2^2 + 1 - 2iu_1u_2 \\ &= 1 - \zeta^2, \\ \phi_2(\zeta) &= 2u_1u_2 - i\left(u_1^2 - u_2^2 + 1\right) \\ &= -i\left(1 + \zeta^2\right), \\ \phi_3(\zeta) &= 2u_1 + 2iu_2 \\ &= 2\zeta, \end{aligned}$$

las cuales satisfacen las condiciones expuestas en el lema, por otro lado, podemos encontrar la superficie conjugada a X salvo traslaciones.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \operatorname{Re}\left\{ i\int_\gamma \left(1 - \zeta^2\right) d\zeta \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ i\left(\zeta - \frac{\zeta^3}{3}\right) \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ i\left(u_1 + iu_2 - \frac{(u_1 + iu_2)^3}{3}\right) \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ -\frac{1}{3}iu_1^3 + u_1^2u_2 + iu_1u_2^2 + iu_1 - \frac{1}{3}u_2^3 - u_2 \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ -u_2 - \frac{u_2^3}{3} + u_1^2u_2 + i\left(-\frac{u_1^3}{3} + u_1u_2^2 + u_1\right) \right\} \\ &= -u_2 + u_1^2u_2 - \frac{u_2^3}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_\gamma \left(1+\zeta^2\right) d\zeta\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\zeta + \frac{\zeta^3}{3}\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{u_1 + \frac{u_1^3}{3} - u_1u_2^2 + i\left(-\frac{u_2^3}{3} + u_2 + u_1^2u_2\right)\right\} \\ &= u_1 + \frac{u_1^3}{3} - u_1u_2^2,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{x}_3 &= \operatorname{Re}\left\{2i\int_\gamma \zeta d\zeta\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{i\zeta^2\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{-2u_1u_2 + i\left(u_1^2 - u_2^2\right)\right\} \\ &= -2u_1u_2.\end{aligned}$$

De esta manera obtenemos la superficie

$$\tilde{X}(u_1,u_2) = \left(-u_2 + u_1^2u_2 - \frac{u_2^3}{3}, u_1 + \frac{u_1^3}{3} - u_1u_2^2, -2u_1u_2\right).$$

Por lo que al considerar $\tilde{u}_1 = \dfrac{u_1-u_2}{\sqrt{2}}$ y $\tilde{u}_2 = \dfrac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}$, se obtiene

$$\tilde{X}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1\tilde{u}_2^2 - \tilde{u}_1^2\tilde{u}_2 + \frac{\tilde{u}_2^3}{3} - \frac{\tilde{u}_1^3}{3}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_1\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_1^2\tilde{u}_2 - \frac{\tilde{u}_2^3}{3} - \frac{\tilde{u}_1^3}{3}\right), \tilde{u}_1^2 - \tilde{u}_2^2\right).$$

Al aplicar una rotación por un ángulo de $\dfrac{\pi}{4}$ se tiene que $(x,y,z) \mapsto \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}}, z\right)$, por lo que, al aplicarse en $\tilde{X}(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)$ se tiene la siguiente parametrización

$$Y(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) = \left(\tilde{u}_1 - \frac{\tilde{u}_1^3}{3} + \tilde{u}_1\tilde{u}_2^2, \tilde{u}_2 - \frac{\tilde{u}_2^3}{3} + \tilde{u}_1^2\tilde{u}_2, \tilde{u}_1^2 - \tilde{u}_2^2\right),$$

que corresponde precisamente a la parametrización de la superficie de Enneper dada en (3.11.1).

Anteriormente destacamos una característica geométrica interesante de la superficie de Enneper, a saber, sus autointersecciones. Para ver esto, consideremos el cambio de coordenadas $u_1 = \rho\cos(\theta)$ y $u_2 = \rho\sin(\theta)$. De esta manera

$$X(\rho,\theta) = \left(\rho\cos(\theta) - \frac{\rho^3}{3}\cos(3\theta), \rho\sin(\theta) + \frac{\rho^3}{3}\sin(3\theta), \rho^2\cos(2\theta)\right).$$

En donde $\rho > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Entonces, si $X(\rho_1,\theta_1) = X(\rho_2,\theta_2)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= \left(\rho_1\cos(\theta_1) - \frac{\rho_1^3}{3}\cos(3\theta_1)\right)^2 + \left(\rho_1\sin(\theta_1) + \frac{\rho_1^3}{3}\sin(3\theta_1)\right)^2 \\
&= \frac{1}{9}\left(\rho_1^3\cos(3\theta_1) - 3\rho_1\cos(\theta_1)\right)^2 + \frac{1}{9}\left((\sin(3\theta_1))\,\rho_1^3 + 3\sin(\theta_1)\,\rho_1\right)^2 \\
&= \frac{1}{9}\rho_1^6\cos^6\theta_1 + \frac{1}{3}\rho_1^6\cos^4\theta_1\sin^2\theta_1 + \frac{1}{3}\rho_1^6\cos^2\theta_1\sin^4\theta_1 \\
&\quad +\frac{1}{9}\rho_1^6\sin^6\theta_1 - \frac{2}{3}\rho_1^4\cos^4\theta_1 + 4\rho_1^4\cos^2\theta_1\sin^2\theta_1 \\
&\quad -\frac{2}{3}\rho_1^4\sin^4\theta_1 + \rho_1^2\cos^2\theta_1 + \rho_1^2\sin^2\theta_1 \\
&= \frac{\rho_1^6}{9} - \frac{2}{3}\cos(4\theta_1)\,\rho_1^4 + \rho_1^2 \\
&= \left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\rho_1^2\cos(2\theta_1)\right)^2 \\
&= \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\rho_2^2\cos(2\theta_2)\right)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ya que $\rho_1^2\cos(2\theta_1) = \rho_2^2\cos(2\theta_2)$, obtenemos

$$\rho_1 + \frac{p_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3},$$

lo cual implica que $\rho_1 = \rho_2$. Luego, $\cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2)$.

Si, por ejemplo, $\rho_1 = \rho_2$ y $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$, a partir de las funciones coordenadas

$$y(\rho_1,\theta_1) = y(\rho_2,\theta_2)$$

obtenemos que $y = -y$. Por lo tanto, $y = 0$; esto es, los puntos (ρ_1,θ_1) y (ρ_2,θ_2) pertenecen a la curva $\sin(\theta) + \frac{\rho^2}{3}\sin(3\theta) = 0$. Se sigue que para cada punto (ρ,θ) que pertenece a esta curva, el punto $(\rho, 2\pi-\theta)$ también pertenece a esta, y las funciones coordenadas quedan escritas como

$$x(\rho,\theta) = x(\rho,2\pi-\theta) \text{ y } z(\rho,\theta) = z(\rho,2\pi-\theta).$$

Entonces, la intersección de la superficie con el plano $y = 0$ es una curva a lo largo de la cual la superficie se intersecta a sí misma. De manera similar podemos ver que la intersección de la superficie con el plano $x = 0$ es también una curva de autointersección (lo cual corresponde al caso en el que $\rho_1 = \rho_2$ y $\theta_1 = \pi - \theta_2$). Además, del hecho de que $\cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2)$ y de la periodicidad de la función coseno se tiene que estas son las únicas autointersecciones de la superficie de Enneper.

Todos los resultados anteriores se basan en el supuesto de que una superficie admite una parametrización local en parámetros isotérmicos. Sin embargo, no siempre la existencia de estos parámetros es posible para el caso general de superficies, pero en el caso de superficies minimales se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Sea S una superficie minimal. Para cada punto regular existe una vecindad para la cual existe una reparametrización de S en términos de parámetros isotérmicos.*

Demostración. En virtud del Lema 1.2 existe una vecindad Δ de un punto regular a, en la que S queda representada en su forma no paramétrica, de esta manera las ecuaciones dadas en (2.15) se satisfacen en algún disco $D = \left\{(x_1, x_2) \in \Delta : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < R^2\right\}$. Del cálculo avanzado tenemos que las ecuaciones dadas en (2.15) implican la existencia de funciones $F(x_1, x_2)$, $G(x_1, x_2) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1 + |p|^2}{W}, \ \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{p \cdot q}{W}, \ \frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{p \cdot q}{W}, \ \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{1 + |q|^2}{W}, \tag{3.12}$$

en donde p, q y W son como en (1.47) y (2.11). O bien, las ecuaciones de arriba pueden obtenerse al considerar las funciones:

$$F(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{x_1\left(1 + |p|^2\right)((1-t)\,q_0 + tq) + x_2\,(p \cdot q)\,((1-t)\,q_0 - tq)}{W\,((1-t)\,q_0 + tq)} dt$$

y

$$G(x_1, x_2) = \int_0^1 \frac{x_1\,(p \cdot q)\,((1-t)\,q_0 + tq) + x_2\left(1 + |q|^2\right)((1-t)\,q_0 - tq)}{W\,((1-t)\,q_0 + tq)} dt,$$

en donde $q_0 = (x_0^0, x_1^1)$ y $q = (x_1, x_2)$, las cuales al derivarse parcialmente y con ayuda del Teorema Fundamental del Cálculo nos dan las relaciones anteriores.

Tomando la reparametrización

$$\xi_1 = x_1 + F(x_1, x_2), \ \xi_2 = x_2 + G(x_1, x_2), \tag{3.13}$$

tendremos al derivar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= 1 + \frac{1 + |p|^2}{W} \\
\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= \frac{p \cdot q}{W} \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= \frac{p \cdot q}{W} \\
\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= 1 + \frac{1 + |q|^2}{W}.
\end{aligned}$$

Calculando el determinante jacobiano

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 + \frac{1+|p|^2}{W} & \frac{p \cdot q}{W} \\ \frac{p \cdot q}{W} & 1 + \frac{1+|q|^2}{W} \end{vmatrix} \\
&= \left(1 + \frac{1 + |p|^2}{W}\right)\left(1 + \frac{1 + |q|^2}{W}\right) - \left(\frac{p \cdot q}{W}\right)^2 \\
&= 1 + \frac{1 + |p|^2}{W} + \frac{1 + |q|^2}{W} + \frac{1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2}{W^2} - \frac{(p \cdot q)^2}{W^2} \\
&= \frac{2 + |p|^2 + |q|^2}{W} + 2 > 0.
\end{aligned}$$

De esta forma por el Teorema de la Función Inversa la función (ξ_1, ξ_2) tiene una inversa local $(\xi_1, \xi_2) \to (x_1, x_2)$, tomando a $x_k = f_k(x_1, x_2)$ para $k = 3, \ldots, n$, podemos representar a la superficie en términos de los parámetros ξ_1, ξ_2, por lo que si

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

al ser invertible bastará con encontrar Q^{-1}, así pues

$$\begin{aligned} Q^{-1} &= \frac{1}{\det(Q)} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+|q|^2}{W} & -\frac{p \cdot q}{W} \\ -\frac{p \cdot q}{W} & 1 + \frac{1+|p|^2}{W} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dado que

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} &= \frac{1}{J}\left(1 + \frac{1+|q|^2}{W}\right) = \frac{W + 1 + |q|^2}{JW}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} &= -\frac{p \cdot q}{JW}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} &= -\frac{p \cdot q}{JW}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} &= \frac{1}{J}\left(1 + \frac{1+|p|^2}{W}\right) = \frac{W + 1 + |p|^2}{JW}, \end{aligned}$$

de la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ &= \frac{W + 1 + |q|^2}{JW} p_k - \frac{p \cdot q}{JW} q_k \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial f_k}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ &= \frac{W + 1 + |p|^2}{JW} q_k - \frac{p \cdot q}{JW} p_k, \end{aligned}$$

donde $k = 3, \ldots, n$, por lo que del cambio de parámetros obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \xi_1} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1}\right) \\ &= \left(\frac{W+1+|q|^2}{JW}, \frac{-p\cdot q}{JW}, \ldots, \frac{W+1+|q|^2}{JW}p_n - \frac{p\cdot q}{JW}q_n\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \xi_2} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2}\right) \\ &= \left(\frac{-p\cdot q}{JW}, \frac{W+1+|p|^2}{JW}, \ldots, \frac{W+1+|p|^2}{JW}q_n - \frac{p\cdot q}{JW}p_n\right)\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}g_{11} &= \left(\frac{W+1+|q|^2}{JW}\right)^2 + \left(\frac{p\cdot q}{JW}\right)^2 + \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{W+1+|q|^2}{JW}p_k - \frac{p\cdot q}{JW}q_k\right)^2 \\ &= \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2}{J^2W^2} + \frac{(p\cdot q)^2}{J^2W^2} + \sum_{k=3}^{n}\left[\frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2}{J^2W^2}p_k^2 - 2\frac{\left(W+1+|q|^2\right)(p\cdot q)}{J^2W^2}p_kq_k + \frac{(p\cdot q)^2}{J^2W^2}q_k^2\right] \\ &= \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2}{J^2W^2} + \frac{(p\cdot q)^2}{J^2W^2} + \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2}{J^2W^2}\sum_{k=3}^{n}p_k^2 \\ &\quad -2\frac{\left(W+1+|q|^2\right)(p\cdot q)}{J^2W^2}\sum_{k=3}^{n}p_kq_k + \frac{(p\cdot q)^2}{J^2W^2}\sum_{k=3}^{n}q_k^2 \\ &= \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2}{J^2W^2} + \frac{(p\cdot q)^2}{J^2W^2} + \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2}{J^2W^2}|p|^2 - 2\frac{\left(W+1+|q|^2\right)(p\cdot q)^2}{J^2W^2} + \frac{(p\cdot q)^2}{J^2W^2}|q|^2 \\ &= \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2 + (p\cdot q)^2 + \left(W+1+|q|^2\right)^2|p|^2 - \left(W+1+|q|^2\right)(p\cdot q)^2 + (p\cdot q)^2|q|^2}{J^2W^2} \\ &= \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2\left(1+|p|^2-2(p\cdot q)^2\right) + (p\cdot q)^2\left(1+|q|^2\right)}{J^2W^2} \\ &= \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2 + (p\cdot q)^2 + \left(p\left(1+|q|^2+W\right) - q(p\cdot q)\right)^2}{\left(2W+2+|p|^2+|q|^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(W+1+|q|^2\right)^2 + (p\cdot q)^2 + \left(1+|p|^2-1\right)\left(1+|q|^2+W\right)^2}{\left(2W+2+|p|^2+|q|^2\right)^2} \\ &\quad + \frac{\left(1+|q|^2-1\right)(p\cdot q)^2 - 2\left(1+|q|^2+W\right)(p\cdot q)^2}{\left(2W+2+|p|^2+|q|^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(1+|p|^2\right)\left(1+|q|^2+W\right)^2 + \left(1+|p|^2\right)(p\cdot q) - 2\left(1+|q|^2+W\right)(p\cdot q)}{\left(2W+2+|p|^2+|q|^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(1+|p|^2\right)W^2 + 2W\left(\left(1+|p|^2\right)\left(1+|q|^2\right) - (p\cdot q)^2\right) + \left(1+|q|^2\right)\left(\left(1+|p|^2\right)\left(1+|q|^2\right) - (p\cdot q)^2\right)}{\left(2W+2+|p|^2+|q|^2\right)^2} \\ &= \frac{W^2}{2W+2+|p|^2+|q|^2} \\ &= \frac{J}{W},\end{aligned}$$

mediante cálculos similares se obtiene

$$g_{22} = \frac{J}{W}, \;\; g_{12} = 0.$$

Por lo tanto,

$$g_{11} = g_{22}, \;\; g_{12} = 0, \tag{3.14}$$

de esta manera ξ_1 y ξ_2 son parámetros isotérmicos. ■

Corolario 3.1. *Sea $x_k = f_k(x_1, x_2)$, $k = 3, \ldots, n$, una superficie minimal en su forma no paramétrica. Entonces, f_k son funciones reales analíticas en las variables x_1 y x_2.*

Demostración. Sea $p \in S$, consideremos una vecindad Δ de p, al tomar (ξ_1, ξ_2) como en (3.13), que proporciona una parametrización local de S en parámetros isotérmicos ξ_1, ξ_2. Por el Lema 3.2, x_1 y x_2 son funciones armónicas, por lo tanto, funciones analíticas reales de ξ_1, ξ_2. Así, la función inversa $(x_1, x_2) \to (\xi_1, \xi_2)$ es también una función analítica real. Pero cada x_k es una función armónica en las variables ξ_1, ξ_2, por lo tanto, una función analítica real en la variables x_1, x_2. ■

Notemos que de manera particular toda solución $f \in C^2$ de (1.43) es una función analítica. Terminamos este capítulo con el siguiente lema.

Lema 3.5. *Sea S una superficie definida por $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde u_1, u_2 son parámetros isotérmicos, y sea $\tilde{S}$ una reparametrización de S definida por el difeomorfismo $\varphi : \tilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{D}$. Entonces, $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ son parámetros isotérmicos si y sólo si φ es conforme.*

Demostración. Dado que u_1, u_2 son parámetros isotérmicos se tiene que $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$. Luego, por (1.8) tenemos que si

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= U^t G U \\ &= U^t \lambda^2 I U \\ &= \lambda^2 U^t U, \end{aligned}$$

donde I corresponde a la matriz identidad. Así, $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$ son parámetros isotérmicos si y sólo si $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}^2 \delta_{ij}$, de esta manera $\tilde{G} = \tilde{\lambda}^2 I$, sustituyendo en la ecuación de arriba se tiene $\tilde{\lambda}^2 I = \lambda^2 U^t U$, de donde $I = \dfrac{\lambda^2}{\tilde{\lambda}^2} U^t U$, o lo que es lo mismo $U^t U = \left(\dfrac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^2 I$, lo cual sucede si y sólo si $\dfrac{\tilde{\lambda}}{\lambda} U$ es ortogonal, esto último es equivalente a que φ sea conforme. ■

CAPÍTULO 4

Teorema de Bernstein

En este capítulo mostraremos el célebre Teorema de Bernstein que establece que para el caso tridimensional toda solución de la ecuación de las superficies minimales (1.43) definida en todo el plano debe ser una función lineal. A pesar de ser un teorema de carácter global más que local, lo incluimos aquí, antes de nuestra discusión sobre la teoría global de las superficies minimales (Capítulo 5), porque nos sirve de motivación para varios de los resultados que discutiremos más adelante.

Asimismo, incluimos en este capítulo varios resultados relacionados con el Teorema de Bernstein. Sin más que agregar comenzamos con los siguientes resultados:

Lema 4.1. *Sean $\mathcal{D}$ un dominio convexo contenido en $\mathbb{R}^2$, $E : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2, y supongamos que la matriz Hessiana*

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

es definida positiva, consideremos la función

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (u_1, u_2)\,, \text{ donde } \quad u_i = \frac{\partial E}{\partial x_i}. \tag{4.1}$$

Entonces, si x y y son dos puntos diferentes en $\mathcal{D}$, y u, v son su imagen respectivamente bajo la función (4.1), los vectores $y - x$ y $v - u$ satisfacen

$$(v - u) \cdot (y - x) > 0. \tag{4.2}$$

Demostración. Consideremos las funciones $E : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde la función E es tal como se menciona en el enunciado, y $\alpha(t) = ty + (1 - t)x$. Consideramos la función

$$G : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$G(t) = E(ty + (1 - t)x)$$

Derivando la función respecto a la variable t del lado izquierdo de la igualdad y derivando

parcialmente el otro lado de la igualdad

$$\begin{aligned} G'(t) &= D(E(ty+(1-t)x)) \\ &= \frac{\partial E}{\partial x_1}(ty+(1-t)x)(y_1-x_1)+\frac{\partial E}{\partial x_2}(ty+(1-t)x)(y_2-x_2) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial E}{\partial x_i}(ty+(1-t)x)\right](y_i-x_i), \end{aligned}$$

observe que en la expresión anterior $ty+(1-t)x$ es el argumento de $\dfrac{\partial E}{\partial x_i}$, no un factor multiplicado por $\dfrac{\partial E}{\partial x_i}$. Y por otro lado

$$\begin{aligned} G''(t) &= D\left(\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial E}{\partial x_i}(ty+(1-t)x)\right](y_i-x_i)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial E}{\partial x_i}(ty+(1-t)x)\right](y_i-x_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial E}{\partial x_i}(ty+(1-t)x)\right]\frac{\partial}{\partial x_j}(y_i-x_i) \\ &\quad +\sum_{i,j=1}^{2}\left[\frac{\partial E^2}{\partial x_i\partial x_j}(ty+(1-t)x)\right](y_j-x_j)(y_i-x_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{2}\left[\frac{\partial E^2}{\partial x_i\partial x_j}(ty+(1-t)x)\right](y_j-x_j)(y_i-x_i), \end{aligned}$$

pero esto último corresponde a la forma cuadrática de $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i\partial x_j}\right)$ evaluada en el punto $ty+(1-t)x$, aplicada al vector no nulo $y-x$. Pero, como es definida positiva se tiene que $G''(t)>0$ para cada $t\in[0,1]$. De esta manera $G'(t)$ es creciente para cada $t\in[0,1]$, así $G'(1)>G'(0)$, donde

$$G'(0) = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial E}{\partial x_i}(x)\right](y_i-x_i)$$

y

$$G'(1)=\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial E}{\partial x_i}(y)\right](y_i-x_i),$$

como $u_j=\frac{\partial E}{\partial x_j}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{2}v_i(y_i-x_i)>\sum_{i=1}^{2}u_i(y_i-x_i)$$

esto nos da (4.2). ■

Lema 4.2. *Bajo la hipótesis del Lema 4.1 definimos la función*

$$(x_1, x_2) \to (\xi_1, \xi_2) \;\; como \; \xi_i (x_1, x_2) = x_i + u_i (x_1, x_2), \tag{4.3}$$

donde $u_i(x_1, x_2)$ esta definida como en (4.1), entonces para dos puntos distintos cualesquiera x e y en $\mathcal{D}$, sus imagenes ξ y η satisfacen la desigualdad

$$(\eta - \xi) \cdot (y - x) > |y - x|^2. \tag{4.4}$$

Demostración. Tomando a $\eta - \xi = (y - x) + (v - u)$ tenemos por el lema anterior que

$$\begin{aligned} ((\eta - \xi) - (y - x)) \cdot (y - x) &> 0 \\ (\eta - \xi) \cdot (y - x) - (y - x)^2 &> 0 \\ (\eta - \xi) \cdot (y - x) &> |y - x|^2 \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Corolario 4.1. *Bajo la mismas hipótesis del Lema 4.2 tenemos que*

$$|\eta - \xi| > |y - x|. \tag{4.5}$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|(\eta - \xi) \cdot (y - x)| \leq |\eta - \xi||y - x|,$$

luego aplicando (4.4) obtenemos que

$$(\eta - \xi) \cdot (y - x) > |y - x|^2.$$

Así

$$|y - x|^2 < |(\eta - \xi) \cdot (y - x)| \leq |\eta - \xi||y - x|,$$

por tanto

$$|y - x| < |\eta - \xi|$$

como queríamos mostrar. ■

Lema 4.3. *Con la notación de los lemas previos, sea $\mathcal{D}$ el disco $x_1^2 + x_2^2 < R^2$, entonces la función (4.3) es un difeomorfismo de $\mathcal{D}$ sobre un dominio Δ que contiene al disco de radio R y centro en $\xi(0)$.*

Demostración. La función $\xi_i (x_1, x_2) = x_i + u_i (x_1, x_2)$ dada en (4.3) es diferenciable, ya que $E(x_1, x_2) \in C^2$. Sea $x(t)$ una curva regular en $\mathcal{D}$ y $\xi(t)$ su imagen entonces por (4.5) obtenemos que $|\xi'(t)| > |x'(t)|$. Por otro lado, por la regla de la cadena se tiene $\xi'(t) = (D\xi)x'(t)$, de tal manera que $|\xi'(t)| = \det(D\xi|x'(t)|)$, esto último implica que $\det(D\xi) = \dfrac{|\xi'(t)|}{|x'(t)|} > 1$, es decir, el Jacobiano de la función $\xi(t)$ es siempre mayor que 1, de esta manera la función en cuestión es un difeomorfismo local y además es inyectiva por (4.5), por tanto, un difeomorfismo global sobre su imagen Δ.

Debemos de mostrar que Δ contiene a todos los puntos ξ tales que $|\xi - \xi(0)| < R$. Si Δ corresponde a todo el plano entonces no hay nada que probar. De otra forma existe un punto $p \in \Delta^c$ que minimiza la distancia a $\xi(0)$. Sea $\{\xi_k\}$ una sucesión de puntos en Δ tal que $\{\xi_k\} \to \xi$ cuando $k \to \infty$, y sea $\{x_k\}$ los correspondientes puntos en $\mathcal{D}$.

- Afirmación : La sucesión $\{x_k\}$ no puede tener puntos de acumulación en $\mathcal{D}$.

En efecto, sea $q \in \mathcal{D}$ un punto de acumulación de $\{x_k\}$, entonces $x_k(q) = \xi \in \Delta$ una contradicción con el hecho de que ξ no está en Δ. Así, tenemos que $|x_k| \to R$ cuando $k \to \infty$, y por (4.5) $|\xi_k - \xi(0)| > |x_k|$ se sigue que

$$|\xi - \xi(0)| \geq R.$$

Lo cual concluye la prueba del resultado. ■

Lema 4.4. *Sea $f(x_1, x_2)$ una solución de la ecuación de las superficies minimales (1.49) para $D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$. Entonces, utlizando la notación dada en (1.47) y (3.12), la función $(x_1, x_2) \longrightarrow (\xi_1, \xi_2)$ definida en (3.13) es un difeomorfismo sobre un dominio Δ que contiene al disco de radio R y centro en $\xi(0)$.*

Demostración. De las ecuaciones (3.12) y como se argumentó en la prueba del Lema 3.4, existe $E : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = F \ , \ \frac{\partial F}{\partial x_2} = G \tag{4.6}$$

Entonces, $E(x_1, x_2) \in C^2$. Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial x_1^2} &= \frac{1 + |p|^2}{W}, \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{1 + |q|^2}{W}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2}\right) &= \frac{\partial(F, G)}{\partial(x_1, x_2)} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1+|p|^2}{W} & \frac{p \cdot q}{W} \\ \frac{p \cdot q}{W} & \frac{1+|q|^2}{W} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1 + |p|^2}{W}\right)\left(\frac{1 + |q|^2}{W}\right) - \left(\frac{p \cdot q}{W}\right)^2 \\ &= \frac{1 + |p|^2 + |q|^2 + |p|^2|q|^2 - (p \cdot q)^2}{W^2} \\ &= \frac{\det(g_{ij})}{W^2} \qquad \text{por (2.9)} \\ &= \frac{W^2}{W^2} \qquad \text{por (2.10)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función E tiene una matriz Hessiana $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ definida positiva y de esta manera podemos aplicar los lemas 4.1 - 4.3. Pero por (4.6), la función $\xi_1 = x_1 + \frac{\partial E}{\partial x_1}$, $\xi_2 = x_2 + \frac{\partial E}{\partial x_2}$ dada en (3.13) es la función de (4.3) aplicada a esta función, por lo que el resultado se sigue del Lema 4.3. ■

Lema 4.5. *Sea $f \in C^1(\mathcal{D})$, con $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio. Una condición necesaria y suficiente para que la superficie $S : x_3 = f(x_1, x_2)$ se encuentre en un plano es que exista una función no singular $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$ tal que u_1, u_2 son parámetros isotérmicos en S.*

Demostración. Suponiendo que los parámetros u_1, u_2 existen, consideramos las funciones $\phi_k(\varsigma)$ definidas en (3.6), para $k = 1, 2, 3$, notemos que las funciones $\phi_1(\varsigma)$ y $\phi_2(\varsigma)$ son constantes, pues x_1 y x_2 son funciones lineales de u_1 y u_2. Ahora bien, como u_1 y u_2 son parámetros isotérmicos tenemos por (3.9) que $\phi_1^2(\varsigma) + \phi_2^2(\varsigma) + \phi_3^2(\varsigma) = 0$, esto implica que $\phi_3^2(\zeta)$ es constante y por tanto $\phi_3(\varsigma)$ lo es también. De esto tenemos que x_3 tiene un gradiente constante con respecto a las variables u_1, u_2 y por tanto también para x_1, x_2, de esta manera

$$f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C,$$

para A, B y C constantes, lo anterior representa la ecuación general de un plano, por tanto S esta contenida en un plano.

Por otro lado, si $f(x_1, x_2)$ está contenida en un plano, escribimos $f(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2 + C$, para algunas constantes A, B y C. Consideramos la función

$$(u_1, u_2) \quad \xrightarrow{\vartheta} \quad (x_1, x_2), \tag{4.6.1}$$

definida por

$$\vartheta(u_1, u_2) = (\lambda A u_1 + B u_2, \lambda B u_1 - A u_2),$$

donde $x_1 = \lambda A u_1 + B u_2$, $x_2 = \lambda B u_1 - A u_2)$ y $\lambda^2 = \dfrac{1}{1 + A^2 + B^2}$. Veamos que esta produce coordenadas isotérmicas. En efecto, de las ecuaciones definidas en (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_1(\zeta) &= \frac{\partial x_1}{\partial u_1} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}(\lambda A u_1 + B u_2) - i\frac{\partial}{\partial u_2}(\lambda A u_1 + B u_2) \\
&= \lambda A - iB,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(\zeta) &= \frac{\partial x_2}{\partial u_1} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial u_1}(\lambda B u_1 - A u_2) - i\frac{\partial}{\partial u_2}(\lambda B u_1 - A u_2),
\end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned}
x_3 &= Ax_1 + Bx_2 + C \\
&= A(\lambda A u_1 + B u_2) + B(\lambda B u_1 - A u_2) + C,
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_3(\zeta) &= \frac{\partial x_3}{\partial u_1} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1}\left(A(\lambda A u_1 + B u_2) + B(\lambda B u_1 - A u_2) + C\right) - \\ &\quad i\frac{\partial}{\partial u_2}\left(A(\lambda A u_1 + B u_2) + B(\lambda B u_1 - A u_2) + C\right) \\ &= \lambda\left(A^2 + B^2\right).\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\phi_1^2(\zeta) &= \lambda^2 A^2 - 2i\lambda AB - B^2, \\ \phi_2^2(\zeta) &= \lambda^2 B^2 + 2iAB - A^2, \\ \phi_3^2(\zeta) &= \lambda^2 (A^2 + B^2)^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\phi_1^2(\zeta) + \phi_2^2(\zeta) + \phi_3^2(\zeta) &= (\lambda^2 A^2 - 2i\lambda AB - B^2) + (\lambda^2 B^2 + 2iAB - A^2) \\ &\quad +\lambda^2 (A^2 + B^2)^2 \\ &= \lambda^2 (A^2 + B^2) - (A^2 + B^2) + \lambda^2 (A^2 + B^2)^2 \\ &= (A^2 + B^2)(\lambda^2 - 1 + \lambda^2 (A^2 + B^2)) \\ &= (A^2 + B^2)(\lambda^2 (1 + A^2 + B^2) - 1) \\ &= (A^2 + B^2)(1 - 1), \quad \text{pues } \lambda^2 = \frac{1}{1 + A^2 + B^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

De esta manera, por (3.9) se tiene que u_1 y u_2 son parámetos isotérmicos. ■

Teorema 4.1 (De Bernstein). *Sea $f(x_1, x_2)$ una solución de la ecuación de las superficies minimales (1.43) en todo el plano x_1, x_2. Entonces, existe una trasformación lineal no singular*

$$x_1 = u_1, \;\; x_2 = a u_1 + b u_2, \;\; b > 0, \tag{4.7}$$

tal que (u_1, u_2) son parámetros isotérmicos (globales) de la superficie S definida por

$$x_k = f_k(x_1, x_2), \;\; k = 3, \ldots, n.$$

Demostración. Consideremos la función $(x_1, x_2) \longrightarrow (\xi_1, \xi_2)$ introducida en (3.13), la cual está definida en todo el plano x_1, x_2, en virtud del Lema 4.4, tenemos que esta función es un difeomorfismo entre el plano x_1, x_2 y el plano ξ_1, ξ_2. Por otro lado, sabemos por (3.14), que (ξ_1, ξ_2) son parámetros isotérmicos en la superficie S en su forma no paramétrica

$$x_k = f_k(x_1, x_2), \;\; k = 3, \ldots, n.$$

Por el Lema 3.3, las funciones complejas

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2}, \;\; k = 1, \ldots, n$$

son analíticas en ζ. Ahora bien, notemos que

$$\begin{aligned}\overline{\phi}_1\phi_2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)\\ &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}+\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}+i\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right),\end{aligned}$$

de modo que

$$\mathrm{Im}\left\{\overline{\phi}_1\phi_2\right\}=\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(x_1,x_2\right)}{\partial\left(\xi_1,\xi_2\right)} &= \begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\end{vmatrix}\\ &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2},\end{aligned}$$

de esta manera, tenemos la siguiente identidad

$$\mathrm{Im}\left\{\overline{\phi}_1\phi_2\right\}=-\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(\xi_1,\xi_2)},$$

ya que la función (3.13) es un difeomorfismo se tiene que el Jacobiano es distinto de cero, y ello en la ecuación de arriba se tiene que $\mathrm{Im}\left\{\overline{\phi}_1\phi_2\right\}<0$. Así, tenemos que $\phi_1\neq 0$ y $\phi_2\neq 0$. Por otro lado, observamos lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\phi_2}{\phi_1} &= \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}}\\ &= \frac{\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)}{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right)}\\ &= \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}+i\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right)}{\left|\phi_1\right|^2}.\end{aligned}$$

De tal forma que

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{\frac{\phi_2}{\phi_1}\right\} &= \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}}{\left|\phi_1\right|^2}\\ &= \frac{Im\left\{\overline{\phi}_1\phi_2\right\}}{\left|\phi_1\right|^2}<0.\end{aligned}$$

Entonces, la función $\dfrac{\phi_2}{\phi_1}$ es analítica en todo el plano ζ, cuyos elementos tienen parte imaginaria negativa, y por tanto es constante, de esta forma

$$\phi_2 = c\phi_1, \;\; c = a - ib, \;\; b > 0. \tag{4.7.1}$$

Así

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= (a-ib)\phi_1 \\
&= a\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right) - ib\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right) \\
&= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - ia\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - ib\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\
&= \left(a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\right) - i\left(a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\right).
\end{aligned}$$

Como $\phi_2 = \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} - i\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}$, entonces $\mathrm{Re}\{\phi_2\} = \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1}$ e $\mathrm{Im}\{\phi_2\} = \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}$. De aquí que, $\phi_2 = c\phi_1$ si y sólo si $\mathrm{Re}\{\phi_2\} = \mathrm{Re}\{c\phi_1\}$ y $\mathrm{Im}\{\phi_2\} = \mathrm{Im}\{c\phi_1\}$, por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} &= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \\
\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} &= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}.
\end{aligned} \tag{4.7.2}$$

Ahora, sustituyendo la función dada en (4.7) en las ecuaciones de arriba

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} &= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\
\frac{\partial}{\partial \xi_1}(au_1 + bu_2) &= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\
a\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + b\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} &= a\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} - b\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2},
\end{aligned}$$

del hecho de que $b > 0$ obtenemos

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2},$$

de manera similar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} &= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \\
\frac{\partial}{\partial \xi_2}(au_1 + bu_2) &= a\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \\
a\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} &= a\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + b\frac{\partial u_1}{\partial \xi_1},
\end{aligned}$$

de aquí que

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1}$$

donde estas últimas expresiones

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1};\ \ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2}, \tag{4.7.3}$$

corresponden a las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de esta manera hemos mostrado que $u_1 + iu_2$ es una función analítica de $\xi_1 + i\xi_2$. En virtud del Lema 3.5, tenemos que (u_1, u_2) son parámetros isotérmicos, con esto concluimos el resultado. ■

Corolario 4.2 (**Bernstein**). *En el caso $n = 3$, la única solución de la ecuación de las superficies minimales (1.43) en el plano x_1, x_2 es la solución trivial, siendo f una función lineal en las variables x_1, x_2.*

Demostración. Tenemos por el Teorema 4.1, que existe una transformación lineal no singular $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$ como en (4.7), donde (u_1, u_2) son parámetros isotérmicos de la superficie $x_k = f(x_1, x_2)$. Luego, por el Lema 4.5, esta se encuentra contenida en un plano. Así, f es una función lineal en las variables x_1 y x_2, y como se analizó en el Capítulo 1, §1.3 esta es la solución trivial a (1.43). ■

En esencia, el corolario anterior establece que en $\mathbb{R}^3$, la única superficie minimal definida de manera no paramétrica sobre todo el plano $\mathbb{R}^2$ es el plano. Esto resulta intuitivo, ya que, por ejemplo, ni la Catenoide ni la Helicoide pueden representarse en forma no paramétrica sobre todo el plano, dado que ninguna de sus proyecciones sobre $\mathbb{R}^2$ es inyectiva.

Por otro lado, la superficie de Scherk admite una representación no paramétrica bajo ciertas restricciones, como se indicó en (1.46). En particular, esto ocurre cuando se cumple que

$$\frac{\cos(x_2)}{\cos(x_1)} > 0.$$

Sin embargo, debido a la periodicidad de esta superficie, dicha representación está definida únicamente en un "tablero de ajedrez", como el mostrado en la Figura 1.6.

Corolario 4.3. *Una solución acotada de (1.43) en todo el plano es constante (para cualquier dimensión n).*

Demostración. Por el Lema 3.2 cada x_k, con $k = 3, \ldots, n$ es una función armónica acotada en (u_1, u_2) en todo el plano x_1, x_2, por tanto es constante. ■

Corolario 4.4. *Sea $f(x_1, x_2)$ una solución de (1.43) en todo el plano x_1, x_2, y sea $\widetilde{S}$ la superficie definida por*

$$x_k = \widetilde{f}_k(u_1, u_2),\ \ k = 3, \ldots, n, \tag{4.8}$$

obtenida al dotar a S de los parámetros isotérmicos presentados en (4.7). Entonces, las funciones

$$\widetilde{\phi}_k = \frac{\partial \widetilde{f}_k}{\partial u_1} - i\frac{\partial \widetilde{f}_k}{\partial u_2},\ \ k = 3, \ldots, n \tag{4.9}$$

son funciones analíticas de $u_1 + iu_2$ en todo el plano u_1, u_2 y además satisfacen

$$\sum_{k=3}^{n} \widetilde{\phi}_k^2 \equiv -1 - c^2, \;\; c = a - ib. \tag{4.10}$$

Recíprocamente, dada cualquier constante compleja $c = a - ib$ con $b > 0$, y dadas las funciones enteras $\widetilde{\phi}_3, \ldots, \widetilde{\phi}_n$ de $u_1 + iu_2$ que satisfacen (4.10), las ecuaciones (4.9) pueden utilizarse para definir funciones armónicas $\widetilde{f}_k(u_1, u_2)$ y sustituyendo u_1, u_2 como funciones de x_1, x_2 a partir de (4.7) en las ecuaciones (4.8), se obtiene una solución a la ecuación de las superficies minimales (1.43) válida en todo el plano x_1, x_2.

Demostración. Dada $\tilde{S}$ definida como en (4.8) tenemos una superficie minimal con parámetros isotérmicos u_1 y u_2 como en (4.7). Así, por el Lema 3.3, se tiene que las funciones dadas en (4.9) son analíticas en todo el plano u_1, u_2. Como

$$\tilde{\phi}_1(\zeta) = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = 1$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2(\zeta) &= \frac{\partial x_2}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1}(au_1 + bu_2) - i\frac{\partial}{\partial u_2}(au_1 + bu_2) \\ &= a - ib, \end{aligned}$$

al satisfacerse (3.9) del Lema 3.3 tenemos que

$$\tilde{\phi}_1^2 + \tilde{\phi}_2^2 + \sum_{k=3}^{n} \tilde{\phi}_k^2 = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\sum_{k=3}^{n} \tilde{\phi}_k^2 = -1 - (a - ib)^2 = -1 - c^2.$$

Dadas las hipótesis y procediendo como en la prueba del Lema 3.3, vemos que las funciones $\tilde{f}_k(u_1, u_2)$ son armónicas. Además, el regreso del Lema 3.3 nos proporciona una superficie minimal en terminos de las funciones $\tilde{\phi}_k$, y por tanto tenemos una solución a (1.43). ■

Sin restar importancia al Teorema 4.1, el cual nos proporciona condiciones necesarias para que una superficie minimal en su forma no paramétrica adopte de forma global parámetros isotérmicos, destacamos una aplicación del Corolario 4.4, el cual nos permite de alguna forma representar todas las soluciones de (1.43) en todo el plano x_1, x_2. Un caso interesante a analizar con detalle es para $n = 4$, en el Capítulo 1, §1.3, analizamos las soluciones a la ecuación de las superficies minimales (1.43) dadas por

$$f_3 + if_4 = g(z), \;\; z = x_1 + ix_2, \tag{4.11}$$

donde g es una función analítica. Para una función entera $g(z)$, la ecuación (4.11) es solución de (1.43) en todo el plano x_1, x_2, esta misma afirmación es cierta para

$$f_3 - if_4 = g(z). \tag{4.12}$$

Ahora, en virtud del Teorema 4.1, toda solución global $f_3(x_1, x_2)$, $f_4(x_1, x_4)$ le corresponde una función (4.7) y funciones enteras $\widetilde{\phi}_3(w)$, $\widetilde{\phi}_4(w)$, donde $w = u_1 + iu_2$, que satisfacen

$$\widetilde{\phi}_3^2 + \widetilde{\phi}_4^2 \equiv -d, \;\; d = 1 + c^2. \tag{4.13}$$

Vamos a considerar dos casos para la constante c.

- Caso I. Si $c = \pm i$, entonces la ecuación (4.10) se reduce a

$$\widetilde{\phi}_3^2 + \widetilde{\phi}_4^2 = -1 - (\pm i)^2 = 0, \tag{4.14}$$

donde $\pm i = a - ib$, lo cual sucede si y sólo si $a = 0$ y $b = \pm 1$, de esta manera la función (4.7) es la identidad o una reflexión, es decir: $w = z$ o $w = \overline{z}$, y la ecuación (4.14) implica que $\widetilde{\phi}_4 = i\widetilde{\phi}_3$, lo que es equivalente a que $f_3 + if_4$ sea una función analítica en z o en $\overline{z}$, en este caso $c = \pm i$ corresponde a un caso especial de las soluciones (4.11) y (4.12).

- Caso II. Si $c \neq \pm i$, podemos escribir la ecuación (4.13) de la siguiente manera

$$(\widetilde{\phi}_3 + i\widetilde{\phi}_4)(\widetilde{\phi}_3 - i\widetilde{\phi}_4) = -d, \;\; d \neq 0. \tag{4.15}$$

Entonces, cada uno de los factores del lado izquierdo de la igualdad es diferente de cero, de forma particular la función $\widetilde{\phi}_3 - i\widetilde{\phi}_4$ es una función entera que no se anula, y por tanto esta puede ser escrita como sigue

$$\widetilde{\phi}_3 - i\widetilde{\phi}_4 = e^{H(w)},$$

para alguna función entera $H(w)$. Por (4.15) tenemos

$$\widetilde{\phi}_3 + i\widetilde{\phi}_4 e^{H(w)} = -d,$$

o de manera equivalente

$$\widetilde{\phi}_3 + i\widetilde{\phi}_4 = -de^{-H(w)},$$

combinando ambas expresiones

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}_3 &= \frac{(\widetilde{\phi}_3 - i\widetilde{\phi}_4) + \widetilde{\phi}_3 + i\widetilde{\phi}_4}{2} \\ &= \frac{e^{H(w)} - de^{-H(w)}}{2}, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\left(e^{H(w)} + de^{-H(w)}\right) &= \frac{i}{2}\left[(\widetilde{\phi}_3 - i\widetilde{\phi}_4) - (\widetilde{\phi}_3 + i\widetilde{\phi}_4)\right] \\ &= \frac{i}{2}(-2i\widetilde{\phi}_4) \\ &= \widetilde{\phi}_4. \end{aligned}$$

Destacamos las expresiones anteriores para su uso posterior

$$\widetilde{\phi}_3 = \frac{e^{H(w)} - de^{-H(w)}}{2}, \;\; \widetilde{\phi}_4 = \frac{i}{2}\left(e^{H(w)} + de^{-H(w)}\right), \tag{4.16}$$

Esto último nos dice que podemos describir explícitamente, para $n = 4$ las soluciones a la ecuación de las superficies minimales (1.43) que son válidas en todo el plano x_1, x_2. Estas son, o bien de la forma especial (4.11) o (4.12), o bien pueden obtenerse mediante una transformación lineal como la de (4.7), tomando la constante $d = 1+(a-ib)^2$ en (4.16) junto con una función entera $H(w)$.

A continuación, veremos un ejemplo que ilustre estos últimos hechos, destacando la forma elegante en la que se se pueden generar estas superficies minimales de carácter "extraño" en dimensiones mayores o iguales a 4 comenzando con funciones analíticas, como las dadas en (4.11).

Solución global a la ecuación de las superficies minimales (1.43) en el caso $n = 4$

Consideremos $a = 0$, $b = 2$ en (4.7) y $H(w) = w$. Así, la función en (4.7) queda determinada por $x_1 = u_1$ y $x_2 = 2u_2$, mientras que $d = 1 + (-2i)^2 = -3$. Por otro lado

$$\tilde{\phi}_3(w) = \frac{1}{2}\left(e^{w} + 3e^{-w}\right),$$

y

$$\tilde{\phi}_4(w) = \frac{i}{2}\left(e^{w} - 3e^{-w}\right).$$

De esta forma, para $w = u_1 + iu_2$ se obtiene

$$\begin{aligned}
x_3 &= \mathrm{Re}\left\{\int \tilde{\phi}_3(w)dw\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\int \left(\frac{1}{2}(e^{w} + 3e^{-w}\right) dw\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\int e^{w}dw + \frac{3}{2}\int e^{-w}dw\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}e^{w} - \frac{3}{2}e^{-w}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}e^{u_1}(\cos(u_2) + i\sin(u_2) - \frac{3}{2}e^{-u_1}(\cos(u_2) - i\sin(u_2))\right\} \\
&= \frac{1}{2}e^{u_1}\cos(u_2) - \frac{3}{2}e^{-u_1}\cos(u_2) \\
&= \frac{1}{2}\cos(u_2)(e^{u_1} - 3e^{-u_1}).
\end{aligned}$$

Y de manera similar tenemos que

$$\begin{aligned}
x_4 &= \operatorname{Re}\left\{\int \tilde{\phi}_4(w)dw\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\int \left(\frac{i}{2}(e^{w}-3e^{-w})\right)dw\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2}\int e^{w}dw - \frac{3}{2}i\int e^{-w}dw\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2}e^{w}+\frac{3}{2}ie^{-w}\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2}e^{u_1}(\cos(u_2))+i\sin(u_2)+\frac{3}{2}ie^{-u_1}(\cos(u_2)-i\sin(u_2))\right\} \\
&= -\frac{1}{2}e^{u_1}\sin(u_2)+\frac{3}{2}e^{-u_1}\sin(u_2) \\
&= -\frac{1}{2}\sin(u_2)(e^{u_1}-3e^{-u_1}).
\end{aligned}$$

Como $u_2 = \frac{x_2}{2}$ y $u_1 = x_1$ se tiene para $n = 4$ una superficie en su forma no paramétrica

$$x_3 = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{x_1}-3e^{-x_1}\right),$$

y

$$x_4 = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{x_1}-3e^{-x_1}\right).$$

A continuación, veremos que es solución de (1.43), utilizando la notación vectorial dada en (1.42) se obtiene

$$f(x_1,x_2) = \left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{x_1}-3e^{-x_1}\right), -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{x_1}-3e^{-x_1}\right)\right),$$

derivando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \left(\frac{1}{2}e^{-x_1}\left(\cos\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}+3\right), -\frac{1}{2}e^{-x_1}\left(\sin\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}+3\right)\right), \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \left(-\frac{1}{4}e^{-x_1}\left(\sin\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}-3\right), -\frac{1}{4}e^{-x_1}\left(\cos\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \left(-\frac{1}{4e^{-x_1}}\left(\sin\frac{1}{2}x_2\right)\left(3e^{2(-x_1)}+1\right), -\frac{1}{4}e^{-x_1}\left(\cos\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}+3\right)\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \left(\frac{1}{2}e^{-x_1}\left(\cos\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}-3\right), -\frac{1}{2e^{-x_1}}\left(\sin\frac{1}{2}x_2 - 3e^{2(-x_1)}\sin\frac{1}{2}x_2\right)\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \left(-\frac{1}{8}e^{-x_1}\left(\cos\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}-3\right), \frac{1}{8}e^{-x_1}\left(\sin\frac{1}{2}x_2\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\right).
\end{aligned}$$

Dada la incomodidad de los cálculos optamos por desarrollar de manera individual los términos de (1.43), para finalmente sumar la expresión resultante

$$\begin{aligned}
&\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\\
=\;&\left(1+\left(-\frac{e^{-x_1}}{4}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\right)^2+\left(-\frac{e^{-x_1}}{4}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\right)^2\right)\\
&\cdot\left(\frac{e^{-x_1}}{2}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right),-\frac{e^{-x_1}}{2}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\right)\\
=\;&\left(\frac{e^{-3x_1}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\left(e^{4x_1}+10e^{2x_1}+9\right)}{32},\frac{\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(27e^{-6x_1}+21e^{-4x_1}-7e^{-2x_1}-1\right)}{32e^{\frac{3}{2}(-2x_1)}}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(1+\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\\
=\;&\left(1+\left(\frac{e^{-x_1}}{2}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}+3\right)\right)^2+\left(-\frac{e^{-x_1}}{2}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}+3\right)\right)^2\right)\\
&\cdot\left(-\frac{e^{-x_1}}{8}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right),\frac{e^{-x_1}}{8}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\right)\\
=\;&\left(-\frac{e^{-3x_1}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\left(e^{4x_1}+10e^{2x_1}+9\right)}{32},-\frac{\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(27e^{-6x_1}+21e^{-4x_1}-7e^{-2x_1}-1\right)}{32e^{\frac{3}{2}(-2x_1)}}\right),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&-2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\
=\;&-2\left(-\frac{e^{-2x_1}}{8}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}+3\right)^2+\frac{e^{-2x_1}}{8}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}+3\right)^2\right)\\
&\cdot\left(\frac{e^{-x_1}}{2}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right),-\frac{1}{2e^{-x_1}}\left(\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)-3e^{-2x_1}\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\right)\right)\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{e^{-3x_1}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\left(e^{4x_1}+10e^{2x_1}+9\right)}{32},\frac{\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(27e^{-6x_1}+21e^{-4x_1}-7e^{-2x_1}-1\right)}{32e^{\frac{3}{2}(-2x_1)}}\right)\\
&+\left(-\frac{e^{-3x_1}\cos\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(e^{2x_1}-3\right)\left(e^{4x_1}+10e^{2x_1}+9\right)}{32},-\frac{\sin\left(\frac{x_2}{2}\right)\left(27e^{-6x_1}+21e^{-4x_1}-7e^{-2x_1}-1\right)}{32e^{\frac{3}{2}(-2x_1)}}\right)\\
=\;&(0,0).
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 5

Teoría global de superficies paramétricas

En el Capítulo 4, pudimos obtener resultados globales, ya que teníamos una parametrización global de una superficie S en función de las dos coordenadas x_1, x_2. En el caso general, tenemos una superficie S cubierta por vecindades, donde para cada una de ellas se da una parametrización como en el Capítulo 1. Para el estudio general de superficies, primero estudiaremos algunos hechos acerca de las *variedades diferenciables*.

Definición 5.1. *Una n-variedad es un espacio de Hausdorff, en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a un dominio Δ en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 5.2. *Un atlas A para una n-variedad $\mathcal{M}$ es un colección de ternas $\{(\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{O}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)\}$, con $\alpha \in \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es un conjunto de índices arbitrario, $\mathcal{R}_\alpha$ es un dominio en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}_\alpha$ es un conjunto abierto en $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}_\alpha$ es un homeomorfismo de $\mathcal{R}_\alpha$ sobre $\mathcal{O}_\alpha$, y*

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_\alpha = \mathcal{M},$$

cada terna se llama carta.

Definición 5.3. *Una C^r-estructura sobre $\mathcal{M}$ es un atlas para el cual cada $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta \in C^r$ donde quiera que esté definido.*

Definición 5.4. *Una estructura conforme en $\mathcal{M}$ es un atlas para el cual cada $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta$ es una función conforme en todo el dominio de definición.*

Definición 5.5. *Una estructura compleja en $\mathcal{M}$ es un atlas para el cual cada $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta$ es una función holomorfa en el dominio de definición.*

Definición 5.6. *Una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ es un par $(\mathcal{M}, A)$, donde $\mathcal{M}$ es una $n-$variedad y A es una C^r-estructura sobre $\mathcal{M}$.*

Definición 5.7. *Una superficie de Riemann es un par $(\mathcal{M}, A)$, donde $\mathcal{M}$ es una $2-$variedad conexa y A es una estructura compleja sobre $\mathcal{M}$.*

Observación 5.1. *Dada una n-variedad $\mathcal{M}$, a las funciones $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$, que proporcionan una estructura para $\mathcal{M}$, les llamamos funciones de cambio de coordenadas (véase la Figura 5.1).*

Definición 5.8. *Una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ es orientable si posee un atlas para el cual la diferencial de cambio de coordenadas de la función $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta$ tiene determinante positivo, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$. Una orientación de $\mathcal{M}$ es la elección de tal atlas.*

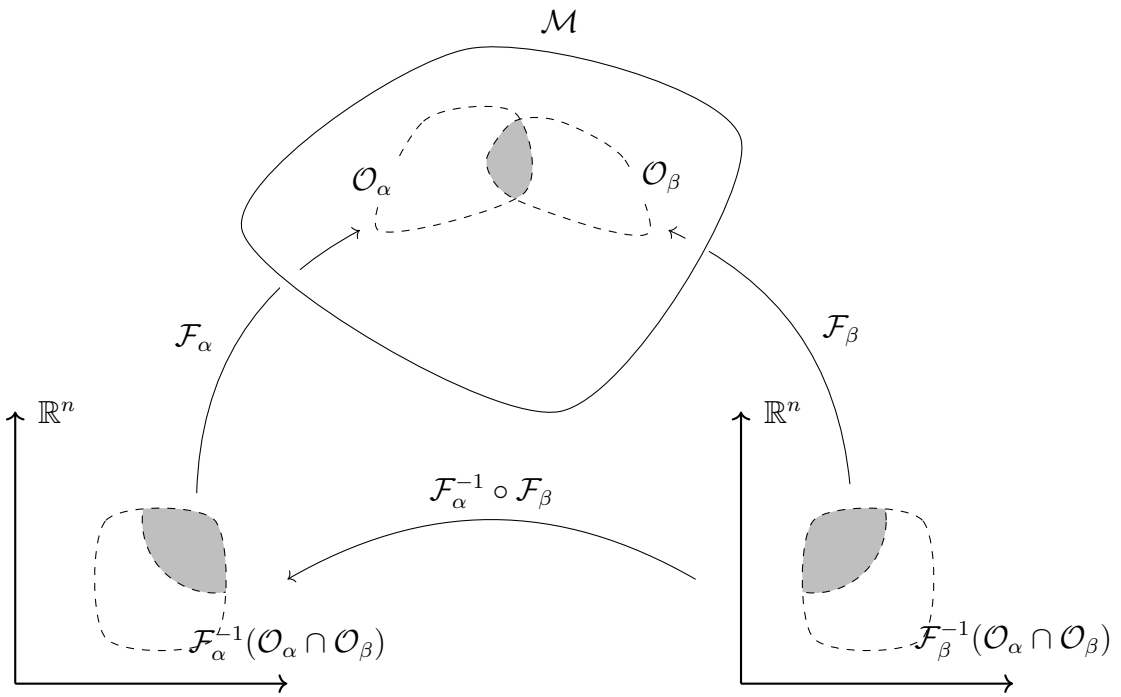


Figura 5.1: Una n-variedad $\mathcal{M}$ con una estructura determinada por $\mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta$

Definición 5.9. *Sean $\mathcal{M}$ una n-variedad con una C^r-estructura $\mathcal{A}$ y $\tilde{\mathcal{M}}$ una m-variedad con una C^r-estructura $\tilde{\mathcal{A}}$. La función $f : \mathcal{M} \to \tilde{\mathcal{M}}$ es llamada una C^p-función (escribimos $f \in C^p$ para $p \geq r$) si $\tilde{\mathcal{F}}_\beta^{-1} \circ f \circ \mathcal{F}_\alpha \in C^p$ para cada función $\tilde{\mathcal{F}}_\beta^{-1} \circ f \circ \mathcal{F}_\alpha$ en todo el dominio de su definición.*

Notese que de manera particular $\mathbb{R}^n$ tiene una C^r-estructura canónica para cada r, haciendo que $\mathcal{A}$ consista de la terna $\{\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{O}_\alpha = \mathbb{R}^n, \mathcal{F}_\alpha\}$ con $\mathcal{F}_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ para alguna $\alpha \in \mathcal{I}$.

Definición 5.10. *Una C^r-Superficie S en $\mathbb{R}^n$ es una 2-variedad $\mathcal{M}$ con una C^r-estructura, junto con una C^r-función $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Sean S una C^r-superficie en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ la C^r-estructura asociada a la 2-variedad $\mathcal{M}$ y $\mathcal{R}_\alpha$ un dominio en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces, la composición

$$X = \mathcal{X} \circ \mathcal{F}_\alpha : \mathcal{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

define de manera local una superficie, como lo vimos en el Capítulo 1.

Por otro lado, con las consideraciones de arriba si tomamos a $\mathcal{R}_\beta$ un dominio en el plano $\mathbb{R}^2$ la función $\tilde{X} : \mathcal{R}_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define localmente una superficie a partir de X por un cambio de parámetros $\varphi = \mathcal{F}_\alpha^{-1} \circ \mathcal{F}_\beta : \mathcal{F}_\beta^{-1}(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \subseteq \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{F}_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta) \subseteq \mathbb{R}^n$. De esta manera todas las propiedades locales de las superficies que son independientes de los parámetros elegidos, están bien definidas en una superficie global S. En particular, por un punto en S entendemos el par $(p_0, \mathcal{X}(p_0))$, donde $p_0 \in \mathcal{M}$ y de esta manera podemos hablar de: un punto regular sobre una superficie S, de su espacio tangente, del vector de curvatura media, entre otros.

Las propiedades globales de S se definirán a partir de $\mathcal{M}$, es decir, S es orientable si $\mathcal{M}$ lo es. Así, una orientación de S es una orientación en $\mathcal{M}$. Lo mismo sucederá con las propiedades topológicas de S, como la compacidad, conexidad, entre otros. Todas las superficies que consideremos serán orientables y conexas.

Definición 5.11. *Una C^r-superficie regular S en $\mathbb{R}^n$ es una superficie minimal si su vector de curvatura media se anula en cada punto.*

Lema 5.1. *Sea S una superficie regular minimal en $\mathbb{R}^n$ definida por la función $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces S induce una estructura conforme $\mathcal{A}$ en $\mathcal{M}$.*

Demostración. Dado que S es orientable, consideremos un atlas orientado $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$. Sea $\tilde{\mathcal{A}}$ el conjunto de ternas $\left\{\left(\tilde{\mathcal{R}}_\alpha, \tilde{\mathcal{O}}_\alpha, \tilde{\mathcal{F}}_\alpha\right)\right\}$, tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$, $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ es un dominio plano, $\tilde{\mathcal{O}}_\alpha$ es un conjunto abierto en $\mathcal{M}$ y $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha : \tilde{\mathcal{R}}_\alpha \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_\alpha$ es un homeomorfismo, $\mathcal{F}_\beta^{-1} \circ \tilde{\mathcal{F}}_\alpha$ preserva la orientación en el dominio de su definición, y donde $\mathcal{X} \circ \tilde{\mathcal{F}}_\alpha : \tilde{\mathcal{R}}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ define localmente una superficie con parámetros isotérmicos, de esta manera, por el Lema 3.4 tenemos que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \tilde{\mathcal{O}}_\alpha = \mathcal{M}$, por lo que $\tilde{\mathcal{A}}$ es un atlas de $\mathcal{M}$, luego por el Lema 3.5 cada $\tilde{\mathcal{F}}_\alpha^{-1} \circ \tilde{\mathcal{F}}_\beta$ es una función conforme, de manera que $\tilde{\mathcal{A}}$ es una estructura conforme para $\mathcal{M}$, justo como queríamos mostrar. ■

Observemos que la introducción de una estructura conforme de esta manera puede llevarse a cabo en gran generalidad, ya que las condiciones de diferenciabilidad de bajo orden en S garantizan la existencia local de parámetros isotérmicos; sin embargo, aún no contamos con las herramientas para poder demostrar su existencia en el caso general.

Ahora discutiremos algunas nociones básicas relacionadas con la estructura conforme, notemos primero que si $\mathcal{M}$ tiene una estructura conforme $\mathcal{A}$, entonces podemos definir todos los conceptos que son invariantes bajo funciones conformes. En particular, podemos hablar de funciones *armónicas* y *subarmónicas* sobre $\mathcal{M}$, y funciones analíticas complejas de una variedad $\mathcal{M}$ en otra $\tilde{\mathcal{M}}$, de esta manera, se tiene la siguiente definición.

Definición 5.12. *Una función **meromorfa** en $\mathcal{M}$ es una función analitíca compleja de $\mathcal{M}$ en la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$. Esta última puede definirse como la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\},$$

con la estructura conforme definida por las siguientes funciones: para $w = u_1 + iu_2$

$$\mathcal{F}_1 : X(u_1, u_2) = \left(\frac{2u_1}{|w|^2+1}, \frac{2u_2}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right) = \left(\frac{w+\overline{w}}{|w|^2+1}, \frac{w-\overline{w}}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right), \quad (5.1)$$

y para $\tilde{w} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$

$$\mathcal{F}_2 : \tilde{X}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \left(\frac{2\tilde{u}_1}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{-2\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{1-|\tilde{w}|^2}{|\tilde{w}|^2+1}\right) = \left(\frac{\tilde{w}+\overline{\tilde{w}}}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{\tilde{w}-\overline{\tilde{w}}}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{|\tilde{w}|^2-1}{|\tilde{w}|^2+1}\right). \quad (5.2)$$

*Donde el homeomorfismo $\mathcal{F}_1$ es llamada **proyección estereográfica** desde el punto $(0, 0, 1)$ (polo norte), siendo la imagen la esfera menos un punto.*

La función

$$\mathcal{F}_1^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto w = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \tag{5.3}$$

es la inversa de $\mathcal{F}_1$, de la expresión anterior tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1^{-1} \circ \mathcal{F}_2(\tilde{w}) &= \mathcal{F}_1^{-1}\left(\frac{2\tilde{u}_1}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{-2\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2+1}, \frac{1-|\tilde{w}|^2}{|\tilde{w}|^2+1}\right) \\
&= \frac{\frac{2\tilde{u}_1}{|\tilde{w}|^2+1} + i\frac{-2\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2+1}}{1 - \frac{1-|\tilde{w}|^2}{|\tilde{w}|^2+1}} \\
&= \frac{\frac{2\tilde{u}_1 - 2i\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2+1}}{\frac{|\tilde{w}|^2+1-(1-|\tilde{w}|^2)}{|\tilde{w}|^2+1}} \\
&= \frac{2\tilde{u}_1 - 2i\tilde{u}_2}{2|\tilde{w}|^2} \\
&= \frac{\tilde{u}_1 - i\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2} \\
&= \frac{\tilde{u}_1 - i\tilde{u}_2}{(\tilde{u}_1 - i\tilde{u}_2)(\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2)} \\
&= \frac{1}{\tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2} \\
&= \frac{1}{\tilde{w}},
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\mathcal{F}_1^{-1} \circ \mathcal{F}_2$ es una función conforme de $\tilde{D} = \{\tilde{w} \in \mathbb{C} : 0 < |\tilde{w}| < \infty\}$ en $D = \{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < \infty\}$.

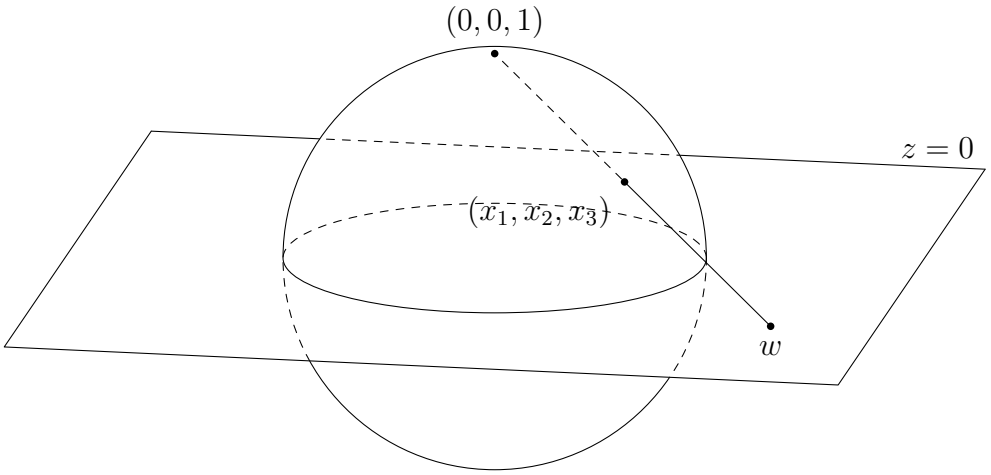


Figura 5.2: Proyección estereográfica desde el polo norte

La proyección descrita en la Figura 5.2 sugiere pensar al plano complejo como la esfera de Riemann sin el (polo norte), de esta manera, resulta intuitivo, pensar que el polo norte corresponde a un punto ideal que representa al infinito.

Dicho lo anterior, los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el plano complejo extendido, al cual denotaremos por $\overline{\mathbb{C}}$. En este sentido tenemos que $\mathbb{S}^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$ vía el homeomorfismo

$$\mathcal{F}_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{w+\overline{w}}{|w|^2+1}, \dfrac{w-\overline{w}}{|w|^2+1}, \dfrac{|w|^2-1}{|w|^2+1} \right), & \text{si } w \neq \infty \\ (0,0,1), & \text{si } w = \infty \end{cases}$$

con inversa

$$\mathcal{F}_1^{-1} = \begin{cases} \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}, & \text{si } (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,1) \\ \infty, & \text{si } (x_1,x_2,x_3) = (0,0,1). \end{cases}$$

Definición 5.13. *Una **superficie minimal generalizada** S en $\mathbb{R}^n$ es una función no constante $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\mathcal{M}$ es una 2-variedad con una estructura conforme definida por el atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{O}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha) : \alpha \in \mathcal{I}\}$ tal que cada función coordenada x_k es armónica en $\mathcal{M}$. Además*

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k^2(\varsigma) = 0, \tag{5.4}$$

y donde para cada $\alpha \in \mathcal{I}$ se satisface

$$h_k(\varsigma) = x_k(F_\alpha(\varsigma)), \;\; \phi_k(\varsigma) = \frac{\partial h_k}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial h_k}{\partial \xi_2}, \;\; \varsigma = \xi_1 + i\xi_2.$$

De la definición podemos destacar lo siguiente, primero si S es una superficie minimal regular, considerando la estructura conforme definida en el Lema 5.1 se sigue, del Lema 3.3, que S es también es una superficie minimal generalizada. De esta manera la teoría de las superficies minimales generalizadas incluye a la de las superficies minimales regulares. Por otro lado si S es una superficie minimal generalizada, entonces como la función $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es no constante, tenemos que al menos una de las funciones x_k es no constante, lo que implica que la función analítica correspondiente $\phi_k(\varsigma)$ puede tener como máximo ceros aislados. Así la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n} |\phi_k^2(\varsigma)| = 0, \tag{5.5}$$

puede satisfacerse como máximo en los ceros aislados. Entonces, nuevamente por el Lema 3.3, podemos eliminar estos puntos aislados de S, y con ello el resto de la superficie es una superficie regular minimal. Los puntos donde se satisfacen la ecuación (5.5) se denominan ***puntos de ramificación*** de la superficie.

Considerando el caso $n = 2$, en la Definición 5.13, tenemos que $x_1 + ix_2$ o $x_1 - ix_2$ son una función analítica no constante $f(\varsigma)$, por lo que los puntos en los que se satisface (5.5) son aquellos donde $f'(\varsigma) = 0$, lo que corresponde a los puntos de ramificación en el sentido clásico de la función inversa. En el caso para n arbitrario la diferencia entre superficies minimas regulares y generalizadas consiste en permitir la posibilidad de puntos de ramificación aislados.

Lema 5.2. *Una superficie minimal generalizada no puede ser compacta.*

Demostración. Sea S una superficie minimal generalizada definida por $\mathfrak{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, entonces cada función coordenada x_k es armónica en $\mathcal{M}$ y si $\mathcal{M}$ fuese compacta tendríamos que al ser x_k funciones continuas alcanzarían su máximo, así serían funciones constantes, lo que nos conduce a una contradicción con la hipótesis de que la función $\mathfrak{X}$ es no constante, por lo tanto S no puede ser compacta. ■

Para ser más breves, suprimimos los adjetivos "generalizado" y "regular", y nos referiremos a este tipo de superficies solo como superficies minimales. A continuación, haremos un análisis sobre las variedades de Riemann.

Definición 5.14. *Sea $\mathcal{M}$ una n-variedad con una C^r-estructura definida por el atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{O}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha) : \alpha \in \mathcal{I}\}$. Una* ***estructura Riemanniana*** *sobre $\mathcal{M}$ o una* ***métrica*** *C^q sobre $\mathcal{M}$ es una colección de matrices G_α, donde los elementos de la matriz G_α son funciones de clase C^q en $\mathcal{O}_\alpha$, para $0 \leq q \leq r-1$, en cada punto la matriz G_α es definida positiva, para cualesquiera α,$\beta \in \mathcal{I}$, está definida la función $\varphi(\tilde{u}) = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$, y donde la relación*

$$G_\beta = U^t G_\alpha U, \tag{5.6}$$

se satisface, y U corresponde a la matriz Jacobiana asociada a la función $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$.

Definición 5.15. *Una curva diferenciable en $\mathcal{M}$ es una función diferenciable $p : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$.*

Definición 5.16. *La longitud de la curva $p(t)$, $a \leq t \leq b$, con respecto a la métrica Riemanniana se define como*

$$\mathcal{L}(t) = \int_a^b h(t)dt, \tag{5.7}$$

donde para cada t_0, $a \leq t_0 \leq b$, elegimos $\mathcal{O}_\alpha$ tal que $p(t_0) \in \mathcal{O}_\alpha$, y establecemos

$$h(t) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\left(p\left(t\right)\right) u_i'\left(t\right) u_j'\left(t\right) \right)^{\frac{1}{2}}, \; G_\alpha = \left[g_{ij}\right], \tag{5.8}$$

para t cercano a t_0, donde u_1, u_2 son las coordenadas de $\mathcal{R}_\alpha$.

Notemos que por (5.6) la definición de $h(t)$ es independiente de la elección de $\mathcal{O}_\alpha$.

Definición 5.17. *Una trayectoria divergente en $\mathcal{M}$ es una función continua $p : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{M}$, tal que para cada subconjunto compacto $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{M}$, existe $t_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $p(t) \notin \mathcal{Q}$ para $t > t_0$.*

Definición 5.18. *Si una trayectoria divergente es diferenciable, definimos su longitud como*

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^\infty h(t)dt, \tag{5.9}$$

donde $h(t)$ es como se definió en (5.8).

Definición 5.19. *Una variedad $\mathcal{M}$ es* ***completa*** *respecto a una métrica Riemanniana dada si la integral (5.9) diverge para cada trayectoria divergente diferenciable en $\mathcal{M}$.*

Sea S una C^r-superficie en $\mathbb{R}^n$ definida por la función $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, esta induce una estructura Riemanniana en $\mathcal{M}$ de la siguiente manera: dado $\mathcal{I}$ un conjunto de índices, para cada $\alpha \in \mathcal{I}$ establecemos $X = \mathcal{X} \circ \mathcal{F}_\alpha : \mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, y definimos a G_α la matriz cuyas entradas son

$$g_{ij} = \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}. \tag{5.10}$$

Entonces la ecuación (5.6) es una consecuencia de (1.8) obtenida por un cambio de parámetros. Así, la matriz G_α es definida positiva en cada punto donde S es regular, por lo que a cada superficie regular S en $\mathbb{R}^n$ le corresponde una 2-variedad Riemanniana $\mathcal{M}$. Dicho lo anterior, decimos que S es completa si $\mathcal{M}$ es completa con respecto a la métrica Riemanniana definida anteriormente en (5.10).

Observación 5.2. *Si S es una superficie minimal generalizada, habrá puntos aislados en los que la matriz definida en (5.10) no será definida positiva. Sin embargo, la función $h(t)$ definida en (5.8) sigue siendo una función no negativa, independiente de la elección de $\alpha \in \mathcal{I}$, y todavía podemos definir S como completa si la integral en (5.9) diverge para cada trayectoria divergente.*

A continuación vamos a destacar algunos hechos básicos de la teoría de 2-variedades.

Observación 5.3. *Cada 2-variedad $\mathcal{M}$ tiene una* ***superficie cubriente universal*** *(véase el final del Apéndice A) que consiste de una 2-variedad $\widehat{\mathcal{M}}$ simplemente conexa y una función $\pi : \widehat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$, con la propiedad de que para cada $p \in \mathcal{M}$ existe una vecindad $\mathcal{V}$ tal que la restricción de π sobre cada componente de $\pi^{-1}(\mathcal{V})$ es un homeomorfismo sobre $\mathcal{V}$. En particular, la función π es un homeomorfismo local, y se sigue que para cualquier estructura sobre $\mathcal{M}$: conforme, Riemanniana, entre otras, induce la correspondiente estructura sobre $\widehat{\mathcal{M}}$.*

De la definición y al considerar la función cubriente universal $\pi : \widehat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ de $\mathcal{M}$, se tiene el siguiente resultado.

Lema 5.3. *Una 2-variedad $\mathcal{M}$ es completa con respecto a una métrica Riemanniana dada si y sólo si $\widehat{\mathcal{M}}$ es completa con respecto a la métrica Riemanniana inducida.*

Observación 5.4. *Supongamos que tenemos una superficie minimal S definida por la función $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tendremos una superficie minimal $\widehat{S}$ simplemente conexa asociada a S, denominada* ***superficie cubriente universal*** *de S, definida por la composición $\mathcal{X} \circ \pi : \widehat{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, de esta manera se deduce que $\widehat{S}$ es regular si y sólo si S es regular, $\widehat{S}$ es completa si y sólo si S lo es también. De este modo, muchas cuestiones relacionadas con las superficies minimales pueden abordarse considerando únicamente superficies minimales simplemente conexas.*

El siguiente resultado nos habla de esta importante simplificación en cuanto a las superficies minimales simplemente conexas. Sin embargo, para tratar su demostración, haremos uso del resultado siguiente, que puede consultarse en [1, Cap.3, §11G, pp.180-181].

Teorema 5.1 (**Teorema de Uniformación de Koebe**.)**.** *La superficie cubriente universal de cualquier superficie de Riemann es equivalentemente conforme al disco unitario, al plano complejo o a la esfera de Riemann.*

Lema 5.4. *Toda superficie minimal simplemente conexa S tiene una reparametrización de la forma $X : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde D es el disco unitario abierto, $|\varsigma| < 1$, o todo el plano complejo ς.*

Demostración. Sea S definida por $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, por el Lema 5.2, tenemos que $\mathcal{M}$ no es compacta, y por el Teorema 5.1 $\mathcal{M}$ es equivalentemente conforme al disco unitario $|\varsigma| < 1$ o al plano plano complejo ς. De esta manera la composición

$$D \xrightarrow{\omega} \mathcal{M} \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathbb{R}^n,$$

nos proporciona el resultado. ■

Finalmente, del lema anterior, destacamos que una 2-variedad $\mathcal{M}$ con una estructura conforme se llama ***hiperbólica*** si existe una función subarmónica negativa no constante en $\mathcal{M}$, y se dice que es ***parabólica*** en caso contrario. Más adelante, en §5.4, profundizaremos en las definiciones correspondientes.

§5.1.

Superficies minimales con frontera

En esta sección, estudiamos algunas propiedades de las superficies minimales con frontera. Iniciamos con las siguientes definiciones.

Definición 5.20. *Sea S una superficie minimal definida por la función $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, los valores en la frontera de S son el conjunto de puntos de la forma $\lim_{k\to\infty} \mathcal{X}(p_k)$ para cada sucesión divergente $\{p_k\}$ en $\mathcal{M}$.*

Observación 5.5. *Si $\mathcal{M}$ es un dominio acotado en el plano, entonces una sucesión $\{p_k\}$ en $\mathcal{M}$ es divergente si y sólo si tiende a su frontera $\partial(\mathcal{M})$. Si $\mathcal{X}$ se extiende, a una función continua, a $\overline{\mathcal{M}}$, entonces los valores en la frontera de S son la imagen de la frontera de $\mathcal{M}$.*

Recordemos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera en A, el segmento que los une se queda contenido en A, esto es, para cada $x_1, x_2 \in A$ y para cada $t \in [0, 1]$ se tiene

$$(1 - t)x_1 + tx_2 \in A.$$

De manera general, tenemos que la intersección arbitraria de subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo, mientras que la unión no necesariamente lo es. De esta manera, existe un método para generar conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$. Para ello, sea $Y \subseteq \mathbb{R}^n$; la envolvente convexa, $\mathrm{Conv}(Y)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$

que contienen a Y. Teniendo esto en cuenta, obtendremos el resultado correspondiente para superficies minimales.

Antes de pasar a dicho resultado, recordemos que un hiperplano L se puede pensar como una subvariedad de dimensión $n-1$ en un espacio de dimensión n. En símbolos, este se puede describir con una ecuación lineal de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = b,$$

donde $a_k, b \in \mathbb{R}$ para cada k, o bien en su notación de conjunto

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x = b\}, \text{ en donde } a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dado un hiperplano L, decimos que un par de puntos son ***simétricos*** con respecto a L si L es la mediatriz del segmento de línea que une estos puntos. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único $x_L \in \mathbb{R}^n$ tal que x y x_L son simétricos con respecto a L, en tal caso diremos que x_L es la reflexión de x con respecto a L. Más aún, diremos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es simétrico con respecto al hiperplano L si $A_L = A$, donde $A_L = \{x_L : x \in A\}$ (ver Figura 5.3). Finalmente, denotamos por $L^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x > b\}$, geométricamente, lo anterior representa un semiespacio abierto tal que $\partial(L^+) = L$.

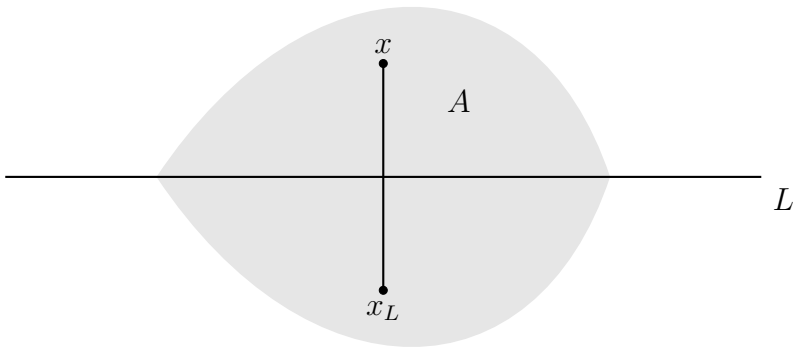


Figura 5.3: A es simétrico con respecto a L

Lema 5.5. *Cada superficie minimal se encuentra en la envolvente convexa de los valores en la frontera.*

Demostración. Sea S una superficie minimal definida por $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que los valores en la frontera de S se encuentran en el semiespacio

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k - b \leq 0.$$

Como cada función coordenada de la función $\mathcal{X}$ es armónica, tenemos que la función $h : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(p) = L(\mathcal{X}(p))$ es armónica en $\mathcal{M}$. Así, por el principio del máximo

para funciones armónicas, se tiene $h(p) \leq 0$ en $\mathcal{M}$. De modo que por el axioma del supremo existe $m = \sup h(p)$, de esta manera podemos elegir una sucesión de puntos $\{p_k\}$ tal que $h(p_k) \to m$ cuando $k \to \infty$. Si la sucesión $\{p_k\}$ tiene un punto de acumulación en $\mathcal{M}$ entonces $h(p)$ alcanza su máximo en ese punto, por tanto sería constante. Pero eligiendo $\{q_k\}$ una sucesión divergente tenemos de la continuidad de h, que $h(q_k) = m$ para cada k y además $\overline{\lim} h(q_k) \leq 0$, por lo que $m \leq 0$.

Por otro lado, si $\{p_k\}$ es divergente, entonces $m = \lim h(p_k) \leq 0$. De esta manera $L(\mathcal{X}(p)) \leq 0$ para cada $p \in \mathcal{M}$, así S se encuentra en el semiespacio $L(x) \leq 0$. Pero la envolvente convexa de los valores frontera es la intersección de todos los semiespacios que los contienen, y S se encuentra en esta intersección. ■

Lema 5.6. *Sea S una superficie minimal definida por X con parámetros isotérmicos (u_1, u_2) definida en un dominio plano $\mathcal{D}$. Entonces X no puede ser constante a lo largo de cualquier segmento de recta en $\mathcal{D}$.*

Demostración. Dado que la función $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva en la vecindad de un punto regular y como los puntos de ramificación, si los hay, son aislados. ■

El siguiente teorema es de suma importancia en la demostración del Lema 5.7 cuya demostración puede ser consultada en [2, Cap.4, pp.67-70].

Teorema 5.2 (**Principio de Reflexión para Funciones Armónicas**)**.** *Supongamos que A es simétrico con respecto a un hiperplano L. Si u es continua en $A \cap \overline{L^+}$, u es armónica en $A \cap L^+$, y $u = 0$ en $A \cap L$, entonces u se extiende a una función armónica sobre A.*

Lema 5.7 (**Principio de Reflexión**)**.** *Sea $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una superficie minimal con parámetros isotérmicos definidos en un semidisco $\mathcal{D} = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_2 > 0, |u| < \epsilon\}$. Supongamos que existe una recta L en el espacio tal que $X(u) \to L$, cuando $u_2 \to 0$. Entonces $X(u)$ se puede extender a una superficie minimal generalizada definida en el disco completo $|u| < \epsilon$. Además, la superficie resultante es simétrica con respecto a L.*

Demostración. Mediante una rotación en $\mathbb{R}^n$ podemos suponer que L está representada por las ecuaciones $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Extendemos las funciones $x_k(u)$ para $k = 1, \ldots, n-1$ mediante la reflexión sobre el eje real definiéndolas como $x_k(u_1, 0) = 0$, $x_k(u_1, u_2) = -x_k(u_1, -u_2)$ estas funciones son armónicas en todo el disco, esto por el Teorema 5.2. Por lo que, en virtud de la propiedad 1 vista en el Capítulo 3, las funciones

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2},\ k = 1, \ldots, n-1,$$

son analíticas en todo el disco. Además, por como extendimos a las funciones $x_k(u)$ para $k = 1, \ldots, n-1$ son puramente imaginarias en el eje real.

Ya que $X(u)$ está parametrizada en términos de parámetros isotérmicos tenemos que se satisface (3.9), y de esta manera

$$\phi_n^2 = -\sum_{k=1}^{n-1} \phi_k^2.$$

Así, tenemos que ϕ_n^2 se puede extender de forma continua al eje real y como la suma del cuadrado de las funciones ϕ_k es no negativa o cero, se deduce que ϕ_n^2 toma valores no negativos en el eje real, se sigue que ϕ_n se extiende de forma continua y toma valores reales en el eje real.

Como $\dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} = 0$ en el eje real, integrando con respecto a u_2 tendremos que x_n es constante. Así, se extiende de manera continua al eje real. Por tanto, si definimos $x_n(u_1, u_2) = x_n(u_1, -u_2)$ en el semidisco inferior (cuando $u_2 < 0$), garantizamos que la función x_n sea continua en todo el disco $|u| < \epsilon$, de esta manera se obtiene el resultado. ■

Lema 5.8. *Sea $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una superficie minimal con parámetros isotérmicos definida en un disco $\mathcal{D}$. Entonces, X no puede tender a un solo punto a lo largo de ningún arco de la fontera de $\mathcal{D}$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que X tiende a un solo punto a la largo de cualquier arco en la frontera de $\mathcal{D}$. Así, mediante una traslación seguida de una homotecía podemos transformar al disco $\mathcal{D}$ en el disco unitario $|u| < 1$, luego este puede transformarse en el semiplano superior mediante la transformación $u \mapsto \frac{u-i}{u+i}$, que es una transformación de Möbius, y por tanto es conforme. Ahora, por el Lema 5.7, al extender la superficie sobre un segmento del eje real, se deduce que sería constante en este segmento, contradiciendo el Lema 5.6. ■

A continuación enunciamos el teorema fundamental de existencia relativo a la existencia de una superficie minimal con una frontera predeterminada.

Teorema 5.3 (**Douglas**). *Sea Γ una curva de Jordan en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una superficie minimal generalizada simplemente conexa acotada por Γ.*

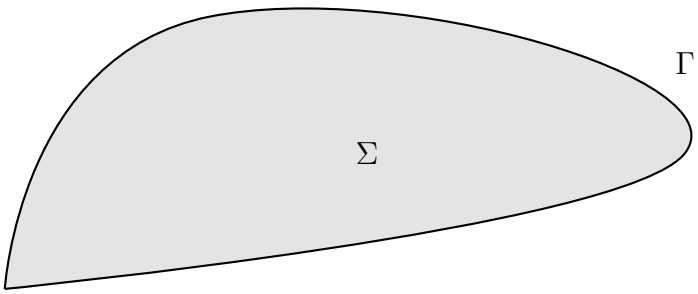


Figura 5.4: Curva cerrada simple Γ y la superficie acotada Σ.

En este trabajo solo damos un esbozo de la prueba de este importante resultado. Al lector interesado en conocer con profundidad la teoría necesaria para abordarlo, recomendamos [5]. O bien, si se requiere un breve resumen, se recomienda [18, §7, pp.55-58], dicho lo anterior, consideremos a $B_1(0) = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 < 1\}$, el disco unitario abierto. El resultado nos dice que existe una función $X : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que:

(i) X es continua en $\overline{B_1(0)}$.

(ii) $X|_{B_1(0)}$ es una superficie minimal.

(iii) $X|_{\mathrm{Fr}(B_1(0)}$ es un homemorfismo sobre Γ.

Esta función se obtiene a partir del cálculo variacional, en particular, del método de minimizar la integral de Dirichlet. Para cada función $X : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1, denotamos por

$$\mathfrak{D}(X) = \int\int_{B_1(0)} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 \right] \, du_1 du_2,$$

su integral de Dirichlet. Para identificar una clase adecuada de funciones en las que la integral de Dirichlet alcance un mínimo, consideramos funciones monótonas de $\mathrm{Fr}(B_1(0))$ sobre Γ, es decir, funciones tales que si $\mathrm{Fr}(B_1(0))$ se recorre una vez en la dirección positiva, entonces Γ se recorre una vez también en una dirección dada, aunque permitimos que los arcos de $\mathcal{C}$ se transformen en algún punto de Γ.

Dada una curva de Jordan, Γ, le asociamos la clase $\mathcal{H}$ de funciones $X : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(i) X es continua en $\overline{B_1(0)}$.

(ii) $X \in C^1(B_1(0))$.

(iii) $\mathfrak{D}(X) < \infty$.

(iv) $X|_{\mathrm{Fr}(B_1(0)}$ es una función monótona sobre Γ.

Puede ser que $\mathcal{H} = \emptyset$, sin embargo hacemos las siguientes afirmaciones:

1. Si Γ es diferenciable a trozos (en particular Γ podría ser un polígono), o si Γ es incluso rectificable (esto es, que podemos calcular su longitud de arco), entonces $\mathcal{H} \neq \emptyset$.
2. Siempre que $\mathcal{H} \neq \emptyset$ existe una función $Y \in \mathcal{H}$ tal que $\mathfrak{D}(Y) \leq \mathfrak{D}(X)$ para cada $X \in \mathcal{H}$.
3. La función Y satisface las condiciones (i), (ii), (iii) dadas anteriormente.

Para concluir con el esbozo de la prueba del Teorema 5.3, se afirma que si Γ es una curva de Jordan, esta se puede aproximar mediante una sucesión de polígonos, y de esta manera, la sucesión de superficies minimales tenderá a una superficie que satisface (i), (ii) y (iii).

En lo que sigue proporcionaremos información sobre los casos en los que la superficie construida en el Teorema 5.1 es regular, pero antes de eso, es importante hacer otro comentario acerca del Teorema 5.1 que es en si un problema que hasta el día de hoy sigue sin resolverse y que es la forma en que originalmente se concibió el problema de Plateau, a saber, si existe una superficie minimal simplemente conexa regular que tenga como frontera una curva de Jordan Γ dada.

Lema 5.9. *Sea $h(u_1, u_2)$ una función armónica no constante en el disco unitario $B_1(0)$ y continua en $\overline{B_1(0)}$. Supongamos que el gradiente de h se anula en el punto $(a_1, a_2) \in B_1(0)$. Entonces, si $h(a_1, a_2) = b$, existen cuatro puntos distintos en la frontera de $B_1(0)$, donde h toma el valor de b.*

Demostración. Sea Δ una componente del conjunto de puntos en $\overline{B_1(0)}$ donde $h > b$. Entonces, en los puntos de la frontera de Δ que están en $B_1(0)$ se tiene que $h = b$.

Ya que $h \neq b$, cada componente Δ debe tener puntos frontera en $\mathrm{Fr}(B_1(0))$ con $h > b$. De manera similar, para cada componente del conjunto de puntos en $\overline{B_1(0)}$ donde $h < b$.

Sea $\mathcal{V}$ vecindad del punto crítico $(a_1, a_2) \in B_1(0)$, se tiene que hay al menos dos componentes distintas donde $h > b$ y dos donde $h < b$. Si las anteriores fueran parte de una única componente Δ en el cual $h > b$, podríamos encontrar un arco que las una, el cual podría completarse formando una curva de Jordan en $B_1(0)$ que pase través del punto (a_1, a_2), así, por el Teorema de la Curva de Jordan tendríamos que esta curva encerraría un dominio en el cual $h < b$, lo anterior contradice nuestra conclusión previa de que tal dominio debe llegar a la frontera de $B_1(0)$.

Por lo que, hay al menos dos componentes distintas donde $h > b$ y dos donde $h < b$, y donde cada una de estas intersecta a la frontera en los puntos donde $h \neq b$. Pero si hubiera a lo más tres puntos en la frontera donde $h = b$, habría a lo más tres arcos en los cuales $h > b$ o $h < b$, y por tanto a lo más tres componentes donde $h > b$ y $h < b$, lo cual contradice lo que hemos demostrado. ■

Lema 5.10. *Sean Γ una curva de Jordan en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una superfice minimal generalizada simplemente conexa acotada por Γ en el sentido establecido en el Teorema 5.1. Entonces, $\mathcal{X}$ es una superficie minimal regular o se tiene que Γ posee la propiedad de que para algún punto $p \in \mathbb{R}^n$, cualquier hiperplano intersecta a Γ en al menos cuatro puntos distintos.*

Demostración. En virtud del Teorema 5.3, existe una función $X : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que X es continua en $\overline{B_1(0)}$ y además define una superficie minimal generalizada en $B_1(0)$. Supongamos que para $(a_1, a_2) \in B_1(0)$, X no es regular, entonces en este punto tenemos que las funciones

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

se anulan.

Sea $L(x) = \sum a_k x_k + c = 0$ un hiperplano que pasa por $X(a_1, a_2)$, entonces la función $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la composición $h(u_1, u_2) = L(X(a_1, a_2))$, satisface las hipótesis del Lema 5.9 cuando $b = 0$. Se tiene entonces, que hay al menos cuatro puntos distintos en Γ que cumplen que $h(u_1, u_2) = 0$, o lo que es lo mismo, $L(X(u)) = 0$, con esto concluimos el resultado. ■

Teorema 5.4. *Sean $\mathcal{D}_1$ un dominio convexo acotado en el plano x_1, x_2, $C_1 = \mathrm{Fr}(\mathcal{D}_1)$ y $g_k(x_1, x_2)$, $k = 3, \ldots, n$ funciones continuas en C_1. Entonces existe una solución*

$$f(x_1, x_2) = (f_3(x_1, x_2), \ldots, f_n(x_1, x_2))$$

de la ecuación de las superficies minimales (1.43) en $\mathcal{D}_1$, tal que $f_k(x_1, x_2)$ coincide con los valores de $g_k(x_1, x_2)$, $k = 3, \ldots, n$ en la frontera C_1.

Demostración. Tenemos $\mathrm{Fr}(\mathcal{D}_1) = C_1$ es una curva de Jordan y las funciones $g_k(x_1, x_2)$ definen una curva de Jordan Γ en $\mathbb{R}^n$ que se proyecta sobre C_1 en el plano x_1,x_2. Por el Teorema 5.3, tenemos que existe una función continua $X : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\overline{B_1(0)}$ es el disco unitario $|u| \leq 1$, y además define una superficie minimal en $B_1(0)$, esto es, en $|u| < 1$, también se tiene que $\mathrm{Fr}(B_1(0)) \cong \Gamma$. Se sigue que la función $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$ es una función continua sobre $\overline{B_1(0)}$, que es armónica sobre $B_1(0)$ y es un homeomorfismo entre $\mathrm{Fr}(B_1(0))$ y C_1. Ahora, por el Lema 5.5 se tiene que $X(B_1(0)) \subseteq \mathcal{D}_1$. Notese que el Jacobiano nunca se anula en $B_1(0)$, pues si en algún punto $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$ el Jacobiano se anula, las filas de la matriz correspondiente son linealmente dependientes, esto implica que para constantes adecuadas λ_1, λ_2 se tiene que

$$\lambda_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = 0$$

$$\lambda_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \lambda_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = 0.$$

Entonces, la función $h(u_1, u_2) = \lambda_1 x_(u_1, u_2) + \lambda_2 x_2(u_1, u_2)$ satisface las hipótesis del Lema 5.9, y con esto obtenemos que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ toma el mismo valor en cuatro puntos distintos de C_1, lo cual no es posible por la convexidad de $\mathcal{D}_1$.

Concluimos que la función $(u_1, u_2) \longrightarrow (x_1, x_2)$ es un difeomorfismo local en $B_1(0)$, y como este es un homeomorfismo entre $\mathrm{Fr}(B_1(0))$ y C_1 entonces es un difeomorfismo global de $B_1(0)$ sobre $\mathcal{D}_1$. De esta forma podemos expresar x_k, $k = 3, \ldots, n$ como funciones de x_1, x_2 que cumplen la conclusión del teorema. ■

El teorema precedente nos facilita abordar dos nuevos resultados relacionado con las soluciones de la ecuación de las superficies minimales (1.49) tal como se analizó en §1.4 del Capítulo 1. El primer resultado trata el hecho de que una solución de (1.49) no puede presentar singularidades aisladas, mientras que el segundo resultado explica el comportamiento de las soluciones de esta ecuación diferencial en dominios convexos en el plano.

Teorema 5.5. *Una solución de la ecuación de las superficies minimales (1.49) no puede tener singularidades aisladas.*

Demostración. Sea $F(x_1, x_2)$ una solución de (1.49) en el disco agujerado $0 < r < \epsilon$. Mostraremos que $F(x_1, x_2)$ puede extenderse de manera continua al origen, de tal manera que la superficie resultante $x_3 = F(x_1, x_2)$ es una superficie minimal en todo el disco $r < \epsilon$.

Sean $r_2 > 0$ tal que $0 < r_2 < \epsilon$, y $M = \max |F(x_1, x_2)|$ para $x_1^2 + x_2^2 = r_2^2$, por el Teorema 1.1 tenemos que $|F(x_1, x_2)| \leq M$ para $0 < x_1^2 + x_2^2 < r_2^2$. Luego, de acuerdo con el Teorema 5.4, existe una función continua $\widetilde{F}(x_1, x_2)$ definida en el disco $r \leq r_2$, que satisface (1.49) en $r < r_2$, y que además toma los mismos valores que F para $r = r_2$. Entonces $\left|\widetilde{F}\right| \leq M$ para $r \leq r_2$. De esta manera, debemos de probar que $\widetilde{F} = F$ en $0 < r < r_2$, y por tanto, $\widetilde{F}$ corresponderá a la extensión deseada de la solución F. Para ello recordemos la notación

(1.47) introducida §1.4 del Capítulo 1, tomando:

$$W = \sqrt{1+p^2+q^2},\ \ p = \frac{\partial F}{\partial x_1},\ \ q = \frac{\partial F}{\partial x_2},$$

de esta manera la ecuación (1.49) puede ser escrita como

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0, \tag{5.10.1}$$

donde

$$\phi = \frac{p}{W}, \qquad \psi = \frac{q}{W}, \tag{5.10.2}$$

como puede observarse a continuación,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p}{W}\right) \\
&= \frac{\frac{\partial p}{\partial x_1}W - \frac{\partial W}{\partial x_1}p}{W^2} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)W - \left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(1+\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)\right]p}{W^2} \\
&= \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}W - \left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\right]p}{W^2} \\
&= \frac{rW - \left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2pr+2qs\right)\right]p}{W^2} \\
&= \frac{rW - \left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2pr+2qs\right)\right]p}{W^2},
\end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{q}{W}\right) \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)W - \frac{\partial W}{\partial x_2}q}{W^2} \\
&= \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}W - \left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(1+\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2\right)\right)\right]q}{W^2} \\
&= \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}W - \left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}+2\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\right)\right]q}{W^2} \\
&= \frac{tW - \left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2ps+2qt\right)\right]q}{W^2},
\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x_1}+\frac{\partial \psi}{\partial x_2} &= \frac{rW-\left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2pr+2qs)\right]p}{W^2}+ \\
&\quad \frac{tW-\left[\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2ps+2qt)\right]q}{W^2} \\
&= \frac{(r+t)W-\frac{1}{2}\left(1+p^2+q^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[(2pr+2qs)p+(2ps+2qt)q\right]}{W^2} \\
&= \frac{r+t}{W}-\frac{(pr+qs)p+(ps+qt)q}{W^3} \\
&= \frac{W^3(r+t)-\left(p^2r+pqs+psq+q^2t\right)W}{W^4} \\
&= \frac{W^2(r+t)-\left(p^2r+pqs+psq+q^2t\right)}{W^3} \\
&= \frac{\left(1+p^2+q^2\right)(r+t)-\left(p^2r+pqs+psq+q^2t\right)}{W^3} \\
&= \frac{r+t+p^2r+q^2r+p^2t+q^2t-p^2r-pqs-psq-q^2t}{W^3} \\
&= \frac{r+t+p^2r+q^2r+p^2t+q^2t-p^2r-pqs-psq-q^2t}{W^3} \\
&= \frac{r+t+q^2r+p^2t-2pqs}{W^3} \\
&= \frac{\left(1+q^2\right)r-2pqs+\left(1+p^2\right)t}{W^3},
\end{aligned}$$

ahora si igualamos con cero

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}+\frac{\partial \psi}{\partial x_2}=0,$$

y del hecho de que $W \geq 1$ se sigue que $W^3 \neq 0$ por tanto obtenemos:

$$\left(1+q^2\right)r-2pqs+\left(1+p^2\right)t=0$$

como lo afirmamos anteriormente.

Consideremos la diferencia de las funciones F y $\widetilde{F}$ en anillo $\mathcal{D}_\lambda : \lambda < r < r_2$, si tomamos a C_λ como el círculo $r=\lambda$ y en virtud de que $F-\widetilde{F}=0$ en el círculo $r=r_2$, tenemos por el Teorema de Green (ver [9, Cap.1, §1.7, p.50]) aplicado al dominio $\mathcal{D}_\lambda$ lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_{C_\lambda}(F-\widetilde{F}(\phi-\widetilde{\phi})dx_2-(F-\widetilde{F})(\psi-\widetilde{\psi})dx_1 &= \int_{C_\lambda}(F-\widetilde{F})\left[(\phi-\widetilde{\phi})dx_2-(\psi-\widetilde{\psi})dx_1\right] \\
&= \iint_{\mathcal{D}_\lambda}\frac{\partial}{\partial x_1}(F-\widetilde{F})(\phi-\widetilde{\phi}) \\
&\quad +\iint_{\mathcal{D}_\lambda}\frac{\partial}{\partial x_2}(F-\widetilde{F})(\psi-\widetilde{\psi}).
\end{aligned}$$

Dado que $F-\widetilde{F}=0$ en el círculo $r=r_2$ se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(F-\tilde{F}\right)\left(\phi-\tilde{\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(F-\tilde{F}\right)\left(\psi-\tilde{\psi}\right)\\
=\;&\left(F-\tilde{F}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\phi-\tilde{\phi}\right)+\left(\phi-\tilde{\phi}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(F-\tilde{F}\right)\\
&+\left(F-\tilde{F}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\psi-\tilde{\psi}\right)+\left(\psi-\tilde{\psi}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(F-\tilde{F}\right)\\
=\;&\left(F-\tilde{F}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_1}\right)+\left(\phi-\tilde{\phi}\right)(p-\tilde{p})\\
&+\left(F-\tilde{F}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_2}\right)+\left(\psi-\tilde{\psi}\right)(q-\tilde{q})\\
=\;&\left(\phi-\tilde{\phi}\right)(p-\tilde{p})+\left(\psi-\tilde{\psi}\right)(q-\tilde{q})\,.
\end{aligned}$$

De esta manera, aplicando (5.10.1) se tiene que

$$\int_{C_\lambda}(F-\widetilde{F}(\phi-\widetilde{\phi})dx_2-(F-\widetilde{F})(\psi-\widetilde{\psi})dx_1=\iint_{\mathcal{D}_\lambda}\left(\phi-\tilde{\phi}\right)(p-\tilde{p})+\left(\psi-\tilde{\psi}\right)(q-\tilde{q})\,dx_1dx_2, \tag{5.10.3}$$

Ahora, de (5.10.2) $\phi=\frac{p}{W}$ y de la definición de W se sigue que $\phi^2+\psi^2<1$, y de manera similar $\widetilde{\phi}^2+\widetilde{\psi}^2<1$. Dado que $\left|F-\widetilde{F}\right|\leq 2M$, se deduce que el lado izquierdo de (5.10.3) tiende a cero cuando $\lambda\to 0$. Pero el integrando de la derecha es no negativo, esto, en virtud del Lema 4.1 aplicado a la función $E(p,q)=\sqrt{1+p^2+q^2}$. Por otro lado, considerando a p y q como variables independeintes tenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial p}&=\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{1+p^2+q^2}\\
&=\frac{1}{2}(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}(2p)\\
&=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\\
&=\frac{p}{W}=\phi,
\end{aligned}$$

y de manera similar

$$\frac{\partial E}{\partial q}=\frac{q}{W}=\psi.$$

De esta manera el integrando a la derecha de (5.10.3) se reduce a la expresión

$$(p-\widetilde{p})\cdot(q-\widetilde{q})>0.$$

Entonces, si $(p-\widetilde{p})^2+(q-\widetilde{q})^2\neq 0$ en algún punto, se deduce que el integrando de la derecha de (5.10.3) es positivo en algún punto, por tanto en una vecindad de ese punto, de esta manera se deduce que el integrando no puede tender a cero cuando $\lambda\to 0$. Entonces, podemos concluir de esta manera que $p-\widetilde{p}\equiv 0$, $q-\widetilde{q}\equiv 0$, para $0<r<r_1$, y por tanto que $F-\widetilde{F}\equiv 0$, lo cual muestra el teorema. ■

Teorema 5.6. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio acotado en el plano. Para que exista una solución de la ecuación de las superficies minimales (1.49) en $\mathcal{D}$ que tome valores continuos arbitrariamente asignados en la frontera de $\mathcal{D}$. Es necesario y suficiente que $\mathcal{D}$ sea convexo.*

Demostración. Para la necesidad, supongamos por el contrario que $\mathcal{D}$ no es convexo, por el Lema 1.9, existe un punto de concavidad P en la frontera de $\mathcal{D}$, y por tanto, una vecindad de P. Si elegimos valores en la frontera suficientemente grandes en tal vecindad de P y pequeños fuera de esta vecindad, entonces no puede existir ninguna solución de (1.49) en virtud de la desigualdad (1.60).

Por otro lado, supongamos que $\mathcal{D}$ es convexo, por el Teorema 5.4, tenemos que existe una solución de (1.49) F en $\mathcal{D}$ tal que F toma valores continuos en la frontera de $\mathcal{D}$. ■

§5.2.

Representación de Enneper y Weierstrass de una superficie minimal en $\mathbb{R}^3$

Durante el siglo XIX, aparecieron numerosos descubrimientos y publicaciones gracias a los trabajos de matemáticos como Catalán, Bonnet, Serret, Riemann, Weierstrass, Enneper, Schwarz, entre otros. Desde el punto de vista de la teoría moderna, los trabajos de Weierstrass y Enneper son particularmente importantes, ya que introdujeron la denominada representación de Enneper-Weierstrass para superficies minimales. Esta representación establece una estrecha relación entre la teoría de superficies minimales y el análisis complejo, permitiendo un avance significativo en la comprensión y estudio de estas superficies.

En todo lo que hemos hecho hasta ahora, o no hay diferencia en absoluto, o bien hay muy poca diferencia, entre el caso clásico de tres dimensiones y el caso de n dimensiones con $n > 3$. Ahora discutiremos varios resultados que o bien no han sido extendidos para un n arbitrario, o bien requieren una discusión mucho más elaborada para hacerlo.

Comenzamos con la importante observación de que para el caso $n = 3$ somos capaces de describir explícitamente todas las soluciones de la ecuación

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \tag{5.11}$$

Lema 5.11. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio en el plano complejo ζ, $g(\zeta)$ una función meromorfa en $\mathcal{D}$ y $f(\zeta)$ analítica en $\mathcal{D}$, que tiene la propiedad de que en cada punto donde $g(\zeta)$ tiene un polo de orden m, $f(\zeta)$ tiene un cero de orden al menos $2m$. Entonces las funciones*

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2), \;\; \phi_2 = \frac{i}{2} f(1 + g^2), \;\; \phi_3 = fg, \tag{5.12}$$

son analíticas en $\mathcal{D}$ y satisfacen (5.11). Recíprocamente, cada tripleta de funciones analíticas en $\mathcal{D}$ que satisfagan (5.11) pueden respresentarse de la forma (5.12), excepto cuando $\phi_1 \equiv i\phi_2$, $\phi_3 \equiv 0$.

Demostración. Sean f y g como en el enunciado del lema, si g tiene un polo de orden $m \geq 1$ en $\zeta_0 \in \mathcal{D}$, y f tiene un cero de orden $n \geq 2m$ en $\zeta_0 \in \mathcal{D}$, entonces las expansiones en

series de Laurent y de Taylor para g y f alrededor de ζ_0 respectivamente, son de la forma

$$g(\zeta) = \frac{b}{(\zeta-\zeta_0)^m} + \cdots, \text{ y } f(\zeta) = a(\zeta-\zeta_0)^n + \cdots,$$

donde $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y donde $\cdots$ indica términos que involucran las potencias de $\zeta - \zeta_0$. Entonces

$$f(1 \pm g^2) = \pm ab^2(\zeta-\zeta_0)^{n-2m} + \cdots, \text{ y } fg = ab(\zeta-\zeta_0)^{n-m} + \cdots,$$

tales expresiones solo involucran potencias no negativas de $\zeta - \zeta_0$, de esta forma las funciones ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 son analíticas en una vecindad de ζ_0, al ser este arbitrario son analíticas en $\mathcal{D}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\phi_1^2 &= \left(\frac{1}{2}f(1-g^2)\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}f^2\left(1-g^2\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(f^2 - 2f^2g^2 + f^2g^4\right) \\
&= \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 + \frac{1}{4}f^2g^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2^2 &= \left(\frac{i}{2}f(1+g^2)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}f^2(1+g^2)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(f^2 + 2f^2g^2 + f^2g^4) \\
&= -\frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 - \frac{1}{4}f^2g^4,
\end{aligned}$$

y

$$\phi_3^2 = f^2g^2.$$

De esta manera

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 + \frac{1}{4}f^2g^4 - \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 - \frac{1}{4}f^2g^4 + f^2g^2 = 0.$$

Ahora, dada cualquier solución de (5.11) consideramos las funciones

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \;\; g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \tag{5.13}$$

Escribiendo a (5.11) de la siguiente manera

$$(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = \phi_1^2 + \phi_2^2 = -\phi_3^2 \tag{5.14}$$

se obtiene

$$\phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2. \tag{5.15}$$

Finalmente, observemos que de (5.13) y (5.15) obtendremos (5.12) como sigue

$$\begin{aligned} -fg^2 &= -\frac{\phi_3^2}{f} \\ -f^2g^2 &= -\phi_3^2 \\ fg &= \phi_3, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} \phi_1 + i\phi_2 &= -fg^2 \\ 2\phi_1 - \phi_1 + i\phi_2 &= -fg^2 \\ 2\phi_1 - f &= -fg^2 \\ \phi_1 &= \frac{1}{2}f(1-g^2), \end{aligned}$$

despejando a $i\phi_2$ de la ecuación $\phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$ se deduce

$$\begin{aligned} \phi_1 + fg^2 &= -i\phi_2 \\ \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}fg^2 + fg^2 &= -i\phi_2 \\ \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}fg^2 &= -i\phi_2 \\ \frac{i}{2}f(1+g^2) &= \phi_2. \end{aligned}$$

La hipótesis que relaciona los ceros de f y los polos de g en efecto se cumple pues de otra manera por (5.15), $\phi_1 + i\phi_2$ no sería analítica, lo anterior solo puede fallar si en $g = \dfrac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$ ocurriera que $\phi_1 - i\phi_2 = 0$, lo cual nos diría que $\phi_3 = 0$, el caso excepcional al que nos referimos en el enunciado (o bien puede utilizarse el argumento empleando anteriormente con las series de Taylor y Laurent de f y g). ■

Lema 5.12. *Toda superficie minimal simplemente conexa en $\mathbb{R}^3$ puede ser representada como*

$$x_k = \operatorname{Re}\left\{\int_0^\zeta \phi_k(z)dz\right\} + c_k, \;\; k = 1, 2, 3. \tag{5.16}$$

Donde ϕ_k están definidas como en (5.12), las funciones f y g satisfacen las hipótesis del Lema 5.11, el dominio $\mathcal{D}$ es todo el plano o el disco unitario y donde la integral se toma a lo largo de una trayectoria desde el origen hasta el punto ζ. Además, la superficie será regular si y sólo si f satisface la propiedad adicional de que se anula solo en los polos de g, y el orden de su cero es exactamente el doble del orden del polo de g.

Demostración. Por el Lema 5.4, la superficie S puede ser representada como $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\mathcal{D}$ es el disco unitario o todo el plano complejo ζ. Por otro lado, por el Lema 3.2, las funciones coordenadas x_k son armónicas en la variable ζ. De esta manera, si consideramos las funciones

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2}, \ \ \zeta = \xi_1 + i\xi_2,$$

por la propiedad 1 vista en el Capítulo 3 son analíticas y además, satisfacen (5.16) por lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{\int_0^\zeta \phi_k d\zeta\right\} + c_k &= \mathrm{Re}\left\{\int_0^\zeta \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} dz\right\} + c_k \\ &= \int_0^\zeta \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} dz + c_k \\ &= x_k(\zeta), \end{aligned}$$

donde por ser $\mathcal{D}$ simplemente conexo y en compañía del Teorema de Cauchy, la integral de arriba es independiente de la trayectoria elegida. Ahora, por la Definición 5.13, tenemos que una superficie minimal generalizada debe satisface la ecuación (5.11) y por el Lema 5.11, tenemos que se representan como en (5.12). Finalmente, notese que la superficie S no será regular si y sólo si cada ϕ_k se anula simultáneamente, lo cual sucede si $f = 0$ excepto en los polos de g regular o cuando $fg^2 = 0$ donde g tiene un polo. ■

Definición 5.21. *Cuando la parte real de la integral a lo largo de cualquier curva de ϕ_k es cero, diremos que ϕ_k no tiene períodos reales.*

Observación 5.6. *La no existencia de períodos reales de ϕ_k es equivalente a que la integral en (5.16) sea independiente de la trayectoria tomada en S.*

Definición 5.22. *Las representaciones dadas en (5.12) y (5.16) son llamadas la representación de Enneper y Weierstrass de una superficie minimal en $\mathbb{R}^3$, respectivamente.*

Eventualmente nos referimos a las representaciones dadas en la Definición 5.22 como la representación de Enneper-Weierstrass. Esta representación desempeña un papel fundamental en la teoría de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$. En particular, nos permite construir una gran variedad de superficies minimales con propiedades interesantes. Por ejemplo, las superficies (1.44),(1.45), (1.46) y (3.11.1) que ya hemos analizado, y un nuevo ejemplo que veremos en las siguientes páginas, y, por otro lado, obtener conclusiones acerca de la curvatura Gaussiana de una superficie minimal como se verá en §5.4.

Más importante aún, la representación de Enneper-Weierstrass nos permite obtener teoremas generales sobre superficies minimales al traducir los enunciados en enunciados correspondientes sobre funciones analíticas. Para hacer esto, primero debemos expresar las cantidades geométricas básicas asociadas con la superficie en términos de las funciones f y g, como lo veremos en las secciones §5.3 y §5.4.

Representación de Enneper-Weierstrass de la Helicoide

En $\mathbb{C}$ consideremos $g(z) = -ie^z$ y $f(z) = e^{-z}$, notemos que ni g tiene polos ni f tiene ceros en $\mathbb{C}$, luego de (5.12) tenemos que

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}e^{-z}\left(1-(-ie^z)^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^z+e^{-z}\right)\\ &= \cosh(z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{i}{2}e^{-z}\left(1+(-ie^z)^2\right)\\ &= \frac{i}{2}\left(e^{-z}-e^z\right)\\ &= -i\sinh(z),\end{aligned}$$

y

$$\phi_3 = -i$$

Como $\sinh(z)$, $\cosh(z)$ y la multiplicación por constantes son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$, tenemos por el Teorema de Cauchy que para cualquier curva cerrada γ en $\mathbb{C}$

$$\int_\gamma \phi_k(z)\,dz = 0,$$

para $k = 1, 2, 3$. Lo cual nos dice que las funciones ϕ_k no tienen períodos reales. Ahora de (5.16) se tiene que si $z = u_1 + iu_2$

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \cosh(z)\,dz\right\}\\ &= \operatorname{Re}\{\sinh(z)\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{u_1}(\cos(u_2)+i\sin(u_2))-e^{-u_1}(\cos(u_2)-i\sin(u_2))}{2}\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{u_1}\cos(u_2)-e^{-u_1}\cos(u_2)}{2}+i\left(\frac{e^{u_1}\sin(u_2)+e^{u_1}\sin(u_2)}{2}\right)\right\}\\ &= \frac{e^{u_1}\cos(u_2)-e^{-u_1}\cos(u_2)}{2}\\ &= \cos(u_2)\frac{e^{u_1}-e^{-u_1}}{2}\\ &= \cos(u_2)\sinh(u_1),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z -i\sinh(z)\,dz\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i\cosh(z)+i\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i\frac{e^z+e^{-z}}{2}+i\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-i\left(\frac{e^{u_1}(\cos(u_2)+i\sin(u_2))+e^{-u_1}(\cos(u_2)-i\sin(u_2))}{2}\right)+i\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{u_1}(\sin(u_2)-e^{-u_1}\sin(u_2))}{2}+i\left(1-\frac{e^{u_1}(\cos(u_2)+e^{-u_1}\cos(u_2))}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{e^{u_1}(\sin(u_2)-e^{-u_1}\sin(u_2))}{2} \\
&= \sin(u_2)\frac{e^{u_1}-e^{-u_1}}{2} \\
&= \sin(u_2)\sinh(u_1),
\end{aligned}
$$

y finalmente,

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z -i\,dz\right\} \\
&= \operatorname{Re}\{-iz\} = u_2.
\end{aligned}
$$

De esta manera obtenemos la parametrización

$$X(u_1,u_2)=(\cos(u_2)\sinh(u_1),\sin(u_2)\sinh(u_1),u_2)$$

por lo que si consideramos a $t=\sinh(u_1)$ se tiene

$$X(u_1,u_2)=(t\cos(u_2),t\sin(u_2),u_2)$$

como se analizó en el Capítulo 3.

A continuación, presentamos la representación de Enneper-Weierstrass de la Catenoide. Esta representación puede derivarse a través de dos enfoques distintos. La primera, que es la más conocida y utilizada en la literatura, se desarrolla a continuación con un análisis detallado. La segunda, aunque parte de una idea similar, introduce ligeras diferencias en el dominio de definición de las funciones f y g (por tanto, en la definición de las mismas). Esta última también se aborda de manera exhaustiva, y, más adelante, al término de la sección §5.3, veremos su relevancia.

Representación de Enneper-Weierstrass de la Catenoide

Para la Catenoide analizada en (1.45) consideremos sobre $\mathbb{C}$ a las funciones $f(z) = -e^{-z}$ y $g(z) = -e^{z}$, notemos que ni g tiene polos y ni f tiene ceros en los complejos, de esta manera de (5.12) obtenemos

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}\left(-e^{-z}\right)\left(1-\left(-e^{z}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\\ &= \sinh(z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{i}{2}\left(-e^{-z}\right)\left(1+\left(-e^{z}\right)^2\right)\\ &= -\frac{i}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\\ &= -i\cosh(z),\end{aligned}$$

y

$$\phi_3 = 1.$$

Ya que $\cosh(z)$, $\sinh(z)$ y la multiplicación por constantes son funciones holomorfas por el Teorema de Cauchy se tiene que para cualquier curva cerrada γ

$$\int_{\gamma}\phi_k(z)\,dz = 0,$$

para $k = 1, 2, 3$. Luego, por (5.16)

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \sinh(z)\,dz\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\cosh(z)-1\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}-1\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{u_1}\left(\cos(u_2)+i\sin(u_2)\right)+e^{-u_1}\left(\cos(u_2)-i\sin(u_2)\right)}{2}-1\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{-1+\frac{e^{u_1}\cos(u_2)+e^{-u_1}\cos(u_2)}{2}+i\left(\frac{e^{u_1}\sin(u_2)-e^{u_1}\sin(u_2)}{2}\right)\right\}\\ &= -1+\frac{e^{u_1}\cos(u_2)+e^{-u_1}\cos(u_2)}{2}\\ &= -1+\cos(u_2)\cosh(u_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z -i\cosh(z)\,dz\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{-i\sinh(z)\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{u_1}\sin(u_2)+e^{-u_1}\sin(u_2)}{2} - i\left(\frac{e^{u_1}\cos(u_2)-e^{-u_1}\cos(u_2)}{2}\right)\right\} \\ &= \sin(u_2)\cosh(u_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z dz\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{z\right\} \\ &= u_1. \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene la parametrización (salvo traslaciones) de la Catenoide analizada en el Capítulo 4

$$X(u_1,u_2) = (\cos(u_2)\cosh(u_1), \sin(u_2)\cosh(u_1), u_1).$$

La otra manera de obtener la superficie minimal de la Catenoide es tomar en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a las funciones $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ y $g(z)=z$. Así, por (5.12)

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}-1\right), \\ \phi_2 &= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z^2}+1\right), \\ \phi_3 &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Dada γ una curva cerrada en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tenemos por el Teorema de Cauchy que

$$\int_\gamma \phi_k(z)\,dz = 0,\ k=1,2.$$

Así, ϕ_1 y ϕ_2 no tienen períodos reales, mientras que ϕ_3 si los tiene, pues

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Ahora, por (5.16) y tomando $z = u_1 + iu_2$ se tiene

$$\begin{aligned}
x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int^z \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dz\right\}+1\\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2}z-\frac{1}{2z}\right\}+1\\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2}(u+iv)-\frac{1}{2}\frac{u-iv}{u^2+v^2}\right\}+1\\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2}(u+iv)\right\}+\operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{2}\frac{u-iv}{u^2+v^2}\right\}+1\\
&= -\frac{u}{2}-\frac{u}{2(u^2+v^2)}+1\\
&= -\frac{u}{2}\left(1+\frac{u}{u^2+v^2}\right)+1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int^z \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z^2}+1\right)dz\right\}\\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2z}\left(z^2-1\right)\right\}\\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2}z-\frac{i}{2z}\right\}\\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2}(u+iv)-\frac{i}{2}\frac{u-iv}{u^2+v^2}\right\}\\
&= -\frac{v}{2}-\frac{v}{2(u^2+v^2)}\\
&= -\frac{v}{2}\left(1+\frac{1}{u^2+v^2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\int^z \frac{dz}{z}\right\}\\
&= \operatorname{Re}\{\log z\}\\
&= \operatorname{Re}\{\log|z|+i\arg\{z\}\}\\
&= \log|z|\\
&= \log\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)\\
&= \frac{\log(u^2+v^2)}{2}.
\end{aligned}$$

Representación de Ennerper-Weierstrass de la superficie de Scherk

Para analizar la representación de Enneper y Weierstrass de la superficie de Scherk consideremos en el disco unitario $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ las funciones $g(z) = z$ y $f(z) = \frac{4}{1-z^4}$, tenemos de (5.12)

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{(1-z^2)}{2}\left(\frac{4}{(1-z^2)(1+z^2)}\right)\\ &= \frac{2}{(1+z^2)}\\ &= \frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{i(1+z^2)}{2}\left(\frac{4}{(1-z^2)(1+z^2)}\right)\\ &= \frac{2i}{1-z^2}\\ &= \frac{i}{z+1} - \frac{i}{z-1},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_3 &= \frac{4z}{1-z^4}\\ &= \left(\frac{2z}{z^2+1} - \frac{2z}{z^2-1}\right).\end{aligned}$$

Como $B_1(0)$ es el disco unitario por el Teorema de Cauchy para cualquier curva cerrada γ

$$\int_\gamma \phi_k(z)\,dz = 0,$$

para $k = 1, 2, 3$. De esta manera las funciones ϕ_k no tienen períodos reales en $B_1(0)$. De (5.16) obtenemos

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \left(\frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i}\right)dz\right\}\\ &= \operatorname{Re}\{i\log(z+i) - i\log(z-i)\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{i\log\left(\frac{z+i}{z-i}\right)\right\}\\ &= -\arg\left\{\frac{z+i}{z-i}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \left(\frac{i}{z+1}-\frac{i}{z-1}\right)dz\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{i\log(z+1)-i\log(z-1)\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{i\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right\} \\ &= -\arg\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \left(\frac{2z}{z^2+1}-\frac{2z}{z^2-1}\right)dz\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\log\left(z^2+1\right)-\log\left(z^2-1\right)\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\log\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)\right\} \\ &= \log\left|\frac{z^2+1}{z^2-1}\right|. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos la parametrización $X : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(z) = \left(-\arg\left\{\frac{z+i}{z-i}\right\}, -\arg\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}, \log\left|\frac{z^2+1}{z^2-1}\right|\right).$$

Haremos algunos comentarios del ejemplo anterior. Para ello, dadas las igualdades

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} + i\frac{z+\overline{z}}{|z-1|^2}$$

y

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{|z|^2-1}{|z-1|^2} + \frac{z-\overline{z}}{|z-1|^2}.$$

Como en $B_1(0)$ se tiene $|z|^2-1<0$, se sigue de esto que $\frac{-3\pi}{2} \leq x_i \leq -\frac{\pi}{2}$ para $i=1,2$. Con los cálculos anteriores tenemos

$$\cos(x_1) = \frac{|z|^2-1}{z^2+1} \text{ y } \cos(x_2) = \frac{|z|^2-1}{z^2-1},$$

lo por lo que

$$x_3 = \log\left(\frac{\cos x_2}{\cos x_1}\right),$$

donde (x_1, x_2) está restringida en el rectángulo $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, de esta manera la superficie $X : B_1(0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ solo describie una parte de la superficie minimal de Scherk dada en (1.46).

Para obtener toda la superficie consideramos a g y f definidas en $\mathcal{M} = \mathbb{C} \setminus \{1, -1, i, -i\}$, y a $\pi : \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathcal{M}$ el cubriente universal de $\mathcal{M}$. Definimos

$$\hat{x}_k = \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \phi_k\left(\pi\left(z\right)\right) dz\right\},\ k = 1, 2, 3.$$

Como $\hat{\mathcal{M}}$ es simplemente conexa, tenemos que las composiciones $\phi_k\left(\pi\left(z\right)\right)$ no tienen períodos reales y por tanto las funciones $\hat{x}_k : \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$ están bien definidas para $k = 1, 2, 3$.

De este modo, la imagen $\hat{X}(\hat{\mathcal{M}})$ se puede obtener a partir de las funciones x_k si ahora permitimos que $x_1 = -\arg\left\{\dfrac{z+i}{z-i}\right\}$ y $x_2 = \arg\left\{\dfrac{z+1}{z-1}\right\}$ asuman todos los valores posibles bajo la condición de que $\dfrac{\cos\left(x_2\right)}{\cos\left(x_1\right)} > 0$, esto es equivalente a considerar toda la gráfica de la función real

$$x_3 = \log\left(\frac{\cos\left(x_2\right)}{\cos\left(x_1\right)}\right),$$

justo como lo visto en (1.46).

Representación de Enneper-Weierstrass de la superficie de Enneper

Ahora vamos a analizar estas representaciones para la superficie de Enneper, para ello consideramos sobre $\mathbb{C}$ a las funciones $f(z) = 1$ y $g(z) = z$, tendremos de (5.12) que

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{(1 - z^2)}{2}, \\
\phi_2 &= \frac{i\,(1 + z^2)}{2}, \\
\phi_3 &= z.
\end{aligned}$$

Las cuales por el Teorema de Cauchy no tienen períodos reales, de (5.16) se deduce

$$\begin{aligned}
x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \frac{(1 - z^2)}{2} dz\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{z^3 - 3z}{6}\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{\left(u_1 + iu_2\right)^3 - 3\left(u_1 + i\right)}{6}\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{u_1}{2} + \frac{1}{2}u_1 u_2^2 - \frac{u_1^3}{6} + i\left(\frac{1}{2} + \frac{u_2^3}{6} - \frac{u_1^2 u_2}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(u_1 - \frac{u_1^3}{3} + u_1 u_2^2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \left(\frac{i\left(1+z^2\right)}{2}\right) dz\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{i\left(z^3+3z\right)}{6}\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{i\left(\left(u_1+iu_2\right)^3+3\left(u+iv\right)\right)}{6}\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{-\frac{v}{2}-\frac{u_1^2u_2}{2}+\frac{u_2^3}{6}+i\left(\frac{u}{2}-\frac{u_1u_2^2}{2}+\frac{u_1^3}{6}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(-v-u_1^2u_2+\frac{u_2^3}{3}\right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z z dz\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{z^2}{2}\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\left(u_1+iu_2\right)^2}{2}\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{u_1^2}{2}-\frac{u_2^2}{2}+iu_1u_2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(u_1^2-u_2^2\right). \end{aligned}$$

Así, tenemos la parametrización $X:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ dada por

$$X\left(u_1,u_2\right)=\left(\frac{1}{2}\left(u_1-\frac{u_1^3}{3}+u_1u_2^2\right),\frac{1}{2}\left(u_1-\frac{u_1^3}{3}+u_1u_2^2\right),\frac{1}{2}\left(u_1^2-u_2^2\right)\right),$$

como la dada en (3.11.1).

Finalizamos esta sección con nuestro último ejemplo de superficie minimal en $\mathbb{R}^3$ que destaca entre otras cosas por ser muy agradable a la vista. Hablamos de la *superficie minimal de Henneberg*, una superficie que no solo cumple con las condiciones necesarias para ser considerada minimal, sino que además posee una estructura geométrica simétrica y estéticamente atractiva. Esta superficie fue presentada por el matemático alemán Lebrecht Henneberg en 1875, y, se caracteriza por ser una de las primeras construcciones explícitas de superficies minimales que no son ni planos ni superficies de revolución o superficies regladas. Es conocida por su forma sofisticada, además, la superficie de Henneberg ofrece un excelente ejemplo de cómo la matemática pura puede combinarse con la belleza visual, mostrando la profundidad de los conceptos involucrados en la teoría de las superficies minimales.

Representación de Enneper-Weierstrass de la superficie de Henneberg

Considerando en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a $f(z)=2\left(1-\frac{1}{z^4}\right)$ y $g(z)=z$ se tiene por (5.12) que

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \left(1-\frac{1}{z^4}\right)\left(1-z^2\right)\\ &= \left(-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+1-z^2\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_2 &= i\left(1-\frac{1}{z^4}\right)\left(1+z^2\right)\\ &= i\left(-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^2}+1+z^2\right),\end{aligned}$$

y

$$\phi_3 = 2\left(z-\frac{1}{z^3}\right).$$

Como las funciones son analíticas en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tendremos que para cualquier curva cerrada γ

$$\int_\gamma \phi_k(z)\,dz = 0,\ k=1,2,3.$$

Por lo que ϕ_k no tienen períodos reales en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, en vista de (5.16)

$$\begin{aligned}\int_1^z \left(-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+1-z^2\right)dz &= \frac{\left(1-z^2\right)^3}{3z^3},\\ \int_1^z i\left(-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^2}+1+z^2\right)dz &= \frac{i\left(1+z^2\right)}{3z^3}-\frac{i8}{3},\\ \int_1^z 2\left(z-\frac{1}{z^3}\right)dz &= \frac{\left(z^2-1\right)^2}{z^2}.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_1^z \left(-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+1-z^2\right)dz\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\left(1-z^2\right)^3}{3z^3}\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{z}^3\left(1-z^2\right)^3}{3\overline{z}^3 z^3}\right\}\\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\left(\overline{z}-\overline{z}z^2\right)^3}{3\left(|z|^2\right)^3}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\left(\overline{z}-|z|^2 z\right)^3}{3|z|^6}\right\}.\end{aligned}$$

Haciendo $z = u_1 + iu_2$ se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{\left(u_1 - iu_2 - \left(u_1^2 + u_2^2\right)\left(u_1 + iu_2\right)\right)^3}{3\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3} \\ = \; & \frac{\left(-u_1^3 - iu_1^2u_2 - u_1u_2^2 + u_1 - iu_2^3 - iu_2\right)^3}{3\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} & \left(-u_1^3 - iu_1^2u_2 - u_1u_2^2 + u_1 - iu_2^3 - iu_2\right)^3 \\ = \; & -u_1^9 - 3iu_1^8u_2 + 3u_1^7 - 8iu_1^6u_2^3 + 3iu_1^6u_2 + 6u_1^5u_2^4 + 9u_1^5u_2^2 - 3u_1^5 - 6iu_1^4u_2^5 + 9iu_1^4u_2^3 \\ & +3iu_1^4u_2 + 8u_1^3u_2^6 + 9u_1^3u_2^4 - 6u_1^3u_2^2 + u_1^3 + 9iu_1^2u_2^5 + 6iu_1^2u_2^3 - 3iu_1^2u_2 \\ & +3u_1u_2^8 + 3u_1u_2^6 - 3u_1u_2^4 - 3u_1u_2^2 + iu_2^9 + 3iu_2^7 + 3iu_2^5 + iu_2^3, \end{aligned}$$

de esta forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\left(-u_1^3 - iu_1^2u_2 - u_1u_2^2 + u_1 - iu_2^3 - iu_2\right)^3}{3\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3}\right\} \\ &= \frac{-u_1^9 + 3u_1^7 + 6u_1^5u_2^4 + 9u_1^5u_2^2 - 3u_1^5 + 8u_1^3u_2^6 + 9u_1^3u_2^4 - 6u_1^3u_2^2}{3\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3} \\ &\quad + \frac{u_1^3 + 3u_1u_2^8 + 3u_1u_2^6 - 3u_1u_2^4 - 3u_1u_2^2}{3\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3} \\ &= \frac{u_1^3\left(1 - u_1^2 - u_2^2\right)^3 - 3u_1u_2^2\left(1 - u_1^2 - u_2^2\right)\left(1 + u_1^2 + u_2^2\right)^2}{3\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3}, \end{aligned}$$

con estas mismas ideas obtenemos que

$$\begin{aligned} x_2 &= -\operatorname{Im}\left\{\frac{\left(\overline{z} + |z|^2 z\right)^3}{3|z|^6}\right\}, \\ x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\frac{\left(z|z|^2 - \overline{z}\right)^2}{|z|^4}\right\}. \end{aligned}$$

Más aún

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3u_1^2u_2\left(1 + u_1^2 + u_2^2\right)^2\left(1 - u_1^2 - u_2^2\right) - u_2^3\left(1 - u_1^2 - u_2^2\right)^3}{3\left(u_1^2 + u_2^2\right)^3}, \\ x_3 &= \frac{\left(1 - u_1^2 - u_2^2\right)^2u_1^2 - \left(1 + u_1^2 + u_2^2\right)u_2^2}{\left(u_1^2 + u_2^2\right)^2}. \end{aligned}$$

La superficie que hemos obtenido como puede visualizarse en la Figura 5.5 tiene auto-intersecciones, lo que la hace destacar también por esa propiedad geométrica.

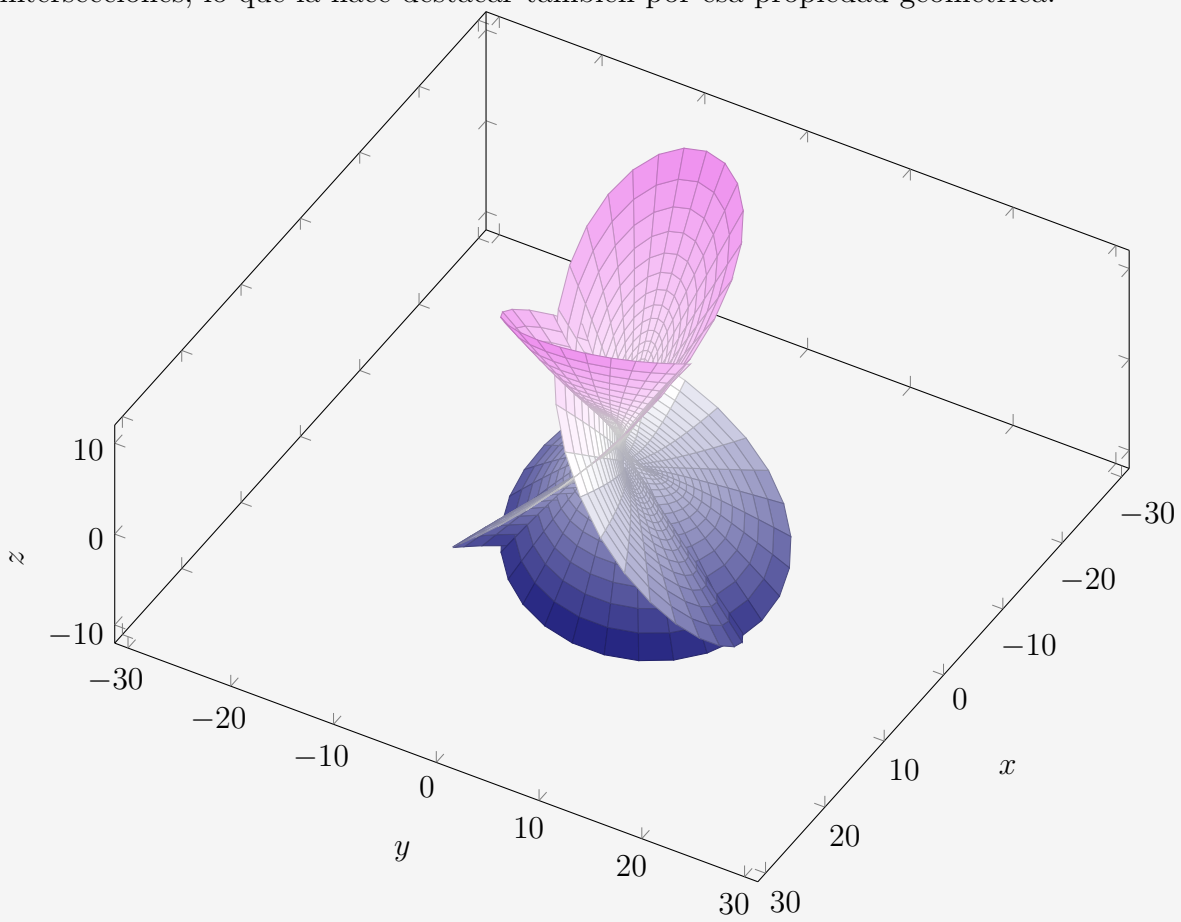


Figura 5.5: Superficie minimal de Henneberg

§5.3.

La apliación de Gauss para superficies en $\mathbb{R}^3$

En esta sección, exploraremos la aplicación de Gauss en el contexto de superficies en $\mathbb{R}^3$, estableciendo las bases necesarias para comprender las propiedades geométricas y analíticas de estas superficies. Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio, consideremos una parametrización $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de una superficie S, donde el plano tangente en cada punto está generado por los vectores $\dfrac{\partial X}{\partial \xi_1}, \dfrac{\partial X}{\partial \xi_2}$, donde $\dfrac{\partial X}{\partial \xi_1} - i\dfrac{\partial X}{\partial \xi_2} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, por otro lado, se sigue que

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}, \tag{5.17}$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \left|\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\right|^2 \\ &= \left|\frac{\partial X}{\partial \xi_2}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_k |\phi_k|^2 \\ &= \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2.\end{aligned}$$

Además, se tiene la siguiente identidad

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\times\frac{\partial X}{\partial \xi_2} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1},-\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\xi_2}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right),\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right) \\ &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1},\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2},\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left\{\left(\phi_2\bar{\phi}_3,\phi_3\bar{\phi}_1,\phi_1\bar{\phi}_2\right)\right\},\end{aligned}$$

que es consecuencia de las funciones

$$\phi_k = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} - i\frac{\partial x_k}{\partial \xi_2},\ \zeta = \xi_1 + i\xi_2,\ \text{ para } k = 1,2,3,$$

y de los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}\phi_2\bar{\phi}_3 &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}-i\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}+i\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\right) \\ &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}+\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}+i\left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\right)\end{aligned}$$

donde

$$\operatorname{Im}\left\{\phi_2\bar{\phi}_3\right\} = \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_3}{\partial \xi_1},$$

de manera similar tendremos

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\left\{\phi_3\bar{\phi}_1\right\} &= \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_3}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}, \\ \operatorname{Im}\left\{\phi_1\bar{\phi}_2\right\} &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}-\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1},\end{aligned}$$

mostrando con ello la identidad antes mencionada. Ahora, al sustituir en las ecuaciones de arriba las expresiones dadas en (5.12) tendremos al considerar a $g = u + iv$ lo siguiente

$$\begin{aligned}\phi_2\overline{\phi_3} &= \left(\frac{i}{2}f\left(1+g^2\right)\right)\left(\overline{f}\,\overline{g}\right)\\ &= \frac{i}{2}\left|f\right|^2\left(1+g^2\right)\overline{g},\end{aligned}$$

donde su parte imaginaria correspondiente es

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{\phi_2\overline{\phi_3}\right\} &= \mathrm{Im}\left\{\frac{i}{2}\left|f\right|^2\left(1+g^2\right)\overline{g}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left|f\right|^2\mathrm{Im}\left\{i\left(1+g^2\right)\overline{g}\right\},\end{aligned}$$

ya que $\overline{g} = u - iv$ se tiene $i\overline{g} = v + iu$, por lo que, $\mathrm{Im}\{i\overline{g}\} = \mathrm{Re}\{g\}$, y

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{ig^2\overline{g}\right\} &= \mathrm{Im}\left\{i\left(u+iv\right)^2\left(u-iv\right)\right\}\\ &= \mathrm{Im}\left\{iu^3 - u^2v + iuv^2 - v^3\right\}\\ &= u\left(u^2+v^2\right)\\ &= \mathrm{Re}\left\{g\right\}\left|g\right|^2.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{\phi_2\overline{\phi_3}\right\} &= \frac{\left|f\right|^2}{2}\left(\mathrm{Re}\left\{g\right\} + \mathrm{Re}\left\{g\right\}\left|g\right|^2\right)\\ &= \frac{\left|f\right|^2\left(1+\left|g\right|^2\right)}{2}\mathrm{Re}\left\{g\right\}\\ &= \frac{\left|f\right|^2\left(1+\left|g\right|^2\right)}{4}2\mathrm{Re}\left\{g\right\}.\end{aligned}$$

Esta última expresión que hemos obtenido representa la primera entrada de la identidad señalada, utilizando estos mismos cálculos llegamos

$$\mathrm{Im}\left\{\phi_2\overline{\phi_3}\right\} = \frac{\left|f\right|^2\left(1+\left|g\right|^2\right)}{4}2\mathrm{Im}\left\{g\right\},$$

$$\mathrm{Im}\left\{\phi_1\overline{\phi_2}\right\} = \frac{1}{4}\left|f\right|^2\left(1+\left|g\right|^2\right)\left(\left|g\right|^2-1\right),$$

lo cual, al sustituirse en la identidad dada nos da el siguiente vector

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\times\frac{\partial X}{\partial \xi_2} = \frac{|f|^2(1+|g|^2)}{4}\left(2\mathrm{Re}\{g\}, 2\mathrm{Im}\{g\}, |g|^2-1\right).$$

Al considerar nuevamente a $g = u + iv$ se tiene que su módulo es

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2}\right| &= \frac{|f|^2\left(1+|g|^2\right)}{4}\sqrt{u^4+2u^2v^2+2u^2+v^4+2v^2+1} \\
&= \frac{|f|^2\left(1+|g|^2\right)}{4}\sqrt{\left(u^2+v^2+1\right)^2} \\
&= \frac{|f|^2\left(1+|g|^2\right)}{4}\left(u^2+v^2+1\right) \\
&= \frac{|f|^2\left(1+|g|^2\right)}{4}\left(|g|^2+1\right) \\
&= \left[\frac{|f|\left(1+|g|^2\right)}{2}\right]^2 \\
&= \lambda^2.
\end{aligned}$$

Por lo que tendremos el vector unitario a la superficie con orientación estándar

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2}}{\left|\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2}\right|} \\
&= \frac{\frac{|f|^2(1+|g|^2)}{4}\left(2\mathrm{Re}\left\{g\right\}, 2\mathrm{Im}\left\{g\right\}, |g|^2-1\right)}{\left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2} \\
&= \frac{\frac{|f|^2(1+|g|^2)}{4}\left(2\mathrm{Re}\left\{g\right\}, 2\mathrm{Im}\left\{g\right\}, |g|^2-1\right)}{\frac{|f|^2(1+|g|^2)^2}{4}} \\
&= \left(\frac{2\mathrm{Re}\left\{g\right\}}{1+|g|^2}, \frac{2\mathrm{Im}\left\{g\right\}}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2}\right). \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

Así, dada una superficie regular $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definimos la siguiente función importante.

Definición 5.23. *La función $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por*

$$N(p) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \times \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial X}{\partial u_1} \times \frac{\partial X}{\partial u_2}\right|}, \qquad (5.19)$$

*para cada $p \in S$ la llamamos la **aplicación de Gauss** de la superficie S.*

Lema 5.13. *Si $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una superficie minimal regular con parámetros isotérmicos, entonces la aplicación de Gauss N define una función analítica compleja de $\mathcal{D}$ sobre la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$.*

Demostración. Como $\mathbb{S}^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$ vía la proyección estereográfica, tenemos por (5.1) la función

$$\mathcal{F}_1 : X = \left(\frac{2u_1}{|w|^2+1}, \frac{2u_2}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right), \ w = u_1 + iu_2,$$

que en comparación con (5.18) al considerar a $g = w$ se tiene que

$$N(w) = \left(\frac{2\mathrm{Re}\,\{w\}}{1+|w|^2}, \frac{2\mathrm{Im}\,\{w\}}{1+|w|^2}, \frac{|w|^2-1}{1+|w|^2}\right) = \left(\frac{2u_1}{|w|^2+1}, \frac{2u_2}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right),$$

lo cual muestra que la aplicación de Gauss N seguida de la inversa de la proyección estereográfica desde el polo norte nos da como resultado una función meromorfa $g(\zeta)$. ■

Notemos que, en general, la aplicación de Gauss no está definida si la superficie no es regular, sin embargo, para una superficie minimal generalizada, la aplicación de Gauss se extiende de manera continua (e incluso de manera analítica) a los puntos de ramificación, donde el normal N está dado como en (5.19).

Lema 5.14. *Sea $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización que define una superficie minimal generalizada S, donde $\mathcal{D}$ es todo el plano complejo ζ. Entonces, X está en el plano o las normales a S toman todas las direcciones como máximo con dos excepciones.*

Demostración. A la superficie S le asociamos la función $g(\zeta)$ que no está definida solamente cuando $\phi_1 \equiv i\phi_2$ y $\phi_3 \equiv 0$, pero en cualquiera de los casos se tiene por (5.16) que x_3 es constante. Por lo tanto, la superficie S se encuentra contenida en un plano.

De lo contrario $g(\zeta)$ es una función meromorfa definida en todo el plano complejo ζ, y por el Teorema de Picard toma todos los valores con a lo sumo dos excepciones, o bien, es constante. Pero por (5.18) esto también se aplica al normal N, y en el último caso, S es un plano. ■

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [18, §8, pp.67-68].

Lema 5.15. *Sea $f(z)$ una función analítica definida en el disco unitario $B_1(0)$, con al menos una cantidad finita de ceros. Entonces existe una trayectoria divergente C tal que*

$$\int_C |f(z)||dz| < \infty. \tag{5.20}$$

Teorema 5.7. *Sea S una superficie minimal regular completa en $\mathbb{R}^3$. Entonces S es el plano o las normales a S forman un conjunto denso.*

Demostración. Supongamos que las normales a S no forman un conjunto denso, entonces existe un conjunto abierto $\mathcal{W}$ en la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$ que no es intersectado por la imagen de S bajo la aplicación de Gauss, mediante una rotación en el espacio, podemos asumir que $(0,0,1) \in \mathcal{W}$. Así, los vectores normales unitarios $N = (N_1, N_2, N_3)$ satisfacen que $N_3 \leq \eta < 1$, esto mismo ocurre con la superficie cubriente universal $\hat{S}$ de S la cual, en virtud del Lema 5.4, puede representarse como $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\mathcal{D}$ es el plano o el disco unitario. Notemos que $\mathcal{D}$ no puede ser el disco unitario ya que por (5.18) $N_3 \leq \eta < 1$ si y sólo si $|g(\zeta)| \leq M < \infty$ y dado que $\hat{S}$ es regular $f(\zeta)$ no se anula. Ahora, por (5.17) la longitud de cualquier trayectoria C queda determinada por

$$\begin{aligned}\int_C \lambda|d\zeta| &= \frac{1}{2}\int_C |f|(1+|g|^2)|d\zeta| \\ &< \frac{1+M^2}{2}\int_C |f||d\zeta|,\end{aligned}$$

y por el Lema 5.15, existe una trayectoria divergente C para la cual esta integral converge, por tanto la superficie no sería completa.

Por lo que $\mathcal{D}$ es el plano, y dado que las normales omiten más de dos puntos, por el Lema 5.14, $\hat{S}$ está en un plano, lo cual también es cierto para S, y como S es completa es el plano entero. ■

Observación 5.7. *El Teorema 5.7 tiene como consecuencia inmediata el Corolario 4.2 (Teorema de Bernstein), en efecto, pues una superficie minimal en su forma no paramétrica en $\mathbb{R}^3$ definida sobre todo el plano x_1, x_2, es una superficie regular completa cuyas normales están contenidas en un hemisferio de la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$, por tanto, debe ser un plano.*

El Teorema 5.7, nos lleva a preguntarnos ¿Qué se puede decir sobre el tamaño del conjunto de puntos en la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$ que son omitidos por la aplicación de Gauss de una superficie minimal completa S que no sea un plano?, y la respuesta que brinda la conclusión del resultado nos dice que, al menos, si S es regular, el conjunto omitido no puede contener una vecindad de ningún punto.

Concluimos esta sección presentando una visualización detallada de las imágenes de la aplicación de Gauss correspondientes a varias superficies minimales que hemos estudiado previamente. Estas representaciones ilustran de manera gráfica cómo las propiedades geométricas de estas superficies se reflejan en su respectiva proyección sobre la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$. Con ello, buscamos complementar el análisis teórico desarrollado, proporcionando una perspectiva geométrica enriquecedora que destaca las características fundamentales de cada superficie minimal.

Imagen de la aplicación de Gauss de la superficie de Enneper

Según la representación (5.12) la superficie de Ennerper queda descrita considerando a $M = \mathbb{C}$, $g(z) = z$ y $f(z) = 1$. Ahora, en virtud del Lema 5.13, se tiene que la aplicación de Gauss es en esencia la función meromorfa g, por tanto, la imagen bajo la aplicación de Gauss de $\mathbb{C}$ omite un solo punto en $\mathbb{S}^2$, a saber, el infinito (polo norte).

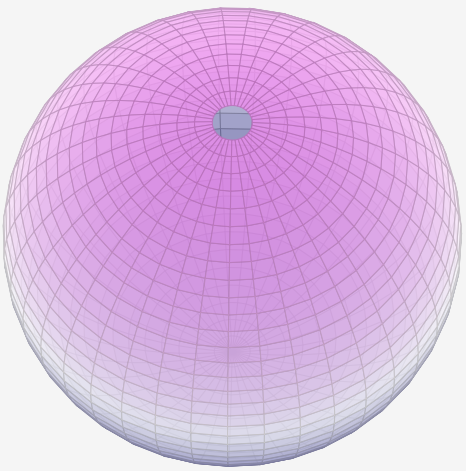


Figura 5.6: $\mathbb{S}^2$ menos un punto

Imagen de la aplicación de Gauss de la Catenoide

La Catenoide, en términos de la representación de Enneper (5.12), está determinada tomando a $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = z$ y $f(z) = \frac{1}{z^2}$, por lo tanto, la imagen de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bajo la aplicación de Gauss omite dos puntos en $\mathbb{S}^2$, los cuales son, el polo norte (infinito) y el polo sur.

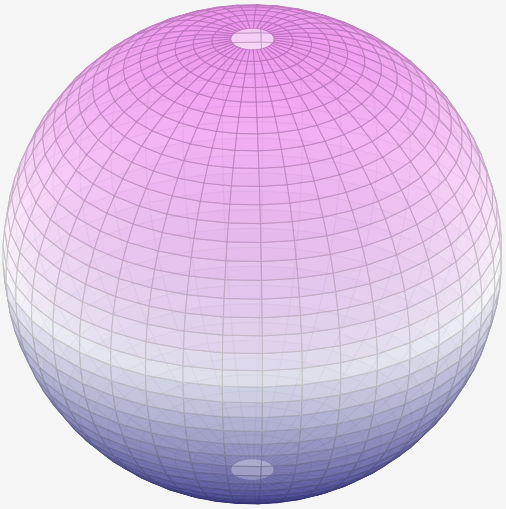


Figura 5.7: $\mathbb{S}^2$ menos dos puntos

Anteriormente analizamos otra manera de dar la representación de Enneper-Weierstrass de la Catenoide, la cual era tomar en $\mathbb{C}$ las funciones $f(z) = -e^{-z}$ y $g(z) = -e^{z}$. Dado que la función exponencial compleja no se anula se tiene que la imagen bajo la aplicación de Gauss de $\mathbb{C}$ omite dos puntos en $\mathbb{S}^2$, los cuales son el polo norte y el polor sur (el infinito y el cero).

Imagen de la aplicación de Gauss de la Helicoide

Considerando a $M = \mathbb{C}$, $g(z) = -ie^{z}$ y $f(z) = e^{-z}$ en la representación de Enneper (5.12) obtuvimos la superficie minimal de la Helicoide. Ya que la aplicación de Gauss de esta superficie es la función g, observamos que esta omite el polo norte en $\mathbb{S}^2$. Además, como $g(z) = -ie^{z}$ no se anula en $\mathbb{C}$, omitimos el valor 0 en $\mathbb{S}^2$, el cual vía la proyección estereográfica (5.1) corresponde al punto $(0, 0, -1)$, de esta manera, la imagen de la aplicación de Gauss de la superficie minimal de la Helicoide omite dos puntos (el polo norte y el polo sur).

Imagen de la aplicación de Gauss de la superficie de Henneberg

La representación de Enneper de la superficie de Henneberg quedo determinada tomando a $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(z) = z$ y $f(z) = 2(1 - \frac{1}{z^4})$. Así, la imagen de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bajo la aplicación de Gauss omite dos puntos en $\mathbb{S}^2$, a saber, el polo norte y el punto polo sur.

En los ejemplos anteriores, la aplicación de Gauss omite uno o dos puntos de $\mathbb{S}^2$, a continuación mostramos que la superficie de Scherk es una superficie minimal en $\mathbb{R}^3$ cuya aplicación de Gauss omite cuatro puntos.

Imagen de la aplicación de Gauss de la superficie de Scherk

Al considerar en la representación de Enneper (5.12) al disco unitario $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $g(z) = z$ y $f(z) = \dfrac{4}{1-z^4}$, obtenemos la superficie de Scherk, cuya aplicación de Gauss omite cuatro puntos en $\mathbb{S}^2$. Para convencernos de lo anterior, debemos de analizar cuales son las singularidades de $f(z)$ en $B_1(0)$, las cuales se presentan cuando $z^4 = 1$, cuyas soluciones corresponden a los puntos:

$$z = e^{\frac{2\pi ik}{4}}, \text{ para } k = 0, 1, 2, 3.$$

Esto significa que las singularidades de $f(z)$ son ± 1 y $\pm i$, recordando la relación existente entre las funciones f y g dada en el Lema 5.11 se tiene la imagen de los puntos $\{\pm i, \pm 1\}$ y corresponden a los puntos omitidos por la función g en $\mathbb{S}^2$, los cuales bajo la proyección estereográfica (5.1) son los puntos $(0, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$.

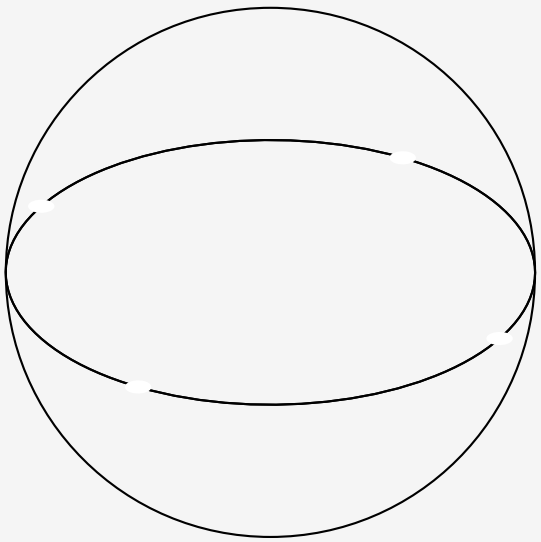


Figura 5.8: $\mathbb{S}^2$ menos 4 puntos

Con los ejemplos anteriores, podemos preguntarnos lo siguiente:

- ¿Existe alguna superficie minimal cuya aplicación de Gauss cubra toda la esfera $\mathbb{S}^2$?
- ¿Existirá una superficie minimal cuya aplicación de Gauss omita una cierta cantidad de puntos en $\mathbb{S}^2$?

Respondemos estas preguntas a continuación.

Imagen de la aplicación de Gauss de la superficie de Chen-Gackstatter

En la representación (5.12) consideremos a $M = \mathbb{C}$, $g(z) = z + \frac{1}{z}$ y $f(z) = z^2$, primero, observamos que

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= \frac{1}{2}\left(1 - \left(z + \frac{1}{z}\right)^2\right) z^2 = -\frac{1}{2}\left(z^4 + z^2 + 1\right), \\
\phi_2(z) &= \frac{i}{2}\left(1 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2\right) z^2 = \frac{i}{2}\left(z^4 + 3z^2 + 1\right), \\
\phi_3(z) &= z^3 + z.
\end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \phi_i^2(z) &= \left(-\frac{1}{2}\left(z^4 + z^2 + 1\right)\right)^2 + \left(\frac{i}{2}\left(z^4 + 3z^2 + 1\right)\right)^2 + \left(z^3 + z\right)^2 \\
&= \frac{z^8}{4} + \frac{z^6}{2} + \frac{3}{4}z^4 + \frac{z^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{z^8}{4} - \frac{3}{2}z^6 - \frac{11}{4}z^4 - \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{4} \\
&\quad + z^6 + 2z^4 + z^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

y

$$\sum_{i=1}^{3} |\phi_i|^2 > 0.$$

Ahora, dada γ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ se tiene del Teorema de Cauchy que

$$\int_\gamma \phi_i(z)\, dz = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3,$$

por lo que cada $\phi_i(z)$ no tiene períodos reales.

Por otro lado, del Lema 5.12, obtenemos una superficie minimal dada por

$$x_i = \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \phi_i(z)\, dz\right\} \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Donde al considerar $z = u + iv$ y al realizar algunos pequeños cálculos explícitamente obtenemos

$$\begin{aligned}
x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \left(-\frac{1}{2}\left(z^4 + z^2 + 1\right)\right) dz\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{10}z^5 - \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{2}z\right\} \\
&= -\frac{u^5}{10} + u^3v^2 - \frac{u^3}{6} - \frac{uv^4}{2} + \frac{uv^2}{2} - \frac{u}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \frac{i}{2}\left(z^4+3z^2+1\right)\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{10}iz^5+\frac{1}{2}iz^3+\frac{1}{2}iz\right\} \\ &= -\frac{u^4v}{2}+u^2v^3-\frac{3}{2}u^2v-\frac{v^5}{10}+\frac{v^3}{2}-\frac{v}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\int_0^z z^3+z\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{z^4}{4}+z\right\} \\ &= \frac{u^4}{4}-\frac{3}{2}u^2v^2+u+\frac{v^4}{4}. \end{aligned}$$

De esta manera tenemos, en virtud del Lema 5.11, una superficie minimal

$$X : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

definida para $z = u + iv \in \mathbb{C}$ como sigue

$$X(u,v) = \left(-\frac{u^5}{10}+u^3v^2-\frac{u^3}{6}-\frac{uv^4}{2}+\frac{uv^2}{2}-\frac{u}{2}, -\frac{u^4v}{2}+u^2v^3-\frac{3}{2}u^2v-\frac{v^5}{10}+\frac{v^3}{2}-\frac{v}{2}, \frac{u^4}{4}-\frac{3}{2}u^2v^2+u+\frac{v^4}{4}\right)$$

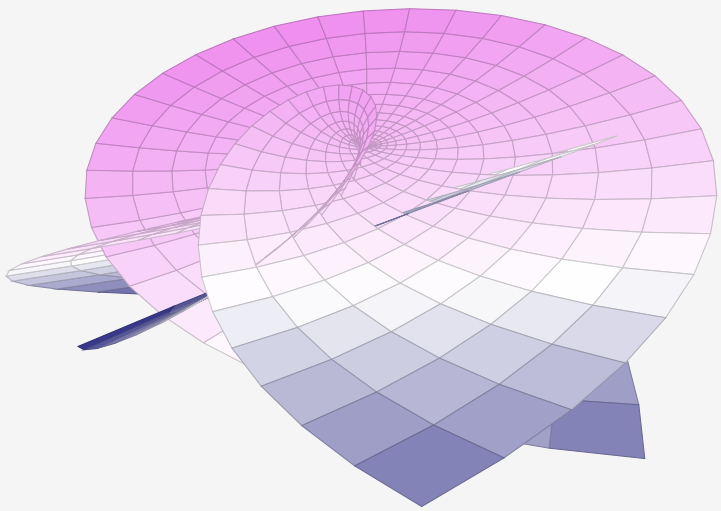


Figura 5.9: Superficie minimal de Chen-Gackstatter

La superficie minimal resultante, es conocida como la superficie de Chen-Gackstatter, la cual fue descubierta por Chi Chen Cheng y Fritz Gackstatter en 1982.

En cuanto a la aplicación de Gauss de esta superficie, ya que corresponde a la función $g(z) = z + \frac{1}{z}$ y esta satisface que $g(z) \to \infty$ cuando $z \to 0$, se sigue que la imagen de $\mathbb{C}$ bajo g es toda la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$.

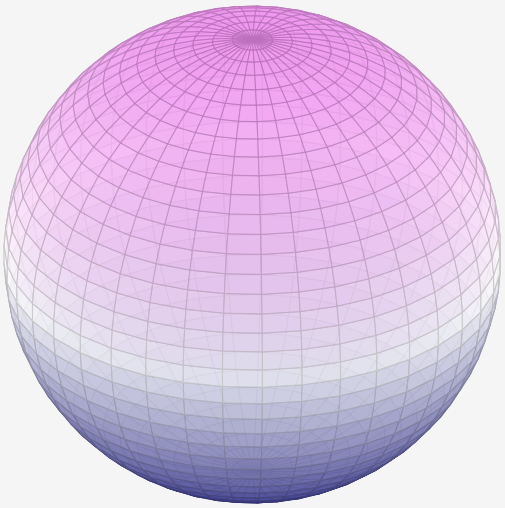


Figura 5.10: $\mathbb{S}^2$ sin puntos removidos

En esta misma dirección, para responder al segundo cuestionamiento, tenemos la siguiente superficie.

Imagen de la aplicación de Gauss de la superficie de K. Voss

Consideremos a $M = \mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}$, $g(z) = z$ y $f(z) = \frac{1}{(z-p_1)\cdots(z-p_m)}$, que como es costumbre destacamos que según la representación de Enneper

$$\begin{aligned}
\phi_1(z) &= \frac{1 - z^2}{2(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_m)}, \\
\phi_2(z) &= \frac{i(1+z^2)}{2(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_m)}, \\
\phi_3(z) &= \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_m)}.
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \phi_i^2(z) &= \frac{(1-z^2)^2}{4(z-p_1)^2(z-p_2)^2\cdots(z-p_m)^2} - \frac{(1+z^2)^2}{4(z-p_1)^2(z-p_2)^2\cdots(z-p_m)^2} \\
&\quad + \frac{z^2}{(z-p_1)^2(z-p_2)^2\cdots(z-p_m)^2} \\
&= -\frac{4z^2}{4(z-p_1)^2(z-p_2)^2\cdots(z-p_m)^2} + \frac{z^2}{(z-p_1)^2(z-p_2)^2\cdots(z-p_m)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se sigue de la forma de las funciones $\phi_i(z)$ que

$$\sum_{i=1}^{3} |\phi_i(z)|^2 > 0.$$

De esta manera, por el Lema 5.11, tenemos una superficie minimal

$$X : \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots p_m\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

cuya aplicación de Gauss omite m puntos. A esta superficie minimal se le conoce como la superficie de K. Voss. Note que la superficie de Scherk es un caso particular de esta superficie.

Concluimos esta sección resaltando la relevancia de la representación de Enneper-Weierstrass en el estudio de superficies minimales. Esta herramienta permite analizar con mayor eficacia la imagen de la aplicación de Gauss asociada a dichas superficies. Sin esta poderosa representación, el análisis resultaría considerablemente más complejo y laborioso.

§5.4.

Curvatura Gaussiana y curvatura total de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$

En esta sección, continuamos con el estudio de superficies minimales en $\mathbb{R}^3$, utilizando la representación dada en (5.12). En el Capítulo 1, §1.1 definimos la primera y segunda formas fundamentales de una superficie regular S respecto a $N \in \Pi^{\perp}$ arbitrario. Dado que N es lineal y que en $\mathbb{R}^3$ el espacio normal en cada punto es unidimensional, es suficiente definir (1.27) para un solo normal N, a saber, el inducido por la aplicación de Gauss (5.19). Procedemos a expresar la segunda forma fundamental de una superficie minimal con la representación (5.12).

$$\sum b_{ij} \frac{d\xi_i}{dt} \frac{d\xi_j}{dt} = \operatorname{Re}\left\{ -fg' \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right\}, \ \ \zeta = \xi_1 + i\xi_2, \tag{5.21}$$

de (5.17) se tiene

$$\sum g_{ij} \frac{d\xi_i}{dt} \frac{d\xi_j}{dt} = \left[\frac{|f|(1+|g|^2}{2} \right]^2 \left| \frac{d\zeta}{dt} \right|^2,$$

por otro lado, de (1.28) y (1.29) se tiene que la curvatura normal es

$$\begin{aligned}\kappa(N,T) &= \frac{\sum b_{ij}\frac{d\xi_i}{dt}\frac{d\xi_j}{dt}}{\sum g_{ij}\frac{d\xi_i}{dt}\frac{d\xi_j}{dt}} \\ &= \frac{\mathrm{Re}\left\{-fg'\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}}{\left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|^2} \\ &= \left[\frac{2}{|f|(1+|g|^2)}\right]^2 \mathrm{Re}\{-fg'e^{2i\alpha}\},\end{aligned}$$

en la última expresión hemos escrito $\frac{d\zeta}{dt}$ en su forma polar

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= \left|\frac{d\zeta}{dt}\right|(\cos(\alpha t)+i\sin(\alpha t)) \\ &= \left|\frac{d\zeta}{dt}\right|e^{i\alpha},\end{aligned}$$

donde $\alpha\in[0,2\pi]$. Así, $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\zeta}{dt}\right|^2 e^{2i\alpha}$, por lo que

$$e^{2i\alpha} = \frac{\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2}{\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|^2}.$$

El máximo y el mínimo de la expresión resultante se obtienen al hacer variar $\alpha\in[0,2\pi]$. Note que el primer factor permanece constante al variar α, por lo que solo basta maximizar y minimizar a $\mathrm{Re}\{-fg'e^{2i\alpha}\}$. Para ver esto, consideremos al número complejo $z=-fg'$, al cual podemos escribir en su forma polar $z=|z|e^{i\theta}$, con $\theta\in[0,2\pi]$, de esta manera

$$\mathrm{Re}\{ze^{2i\alpha}\} = \mathrm{Re}\{|z|e^{i(\theta+2\alpha)}\} = |z|\cos(\theta+2\alpha),$$

por lo tanto

$$\mathrm{Re}\{-fg'e^{2i\alpha}\} = |fg'|\cos(\theta+2\alpha),$$

ahora bien como la función $\cos(\theta+2\alpha)$ alcanza su máximo cuando $\theta+2\alpha = 0 \mod 2\pi$, y su mínimo cuando $\theta+2\alpha=\pi \mod 2\pi$, se sigue que el máximo y el mínimo de $\mathrm{Re}\{-fg'e^{2i\alpha}\}$ son $|fg'|$ y $-|fg'|$ respectivamente, siendo estos valores las curvaturas principales, y, tal como se analizó en (1.30) quedan representadas de la siguiente manera

$$\kappa_1 = \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2},\ \kappa_2 = \frac{-4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}. \tag{5.22}$$

Definición 5.24. *Para una C^2-superficie regular en $\mathbb{R}^3$ definimos la* ***curvatura Gaussiana*** *K en un punto $p \in S$ como el producto de sus curvaturas principales*

$$K = \kappa_1 \kappa_2. \tag{5.23}$$

Como consecuencia de la definición anterior y de los valores de κ_1 y κ_2 dados en (5.22) tenemos el siguiente resultado.

Lema 5.16. *Sea $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que define una superficie minimal, entonces utilizando la representación (5.12), la curvatura Gaussiana en cada punto esta dada por*

$$K = -\left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right]^2 \tag{5.24}$$

Corolario 5.1. *La curvatura Gaussiana de una superficie minimal es no positiva, y a menos de que la superficie sea un plano, solo puede tener ceros aislados.*

Demostración. Del Lema 5.16 tenemos que si S es una superficie minimal su curvatura Gaussiana es negativa. Por oto lado, por (5.18), S es un plano si y sólo si N es constante, lo cual sucede si y sólo si g es constante, esto es, si y sólo si $g' = 0$. Pero al ser g' una función analítica tiene ceros aisalados o es idénticamente cero. ■

A partir de (5.17) y (5.23) tenemos la siguiente expresión

$$K = -\frac{\nabla^2 \log \lambda}{\lambda^2}, \tag{5.25}$$

la cual se satisface inclusive para superficies parametrizadas en términos de parámetros isotérmicos $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$.

En efecto, pues dada una superficie minimal S, sabemos, a partir del Lema 3.4, que para cada punto regular de S existe una vecindad para la cual existe una reparametrización de S en términos de parámetros isotérmicos. Así, para llegar a la expresión (5.25), podemos hacer uso de la siguiente fórmula para el cálculo de la curvatura Gaussiana de una superficie con parámetros isotérmicos (cuya demostración puede consultarse en [8, Cap.1, pp.27-29]):

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial \xi_1}(\sqrt{g_{22}})\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial \xi_2}(\sqrt{g_{11}})\right)\right\},$$

sustituyendo la expresión (5.17) en la ecuación de arriba se obtiene justo la ecuación (5.25)

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_2}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}\log\lambda + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}\log\lambda\right\} \\ &= -\frac{\nabla^2 \log \lambda}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora, para una superficie minimal S en $\mathbb{R}^3$, la siguiente sucesión de funciones:

$$\mathcal{D} \xrightarrow{X} S \xrightarrow{N} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\mathcal{F}_1^{-1}} \text{Plano } w. \tag{5.26}$$

Esta sucesión de funciones es de hecho, la función utilizada en la prueba del Lema 5.13

$$g(\zeta) : \mathcal{D} \longrightarrow \text{ Plano } w.$$

Sea $\zeta(t)$ en $\mathcal{D}$ una curva diferenciable, y consideremos su imagen bajo la función anterior $g(\zeta(t))$. Si $s(t)$ es la longitud de arco de la imagen en S, tendremos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|. \tag{5.27}$$

Por otro lado, la longitud de arco de la imagen en el plano-w es

$$\left|\frac{dw}{dt}\right| = |g'(\zeta)|\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|, \tag{5.28}$$

Ahora, si $\sigma(t)$ es la longitud de arco de una curva en la esfera $\mathbb{S}^2$, tenemos de la proyección esterográfica (5.1) que

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2}{1+|w|^2}\left|\frac{dw}{dt}\right|. \tag{5.29}$$

Combinando (5.27), (5.29) y recordando la expresión dada en (5.24) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{ds}{dt}} &= \frac{\frac{2}{1+|w|^2}\left|\frac{dw}{dt}\right|}{\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|} \\
&= \frac{4\left|\frac{dw}{dt}\right|}{|f|(1+|g|^2)^2\left|\frac{d\zeta}{dt}\right|} \\
&= \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2},
\end{aligned}$$

de esta manera

$$\frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \sqrt{|K|}, \tag{5.30}$$

de lo anterior tenemos una interpretación de la curvatura Gaussiana en términos de la aplicación de Gauss.

Sea Δ un dominio tal que $\bar{\Delta} = \mathcal{D}$, la superficie definida a partir de la restricción $X|_\Delta$

tiene curvatura total

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta} KdA &= \iint_{\Delta} K\lambda^2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -\iint_{\Delta} \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right]^2 \left[\frac{|f|(1+|g|^2)}{2}\right]^2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -\iint_{\Delta} \frac{4|g'|}{(1+|g|^2)^2} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -\iint_{\Delta} \left[\frac{2|g'|}{1+|g|^2}\right]^2 d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned} \tag{5.31}$$

la cual corresponde al negativo del área de la imagen de Δ bajo la aplicación de Gauss. Este último hecho es, en sí, la definición original utilizada por Gauss para la curvatura Gaussiana de una superficie.

A lo largo de esta discusión hemos estado asumiendo que la superficie S estaba definida en un dominio plano $\mathcal{D}$, sin embargo, el normal N y el valor de la función g son independientes de la elección de los parámetros, para convencernos de esto, introduciremos parámetros isotérmicos a partir de la función conforme $\zeta(\tilde{\zeta})$, con ello tenemos $\tilde{\phi_k}(\tilde{\zeta}) = \phi_k(\zeta)\dfrac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}}$ con $k = 1, 2, 3$, y por (5.13) sabemos que el valor de g no cambia. De esta manera, dada una superficie minimal S, podemos reemplazar el diagrama visto en (5.26) por

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mathfrak{X}} S \xrightarrow{N} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\mathcal{F}_1^{-1}} \text{Plano- } w, \tag{5.32}$$

donde la función que resulta de la composición de estas funciones

$$g : \mathcal{M} \longrightarrow \text{Plano-}w \tag{5.33}$$

es meromorfa en $\mathcal{M}$. Así, la curvatura total de S sigue siendo el negativo del área de la imagen sobre $\mathbb{S}^2$.

Lema 5.17. *Sean $\mathcal{D}$ un dominio plano y $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$ una métrica Riemaniana en $\mathcal{D}$, donde $\lambda = \lambda(z) \in C^2$ y tal que $\mathcal{D}$ es completo con respecto a esta métrica. Si existe una función armónica $h(z)$ en $\mathcal{D}$ tal que*

$$\log \lambda(z) \leq h(z) \tag{5.34}$$

en todo $\mathcal{D}$, entonces $\mathcal{D}$ es todo el plano, o bien el plano menos un punto.

Demostración. Dada la métrica Riemaniana $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$ consideremos una segunda métrica Riemaniana $g_{\tilde{ij}} = \tilde{\lambda}^2\delta_{ij}$ donde $\tilde{\lambda} = e^{h(z)}$, de la hipótesis (5.34) se obtiene para cada $z \in \mathcal{D}$

$$\exp(\log \lambda(z)) \leq \exp(h(z)),$$

lo que es lo mismo

$$\lambda(z) \leq e^{h(z)} = \tilde{\lambda}(z).$$

Sea C una trayectoria divergente en $\mathcal{D}$, de la desigualdad previa

$$\int_C \tilde{\lambda}|dz| \geq \int_C \lambda|dz| = \infty,$$

de esta forma $\mathcal{D}$ es completo con respecto a la segunda métrica introducida. Este último hecho también es válido para la superficie cubriente universal $\widehat{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{D}$ con respecto a esta métrica. Pero en una vecindad de cualquier punto de $\widehat{\mathcal{D}}$ podemos considerar una función analítica $f(z)$ tal que $\mathrm{Re}\{f(z)\} = h(z)$ y la función

$$w = \int e^{f(z)} dz.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo se tiene

$$\frac{dw}{dz} = e^{f(z)},$$

de aquí que

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = |e^{f(z)}| = e^{h(z)} = \tilde{\lambda}(z). \tag{5.35}$$

Entonces, la longitud de cualquier curva en $\widehat{\mathcal{D}}$ con respecto a la métrica $\tilde{g}_{ij}$ es igual a la longitud euclidiana de su imagen en el plano-w. Como $\widehat{\mathcal{D}}$ es conexa, existe una función de $\mathcal{D}$ en el plano-w que satisface (5.35), y de la completez de $\widehat{\mathcal{D}}$, esta función es inyectiva. Por lo tanto, la superficie cubriente universal de $\mathcal{D}$ es equivalentemente conforme al plano. ■

Lema 5.18. *Sean $\mathcal{D}$ un dominio tal que $0 < r_1 < |z| < r_2 \leq \infty$ y $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$ una métrica Riemanniana en $\mathcal{D}$ que satisface (5.34). Supongamos que $\int_C \lambda|dz| = \infty$ para cualquier trayectoria C de la forma $z(t)$, $0 \leq t < 1$, tal que $\lim_{t\to 1}|z(t)| = r_2$, entonces $r_2 = \infty$.*

Demostración. Supongamos que $r_2 < \infty$, y consideremos

$$r_1 < \frac{1}{r_2} < 1 < r_2; \;\; \Delta = \left\{ z \in \mathcal{D} : \frac{1}{r_2} < |z| < r_2 \right\}.$$

Consideremos en Δ la métrica $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}\delta_{ij}$, donde $\tilde{\lambda}(z) = \lambda(z)\lambda\left(\frac{1}{z}\right)$, notese que $\tilde{\lambda}$ satisface las hipótesis del Lema 5.17 en Δ, por tanto Δ debería ser todo el plano, o bien, el plano menos un punto, lo cual nos conduce a una contradicción, así $r_2 = \infty$. ■

El Teorema de Uniformación de Koebe 5.1 permite clasificar a todas las superficies de Riemann simplemente conexas en superficies elípticas, parabólicas e hiperbólicas. Las superficies elípticas son las superficies cerradas simplemente conexas, las cuales por el Teorema de Uniformación de Koebe son equivalentemente conformes con la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$. Las superficies parabólicas son equivalentemente conformes con el plano extendido $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y las superficies hiperbólicas al disco unitario.

En vista de lo anterior tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [18, §9, pp.80-81], en la cual se utilizan algunos resultados acerca se superficies parabólicas e hiperbólicas, los cuales pueden encontrarse en [1, Cap.4, §6].

Lema 5.19. *Sea $\mathcal{D}$ un dominio hiperbólico completo respecto a la métrica $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$. Supongamos que*

$$\nabla^2 \log\lambda \geq 0, \tag{5.36}$$

y

$$\iint_\Delta \left|\nabla^2 \log\lambda\right| dxdy < \infty, \;\; z = x + iy. \tag{5.37}$$

Entonces, existe una función armónica $h(z)$ en $\mathcal{D}$ que satisface (5.34).

Observación 5.8. *Tenemos que la expresión (5.25) nos permite definir la curvatura Gaussiana para una superficie S en $\mathbb{R}^3$ con parámetros isotérmicos $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$. Se tiene que es invarainte bajo funciones conformes en los parámetros. Entonces (5.36) es equivalente a*

$$K \leq 0, \tag{5.38}$$

y (5.25) es equivalente a que

$$\iint_D |K| dA < \infty. \tag{5.39}$$

El estudio de las superficies minimales completas con curvatura total finita comienza con el siguiente resultado, cuya demostración puede ser consultada en [18, §9, pp.81-82].

Teorema 5.8. *Sea $\mathcal{M}$ una 2-variedad Riemanniana completa cuya curvatura Gaussiana satisface (5.38) y (5.39). Entoces existe una 2-variedad Riemanniana compacta $\widetilde{\mathcal{M}}$, un número finito de puntos $p_1, \ldots, p_k$ en $\widetilde{\mathcal{M}}$, y una isometría entre $\mathcal{M}$ y $\widetilde{\mathcal{M}} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$.*

Del Teorema 5.8, observamos que al ser $\mathcal{M}$ y $\widetilde{\mathcal{M}}$ isométricas, la aplicación de Gauss $N : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{S}^2$, la cual, al ser una función conforme, se puede extender a una función meromorfa $\widetilde{N} : \widetilde{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{S}^2$, de hecho, si cualquiera de los puntos p_j, $1 \leq j \leq k$ fuera una singularidad esencial de N (donde N está identificado con la función g de la representación de Weierstrass (5.18)), entonces por el Gran Teorema de Picard, N toma todos los valores de $\mathbb{S}^2$ un número infinito de veces, con al menos dos excepciones, esto último implicaría que la curvatura total de $\mathcal{M}$ sería infinita, lo cual contradice (5.39) del teorema anterior, de esta manera, cada punto p_j, $1 \leq j \leq k$, N tiene a lo más un polo; por lo tanto, puede extenderse a una función meromorfa a $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Lema 5.20. *Sea $\mathcal{X} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que define una superficie minimal regular S. Si la curvatura total de S es finita, entonces la conclusión del Teorema 5.8 es válida y la función g dada en (5.33) se extiende a una función meromorfa sobre $\widetilde{\mathcal{M}}$.*

Demostración. Sabemos que en una superficie minimal $K \leq 0$ y por lo tanto

$$\left|\iint_\Delta K dA\right| = \iint_\Delta |K| dA,$$

por lo que

$$\iint_\Delta |K| dA < \infty.$$

Aplicando el Teorema 5.8 tenemos que existe una 2−variedad Riemanniana compacta $\widetilde{\mathcal{M}}$, un número finito de puntos $p_1, \ldots, p_k \in \widetilde{\mathcal{M}}$ y una isométria entre $\mathcal{M}$ y $\widetilde{\mathcal{M}}$, y además consideramos a g una función meromorfa en $\widetilde{\mathcal{M}} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$. Ahora bien, si alguno de los puntos p_j con $j \in \{1, \ldots, k\}$ fuera una singularidad esencial de g, entonces por el Gran Teorema de Picard, g tomaría cada valor infinitas veces, con a lo más dos excepciones, lo anterior implica que el área esférica de la imagen es infinita, por tanto, también lo es la curvatura total, una contradicción con lo supuesto. De esta manera g tiene al menos un polo en cada p_j para algún j, esto es, g es meromorfa en $\widetilde{\mathcal{M}}$. ■

Las funciones meromorfas de una superficie compacta en $\mathbb{S}^2$ tienen la propiedad de tomar cada valor el mismo número (finito) de veces (contando su multiplicidad). Como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.9. *Sea S una superficie minimal completa en $\mathbb{R}^3$. Entonces, la curvatura total de S solo puede tomar los valores $-4\pi m$, con $m \in \mathbb{N}$ o $-\infty$.*

Demostración. Dado que $K \leq 0$, tenemos que $\iint_S K dA$ sobre toda la superficie diverge hacia $-\infty$, o bien, la curvatura total es finita. En el último de los casos, aplicando el Lema 5.20, se tiene que la curvatura total es el negativo del área esférica de la imagen bajo g de $\widetilde{\mathcal{M}} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$.

Ya que g es meromorfa en $\widetilde{\mathcal{M}}$, es constante, en tal caso $K = 0$, o bien, cada valor se repite un número finito de veces, digamos m, entonces el área esférica de la imagen correspondiente es $4\pi m$. ■

El valor anterior de la curvatura está sujeto a restricciones originadas por la topología de $\mathcal{M}$. Esta afirmación se justificará más adelante en el Teorema 5.10.

Lema 5.21. *Sea $f(z)$ analítica y diferente de cero en $0 < r_1 < |z| < \infty$. Supongamos que para cualquier trayectoria C que diverge hacia ∞, tenemos*

$$\int_C |f(z)||dz| = \infty. \tag{5.40}$$

Entonces $f(z)$ tiene a lo más un polo en el infinito.

Demostración. Como $f(z) \neq 0$ en $0 < r_1 < |z| < \infty$, se tiene que $\log|f(z)|$ es una función armónica en $0 < r_1 < |z| < \infty$. Así, su expansión en series de Laurent en el infinito es

$$\log|f(z)| = a \log|z| + h(z) + H(z),$$

donde $h(z)$ es una función armónica y acotada en $r_1 < r_2 < |z| < \infty$, y $H(z)$ es armónica en $|z| < \infty$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq a$, se sigue que para $|z| > r_2$

$$|f(z)| = |z|^a e^{h(z)} e^{H(z)} \leq M|z|^N e^{H(z)} = M|z^N e^G(z)|, \tag{5.41}$$

en donde M es una constante adecuada, y $G(z)$ es una función entera tal que $\mathrm{Re}\{G(z)\} = H(z)$. Consideremos la función entera

$$w = F(z) = \int z^N e^{G(z)} dz, \;\; F(0) = 0,$$

y notemos que existe una rama

$$\zeta(z) = [F(z)]^{\frac{1}{N}+1}$$

en una vecindad de $z = 0$, cumpliendo $\zeta'(0) \neq 0$. De esta manera existe una inversa $z(\zeta)$ en una vecindad de $\zeta = 0$, y esta inversa se extiende a todo el plano-ζ, o bien, para $R > 0$ existe un disco $|\zeta| < R$ en la cual se extiende. Este último caso no podría ocurrir, pues de otra forma, existiría un punto ζ_0 que satisface $|\zeta_0| = R$ sobre el cual la inversa no puede extenderse. Tomemos una curva $\zeta(t) = t\zeta_0$, $0 \leq t < 1$, su imagen inversa en el plano-z corresponde a una curva C tal que

$$\int_C |z^N e^{G(z)}||dz| = \int_C |F'(z)||dz| = R^{N+1},$$

donde R es una constante adecuada.

Si la curva C diverge a ∞, entonces, a partir de cierto punto, estaría en la región $|z| > r_2$, y debido a (5.41), esto contradice (5.40). Por lo tanto, C no puede diverger a ∞, y debe existir una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en C que tenga un punto de acumulación finito z_0, tal que las imagenes de estos puntos en el plano-ζ tiendan a ζ_0. Pero ya que $F'(z_0) \neq 0$, podemos extender la función inversa sobre ζ_0. Concluimos que la función inversa $z(\zeta)$ está definida en todo el plano ζ. Además, si $z(\zeta_1) = z(\zeta_2)$, entonces $F(z(\zeta_1)) = F(z(\zeta_2))$. Más aún, esto implica que $\zeta_1^{N+1} = \zeta_2^{N+1}$, de esta manera cada valor se toma a lo más $N+1$ veces, y así $z(\zeta)$ es un polinomio, pero como $z(\zeta) = 0$ implica que $\zeta = 0$, se tiene que $z(\zeta) = A\zeta^k$ para algún entero k.

Finalmente, como $z'(0) = Ak\zeta^{k-1} \neq 0$ entonces $k = 1$ y $A \neq 0$, así $F(z) = \left(\frac{z}{A}\right)^{N+1}$, y $G(z)$ es constante. Esto último también es cierto para $H(z)$, por lo tanto $|f(z)| \leq M_1|z|^N$ en una vecindad de ∞. Así, $f(z)$ tiene a lo más un polo en ∞. ■

Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, un dominio regular de S es un subconjunto abierto y conexo de S tal que su frontera es la imagen en S de un círculo mediante un difeomorfismo, que es regular excepto en un número finito de puntos. Una región de S es la unión de un dominio con su frontera (véase la Figura 5.11).

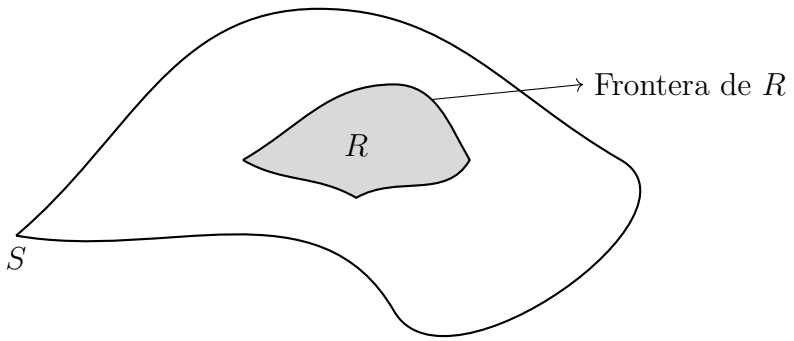


Figura 5.11: R es una región de S

(a) (b)

Figura 5.12: (a) Región regular y (b) Región no regular

Diremos que una región conexa $R \subseteq S$ es regular si es compacta y su frontera ∂R es la unión de un número finito de curvas regulares a trozos, cerradas y simples que no se cortan (ver (a) de la Figura 5.12). De esta manera, podemos considerar a una superficie S compacta como una región regular, donde su frontera es vacía.

Por otro lado, diremos que $R \subseteq S$ es simple si es homeomorfa a un disco en $\mathbb{R}^2$.

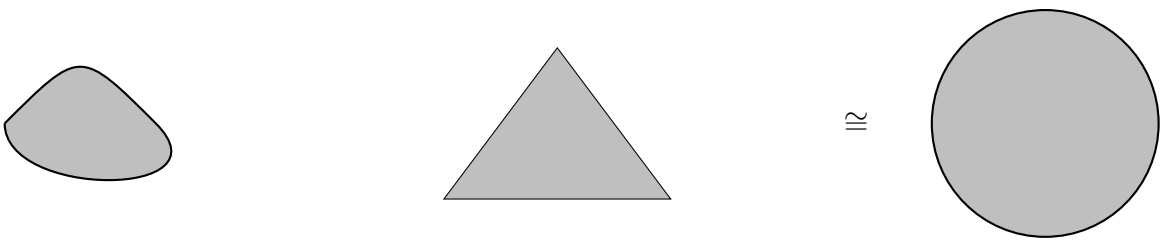


Figura 5.13: Regiones simples

Una triangulación $\mathcal{T}$ de una región regular $R \subseteq S$ es una familia finita de triángulos $\{T_i\}_{i=1}^n$ tal que

- $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$.
- Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, entonces o bien $T_i \cap T_j$ es un lado común a T_i y a T_j o consta de un vértice a T_i y T_j.

Dada una triangulación $\mathcal{T}$ de una región regular R de una superficie S, denotaremos por:

- F al número de triángulos (caras),
- E el número de lados (aristas), y por
- V el número de vértices de la triangulación.

El número

$$F - E + V = \chi,$$

se le denomina la ***característica de Euler-Poincaré*** de $\mathcal{T}$.

Por ejemplo, si consideramos el triángulo $\mathcal{T}$ dado en la Figura 5.14 se tiene que $F = 1$, $E = 3$, y $V = 3$, por lo tanto,

$$\chi(\mathcal{T}) = 1,$$

de esta manera la característica de Euler-Poincaré de una región simple es también igual a 1.

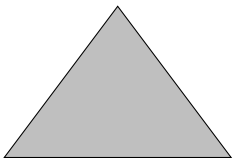


Figura 5.14: El triángulo $\mathcal{T}$ es una región simple

A continuación presentamos las siguientes proposiciones que hacen posible abordar este y el ejemplo que damos enseguida, las demostraciones de estas propociones pueden consultarse en [1, Cap.1].

Proposición 5.1. *Toda región regular R de una superficie regular S admite una triangulación.*

Proposición 5.2. *Si $R \subseteq S$ es una región regular de una superficie regular S, la característica de Euler-Poincaré no depende de la triangulación de R. De esta forma, es conveniente, por lo tanto, denotarla como $\chi(R)$.*

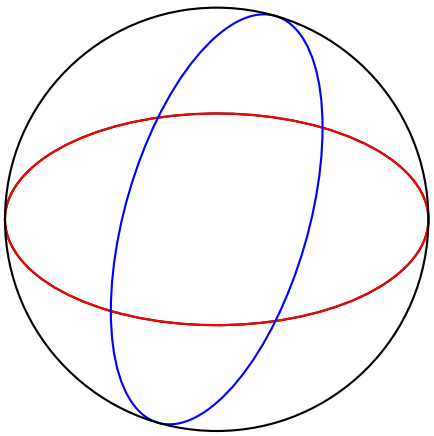


Figura 5.15: Triangulación de $\mathbb{S}^2$

En el caso de $\mathbb{S}^2$ tenemos que $F = 8$, $E = 12$ y $V = 6$, por lo tanto

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Proposición 5.3. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie conexa, compacta y orientable; entonces uno de los valores $2, 0, -2, \ldots, -2n, \ldots$ es tomado por la característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$. Además, si $S' \subseteq \mathbb{R}^3$ es otra superficie compacta y $\chi(S) = \chi(S')$, entonces S es homeomorfa a S'.*

Definición 5.25. *El número*

$$\mathcal{G} = \frac{2 - \chi(S)}{2},$$

es llamado el ***género*** *de S.*

En esencia el género de una superficie S mide su complejidad topológica, específicamente, el número de "agujeros" o "asas" de una superficie. Para comprender esto, veremos algunos ejemplos, primero, comenzaremos con $\mathbb{S}^2$, la cual es de género $\mathcal{G} = 0$, es decir, no tiene agujeros, pero, por otro lado, la superficie del Toro de revolución (ver la Figura 5.16) tiene género $\mathcal{G} = 1$, es decir, tiene un agujero.

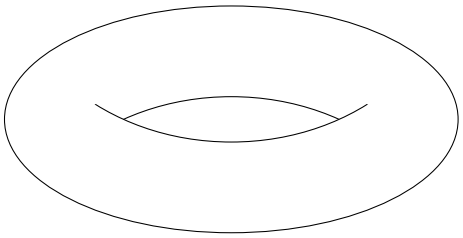


Figura 5.16: Toro de revolución

De esta manera, la superficie del Toro se puede pensar como la esfera con una asa, justo como lo ilustra la Figura 5.17.

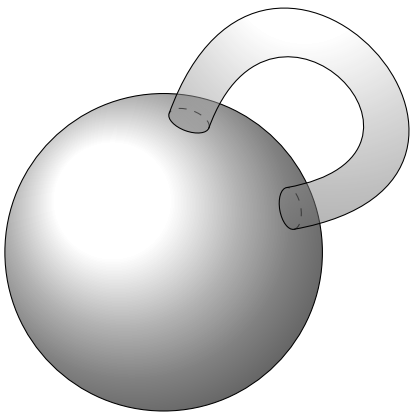


Figura 5.17: Esfera con una asa

Así, nos podemos convencer que un $n-$Toro lo podemos pensar como una esfera con $n-$asas.

Finalmente, hablaremos de la ***relación de Riemann*** que establece una conexión entre el número de polos y ceros de un diferencial meromorfo ω en una superficie de Riemann $\mathcal{M}$ y su género $\mathcal{G}$, específicamente nos dice que

$$\text{Número de polos de } \omega - \text{Número de ceros de } \omega = 2 - 2\mathcal{G} = \chi(\mathcal{M}).$$

Para consultar la teoría necesaria para comprender esta última afirmación recomendamos consultar [1, Cap.5, §27A].

Estos últimos resultados de los cuales hemos hecho mención, constituyen los preliminares necesarios para tratar el siguiente resultado.

Teorema 5.10 (**Desigualdad de Chern-Osserman**). *Sea S una superficie minimal regular completa en $\mathbb{R}^3$. Entonces*

$$\iint_S K dA \leq 2\pi(\chi(S) - k), \tag{5.42}$$

donde k es el número de componentes en la frontera de S.

Demostración. Si $\iint_S K dA$ diverge a $-\infty$ el resultado se sigue, pues

$$-\infty = \iint_S K dA \leq 2\pi(\chi(S) - k).$$

En caso contrario, S tiene una curvatura total finita, y de esta manera aplicando el Teorema 5.8 y el Lema 5.20, tendremos que existe una superficie compacta $\widetilde{S}$, un número finito de puntos $\{p_1, \ldots, p_k\}$ y una isometría entre S y $\widetilde{S} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$. Además, la función g dada en (5.33) se extiende a una función meromorfa en $\widetilde{S}$. Ahora, en virtud de la relación entre la función g y las normales a S dada por N en (5.18), podemos suponer (tras una rotación en el espacio) que $g \neq 0, \infty$ en los puntos p_j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, y que los polos de g son todos polos simples.

En una vecindad $\mathcal{V}(p)$ con $p \in \mathcal{M} = \widetilde{\mathcal{M}} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ podemos tomar la representación (5.12) en términos de parámetros isotérmicos ζ, y como hemos señalado anteriormente, bajo una función conforme de parámetros $\zeta(\tilde{\zeta})$, las funciones $\widetilde{\phi}_k(\tilde{\zeta})$ satisfacen $\widetilde{\phi}_k(\tilde{\zeta}) = \phi_k(\zeta)\dfrac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}}$ con $k = 1, 2, 3$, y de manera similar con la función analítica $f(\zeta)$. Esto implica la existencia de un cero para ϕ_k o de f en un punto, así como su orden, es independiente de la elección de los parámetros locales. Ahora bien, por el Lema 5.12, tenemos que f tiene el doble de ceros en cada uno de los polos simples de g, y que f solo tiene esos ceros. Así, si g es de orden m en $\widetilde{\mathcal{M}}$, f tiene exactamente $2m$ ceros en $\mathcal{M}$.

Ahora, en cada punto p_j podemos introducir las coordenadas locales ζ de tal forma que $\zeta = 0$ le corresponda p_j para algún j. Para $0 < |\zeta| < \epsilon$ se tiene que $|g| < M$ con M una constante, y así $f \neq 0$. Además, si C es una curva en $\mathcal{M}$ que tiende a p_j, por la completitud de S se tiene

$$\infty = \int_C \lambda |d\zeta| = \frac{1}{2}\int_C |f|(1 + |g|^2)|d\zeta| \leq \frac{1 + M^2}{2}\int_C |f||d\zeta|,$$

y de esto último, con base al Lema 5.21, se deduce que f debe tener un polo en el origen.

Dado que las funciones $x_k(\zeta)$ en (5.16) toman un solo valor en $0 < |\zeta| < \epsilon$, y debido a la suposición de que $g(p_j) \neq 0$, se deduce que el orden v_j del polo de f en p_j es al menos 2. Entonces $f(z)d\zeta$ es una forma diferenciable meromorfa en $\widetilde{\mathcal{M}}$, y con ello tenemos la

relación de Riemann, que nos dice que el número de polos menos el número de ceros es igual a $\chi\left(\widetilde{S}\right) = 2 - 2\mathcal{G}$ donde $\mathcal{G}$ es el género de $\widetilde{S}$. Por otro lado, notemos que la característica de Euler-Poincaré de S es igual con

$$\chi(S) = \chi\left(\widetilde{S}\right) - k = 2 - 2\mathcal{G} - k,$$

de esta manera obtenemos

$$2 - 2\mathcal{G} = \sum_{j=1}^{k} v_j - 2m \geq 2k - 2m, \tag{5.43}$$

y por otro lado

$$\iint_S K dA = -4\pi m \leq 2\pi(2 - 2\mathcal{G} - 2k) = 2\pi(\chi(S) - k).$$

■

El siguiente teorema, es consecuencia de la desigualdad de Chern-Osserman vista anteriormente.

Teorema 5.11. *Solo hay dos superficies minimales regulares completas cuya curvatura total es -4π. Estas son la Catenoide y la superficie de Enneper.*

Demostración. Este es el caso particular $m = 1$ en el Teorema 5.9, esto significa que la función meromorfa g es de orden 1, lo cual nos diría que, transforma $\widetilde{\mathcal{M}}$ de manera conforme en la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$, de esta manera, $\chi\left(\widetilde{\mathcal{M}}\right) = 2$ y por tanto $\widetilde{\mathcal{M}}$ es de género $\mathcal{G} = 0$ y la desigualdad (5.43) se reduce a que $2 \geq k$, por lo tanto, podemos elegir a $\mathcal{M}$ de modo que sea $\mathbb{S}^2$ menos uno o dos puntos. Sin embargo, ya que g es inyectiva y localmente invertible, g es un difeomorfismo, por lo que podemos introducir parámetros conformes en $\mathcal{M}$ utilizando g^{-1}, esto es equivalente a considerar a $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathbb{S}^2 = \overline{\mathbb{C}}$ y $g(z) = z$.

Como a $\mathcal{M}$ la estamos considerando como $\mathbb{S}^2$ menos uno o dos puntos analizamos los siguientes casos:

Caso (I) Si $\mathcal{M}$ es $\mathbb{S}^2$ menos un punto, podemos suponer que $\mathcal{M} = \mathbb{C}$, y en virtud del Lema 5.21, $f(z)$ es una función racional sin polos en $\mathbb{C}$. Por otro lado, $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$ (de otra forma, la métrica en $\mathcal{M}$ sería singular), por lo tanto, f es constante, y la superficie obtenida a partir de la representación de Weierstrass es la superficie de Enneper, como lo vimos en el §5.2 del presente capítulo.

Caso (II) Si $\mathcal{M}$ es $\mathbb{S}^2$ menos dos puntos, podemos suponer que $\mathcal{M} = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, nuevamente por el Lema 5.21, $f(z)$ es una función racional que además tiene un polo en $z = a$ (pues si no fuera el caso, la métrica en $\mathcal{M}$ no sería completa). Por otro lado, $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{C}$, pues en caso contrario la métrica en $\mathcal{M}$ sería singular. Entonces, $f(z) = \dfrac{c}{(z-a)^n}$, en donde asumimos que a es un valor real, y como consecuencia de la prueba del Teorema 5.11, $n \geq 2$. Ya que cualquier curva que diverga a ∞ tiene longitud infinita, tenemos que $n = 2$ o $n = 3$.

Ahora bien, tenemos dos casos posibles $n = 2$ o $n = 3$, para concluir en cual caso estamos, procedemos a calcular los períodos de las funciones dadas en la representación de Enneper (5.12), comencemos con el caso $n = 3$. Así, dada $\epsilon > 0$, consideremos la curva $|z - a| = \epsilon$, sobre la cual integraremos, de esta manera analizado la expansión en series de Laurent de las funciones $\phi_i(z)$, $i = 1, 2, 3$ alrededor de $z = a$ se tiene que

$$\phi_1(z) = \frac{c(1 - z^2)}{(z - a)^2},$$

tomando a $z = a + (z - a)$, se sigue que

$$z^2 = (a + (z - a))^2 = a^2 = 2a(z - a) + (z - a)^2,$$

por lo que al sustituir en la expresión de $\phi_1(z)$ original se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \frac{c}{2}\left(\frac{1 - a^2 - 2a(z - a) - (z - a)^2}{(z - a)^3}\right) \\ &= \frac{c}{2}\left(\frac{1 - a^2}{(z - a)^3} - \frac{2a}{(z - a)^2} - \frac{1}{z - a}\right), \end{aligned}$$

la cual corresponde a la serie de Laurent de $\phi_1(z)$ alrededor de $z = a$, en donde, como podemos observar, se tiene que su residuo es $b_1 = -\frac{c}{2}$, de esta manera

$$\int_{|z-a|=\epsilon} \phi_1(z)dz = 2\pi i\left(-\frac{c}{2}\right) = -ic\pi.$$

Siguiendo este mismo procedimiento tenemos que la serie de Laurent alrededor de $z = a$ de

$$\phi_2(z) = \frac{ic(1 + z^2)}{(z - a)^3},$$

corresponde a

$$\phi_2(z) = \frac{ic}{2}\left(\frac{1 + a^2}{(z - a)^3} + \frac{2a}{(z - a)^2} + \frac{1}{z - a}\right),$$

en donde, su residuo es $b_1 = \dfrac{ic}{2}$, de esta manera

$$\int_{|z-a|=\epsilon} \phi_2(z)dz = 2\pi i\left(\frac{ic}{2}\right) = -\pi c.$$

Para

$$\phi_3(z) = \frac{cz}{(z - a)^3},$$

notemos que tampoco es posible aplicar el Teorema de Cauchy, pues precisamente $z = a$ es una singularidad. Así, procedemos como anteriormente, observando que al tomar $z = a + (z - a)$ su expansión en series de Laurent de $\phi_3(z)$ es

$$\phi_3(z) = c\left(\frac{a}{(z - a)^3} + \frac{1}{(z - a)^2}\right),$$

en lo que nos resta observar que su residuo $b_1 = 0$, por tanto

$$\int_{|z-a|=\epsilon} \phi_3(z)dz = 0.$$

Con lo anterior hemos calculado parte de los períodos reales de las funciónes $\phi_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, pero de la definición tenemos que para que esto suceda debe de suceder que $c = 0$, lo cual no es posible, pues $f(z) = 0$, lo que contradice nuestra afirmación previa.

En cuanto a nuestros casos, si $n = 2$, procedemos como anteriormente y vemos que

$$\int_{|z-a|=\epsilon} \phi_1(z)dz = \int_{|z-a|=\epsilon} \frac{c(1-z^2)}{2(z-a)^2}dz = -2iac\pi,$$

$$\int_{|z-a|=\epsilon} \phi_2(z)dz = \int_{|z-a|=\epsilon} \frac{ic(1+z^2)}{(z-a)^2}dz = -2ca\pi,$$

y

$$\int_{|z-a|=\epsilon} \phi_3(z)dz = \int_{|z-a|=\epsilon} \frac{cz}{(z-a)^2}dz = 0.$$

Siendo la única posibilidad para tener períodos reales que $a = 0$, de esta manera la superficie obtenida en la representación de Ennerper (y consecuentemente en la respresentación de Weierstrass) es $g(z) = z$ y $f = \frac{c}{z^2}$, la cual corresponde a la superficie de la Catenoide, como lo vimos en la sección §5.2 de este capítulo, concluyendo de esta manera la demostración de esta caracterización de estas superfices minimales con curvatura total finita. ■

Como aplicación del resultado anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 5.2. *La superficie de Enneper y la Catenoide son las únicas dos superficies minimales regulares completas cuya aplicación de Gauss es inyectiva.*

Demostración. Si la aplicación de Gauss es inyectiva, entonces la curvatura total siendo el negativo del área de la imagen satisface

$$-4\pi \leq \iint_S KdA < 0,$$

por el Teorema 5.9, la igualdad se mantiene a la izquierda y el resultado se sigue por el Teorema 5.11. ■

Definición 5.26. *Un **extremo** de una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una parte de la superficie que es homeomorfa a un disco agujerado en su centro, tal que cada curva en este disco que diverge hacia su centro tiene longitud infinita.*

Sea $\widetilde{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compacta, $\{p_1, \ldots, p_k\}$ un conjunto finito de puntos en $\widetilde{S}$ y $X : \widetilde{S} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie minimal completa. Si $D \subseteq \widetilde{S}$ es una vecindad de p_j para algún $1 \leq j \leq k$, entonces la imagen $X(D \setminus \{p_j\})$ de $D \setminus \{p_j\}$ bajo X es un extremo de $X(\widetilde{S} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\})$, el cual denotaremos por E_j. De esta manera $X(\widetilde{S} \setminus \{p_1, \ldots, p_k\})$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$ con k extremos.

Extremos de la Catenoide

La Catenoide es un ejemplo de superficie minimal completa en $\mathbb{R}^3$ con dos extremos. Para ver esto, consideremos la intersección de la Catenoide S con una esfera de radio $r > 0$ y centro en el origen, $\mathbb{S}^2_r$.

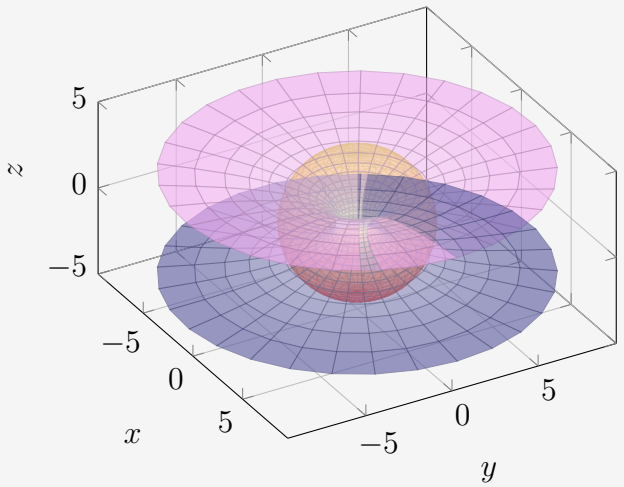


Figura 5.18: Intersección de la Catenoide con $\mathbb{S}^2_r$

Los extremos de la Catenoide están dados por las dos componentes E_1 y E_2 de $S \backslash \mathbb{S}^2(r)$, los cuales se encuentran en el exterior de $\mathbb{S}^2_r$.

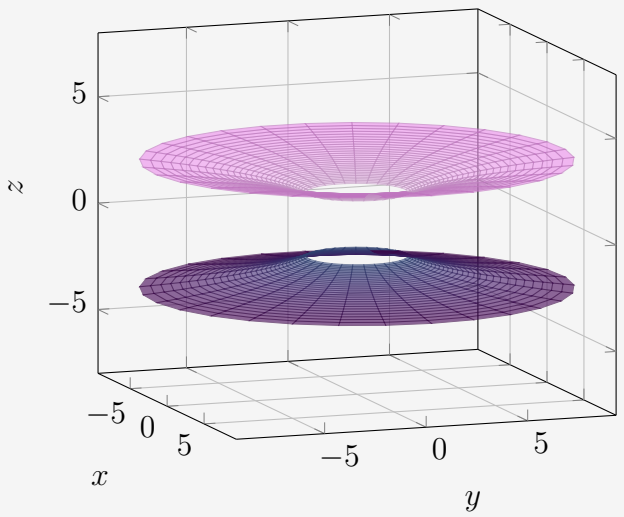


Figura 5.19: Extremos de la Catenoide

Como hemos visto la Catenoide puede ser descrita por la función $X : \widehat{S} \setminus \{p_1, p_2\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\widehat{S}$ es la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$, y donde la aplicación de Gauss $g : \mathbb{S}^1 \setminus \{p_1, p_2\} \longrightarrow \mathbb{S}^2$ se extiende de manera conforme a $\mathbb{S}^2$, en este sentido, decimos que la Catenoide tiene un vector normal bien definido en el infinito en cada extremo.

Ahora bien, si γ_r representa la intersección de la Catenoide con la esfera $\mathbb{S}^2_r$, el cociente

$\frac{\gamma_r}{r}$ representan puntos sobre $\mathbb{S}^2$ que convergen al ecuador de $\mathbb{S}^2$, cuando $r \to \infty$. Este último hecho nos lleva a la conclusión de que la Catenoide vista desde el infinito parece dos copias de un plano que pasa por el origen con orientaciones opuestas.

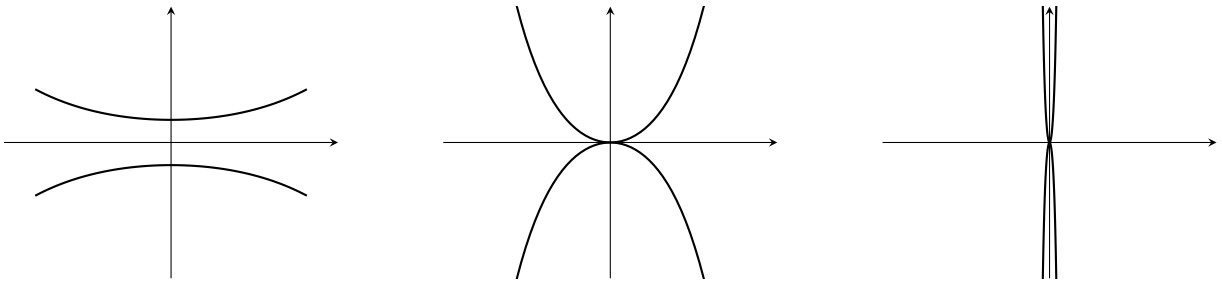


Figura 5.20: Perfiles de la Catenoide a medida que nos movemos hacia el infinito.

Recordemos que una curva en $\mathbb{R}^3$ es una función diferenciable $\alpha : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),$$

para la cual definimos el vector velocidad de α en t como

$$\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), x_3'(t)),$$

y decimos que α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para cada $t \in (a,b)$. Por otro lado, considerando lo anterior, la rapidez de α en t es

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i'(t))^2},$$

también definimos anteriormente la longitud de arco de α desde $t = a$ hasta $t = b$ como

$$\int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

En ocasiones, en geometría sobre todo, lo que nos interesa es la trayectoria que sigue una curva y no la rapidez particular con la que la recorre. Para evitar la influencia de la rapidez de una curva α la reparametrizamos a una curva β de tal forma que $|\beta'(t)| = 1$. De lo anterior tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [9, Cap.1, §1.3, p.8].

Teorema 5.12 (**Reparametrización por Longitud de Arco**). *Dada $\alpha : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular, existe un parametrización β de α tal que $|\beta'(t)| = 1$. Si sucede lo anterior, diremos que la curva β está parametrizada por longitud de arco, pues la longitud de arco de β desde $s = a$ hasta $s = b$ (donde $a \leq b$) es $b - a$.*

Sea $\alpha : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco (esto es $|\alpha'(s)| = 1$ para cada $s \in (a,b)$). Apegandonos a la notación dada en (1.24) escribimos $T(s) := \alpha'(s)$, el cual se llama vector tangene de α en t. Como $T(s)$ es tal que $|T(s)| = 1$, $T'(s) = \alpha''(t)$

mide la manera en la que curva α cambia de dirección en $\mathbb{R}^3$. Como $T(s) \cdot T(s) = 1$, al derivar, tenemos $2T(s) \cdot T(s) = 0$ y, por lo tanto, $T'(s) \perp T(s)$, esto es, $T'(s)$ es normal a α.

A la cantidad $\kappa(s) = |T'(s)|$ se llama función curvatura de α. Nótese que $\kappa \geq 0$ y, a medida de que κ es mayor, α se curva más (esto es, da vueltas más pronunciadas en $\mathbb{R}^3$). Cuando $\kappa \neq 0$ definimos $n(s) = \dfrac{T'(s)}{\kappa}$, que nos da la dirección en que α da vuelta en cada punto, este vector $n(s)$ se llama normal principal de α, pues:

$$|n(s)| = \frac{1}{\kappa}|T'(s)| = \frac{1}{\kappa}\kappa = 1, \text{ y } n(s) \perp T(s), \text{ por construcción.}$$

Finalmente, definimos al vector binormal de α como $b(s) = T(s) \times n(s)$. De esta manera, $\{T(s), n(s), b(s)\}$ consta de una base ortonormal, constituyendo de esta manera un sistema de referencia natural de la curva α en cada punto.

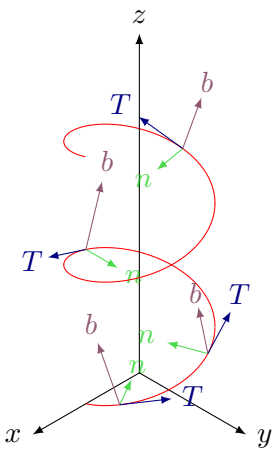


Figura 5.21: Triedro de Frenet-Serret

De lo anterior se deduce el siguiente resultado importante, cuya demostración puede consultarse en [9, Cap.1, §1.5, pp.18-19].

Teorema 5.13 (**Fórmulas de Frenet-Serret**). *Sea* $\alpha : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una curva parametrizada por longitud de arco, con* $\kappa \geq 0$. *Entonces, existe una función* τ *tal que*

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa n(s) \\ n'(s) &= -\kappa T(s) - \tau b(s) \\ b'(s) &= -\tau n(s), \end{aligned}$$

donde κ *es la función de curvatura de* α *y donde* τ *se llama torsión de la curva* α.

Sean $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco, entonces γ' es un vector unitario y además es por definición un vector tangente a S. De esta manera, γ' es perpendicular al vector normal a la superficie N, por lo que γ', N y $N \times \gamma'$ son vectores unitarios ortogonales entre sí. Nuevamente, dado que la curva γ está parametrizada por longitud de arco, γ'' es perpendicular a γ', y por tanto es una combinación lineal de los vectores N y $N \times \gamma'$:

$$\gamma'' = \kappa_n N + \kappa_g N \times \gamma'.$$

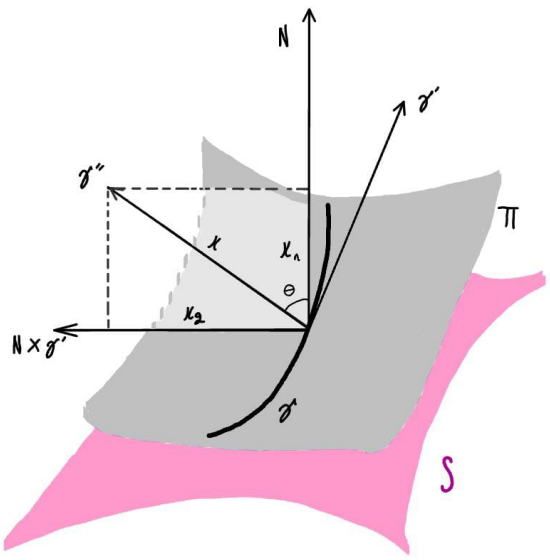


Figura 5.22: Curvatura geodésica y curvatura normal de la curva γ

Definición 5.27. *Los escalares κ_n y κ_g en la expresión anterior son llamadas la* ***curvatura normal*** *y la* ***curvatura geodésica*** *de la curva γ respectivamente.*

De la Figura 5.22 se deduce la siguiente proposición.

Proposición 5.4. *Con la notación anterior, se tiene que*

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \gamma'' \cdot N, \quad \kappa_g = \gamma'' \cdot (N \times \gamma'), \\ \kappa^2 &= \kappa_n^2 + \kappa_g^2, \\ \kappa_n &= \kappa \cos(\theta), \quad \kappa_g = \pm \kappa \sin(\theta), \end{aligned}$$

en donde κ es la curvatura de curva γ y θ es el ángulo entre N y el vector normal principal n de γ.

Con estas últimas definiciones, podemos incluir en este trabajo una clase especial de curvas sobre una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$, a saber, aquellas que minimizan la distancia entre dos puntos, las cuales son llamadas geodésicas, cuya definición formal es la siguiente.

Definición 5.28. *Una curva $\gamma : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por longitud de arco se dice que es una* ***geodésica*** *si su curvatura geodésica κ_g es cero.*

Y como ejemplo de estas, tenemos en el plano las líneas rectas y en $\mathbb{S}^2$ los círculos máximos (como los indicados en la Figura 5.15), y como veremos en el Capítulo 6, algunas superficies tienen algunas geodésicas especiales.

Inspirado en los extremos de la Catenoide y de estas últimas definiciones se tiene el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en [12, pp.203-221].

Teorema 5.14. *Sea S una superficie completa en $\mathbb{R}^3$, difeomorfa a $\widehat{S}\setminus\{p_1,\ldots,p_k\}$, donde $\widehat{S}$ es una superficie compacta orientable, tal que su aplicación de Gauss se extiende de manera continua a $\widehat{S}$. Si $\gamma_r = S\cap\mathbb{S}^2_r$, entonces $\dfrac{\gamma_r}{r}$ consiste de curvas cerradas $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$ en $\mathbb{S}^2$ que convergen a geodésicas cerradas $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ de $\mathbb{S}^2$, con multiplicidades $I_1,\ldots,I_k$, cuando $r\to\infty$.*

En el teorema anterior, la hipótesis de que S se difeomorfa a una superficie compacta menos k puntos significa que S tiene k extremos, por otro lado, la condición acerca de la aplicación de Gauss es equivalente a decir que S tiene un vector normal bien definido en el infinito en cada uno de sus extremos. Si E_j representa el extremo de S correspondiente al punto p_j, esto es, E_j es la imagen de una vecindad agujerada de p_j en $\widehat{S}$, la idea del teorema es que, si uno está suficientemente cerca de p_j en $\widehat{S}$, entonces el plano tangente a $\widehat{S}$ en p_j está suficientemente cercano al plano perpendicular a p_j que pasa por el origen. Para establecer el sentido de cercanía consideramos el cociente $\dfrac{\gamma_r}{r}$ y hacemos tender $r\to\infty$. Finalmente, como consecuencia de este teorema, tenemos que una superficie minimal completa en $\mathbb{R}^3$ con curvatura total finita, vista desde el infinito, luce como k planos que pasan por el origen, donde cada uno de estos planos corresponde a un extremo de S.

Con ayuda de lo anterior, estamos listos para abordar el último resultado de esta sección, el cual nos da una interpretación geométrica de la desigualdad de Chern-Osserman, pero, para poder llegar a ello, necesitamos mencionar un último resultado preliminar que no podía quedarse fuera de este trabajo: el Teorema de Gauss-Bonnet, cuya demostración puede consultarse en [9, Cap.4, pp.277-279].

Teorema 5.15 (**Gauss-Bonnet**). *Sean $R\subseteq S$ una región regular de una superficie orientada y $C_1,\ldots,C_n$ las curvas cerradas simples, regulares por partes, orientadas positivamente, y parametrizadas por longitud de arco con curvatura geodésica κ_g que forman la frontera ∂R. Si $\theta_1,\ldots,\theta_p$ son los ángulos externos a las curvas $C_1,\ldots,C_n$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i}\kappa_g(s)\,ds+\iint_R K\,d\sigma+\sum_{i=1}^{p}\theta_i=2\pi\chi(R).$$

Con $\chi(R)$ la característica de Euler-Poincaré de la región $R\subseteq S$.

Teorema 5.16 (**Jorge-Meeks**). *Sea S una superficie minimal completa en $\mathbb{R}^3$ con curvatura total $-4\pi m$ y con k extremos (es decir, S es difeomorfa a $\widehat{S}\setminus\{p_1,\ldots,p_k\}$, donde $\widehat{S}$ es una superficie compacta). Entonces*

$$2m=\sum_{j=1}^{k}I_j-\chi(S)\geq k-\chi(S).$$

donde I_j es la multiplicidad del extremo E_j correspondiente al punto p_j.

Demostración. Del Teorema 5.14, para cada extremo E_j de S, se tiene que

$$\Gamma^j_r=\frac{E_j\cap\mathbb{S}^2_r}{r}$$

es una curva cerrada en $\mathbb{S}^2$ y

$$\lim_{r\to\infty} \Gamma_r^j = \gamma^j,$$

donde γ^j es una geodésica cerrada en $\mathbb{S}^2$ con multiplicidad I_j, y así, la curvatura total de Γ_r^j converge a la curvatura total de γ^j, la cual es $2\pi I_j$.

Sea $B_r(0)$ la bola abierta de radio $r > 0$ y centro en el origen, y consideremos

$$S_r = \frac{S \cap B_r(0)}{r},$$

por el Teorema 5.14, se tiene que el plano de γ^j y el plano tangente de E_j coinciden en el infinito, esto último nos dice que cuando $r \to \infty$, la curvatura geodésica total de Γ_r^j, como de la frontera de S_r, convergen a la curvatura geodésica total $2\pi I_j$ de γ^j, es decir,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r^j} \kappa_g(s)ds = 2\pi I_j.$$

Aplicando el Teorema de Gauss-Bonnet a S_r obtenemos que

$$\iint_{S_r} K d\sigma + \sum_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_r^j} k_g(s)ds = 2\pi\chi(S_r) = 2\pi\chi(S).$$

Cuando $r \to \infty$, esto se simplifica como

$$2\pi\chi(S) = \iint_S K d\sigma + 2\pi \sum_{j=1}^{k} I_j.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S K d\sigma = 2\pi \left(\chi(S) - \sum_{j=1}^{k} I_j \right).$$

Dado que $\iint_S K d\sigma = -4\pi m$, se obtiene

$$2m = \sum_{j=1}^{k} I_j - \chi(S) \geq k - \chi(S),$$

donde hemos utilizado que $I_j \geq 1$. ■

Dadas $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ variedades diferenciables, decimos que una función diferenciable $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ es un encaje (inmersión) si su diferencial es inyectiva y f define un homeomorfismo sobre su imagen con la topología inducida por $\mathcal{N}$. En el teorema anterior, si los extremos son inmersiones, lo que geométricamente nos hace pensar en que están encajados en el espacio de manera suave, se tendría que $I_j = 1$ para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, esto es, la igualdad se cumple si y sólo si cada extremo E_j es una inmersión para cada $j = 1, 2, \ldots, k$.

Concluimos este capítulo con un ejemplo de superficie minimal en $\mathbb{R}^3$ de género cero y con n extremos, para $n \in \mathbb{N}$, tal superficie fue descubierta por Jorge y Meeks, por lo que, se le llama la superficie de Jorge-Meeks.

Superficie de Jorge-Meeks

Tomemos a $\widetilde{S} = \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y para $n \geq 1$, sea $S = \widetilde{S} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^{n+1} = 1\}$. Definimos las funciones

$$g(z) = \begin{cases} z^n, & \text{si } z \neq \infty \\ \infty, & \text{si } w = \infty, \end{cases}$$

y

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z^{n+1}-1)^2}, & \text{si } z \neq \infty \\ 0, & \text{si } w = \infty. \end{cases}$$

Para $z \neq \infty$, se tiene de la representación de Enneper (5.12) que

$$\phi_1(z) = \frac{1 - z^{2n}}{2(z^{n+1}-1)^2},$$

$$\phi_2(z) = \frac{i(1 + z^{2n})}{2(z^{n+1}-1)^2},$$

$$\phi_3(z) = \frac{z^n}{(z^{n+1}-1)^2},$$

mientras que para $z = \infty$ estas funciones se anulan.

Aplicaremos el Lema 5.12 para obtener una superficie minimal, para ello, observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \phi_i^2(z) &= \left(\frac{1 - z^{2n}}{2\left(z^{n+1}-1\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{i\left(1 + z^{2n}\right)}{2\left(z^{n+1}-1\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{z^n}{\left(z^{n+1}-1\right)^2}\right)^2 \\ &= \frac{\left(z^{2n}-1\right)^2}{4\left(z^{n+1}-1\right)^4} - \frac{\left(1 + z^{2n}\right)^2}{4\left(z^{n+1}-1\right)^4} + \frac{z^{2n}}{\left(z^{n+1}-1\right)^4} = 0, \end{aligned}$$

y al tomar módulos

$$\sum_{i=1}^{3} |\phi_i(z)|^2 > 0.$$

De esta manera tenemos la superficie minimal

$$X = (x_1, x_2, x_3) : S \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

donde

$$x_i = \operatorname{Re}\left\{\int_0^z \phi_i(z)dz\right\} \text{ para } i = 1, 2, 3,$$

y en donde su aplicación de Gauss estará dada por g.

Veamos que $\phi_i(z)$ no tiene períodos reales en S para $i = 1, 2, 3$. Observese que los polos de $\phi_i(z)$ para $i = 1, 2, 3$, ocurren cuando $2(z^{n+1} - 1)^2 = 0$, esto es, cuando $z^{n+1} - 1 = 0$, o lo que es lo mismo $z^{n+1} = 1$, esto último nos dice que los polos de las funciones $\phi_i(z)$ son las $(n+1)-$ésimas raíces de la unidad, de esta manera, para mostrar que $\phi_i(z)$ no tiene períodos reales es suficiente con mostrar que las funciones

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1 - z^{2n}}{2(z^{n+1} - 1)^2}, \\ H_2(z) &= \frac{i(1 + z^{2n})}{2(z^{n+1} - 1)^2}, \\ H_3(z) &= \frac{z^n}{(z^{n+1} - 1)^2}, \end{aligned}$$

tienen residuos reales en $z = \rho$, cuando $\rho^{n+1} = 1$.

• Cálculo del residuo de H_1 en $z = \rho$.

◇ Caso I. Si $\rho = \pm 1$. Notemos que $\rho = \pm 1$ si y sólo si $\rho^{2n} = 1$. De esta manera

$$\begin{aligned} 1 - z^{2n} &= \rho^{2n} - z^{2n} = (\rho - z)\sum_{j=1}^{2n} \rho^{2n-j} z^{j-1}, \\ z^{n+1} - 1 &= z^{n+1} - \rho^{n+1} = (z - \rho)\sum_{j=0}^{n} \rho^{n-j} z^j. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{(\rho - z)\sum_{j=1}^{2n} \rho^{2n-j} z^{j-1}}{2(z-\rho)^2 \left(\sum_{j=0}^{n} \rho^{n-j} z^j\right)^2} \\ &= -\frac{(z - \rho)\sum_{j=1}^{2n} \rho^{2n-j} z^{j-1}}{2(z-\rho)^2 \left(\sum_{j=0}^{n} \rho^{n-j} z^j\right)^2} \\ &= -\frac{\sum_{j=1}^{2n} \rho^{2n-j} z^{j-1}}{2(z-\rho) \left(\sum_{j=0}^{n} \rho^{n-j} z^j\right)^2}, \end{aligned}$$

por lo que al tomar

$$G_1(z) = \frac{\sum_{j=1}^{2n} \rho^{2n-j} z^{j-1}}{\left(\sum_{j=0}^{n} \rho^{n-j} z^j\right)^2}$$

se sigue que

$$H_1(z) = -\frac{G_1(z)}{2(z - \rho)}.$$

Ahora, note que si $z=\rho$, entonces

$$\begin{aligned} G_1(\rho) &= \frac{\sum_{j=1}^{2n}\rho^{2n-j}\rho^{j-1}}{\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}\rho^{j}\right)^2} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{2n}\rho^{2n-1}}{\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n}\right)^2} \\ &= \frac{2n\rho^{2n-1}}{\left((n+1)\rho^n\right)^2} \\ &= \frac{2n\rho^{2n-1}}{(n+1)^2\rho^{2n}} \\ &= \frac{2n}{(n+1)\rho}. \end{aligned}$$

De esta manera $z=\rho$ es un polo de orden uno de $H_1(z)$, por lo que

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=\rho}H_1(z) &= \lim_{z\to\rho}(z-\rho)\left(-\frac{G_1(z)}{2(z-\rho)}\right) \\ &= -\frac{G_1(\rho)}{2} \\ &= -\frac{2n}{2(n+1)^2\rho} \\ &= \pm\frac{n}{(n+1)^2}, \quad \text{pues } \rho=\pm 1. \end{aligned}$$

$\diamond$ Caso II. Si $\rho\neq 1$, podemos reescribir a $H_1(z)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1-z^{2n}}{2(z-\rho)^2\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}z^j\right)^2} \\ &= \frac{1}{2(z-\rho)^2}G_1(z). \end{aligned}$$

Donde en la expresión anterior

$$G_1(z)=\frac{1-z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}z^j\right)^2}.$$

Evaluando en $z=\rho$, se tiene que el cociente

$$G_1(\rho)=\frac{1-\rho^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}\rho^{j}\right)^2}=\frac{1-\rho^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n}\right)^2}=\frac{1-\rho^{2n}}{\rho^{2n}(n+1)^2}$$

es finito y distinto de cero, por tanto, $z=\rho$ es un polo de orden 2 de $H_1(z)$, se sigue entonces que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=\rho}H_1(z) &= \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}\frac{1-z^{2n}}{\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}z^j\right)^2}\right]_{z=\rho} \\
&= \left[\frac{-2nz^{2n-1}}{2\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}z^j\right)^2} - \frac{2\left(1-z^{2n}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\rho^{n-j}z^{j-1}\right)}{2\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}z^j\right)^3}\right]_{z=\rho} \\
&= -\frac{2n\rho^{2n-1}}{2\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}\rho^j\right)^2} - \frac{2\left(1-\rho^{2n}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j\rho^{n-j}\rho^{j-1}\right)}{2\left(\sum_{j=0}^{n}\rho^{n-j}\rho^j\right)^3} \\
&= -\frac{2n\rho^{2n-1}}{2\rho^{2n}(n+1)^2} - \frac{2\left(1-\rho^{2n}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\rho^{n-1}\right)}{2(n+1)^3\rho^{3n}} \\
&= -\frac{n}{\rho(n+1)^2} - \frac{n\left(1-\rho^{2n}\right)\rho^{n-1}}{2(n+1)^2\rho^{3n}} \\
&= -\frac{n}{2(n+1)^2}\left(2\rho^{-1} + \frac{1-\rho^{2n}}{\rho^{2n+1}}\right) \\
&= -\frac{n}{2(n+1)^2}\frac{\rho^{2n}+1}{\rho^{2n+1}}.
\end{aligned}
$$

Ya que $\rho^{n+1}=1$, $\rho^n=\rho^{-1}$, se tiene

$$
\mathrm{Res}_{z=\rho}H_1(z) = -\frac{n}{2(n+1)^2}(\rho+\bar{\rho}) = -\frac{n\mathrm{Re}\{\rho\}}{(n+1)^2}.
$$

Por lo tanto, los residuos de $H_1(z)$ son reales.

• Para el cálculo de los residuos de $H_2(z)$ en $z=\rho$, procedemos como anteriormente, solo que ahora consideramos los casos cuando $\rho=\pm i$ y $\rho\neq\pm i$, obteniendo que $\mathrm{Res}_{z=\pm i}H_2(z)=\pm\frac{n}{(n+1)^2}$ y $\mathrm{Res}_{z=\rho}H_2(z)=\frac{n\mathrm{Im}\{\rho\}}{(n+1)^2}$, respectivamente. En ambos casos, los residuos de $H_2(z)$ son reales.

• Finalmente, para el cálculo de los residuos de $H_3(z)$ en $z=\rho$, observamos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
H_3(z) &= \frac{z^n}{\left(z^{n+1}-1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{n+1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^{n+1}-1}\right).
\end{aligned}
$$

Por lo que, para cada ρ que satisfaga que $\rho^{n+1}=1$, se tiene que

$$
\mathrm{Res}_{z=\rho}H_3(z)=0.
$$

De lo anterior, concluimos que $\phi_i(z)$ no tiene períodos reales en S para cada $i=1,2,3$.

Por otro lado, afirmamos que S con la métrica inducida es completa. La métrica sobre S está dada por

$$\frac{1+|z^n|^2}{|z^{n+1}-1|^2\sqrt{2}}|dz|.$$

Mostraremos que si γ es una curva divergente en S (esto es, si γ es una curva en $\mathbb{C}$ tal que tiene como puntos extremos raíces de la unidad), entonces

$$\sqrt{2}\ell(\gamma)=\int_\gamma \frac{1+|z^n|^2}{|z^{n+1}-1|^2}|dz|=\infty.$$

En efecto, consideremos a $\gamma:[0,L)\longrightarrow S$ parametrizada por longitud de arco, y escribamos para cada $n\geq 1$, $\gamma(s)^{n+1}=1+r(s)e^{i\alpha(s)}$. Así, se tiene que $\lim_{s\to L} r(s)=0$, y

$$(n+1)\gamma(s)^n=r'(s)e^{i\alpha(s)}+ir(s)\alpha'(s)e^{i\alpha(s)}=e^{i\alpha(s)}\left(r'(s)+ir(s)\alpha'(s)\right),$$

por lo que al tomar el módulo en la expresión anterior se tiene lo siguiente:

$$(n+1)|\gamma(s)|^n=\left|e^{i\alpha(s)}\left(r'(s)+ir(s)\alpha'(s)\right)\right|=\left|\left(r'(s)+ir(s)\alpha'(s)\right)\right|\geq|r'(s)|.$$

Observe que, para s suficientemente cercana a L, $|\gamma(s)|$ tiende a 1 y así

$$(n+1)|\gamma(s)|^n\leq A,$$

para alguna constante A. Entonces

$$\begin{aligned}\ell(\gamma) &\geq c_1+c_2\int_a^L\frac{ds}{r^2}\\ &\geq c_1+\frac{c_2}{A}\int_a^L\frac{|r'(s)|}{r^2}ds\\ &= c_1+\frac{c_2}{A}\int_b^0\frac{-ds}{r^2}=\infty.\end{aligned}$$

Así, la curvatura total de S es $-4\pi n$, lo cual es consecuencia de que $g(z)=z^n$ cubre a la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2$ $n-$veces. Por otro lado, sabemos del Teorema 5.16, que si S tiene $n+1$ extremos, entonces

$$\int_S Kd\sigma=2\pi\left(\chi(S)-(n+1)\right),$$

lo cual sucede si y sólo si cada extremo en S es una inmersión. Por lo que, en este ejemlo, $\chi(S)=2-(n+1)$.

Sintetizando estos resultados, obtenemos el siguiente:

Teorema 5.17. *Para cada entero $n\geq 1$ existe una superficie minimal completa en $\mathbb{R}^3$ con curvatura total $-4\pi n$, equivalentemente conforme a $\mathbb{S}^2\setminus\{p_1,\ldots,p_{n+1}\}$, con k extremos y con*

representación de Enneper dada por:

$$g(z) = \begin{cases} z^n, & si\ z \neq \infty \\ \infty, & si\ w = \infty, \end{cases}$$

y

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z^{n+1}-1)^2}, & si\ z \neq \infty \\ 0, & si\ z = \infty. \end{cases}$$

Para finalizar este capítulo, hacemos las siguientes observaciones al Teorema 5.17.

- Para cada $n \geq 1$, la superficie obtenida es invariante bajo una rotación de un ángulo $\dfrac{2\pi}{n+1}$ alrededor del eje z en $\mathbb{R}^3$.
- El caso $n = 1$ corresponde a la Catenoide, por lo que podemos decir también que sus extremos son inmersiones.

CAPÍTULO 6

Superficies de revolución, regladas y la de Catalán

El último capítulo de este trabajo tiene como finalidad presentar un estudio detallado de dos caracterizaciones fundamentales de las superficies minimales: las superficies de rotación y las superficies regladas. En este capítulo se analiza tanto la naturaleza geométrica como la analítica de estas superficies, destacando sus propiedades distintivas y el hecho de que es posible deformar la Helicoide en la Catenoide, de manera que las superficies obtenidas en este proceso de deformación también son minimales. Además, se introduce la superficie de Catalán, una superficie minimal de especial interés debido a su estructura y propiedades geométricas.

§6.1.

Superficies de revolución

Recordemos que una superficie de revolución es una superficie obtenida al rotar una curva plana (llamada generatriz) alrededor de una línea recta (llamada eje de rotación). A continuación, veremos cómo se puede deducir su parametrización. Para ello, consideremos el plano xz como el plano de la curva que será rotada alrededor del eje x.

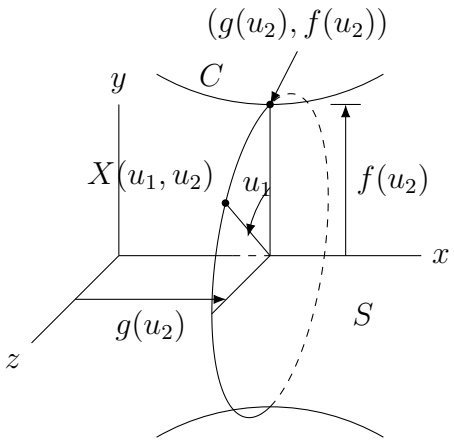


Figura 6.1: Superficie de revolución

Consideremos

$$z = f(u_2),\ x = g(u_2),\ a < u_2 < b,\ f(u_2) > 0,$$

una parametrización de esta curva y denotemos por u_1 al ángulo de rotación alrededor del eje x. Así, obtenemos la función

$$X(u_1, u_2) = (g(u_2), f(u_2)\cos(u_1), f(u_2)\sin(u_1)),$$

del conjunto abierto $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u_1 < 2\pi,\ a < u_2 < b\}$ en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 6.1. *Cualquier superficie minimal de revolución en $\mathbb{R}^3$ es, salvo movimientos rígidos, parte de una Catenoide o parte de un plano.*

Demostración. Sea S una superficie minimal de revolución en $\mathbb{R}^3$. Por un movimiento rígido podemos suponer que la superficie S es tal que su eje de rotación coincide con el eje x, de esta manera, la superficie S está generada por la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$.

Notemos que si $x(t)$ es constante, entonces la superficie es parte de un plano ortogonal al eje x. De otra manera, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x'(t) \neq 0$ en una vecindad U de t_0 en $\mathbb{R}$, de esta manera, podemos representar a la curva α en una vecindad de $\alpha(t_0)$ de la siguiente manera: $\alpha(x, y(x), 0)$. Así, la parte de la superficie obtenida al rotar esta parte de la curva queda parametrizada de la siguiente forma

$$X(x, u_2) = (x, y(x)\cos(u_2), y(x)\sin(u_2)).$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x} &= (1, y'(x)\cos(u_2), y'(x)\sin(u_2)), \\
\frac{\partial X}{\partial u_2} &= (0, -y(x)\sin(u_2), y(x)\cos(u_2)), \\
\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= (0, y''(x)\cos(u_2), y''(x)\sin(u_2)), \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} &= (0, -y(x)\cos(u_2), -y(x)\sin(u_2)), \\
\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial u_2} &= (0, -y'(x)\sin(u_2), y'(x)\cos(u_2)).
\end{aligned}$$

Ahora de la definición de vector normal a la superficie S, dada en (5.19), se sigue que

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial u_2}\right|} \\
&= \frac{(y'(x)\, y(x), -y(x)\cos(u_2), -y(x)\sin(u_2))}{\sqrt{(y'(x))^2 y^2(x) + y^2(x)\cos^2(u_2) + y^2(x)\sin^2(u_2)}} \\
&= \frac{(y'(x)\, y(x), -y(x)\cos(u_2), -y(x)\sin(u_2))}{y(x)\sqrt{(y'(x))^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

De esta manera, en términos de las representaciones dadas en (1.1) y (1.27) se tiene que

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^2 = 1 + \left(y'(x)\right)^2 \cos^2(u_2) + \left(y'(x)\right)^2 \sin^2(u_2) = 1 + \left(y'(x)\right)^2, \\ g_{22} &= \left|\frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2 = y^2(x)\sin^2(u_2) + y^2(x)\cos^2(u_2) = y^2(x), \\ g_{12} &= (1, y'(x)\cos(u_2), y'(x)\sin(u_2)) \cdot (0, -y(x)\sin(u_2), y(x)\cos(u_2)) = 0, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot N \\ &= \frac{1}{y(x)\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}} \left(-y''(x)\, y(x)\cos^2(u_2) - y''(x)\, y(x)\sin^2(u_2)\right) \\ &= -\frac{y''(x)\, y(x)}{y(x)\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}} \\ &= -\frac{y''(x)}{\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial u_2} \cdot N \\ &= \frac{1}{y(x)\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}} \left(y'(x)\, y(x)\cos(u_2)\sin(u_2) - y'(x)\, y(x)\sin(u_2)\cos(u_2)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22} &= \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \cdot N \\ &= \frac{1}{y(x)\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}} \left(y^2(x)\cos^2(u_2) + y^2(x)\sin^2(u_2)\right) \\ &= \frac{y(x)}{\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Ya que S es una superficie minimal se sigue de (1.33) que

$$g_{22} b_{11} + g_{11} b_{22} - 2 g_{12} b_{12} = 0,$$

al sustituir las expresiones correspondientes se tiene

$$\left(-\frac{y''(x)}{\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}}\right)\left(y^2(x)\right) + \left(\frac{y(x)}{\sqrt{\left(y'(x)\right)^2 + 1}}\right)\left(1 + \left(y'(x)\right)^2\right) = 0,$$

o bien

$$\frac{y(x)}{\sqrt{(y'(x))+1}}\left(-y''(x)\,y(x)+1+(y'(x))^2\right)=0,$$

así, obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$-y(x)\,y''(x)+\left(1+(y'(x))^2\right)=0,$$

tomando a $\dfrac{dy}{dx}=p$, se tiene que

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

sustituyendo en la ecuación diferencial anterior, se obtiene lo siguiente

$$-yp\frac{dp}{dy}+1+p^2=0,$$

de donde

$$\begin{aligned}-yp\frac{dp}{dy} &= -\left(1+p^2\right)\\ yp\frac{dp}{dy} &= 1+p^2\\ \frac{p}{1+p^2}dp &= \frac{dy}{y},\end{aligned}$$

integrando la última expresión

$$\int\frac{p}{1+p^2}dp=\int\frac{dy}{y},$$

tomando la sustitución $u=1+p^2$ se tiene que $du=2pdp$, de esta manera, el lado izquierdo de la igualdad anterior queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\int\frac{p}{1+p^2}dp &= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u}\\ &= \frac{1}{2}\ln(u)+c_1\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)+c_1,\end{aligned}$$

de esta forma

$$A+\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)=\ln(y),$$

de donde

$$\begin{aligned}\exp\left(A+\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)\right) &= \exp(\ln(y))\\ \exp(A)\exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)\right) &= y\\ a\sqrt{1+p^2} &= y.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} a^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) &= y^2 \\ a^2+a^2\frac{(dy)^2}{(dx)^2} &= y^2 \\ a^2\frac{(dy)^2}{(dx)^2} &= y^2-a^2 \\ \frac{a^2\,(dy)^2}{y^2-a^2} &= (dx)^2 \\ \frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} &= \frac{dx}{a}, \end{aligned}$$

resolviendo esta última ecuación diferencial por el método de factor integrante

$$\begin{aligned} \int\frac{dx}{a} &= \int\frac{dy}{\sqrt{y^2-a^2}} \\ \frac{x}{a}+b &= \cosh^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) \\ a\cosh\left(\frac{x}{a}+b\right) &= y. \end{aligned}$$

Ya que las superficies minimales son analíticas, también lo es la curva α, se sigue entonces que la curva α coincide con la gráfica de la función $y\,(x)$ para cada valor de x. De este modo, hemos demostrado el teorema. ■

§6.2.

Superficies regladas

Recordemos que una superficie reglada es una superficie que es la unión de líneas rectas llamadas generadores de la superficie. Para determinar la parametrización de una superficie reglada S, consideramos a C la curva en $\mathbb{R}^3$ que pasa por todos los generadores de la superficie. Cualquier punto $p \in S$ pertenece a algún generador, el cual intersecta a la curva C en un punto q. Supongamos que $\gamma : (a,b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la parametrización de C con $\gamma\,(u_1) = q$, y si $\beta\,(u_1)$ es el vector que va en dirección de la línea que pasa por $\gamma\,(u_1)$. Entonces, se tiene que

$$q = \gamma\,(u_1) + u_2\beta\,(u_1)\,,$$

para algún escalar u_2. De esta manera, consideramos la parametrización de S

$$X : U \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

dada por

$$X\,(u_1,u_2) = \gamma\,(u_1) + u_2\beta\,(u_1)\,,$$

donde $U = \{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 : a < u_1 < b,\ -\epsilon < u_2 < \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$. Siendo una manera de representar a las superficies regladas la ilustrada en la Figura 6.2 que se muestra a continuación.

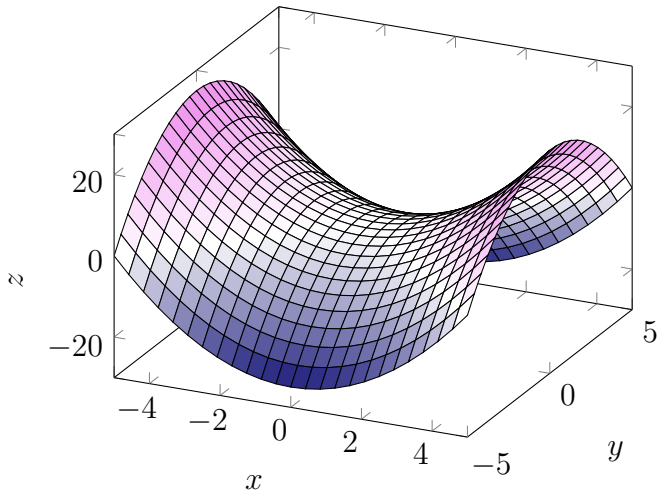


Figura 6.2: Superficie reglada

Un caso especial de este tipo de superficies es cuando los generadores son paralelos entre sí. En este caso, la superficie reglada S obtenida es conocida como cilindro generalizado. En términos de la notación anterior, si tomamos a $\beta(u_1)$ como un vector unitario y constante, digamos a, paralelo a los generadores de S, entonces su parametrización es

$$X(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2 a.$$

Lema 6.1. *Un cilindro generalizado S es una superficie minimal solo cuando el cilindro S es un subconjunto abierto del plano.*

Demostración. Como vimos anteriormente S está parametrizado por

$$X(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2 a,$$

en donde γ es una curva parametrizada por longitud de arco, $|a| = 1$ y donde γ está contenida en el plano Π perpendicular a a. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u_1} &= \gamma'(u_1) = T(u_1), \\
\frac{\partial X}{\partial u_2} &= a, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= T'(u_1) = \kappa n(u_1),
\end{aligned}$$

de modo que los coeficientes de la primera forma fundamental (1.19) son

$$\begin{aligned}
g_{11} &= |T(u)|^2 = 1, \\
g_{12} &= T(u) \cdot a = 0, \\
g_{22} &= |a| = 1,
\end{aligned}$$

mientras que el vector normal a la superficie es

$$N = \frac{T(u_1) \times a}{|T(u_1) \times a|} = T(u_1) \times a,$$

por lo que los coeficientes de la segunda forma fundamental (1.28.1) son

$$\begin{aligned} b_{11} &= \kappa n(u_1) \cdot (T(u_1) \times a), \\ b_{12} &= 0, \\ b_{22} &= 0, \end{aligned}$$

ya que $T(u_1) \times a$ es un vector paralelo al plano Π y perpendicular a $T(u_1)$, es paralelo a $n(u_1)$, de esta manera $b_{11} = \pm\kappa$ y al sustituir en la ecuación (1.33)

$$H = \pm\frac{\kappa}{2},$$

por lo que $H = 0$ si y sólo si $\kappa = 0$ lo cual sucede si y sólo si γ es parte de una línea recta lo cual sucede si y sólo si el cilindro S es un subconjunto abierto del plano. ■

Para continuar, hacemos uso del siguiente resultado de carácter geométrico, cuya demostración puede ser consultada en [16, Cap.2, pp.20-21].

Lema 6.2. *Sea $\gamma : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco con curvatura constante y con torsión cero. Entonces γ es una parametrización de (una parte) una circunferencia.*

Teorema 6.2. *Cualquier superficie minimal reglada en $\mathbb{R}^3$ es, salvo movimientos rígidos, parte de una Helicoide o parte de un plano.*

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie minimal reglada, así S está parametrizada por

$$X(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2\beta(u_1),$$

donde γ es la curva perpendicular a las líneas rectas de S y donde β es el vector paralelo a las líneas rectas de S por γ. A continuación, haremos algunas simplificaciones a la parametrización dada. Primero, podemos suponer que $|\beta(u_1)| = 1$ para todos los valores de u_1, por otro lado, podemos suponer también que $\beta'(u_1) \neq 0$ para cada valor de u_1, y, finalmente podemos suponer que $\gamma'(u_1) \cdot \beta(u_1) = 0$. Por lo que se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &= \gamma'(u_1) + u_2\beta'(u_1), \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} &= \beta(u_1), \end{aligned}$$

así, los coeficientes de la primera forma fundamental (1.19) son

$$g_{11} = |\gamma'(u_1) + u_2\beta'(u_1)|^2, \ g_{22} = |\beta(u_1)|^2 = 1, \ g_{12} = (\gamma'(u_1) + u_2\beta'(u_1)) \cdot \beta(u_1).$$

Ahora, recordando la notación dada en (2.11) se tiene que

$$W = \sqrt{\det\left(g_{ij}\right)} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Entonces

$$N = \frac{\left(\gamma'\left(u_1\right) + u_2\beta'\left(u_1\right)\right) \times \beta\left(u_1\right)}{W}.$$

Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= \gamma''\left(u_1\right) + u_2\beta''\left(u_1\right), \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} &= \beta'\left(u_1\right), \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} &= 0, \end{aligned}$$

de esta forma, los coeficientes de la segunda forma fundamental (1.28.1) son

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{\left(\left(\gamma'\left(u_1\right) + u_2\beta'\left(u_1\right)\right) \times \beta\left(u_1\right)\right) \cdot \left(\gamma''\left(u_1\right) + u_2\beta''\left(u_1\right)\right)}{W}, \\ b_{12} &= \frac{\left(\left(\gamma'\left(u_1\right) + u_2\beta'\left(u_1\right)\right) \times \beta\left(u_1\right)\right) \cdot \beta'\left(u_1\right)}{W}, \\ b_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Dado que S es una superficie minimal se sigue de (1.33) que

$$g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} = 0,$$

al sustituir las expresiones anteriores nos da como resultado (a partir de este momento omitimos cuando sea necesario la dependencía de u_1)

$$\gamma'' + u_2\beta'' \cdot \left(\left(\gamma' + u_2\beta'\right) \times \beta\right) = 2\left(\beta \cdot \gamma'\right)\left(\beta' \cdot \left(\gamma' \times \beta\right)\right),$$

esta ecuación se satisface para todos los valores de (u_1, u_2). Igualando los coeficientes de potencias de u_2 se tiene

$$\gamma'' \cdot \left(\gamma' \times \beta\right) = 2\left(\beta \cdot \gamma'\right)\left(\beta'\left(\gamma' \times \beta\right)\right), \tag{6.1}$$

$$\gamma'' \cdot \left(\beta' \times \beta\right) + \beta'' \cdot \left(\gamma' \times \beta\right) = 0, \tag{6.2}$$

$$\beta'' \cdot \left(\beta' \times \beta\right) = 0. \tag{6.3}$$

La ecuación (6.3) muestra que β, β' y β'' son linealmente dependientes. Por otro lado, ya que β y β' son vectores unitarios perpendiculares, existen funciones diferenciables $\alpha\left(u_1\right)$ y $\omega\left(u_1\right)$ tales que

$$\beta''\left(u_1\right) = \alpha\left(u_1\right)\beta\left(u_1\right) + \omega\left(u_1\right)\beta'\left(u_1\right).$$

Pero, como $\left|\beta\left(u_1\right)\right| = 1$ y $\beta'\left(u_1\right) \cdot \beta''\left(u_1\right) = 0$, al derivar la expresión $\beta\left(u_1\right) \cdot \beta'\left(u_1\right) = 0$ se obtiene que $\beta\left(u_1\right) \cdot \beta''\left(u_1\right) = -\beta'\left(u_1\right) \cdot \beta'\left(u_1\right) = -1$, de esta manera, $\alpha\left(u_1\right) = -1$ y $\omega\left(u_1\right) = 0$, por tanto

$$\beta''\left(u_1\right) = -\beta\left(u_1\right). \tag{6.4}$$

La ecuación (6.4), muestra que la curvatura de la curva β es 1, y su vector normal es $-\beta$, de esta manera, el vector binormal es $\beta'(u_1) \times (-\beta(u_1))$, y de esta manera

$$\frac{d}{du_1}(\beta'(u_1) \times \beta(u_1)) = \beta''(u_1) \times \beta(u_1) + \beta'(u_1) \times \beta'(u_1) = -\beta(u_1) \times \beta(u_1) = 0,$$

se sigue entonces que la torsión de la curva β es 0. De esta manera, del Lema 6.2, se tiene que β parametriza una circunferencia de radio 1. Aplicando una isometría en $\mathbb{R}^3$, podemos suponer que esta circunferencia está centrada en el origen del plano xy, por lo que

$$\beta(u) = (\cos(u_1), \sin(u_1), 0).$$

De la ecuación (6.4) se deduce que

$$\beta''(u_1) \cdot (\gamma'(u_1) \times \beta(u_1)) = -\beta(u_1) \cdot (\gamma'(u_1) \times \beta(u_1)) = 0,$$

por lo que, de la ecuación (6.2) se obtiene que

$$\gamma''(u_1) \cdot (\beta'(u_1) \times \beta(u_1)) = 0.$$

Por tanto, γ'' es paralela al plano xy, y así

$$\gamma(u_1) = (f(u_1), g(u_1), au_1 + b),$$

donde f y g son funciones diferenciables, y donde a y b son constates. Si $a = 0$, la superficie resulta en un conjunto abierto del plano $z = b$. De otra manera, de la ecuación (6.1) se obtiene

$$g''(u_1)\cos(u_1) - f''(u_1)\sin(u_1) = 2(f'(u_1)\cos(u_1) + g'(u_1)\sin(u_1)). \tag{6.5}$$

Finalmente, haciendo uso de la condición $\gamma'(u_1) \cdot \beta'(u_1) = 0$, se tiene que

$$f'(u_1)\sin(u_1) = g'(u_1)\cos(u_1). \tag{6.6}$$

Derivando (6.6) se obtiene

$$f''(u_1)\sin(u_1) + f'(u_1)\cos(u_1) = g''(u_1)\cos(u_1) - g'(u_1)\sin(u_1). \tag{6.7}$$

Combinando las ecuaciones (6.5) y (6.7) obtenemos

$$f'(u_1)\cos(u_1) + g'(u_1)\sin(u_1) = 0,$$

y utilizando la ecuación (6.6) obtenemos $f'(u_1) = g'(u_1) = 0$. Entonces, f y g son constantes. Mediante una traslación de la superficie, podemos suponer que las constantes f, g y b son 0, de esta manera $\gamma(u_1) = (0, 0, au_1)$, y así

$$X(u_1, u_2) = (u_2\cos(u_1), u_2\sin(u_1), au_1),$$

la cual corresponde a la parametrización de la Helicoide.

Asumimos al inicio de la prueba que β' no se anula, pero si β' se anulara, tendríamos que el vector β es constante, y por tanto la superficie sería un cilindro generalizado. Pero, de hecho, como se analizó en el Lema 6.1, un cilindro generalizado es una superficie minimal si y sólo si el cilindro es un subconjunto abierto del plano. ■

§6.3.

Deformación de la Helicoide en la Catenoide

En geometría diferencial, dos superficies S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^3$ son indistinguibles si tienen la misma forma de medir, esto es, si tienen la misma métrica. Formalizamos esta idea con la siguiente definición que probablemente el lector ya conoce, en donde, siendo fieles a la notación clásica $\langle\ ,\rangle$ representa el producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Definición 6.1. *Dadas $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superficies regulares.*

(i) Una función $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría entre las superficies S_1 y S_2 si f es un difeomorfismo tal que para todo $p \in S_1$ y cualquier pareja de vectores $w_1, w_2 \in \Pi_{S_1}(p)$ se satisface la igualdad

$$\langle w_1, w_2\rangle_p = \langle d\varphi\,(w_1)\,, d\varphi\,(w_2)\rangle_{\varphi(p)}\,.$$

Diremos que S_1 y S_2 son (globalmente) isométricas si existe una isometría $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$.

(ii) Una función $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría local en $p \in S_1$ si existe una vecindad U de p en S_1 tal que $\varphi|_U : U \longrightarrow \varphi\,(U)$ es una isometría. Diremos que φ es una isometría local si φ es una isometría local en p para todo $p \in S_1$.

(iii) Dos superficies S_1 y S_2 son localmente isométricas si existen isometrías locales $\varphi_1 : S_1 \longrightarrow S_2$ y $\psi : S_2 \longrightarrow S_1$.

De esta manera, la interpretración geométrica de la definición de isometría (local o global) nos habla de que se preserva el producto escalar $\langle\ ,\rangle$ en $\Pi_{S_1}(p)$ bajo la diferencial $d\varphi_p$ al plano tangente $\Pi_{S_2}(\varphi\,(p))$.

Tenemos el siguiente resultado importante para nuestro estudio, la demostración puede ser consultada en [9, Cap.4, §4, pp.219-220].

Proposición 6.1. *Suponga que existen parametrizaciones $X : U \longrightarrow S_1$ y $\tilde{X} : U \longrightarrow S_2$, de S_1 y S_2 respectivamente, tales que en las coordenadas (u_1, u_2) los coeficientes de las primeras formas fundamentales de S_1 y S_2 coinciden, es decir, $g_{11} = \tilde{g}_{11}$, $g_{12} = \tilde{g}_{12}$ y $g_{22} = \tilde{g}_{22}$. Entonces, la función $\varphi = \tilde{X} \circ X^{-1} : S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría local.*

Nuestro ejemplo por excelencia de superficies localmente isométricas son la Helicoide y la Catenoide. El ser localmente isométricas en pocas palabras significa que, es posible deformar de manera continua y preservando distancias la Helicoide para obtener una porción de la Catenoide. Veremos en seguida que cada miembro de la familia de deformaciones será una superficie minimal y localmente isométrica a la Catenoide.

Con lo mencionado anteriormente estamos listos para abordar el resultado principal de la presente sección.

La Helicoide y la Catenoide, serán el inicio y e final, respectivamente, de una deformación mediante superficies minimales. A esta deformación la llamamos ***deformación isométrica***, la definimos de la siguiente manera:

$$\mathfrak{X} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(t, u_1, u_2) &= \cos(t)\left(\sinh(u_2)\sin(u_1), -\sinh(u_2)\cos(u_1), u_1\right) \\ &\quad + \sin(t)\left(\cosh(u_2)\cos(u_1), \cosh(u_2)\sin(u_1), u_2\right). \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 6.2. *La familia de superficies $t \mapsto \mathfrak{X}(t, u_1, u_2)$, que depende de un solo parámetro t, es una deformación de la Helicoide en la Catenoide, de tal forma que se verifica que:*

(i) En $t = 0$, $\mathfrak{X}(0, u_1, u_2)$ es una forma de parametrizar la Helicoide.

(ii) En $t = \frac{\pi}{2}$, $\mathfrak{X}\left(\frac{\pi}{2}, u_1, u_2\right)$ es una reparametrización de la Catenoide.

(iii) Para cada $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumple que $\mathfrak{X}(t, u_1, u_2)$ es una superficie minimal que será a su vez isométrica a la Helicoide, y por tanto localmente isométrica a la Catenoide.

Demostración. Las partes (i) y (ii) se siguen de forma inmediata ya que

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(0, u_1, u_2) &= \cos(0)\left(\sinh(u_2)\sin(u_1), -\sinh(u_2)\cos(u_1), u_1\right) \\ &\quad + \sin(0)\left(\cosh(u_2)\cos(u_1), \cosh(u_2)\sin(u_1), u_2\right) \\ &= \left(\sinh(u_2)\sin(u_1), -\sinh(u_2)\cos(u_1), u_1\right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}\left(\frac{\pi}{2}, u_1, u_2\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\sinh(u_2)\sin(u_1), -\sinh(u_2)\cos(u_1), u_1\right) \\ &\quad + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\cosh(u_2)\cos(u_1), \cosh(u_2)\sin(u_1), u_2\right) \\ &= \left(\cosh(u_2)\cos(u_1), \cosh(u_2)\sin(u_1), u_2\right) \end{aligned}$$

corresponden a la parametrización de la Helicoide y la Catenoide respectivamente.

Ahora bien, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_1} &= \cos(t)\left(\sinh(u_2)\cos(u_1), \sinh(u_2)\sin(u_1), 1\right) \\ &\quad + \sin(t)\left(-\cosh(u_2)\sin(u_1), \cosh(u_2)\cos(u_1), 0\right), \\ \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_2} &= \cos(t)\left(\cosh(u_2)\sin(u_1), -\cosh(u_2)\cos(u_1), 0\right) \\ &\quad + \sin(t)\left(\sinh(u_2)\cos(u_1), \sinh(u_2)\sin(u_1), 1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u_1^2} &= \cos(t)\left(-\sinh(u_2)\sin(u_1), \sinh(u_2)\cos(u_1), 0\right) \\
&\quad + \sin(t)\left(-\cosh(u_2)\cos(u_1), -\cosh(u_2)\sin(u_1), 0\right), \\
\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u_2^2} &= \cos(t)\left(\sinh(u_2)\sin(u_1), -\sinh(u_2)\cos(u_1), 0\right) \\
&\quad + \sin(t)\left(\cosh(u_2)\cos(u_1), \cosh(u_2)\sin(u_1), 0\right), \\
\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u_1 \partial u_2} &= \cos(t)\left(\cosh(u_2)\cos(u_1), \cosh(u_2)\sin(u_1), 0\right) \\
&\quad + \sin(t)\left(-\sinh(u_2)\sin(u_1), \sinh(u_2)\cos(u_1), 0\right).
\end{aligned}$$

por lo tanto los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \left|\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_1}\right|^2 \\
&= \left(\sinh(u_2)\cos(t)\cos(u_1) - \cosh(u_2)\sin(t)\sin(u_1)\right)^2 + \cos^2(t) \\
&\quad + \left(\cosh(u_2)\sin(t)\cos(u_1) + \sinh(u_2)\cos(t)\sin(u_1)\right)^2 \\
&= \cosh^2(u_2)\sin^2(t)\cos^2(u_1) + \cosh^2(u_2)\sin^2(t)\sin^2(u_1) \\
&\quad + \sinh^2(u_2)\cos^2(t)\cos^2(u_1) + \sinh^2(u_2)\cos^2(t)\sin^2(u_1) + \cos^2(t) \\
&= \cosh^2(u_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{22} &= \left|\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_2}\right|^2 \\
&= \left(\cosh(u_2)\cos(t)\sin(u_1) + \sinh(u_2)\sin(t)\cos(u_1)\right)^2 + \sin^2(t) \\
&\quad + \left(\sinh(u_2)\sin(t)\sin(u_1) - \cosh(u_2)\cos(t)\cos(u_1)\right)^2 \\
&= \cosh^2(u_2),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
g_{12} &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_2} \\
&= -\cos(t)\sin(t)\cosh^2(u_2)\cos^2(u_1) - \cos(t)\sin(t)\cosh^2(u_2)\sin^2(u_1) \\
&\quad + \cos(t)\sin(t)\sinh^2(u_2)\cos^2(u_1) + \cos(t)\sin(t) \\
&\quad + \cos(t)\sin(t)\sinh^2(u_2)\sin^2(u_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Relizando los cálculos correspondientes se tiene que

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_2} = \left(\cosh(u_2)\cos(u_1), \cosh(u_2)\sin(u_1), -\cosh(u_2)\sinh(u_2)\right),$$

de esta manera

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_2}\right| &= \sqrt{\left(\cosh\left(u_2\right)\cos\left(u_1\right)\right)^2+\left(\cosh\left(u_2\right)\sin\left(u_1\right)\right)^2+\left(-\cosh\left(u_2\right)\sinh\left(u_2\right)\right)^2}\\
&= \sqrt{\cosh^2\left(u_2\right)\cos^2\left(u_1\right)+\cosh^2\left(u_2\right)\sin^2\left(u_1\right)+\cosh^2\left(u_2\right)\sinh^2\left(u_2\right)}\\
&= \sqrt{\cosh^2\left(u_2\right)\left(\cos^2\left(u_1\right)+\sin^2\left(u_1\right)+\sinh^2\left(u_2\right)\right)}\\
&= \sqrt{\cosh^2\left(u_2\right)\left(1+\sinh^2\left(u_2\right)\right)}\\
&= \sqrt{\cosh^4\left(u_2\right)}=\cosh^2\left(u_2\right),
\end{aligned}$$

por lo tanto, el vector normal a la superficie $\mathfrak{X}\left(t,u_1,u_2\right)$ según (5.19) queda determinado por

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_2}}{\left|\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u_2}\right|}\\
&= \frac{\left(\cosh\left(u_2\right)\cos\left(u_1\right),\cosh\left(u_2\right)\sin\left(u_1\right),-\cosh\left(u_2\right)\sinh\left(u_2\right)\right)}{\cosh^2\left(u_2\right)}.
\end{aligned}$$

Con la información anterior, podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
b_{11} &= N\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u_1^2}\\
&= \frac{-\sin\left(t\right)\cosh^2\left(u_2\right)\cos^2\left(u_1\right)-\sinh\left(u_2\right)\cos\left(t\right)\sin\left(u_1\right)\cosh\left(u_2\right)\cos\left(u_1\right)}{\cosh^2\left(u_2\right)}\\
&\quad+\frac{\cosh\left(u_2\right)\sinh\left(u_2\right)\cos\left(t\right)\cos\left(u_1\right)\sin\left(u_1\right)-\cosh^2\left(u_2\right)\sin\left(t\right)\sin^2\left(u_1\right)}{\cosh^2\left(u_2\right)}\\
&= -\sin\left(t\right),
\end{aligned}$$

repitiendo los cálculos

$$\begin{aligned}
b_{12} &= N\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u_1\partial u_2}=\cos\left(t\right),\\
b_{22} &= N\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u_2^2}=\sin\left(t\right).
\end{aligned}$$

De esta manera, al sustituir en la ecuación (1.33) se tiene que en efecto se satisface, pues:

$$-\cosh^2\left(u_2\right)\sin\left(t\right)+\cosh^2\left(u_2\right)\sin\left(t\right)=0,$$

por lo tanto, para cada valor de $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ obtenemos una superficie minimal.

Finalmente, dada una parametrización de la Helicoide $Y:U\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$, por ejemplo:

$$Y\left(u_1,u_2\right)=\left(\sinh\left(u_2\right)\sin\left(u_1\right),-\sinh\left(u_2\right)\cos\left(u_1\right),u_1\right)$$

se tiene que los coeficientes de la primera forma fundamental correspondientes son:

$$g_{11}=\cosh^2\left(u_2\right),\ g_{12}=0\text{ y }g_{22}=\cosh^2\left(u_2\right),$$

por tanto, en virtud de la Proposición 6.1, se tiene que esta familia de superficies determinada por el parámetro t son localmente isométricas a la Helicoide, y, resulta ser que la relación ser "isométricas" es una relación de equivalencia en el conjunto de superficies regulares, por tanto, también son localmente isométricas a la Catenoide. ■

A continuación, mostramos este proceso de deformación de la Helicoide en la Catenoide, recordando con ello que en el Capítulo 3 definimos la superficie conjugada a una superficie minimal dada, donde la superficie conjugada a la Catenoide es la Helicoide, quedando de esta manera al descubierto la relación de ser localmente isométricas con la noción de superfcie conjugada.

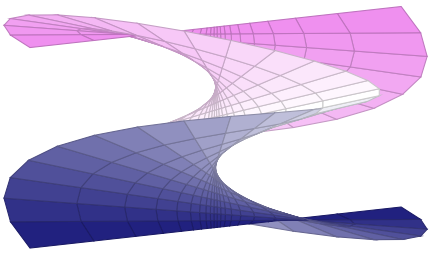


Figura 6.3: Deformación isométrica en $t = 0$

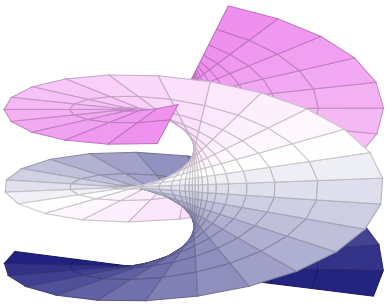


Figura 6.4: Deformación isométrica en $t = \frac{\pi}{10}$

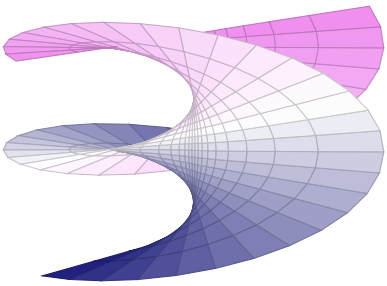


Figura 6.5: Deformación isométrica en $t = \frac{\pi}{5}$

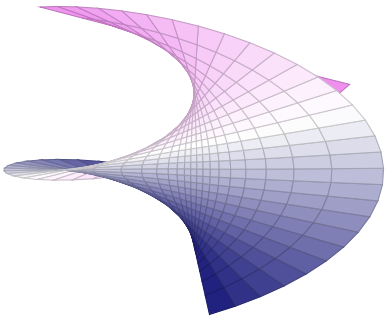


Figura 6.6: Deformación isométrica en $t = \frac{3\pi}{15}$

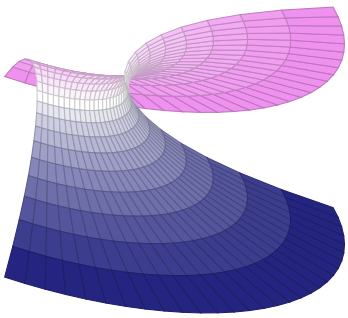


Figura 6.7: Deformación isométrica en $t = \frac{2\pi}{5}$

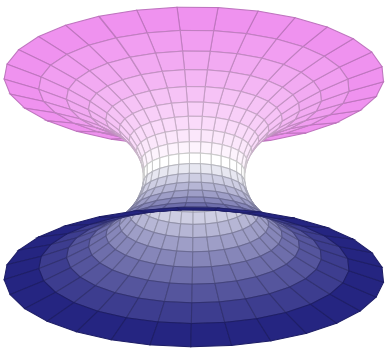


Figura 6.8: Deformación isométrica en $t = \frac{\pi}{2}$

Presentamos a continuación el último ejemplo de superficie minimal que se aborda en este trabajo, la superficie de Catalán.

Superficie de Catalán

La superficie de Catalán está parametrizada por

$$X(u_1,u_2)=\left(u_1-\sin(u_1)\cosh(u_2),1-\cos(u_1)\cosh(u_2),-4\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\right), \tag{6.8}$$

como puede verse en la Figura 6.9, la superficie de Catalán al igual que la superficie de Enneper tiene autointersecciones, por lo que, para que sea una superficie regular debemos de restringir (u_1,u_2) a subconjuntos abiertos pequeños, donde esta no posea autointersecciones.

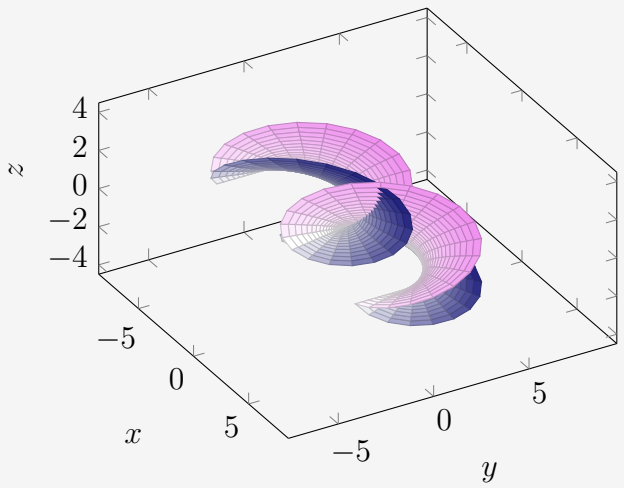


Figura 6.9: Superficie minimal de Catalán

Veamos que es en efecto una superficie minimal. Se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u_1} &= \left(1-\cos(u_1)\cosh(u_2),\sin(u_1)\cosh(u_2),-2\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\cos\left(\frac{u_1}{2}\right)\right),\\
\frac{\partial X}{\partial u_2} &= \left(-\sin(u_1)\sinh(u_2),-\cos(u_1)\sinh(u_2),-2\cosh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\right),\\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= \left(\sin(u_1)\cosh(u_2),\cos(u_1)\cosh(u_2),\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\right),\\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} &= \left(-\sin(u_1)\cosh(u_2),-\cos(u_1)\cosh(u_2),-\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\right),\\
\frac{\partial^2 X}{\partial u_1\partial u_2} &= \left(-\cos(u_1)\sinh(u_2),\sin(u_1)\sinh(u_2),-\cosh\left(\frac{u_2}{2}\right)\cos\left(\frac{u_1}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left|\frac{\partial X}{\partial u_1}\right|^2 \\ &= (1-\cos(u_1)\cosh(u_2))^2 + (\sin(u_1)\cosh(u_2))^2 + \left(-2\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\cos\left(\frac{u_1}{2}\right)\right)^2 \\ &= 2\cosh^2\left(\frac{u_2}{2}\right)(\cosh(u_2)-\cos(u_1)) \\ &= (\cosh(u_2)+1)(\cosh(u_2)-\cos(u_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12} &= (1-\cos(u_1)\cosh(u_2))(-\sin(u_1)\sinh(u_2)) \\ &\quad + (\sin(u_1)\cosh(u_2))(-\cos(u_1)\sinh(u_2)) \\ &\quad + \left(-2\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\cos\left(\frac{u_1}{2}\right)\right)\left(-2\cosh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\right) \\ &= \cos(u_1)\sin(u_1)\cosh(u_2)\sinh(u_2) - \sin(u_1)\sinh(u_2) \\ &\quad - \cos(u_1)\sin(u_1)\cosh(u_2)\sinh(u_2) \\ &\quad + 4\cosh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\cos\left(\frac{u_1}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22} &= \left|\frac{\partial X}{\partial u_2}\right|^2 \\ &= (-\sin(u_1)\sinh(u_2))^2 + (-\cos(u_1)\sinh(u_2))^2 + \left(-2\cosh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\right)^2 \\ &= 2\cosh^2\left(\frac{u_2}{2}\right)(\cosh(u_2)-\cos(u_1)) \\ &= (\cosh(u_2)+1)(\cosh(u_2)-\cos(u_1)). \end{aligned}$$

De los cálculos anteriores se tiene que la parametrización X de la superficie de Catalán, está en términos de parámetros isotérmicos, por lo que resta mostrar, según el Lema 3.1, que

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} = 0,$$

lo cual se verifica directamente de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= \left(\sin(u_1)\cosh(u_2), \cos(u_1)\cosh(u_2), \sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\right) \\ &= -\left(-\sin(u_1)\cosh(u_2), -\cos(u_1)\cosh(u_2), -\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\right) = -\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}. \end{aligned}$$

Concluimos de esta manera que la superficie de Catalán es una superficie minimal.

Lema 6.3. *Sea S la superficie minimal de Catalán dada en (6.8), se satisface lo siguiente:*

(i) La curva contenida en S dada por $u_1 = 0$ es una línea recta.

(ii) La curva contenida en S dada por $u_1 = \pi$ es una parábola.

(iii) La curva contenida en S dada por $u_2 = 0$ es una cicloide, siendo esta última la curva plana descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre una recta. La curva se muestra a continuación en la Figura 6.10 y puede pensarse como la curva que veríamos si fijamos una luz a un rayo de una rueda de bicicleta que pasa por un camino recto en la oscuridad. Si la línea recta sobre la que se desliza la circunferencia (de radio $a > 0$) es el eje x, la cicloide está parametrizada por la curva $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\gamma(t) = a(t - \sin(t), 1 - \cos(t)).$$

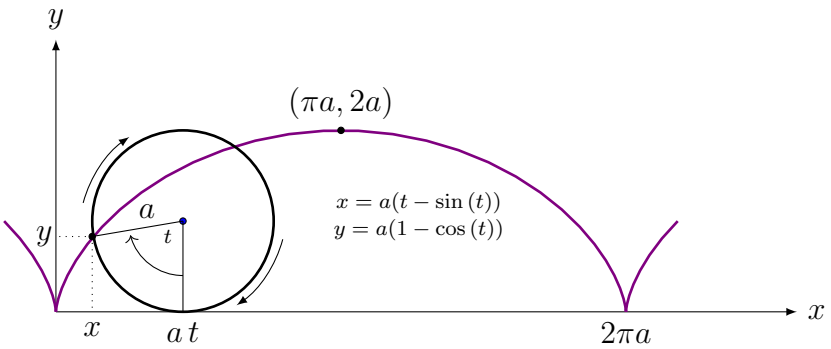


Figura 6.10: Cicloide

Demostración. Para (i) se tiene que $X(0, u_2) = (0, 1 - \cosh(u_2), 0)$, la cual corresponde al eje y, por tanto, es una línea recta.

Para (ii) se obtiene lo siguiente $X(\pi, 0) = \left(\pi, 1 + \cosh(u_2) - 4\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\right)$, la cual es una curva en el plano $x = \pi$, tal que $z^2 = 16\sinh^2\left(\frac{u_2}{2}\right) = 8(\cosh(u_2) - 1) = 8(y - 2)$, esto es, una parábola.

Para (iii) tenemos $X(u_1, 0) = (u_1 - \sin(u_1), 1 - \cos(u_1), 0)$, la cual es una cicloide en el plano xy con $a = 1$ (con t remplazado por u). ■

Existe una caracterización de las geodésicas de una superficie como soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, la cual puede consultarse en [9, Cap. 4, §4.4, pp.254-255], tal hecho nos ayuda a mostrar que las curvas mencionadas en el Lema 6.3 son geodésicas de la superficie de Catalán, omitimos tal estudio por cuestiones de tiempo, pero resaltamos que con esa herramienta la prueba no es complicada, y solo se traduce a realizar algunos cálculos.

Teorema 6.3. *Sea $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular en el plano xy, digamos*

$$\gamma(u_1) = (f(u_1), g(u_1), 0),$$

supongamos que existen funciones holomorfas $F, G : U \longrightarrow \mathbb{R}$, *donde* U *es el rectángulo*

$$U = \{u_1 + iu_2 \in \mathbb{C} : a < u_1 < b, -\epsilon < u_2 < \epsilon\},$$

para algún $\epsilon > 0$, *y son tales que* $F(u_1) = f(u_1)$ *y* $G(u_1) = g(u_1)$, *si* u_1 *es un número real que satisface* $a < u_1 < b$. *Note que*

$$(F'(z))^2 + (G'(z))^2 \neq 0 \text{ si } \operatorname{Im}\{z\} = 0,$$

así que, al tomar ϵ *suficientemente pequeño, podemos suponer que* $(F'(z))^2 + (G'(z))^2 \neq 0$ *para cada* $z \in U$. *Con las hipótesis anteriores se satisface lo siguiente:*

(i) Las entradas de la función holomorfa $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\Phi(z) = \left(F'(z), G'(z), i\sqrt{(F'(z))^2 + (G'(z))^2}\right)$$

satisfacen el Lema 3.3, y por tanto, definen una superficie minimal S, *con parametrización* $X(u_1, u_2)$.

(ii) Salvo traslaciones $X(u_1, 0) = \gamma(u_1)$ *para* $a < u_1 < b$.

(iii) Se satisface que $\gamma''(z) \cdot (N(z) \times \gamma'(z)) = 0$.

(iv) Si comenzamos con la cicloide

$$\gamma(u_1) = (u_1 - \sin(u_1), 1 - \cos(u_1), 0),$$

la superficie resultante con parametrización X, *es salvo traslaciones, la superficie minimal de Catalán.*

Demostración. Para (i) Tenemos que

$$\begin{aligned}(F'(z))^2 + (G'(z))^2 + \left(i\sqrt{(F'(z))^2 + (G'(z))^2}\right)^2 &= (F'(z))^2 + (G'(z))^2 \\ &\quad - \left((F'(z))^2 + (G'(z))^2\right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

ya que F' y G' no se anulan se sigue que

$$|F'(z)|^2 + |G'(z)|^2 + \left|i\sqrt{(F'(z))^2 + (G'(z))^2}\right|^2 > 0.$$

Así, por el Lema 3.3, tenemos una superficie minimal $X(u, v)$, donde $z = u_1 + iu_2$.

Para (ii), cuando tomamos $u_2 = 0$, se tiene que $z = u_1 \in (a, b)$ es un número real, luego del Lema 3.3 y del Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{Re}\left\{\int_a^b \frac{d}{dz}F(z)\,dz\right\} = \operatorname{Re}\{F(z)\} = f(z), \\ x_2 &= \operatorname{Re}\left\{\int_a^b \frac{d}{dz}G(z)\,dz\right\} = \operatorname{Re}\{G(z)\} = g(z), \\ x_3 &= \operatorname{Re}\left\{\int_a^b i\sqrt{(F'(z))^2 + (G'(z))^2}dz\right\} = 0.\end{aligned}$$

Así, tenemos una superficie minimal $X : (a,b) \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(u_1, 0) = (f(u_1), g(u_1), 0) = \gamma(u_1),$$

justo como se quería.

Observación 6.1. *Las entradas de la función $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ son las funciones que definimos en (3.6), esto es, para $\zeta = u_1 + iu_2$, $(u_1, u_2) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, estamos definiendo*

$$\Phi(\zeta) = \frac{\partial X}{\partial u_1} - i\frac{\partial X}{\partial u_2}.$$

Para (iii) cuando $\operatorname{Im}\{z\} = u_2 = 0$ se tiene que

$$\Phi(z) = \left(f'(z), g'(z), i\sqrt{(f'(z))^2 + (g'(z))^2}\right),$$

luego, en virtud de (5.18) se tiene que

$$N(z) = \frac{(-g'(z), f'(z), 0)}{\sqrt{(f'(z))^2 + (g'(z))^2}},$$

de esta manera tomando los vectores canónicos (i, j, k) obtenemos:

$$\begin{aligned}
N(z) \times \gamma'(z) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-g'(z)}{\sqrt{(f'(z))^2+(g'(z))^2}} & \frac{f'(z)}{\sqrt{(f'(z))^2+(g'(z))^2}} & 0 \\ f'(z) & g'(z) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left(0, 0, \frac{-(g'(z))^2}{\sqrt{(f'(z))^2 + (g'(z))^2}} - \frac{(f'(z))^2}{\sqrt{(f'(z))^2 + (g'(z))^2}}\right) \\
&= \left(0, 0, -\frac{(g'(z))^2 + (f'(z))^2}{\sqrt{(f'(z))^2 + (g'(z))^2}}\right) \\
&= \left(0, 0, -\sqrt{(f'(z))^2 + (g'(z))^2}\right),
\end{aligned}$$

por lo que

$$\gamma''(z) \cdot (N(z) \times \gamma'(z)) = 0.$$

Finalmente, para (iv) consideramos a la cicloide $\gamma(u_1) = (u_1 - \sin(u_1), 1 - \cos(u_1), 0)$, donde $u_1 \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \left(1 - \cos(z), \sin(z), i\left(\sqrt{(1 - \cos^2(z)) + \sin^2(z)}\right)\right) \\
&= (1 - \cos(z), \sin(z), 2i\sin(z)) \\
&= \frac{\partial X}{\partial u_1} - i\frac{\partial X}{\partial u_2}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que si $z = u_1 + iu_2$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u_1} &= \left(1 - \cos(u_1)\cosh(u_2), \sin(u_1)\cosh(u_2), -2\cos\left(\frac{u_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\right),\\ \frac{\partial X}{\partial u_2} &= \left(-\sin(u_1)\sinh(u_2), -\cos(u_1)\sinh(u_2), -2\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\cosh\left(\frac{u_2}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

por lo que al integrar alguna de las expresiones anteriores con respecto a la variable sobre la que se derivó parcialmente (esto es, aplicando el Teorema Fundamental de Cálculo) se deduce que salvo traslaciones

$$X(u_1, u_2) = \left(u_1 - \sin(u_1)\cosh(u_2), -\cos(u_1)\cosh(u_2), -4\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\right).$$

En la expresión anterior si trasladamos por el vector $(0, 1, 0)$ obtenemos la superficie minimal de Catalán dada en (6.8)

$$X(u_1, u_2) = \left(u_1 - \sin(u_1)\cosh(u_2), 1 - \cos(u_1)\cosh(u_2), -4\sin\left(\frac{u_1}{2}\right)\sinh\left(\frac{u_2}{2}\right)\right).$$

■

El Teorema 6.3 exhibe el comportamiento geométrico de las geodésicas en la superficie de Catalán, pues nos dice que esta superficie tiene una geodésica cicloidal.

Apéndices

APÉNDICE A

Elementos de análisis matemático y topología

Definición A.1. *Sea X un conjunto, una métrica (o distancia) en X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que tiene las siguientes propiedades:*

(i) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

(ii) $d(x, y) \geq 0$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in X$.

Un espacio métrico consta de un conjunto X provisto de una métrica d, omitiremos d si no causa confusión.

Uno de los principales ejemplos de espacio métrico (que además corresponde al espacio sobre el que hacemos gran parte de nuestro análisis) es $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual, definida por:

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Para el lector interesado en abordar más ejemplos de espacios métricos se recomienda [20, Cap.2].

Dado un espacio métrico X es posible considerar una colección de elementos y subconjuntos que tienen particular importancia, de entre los cuales presentamos en la siguiente definición.

Definición A.2. *Sea X un espacio métrico se tienen las siguientes definiciones:*

(i) Para cada $p \in X$ y cada número real positivo r, al conjunto

$$B_r(p) = \{q \in X : d(p, q) < r\},$$

le llamaremos bola abierta de radio $r > 0$ y centro en p.

(ii) Dado $U \subseteq X$, un punto $p \in U$ es un punto límite, si para cada $r > 0$ se tiene que $(B_r(p) \setminus \{p\}) \cap U \neq \emptyset$.

(iii) Si $p \in U \subseteq X$ y p no es un punto límite U, a p se le llama punto aislado de U.

(iv) $U \subseteq X$ es cerrado si todos sus puntos límite pertenecen a él.

(v) Un punto $p \in X$ es interior a $U \subseteq X$ si existe $r > 0$ tal de $B_r(p) \subseteq U$.

(vi) $U \subseteq X$ es abierto si todos sus puntos son interiores.

(vii) $U \subseteq X$ es acotado si existen $q \in X$ y $M \in \mathbb{R}$ tales que $d(p, q) < M$ para cada $p \in U$.

El conjunto de todos los puntos interiores de $U \subseteq X$ se llama *el interior de U en X* y se denota como $\text{Int}_X(U)$, o si no hay confusión $\text{Int}(U)$, de esta manera en la Definición A.2, $U \subseteq X$ es abierto si $\text{Int}(U) = U$. Observe que todo punto interior de U es punto de U, esto es $\text{Int}(U) \subseteq U$. Como es de esperarse se tiene la siguiente proposición, cuya demostración puede consultarse en [20, Teorema 2.19, Cap.2, pp.34-35].

Proposición A.1. *Sea X un espacio métrico, para todo $p \in X$ y $r > 0$ se tiene que $B_r(p)$ es un conjunto abierto.*

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene el siguiente resultado, cuya demostración puede ser consultada en [7, Cap.3, §2, pp.38-39].

Proposición A.2. *Dado $U \subseteq X$, $\text{Int}(U)$ es abierto en X.*

Dado $U \subseteq X$ llamamos la *cerradura de U en X* al conjunto de todos los puntos límite de U, y lo denotamos como $\text{Cl}_X(U)$, o bien, si no exíste confusión por $\overline{U}$. Por otro lado, echando un vistazo a la Definición A.2 podemos decir que U es cerrado en X si $\overline{U} = U$, y más aún, se tiene que todo punto de U es punto límite de U, es decir, $U \subseteq \overline{U}$.

Denotamos por $X \setminus U$ (o bien U^c) al complemento de U en X, es decir,

$$X \setminus U := \{x \in X : x \notin U\}.$$

Definición A.3. *Dado $U \subseteq X$ y $p \in U$ se dice que p es un punto frontera si $B_r(p) \cap U \neq \emptyset$ y $B_r(p) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ para cada $r > 0$. De esta manera, al conjunto de puntos frontera de U se le llama la frontera de U en X y se denota como $\text{Fr}_X(U)$, o si no hay confusión $\text{Fr}(U)$.*

Los abiertos y cerrados en un espacio métrico son duales en el sentido que establece la siguiente proposición, cuya demostración puede verse en [7, Cap.3, §2, p.40].

Proposición A.3. *Sea X un espacio métrico y $U \subseteq X$, se cumple*

$$X \setminus \overline{U} = \text{Int}(X \setminus U).$$

En consecuencia, U es cerrado en X si y sólo si $X \setminus U$ es abierto en X.

De la Proposición A.3 se tiene el siguiente corolario. La demostración puede consultarse en [7, Cap.3, §2, p.40].

Corolario A.1. *La cerradura $\overline{U}$ de cualquier subconjunto U de X es cerrada en X.*

A continuación, daremos una caracterización de una de las propiedades más importantes ligadas a una función (en este caso entre espacios métricos), la continuidad, tal caracterización estará dada términos de conjuntos abiertos y cerrados.

Definición A.4. *Sean X, Y espacios métricos. Una función $\varphi : X \longrightarrow Y$ es continua en el punto $x_0 \in X$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(x_0)) < \epsilon \text{ si } d_X(x, x_0) < \delta.$$

Diremos que φ es continua en X si lo es en todo punto de X.

Observese que la continuidad de φ depende de las métricas que se consideren en los espacios X y Y, si es necesario hacer mención de la métrica asociada a tales espacios, escribiremos:

$$\varphi : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y),$$

en lugar de $\varphi : X \longrightarrow Y$.

Dados $U \subseteq X$ y $\varphi : X \longrightarrow Y$ una función, denotamos por

$$\varphi(U) := \{\varphi(x) : x \in U\},$$

a la imagen de U bajo φ. Observemos que, con esto último, podemos reformular la definición de continuidad de la siguiente manera: Una función entre espacios métricos $\varphi : X \longrightarrow Y$ es continua en el punto $x_0 \in X$ si dada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\varphi(V_X(x_0, \delta)) \subseteq V_Y(\varphi(x_0), \epsilon).$$

La imagen inversa de $B \subseteq Y$ bajo la función $\varphi : X \longrightarrow Y$ es el conjunto

$$\varphi^{-1}(B) := \{x \in X : \varphi(x) \in B\}.$$

Con lo anterior, se tiene el siguiente resultado cuya demostración puede consultarse en [7, Cap.2, §2, p.42].

Proposición A.4. *Sean X y Y espacios métricos, y sea $\varphi : X \longrightarrow Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\varphi : X \longrightarrow Y$ *es continua.*

(ii) $\varphi^{-1}(U)$ *es abierto en X para todo subconjunto abierto U de Y.*

(iii) $\varphi^{-1}(C)$ *es cerrado en X para todo subconjunto cerrado C en Y.*

Concluimos lo relacionado a los conjuntos abiertos y cerrados de un espacio métrico, enunciando propiedades importantes de estos. Veremos más adelante que un espacio métrico es un ejemplo de espacio topológico en el que estas y otras propiedades se cumplirán. La demostración de los siguientes resultados puede consultarse en [7, Cap.2, §2, p.43].

Proposición A.5. *Sea X un espacio métrico, se satisface lo siguiente:*

(i) *El conjunto vacío $\emptyset$ es abierto en X.*

(ii) *X es abierto en X.*

(iii) *La unión $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$ de cualquier familia $\{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos abiertos de X es abierta en X.*

(iv) *La interesección finita de conjuntos abiertos, $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$, es un abierto en X.*

Y tendremos lo propio para conjuntos cerrados en el espacio métrico X:

Proposición A.6. *Sea X un espacio métrico, se satisface:*

(i) *El conjunto vacío $\emptyset$ es cerrado.*

(ii) *X es cerrado en X.*

(iii) *La unión finita de conjuntos cerrados, $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$, es cerrado en X.*

(iv) *La intersección $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} U_i$ de cualquier familia $\{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos cerrados de X es cerrado en X.*

Es de nuestro interés las nociones de cercanía, es así que tenemos la siguiente definición:

Definición A.5. *Una sucesión en un espacio métrico X es una función $\overline{x} : \mathbb{N} \longrightarrow X$, el valor de dicha función en k se llama el k-ésimo término de la sucesión y se denota por $x_k := \overline{x}(k)$. Una sucesión se suele denotar simplemente por $\overline{x} = \{x_k\}$. Decimos que $\{x_k\}$ converge a un punto $x \in X$ si, dada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d(x_k, x) < \epsilon \text{ siempre que } k \geq N.$$

El punto x se llama el límite de la sucesión $\{x_k\}$.

Usualmente escribimos

$$x_k \to x \text{ en } X, \text{ o bien } \lim_{k\to\infty} x_k = x,$$

para decir que $\{x_k\}$ converge a x en X. Observe que

$$x_k \to x \text{ en } X \text{ si y sólo si } d(x_k, x) \to 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Definición A.6. *Una subsucesión de $\overline{x} = \{x_k\}$ es composición de $\overline{x}$ con una función estrictamente creciente $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Su j-ésimo término se denota por $x_k := \overline{x}(k(j))$.*

La demostración de la siguiente proposición puede consultarse en [7, Cap.3, §3, p.44].

Proposición A.7. *Sea X un espacio métrico. Se cumple lo siguiente:*

(i) El límite de una sucesión convergente es único.

(ii) Si $\{x_k\}$ converge a x en X entonces cualquier subsucesión $\{x_{k_j}\}$ converge a x en X.

Definición A.7. *Una sucesión $\{x_k\}$ en X está acotada si existen $x \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que $d(x_k, x) \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

La demostración de las siguientes tres proposciones puede consultarse en [7, Cap.3, §3, pp.44-45].

Proposición A.8. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico está acotada.*

Proposición A.9. *Sean X un espacio métrico, $U \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces, $x \in \overline{U}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_k\}$ tal que $x_k \in U$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x_k \to x$ en X.*

Proposición A.10. *Una función $\varphi : X \longrightarrow Y$, entre espacios métricos es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_k\}$ en X tal que $x_k \to x$ en X se cumple que $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$ en Y.*

Definición A.8. *Sean X un espacio métrico y $U \subseteq X$. Una cubierta de U en X es una familia $\mathfrak{C} = \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de subconjuntos de X tal que*

$$U \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i.$$

Si además X_i es abierto en X para cada $i \in \mathcal{I}$, se dice que $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de U en X. Un subconjunto $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ que a su vez es una cubierta de U se le llama una subcubierta de $\mathfrak{C}$.

Definición A.9. *Un subconjunto K de un espacio métrico X es compacto si cada cubierta abierta $\mathfrak{C} = \{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ de K en X contiene una subcubierta finita, es decir, existen $X_{i_1}, \ldots, X_{i_m} \in \mathfrak{C}$ tales que*

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} X_{i_k}.$$

La demostración de los dos teoremas siguientes puede consultarse en [7, Cap.4, §1, p.57].

Teorema A.1. *Sea X un espacio métrico. Si $K \subseteq X$ es compacto, entonces toda sucesión $\{x_k\}$ de elementos de K contiene una subsucesión que converge en X a un elemento de K.*

Teorema A.2. *Sea X un espacio métrico. Si K es un subconjunto compacto de X entonces K es cerrado y acotado.*

Las demostraciones de las siguientes proposiciones pueden ser consultadas en [7, Cap.4, §4, pp.58-59].

Proposición A.11. *Sean X un espacio métrico y $K \subseteq X$ compacto. Si $C \subseteq K$ es cerrado en X, entonces C es compacto.*

Proposición A.12. *Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es una función continua entre espacios métricos y K es un subconjunto compacto de X entonces $\varphi(K)$ es un subconjunto compacto en Y.*

Definición A.10. *Sean A un conjunto y X un espacio métrico. Una función $f : A \longrightarrow X$ es acotada si existen $c \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$ tales que*

$$d(f(z), x_0) < c, \text{ para cada } z \in A.$$

La demostración de la siguiente proposición puede ser consultada en [7, Cap.4, §4, p.59].

Proposición A.13. *Si K es un espacio métrico compacto, X un espacio métrico y $\varphi : K \longrightarrow X$ es una función continua, entonces φ es acotada.*

Presentamos, a continuación, una caracterización sencilla de los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, la demostración de este resultado puede consultarse en [7, Cap.4, §2, p.61].

Teorema A.3 (**Heine-Borel**). *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Entonces K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Una consecuencia importante del Teorma de Heine-Borel es el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [7, Cap.4, §4, p.62].

Teorema A.4 (**Bolzano-Weierstrass**). *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ contiene una subsucesión convergente.*

Definición A.11. *Decimos que una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza su mínimo en X si existe $x_0 \in X$ tal que*

$$f(x_0) \leq f(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Por otro lado, decimos que f alcanza su máximo en X si existe $x_1 \in X$ tal que

$$f(x) \leq f(x_1), \text{ para cada } x \in X.$$

En donde al punto x_0 le llamaremos mínimo de f en X y al punto x_1 máximo de f en X.

De nuestra experiencia con el cálculo diferencial sabemos que en general una función continua no alcanza su mínimo o su máximo, un ejemplo muy conocido de este hecho es la función $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual está acotada inferior y superiormente pero no alcanza ni su mínimo ni su máximo en $\mathbb{R}$.

Una consecuencia importante de la compacidad es el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [7, Cap.4, §3, p.63].

Teorema A.5. *Si K es un espacio métrico compacto y no vacío, entonces toda función continua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo en K.*

De manera particular tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [7, Cap.4, §3, p.63].

Corolario A.2. *Sea $K \neq \emptyset$ un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces toda función continua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo en K.*

Definición A.12. *Sea $\{x_k\}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. El límite inferior de $\{x_k\}$ se define como*

$$\liminf_{k\to\infty} x_k := \sup_{m\geq 1} \inf_{k\geq m} x_k \in \mathbb{R},$$

y el límite superior de $\{x_k\}$ como

$$\limsup_{k\to\infty} x_k := \inf_{m\geq 1} \sup_{k\geq m} x_k \in \mathbb{R}.$$

Para consultar el siguiente resultado se recomienda ver [7, Cap.4, p.73].

Proposición A.14. *Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Decimos que $\{x_k\}$ converge a x en X si y sólo si*

$$\liminf_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} x_k = \limsup_{k\to\infty} x_k.$$

También se suele escribir $\overline{\lim} x_k$ y $\underline{\lim} x_k$ al límite superior e inferior de una sucesión acotada de números reales, respectivamente.

Definición A.13. *Una función $\varphi : X \longrightarrow Y$ entre espacios métricos es uniformemente continua si dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende únicamente de ϵ) tal que para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$,*

$$d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < \epsilon, \quad si \quad d_X(x_1, x_2) < \delta.$$

La demostración del siguiente resultado puede consultarse en [7, Cap.4, §5, p.70].

Proposición A.15. *Toda función uniformemente continua es continua.*

El recíproco de esta proposición no es verdadero, un ejemplo de esto es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, la cual es continua, pero no uniformemente continua. El siguiente resultado expresa cuando estas condiciones coinciden, su demostración puede consultarse en [7, Cap.4, §5, p.70].

Teorema A.6. *Sean X un espacio métrico compacto y Y un espacio métrico. Entonces, toda función continua $\varphi : X \longrightarrow Y$ es uniformemente continua.*

Hasta este momento, solo tenemos la continuidad y continuidad uniforme de funciones entre espacios métricos. Sin embargo, de acuerdo con los intereses del presente trabajo, será necesaria la diferenciabilidad de funciones en $\mathbb{R}^n$. A continuación, damos un breve repaso de este tema.

Recordemos que dada una función real de variable real $f : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la derivada $f'(x_0)$, de f en $x_0 \in U$ es el límite (cuando este existe)

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Decimos que f es diferenciable[1] en x_0 si tiene derivadas continuas de todos los ordenes en x_0, y más aún decimos que f es diferenciable en $U \subseteq \mathbb{R}$ si es diferenciable en cada punto de U.

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la derivada parcial de f con respecto x en el punto $p = (x_0, y_0) \in U$, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, es (cuando existe) la derivada en x_0 de la función en la variable $x \mapsto f(x, y_0)$, de manera similar la derivada parcial con respecto a y en p, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$, es la derivada en y_0 de la función $y \mapsto f(x_0, y)$. Si f tiene derivas parciales de todos lo órdenes en una vecindad de p podemos considerar las primeras, segundas, terceras derivadas parciales y así sucesivamene, por ejemplo, las segundas derivadas parciales se suelen escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

y así sucesivamente podemos considerar las otras parciales de órdenes superiores. De esta manera, podemos decir que f es diferenciable en p si tiene derivadas parciales de todos los órdenes en p, y, más aún, que f es diferenciable en U si es diferenciable en todos los puntos de U.

En algunas ocasiones denotaremos las derivadas parciales como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}, \text{ y así sucesivamente.}$$

Algo que es importante destacar es que cuando f es diferenciable las derivadas parciales de f son independientes del orden en el que se efectuan, es decir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3}{\partial^2 x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \text{ y así sucesivamente.}$$

Las nociones de derivadas parciales y diferenciabilidad pueden extenderse a funciones $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, es la derivada de la función de una variable

$$x_i \mapsto f(x_1^0, \ldots, x_i, \ldots, x_n^0).$$

Un hecho importante es que las derivadas parciales satisfacen la regla de cadena, supongamos que $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ son funciones diferenciables en $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^3$ entonces la composición $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ será una función diferenciable en U, y tomando como ejemplo la derivada parcial de f con respecto a v tendremos:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

[1] También se suele decir que f es una función suave.

Estamos interesados en extender las nociones de diferenciabilidad para funciones $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, de esta manera tenemos la siguiente:

Definición A.14. *Diremos que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $p \in U$ si sus funciones componentes son diferenciables, es decir, si escribimos*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

las funciones $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en p para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Procedemos a introducir el concepto de diferencial de una función diferenciable.

Definición A.15. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. A cada punto $p \in U$ le asociamos una transformación lineal $df_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ denominada diferencial de f en p, definida de la siguiente manera. Sea $w \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Por la regla de la cadena, la curva $\beta = f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es también diferenciable y satisface*

$$df_p(w) = \beta'(0).$$

Otra manera de afrontar la situación planteada en la definición previa es la siguiente: Supongamos que f es una función diferenciable de un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y que x es un punto de su dominio. Entonces, para cualquier vector $h \in \mathbb{R}^n$, la derivada de f en la dirección de h, en el punto x, se define como el límite usual

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}.$$

Fijando a x, definimos una transformación $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, que asigna a cada vector $h \in \mathbb{R}^n$ la derivada direccional $df_x(h) \in \mathbb{R}^m$. A esta transformación la llamamos la derivada de f en x, además se puede probar que la derivada $df_x(h)$ es lineal, y, por supuesto, como transformación lineal $df_x(h)$ puede representarse por medio de una mátriz en términos de las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, más aún, si escribimos a f como $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, entonces su matriz es justamente la matriz jacobiana de f en x:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Aunque la derivada de f puede ser expresada en términos de sus $m \times n$ derivadas parciales, es mucho más natural y elegante pensar en df_x como una transformación lineal $df_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Para exhibir la sencillez de esta definición, veamos como queda determindada la regla de la cadena: Consideremos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos tales que $f : U \longrightarrow V$ y $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^l$ son diferenciables. Entonces la regla de la cadena dice que para cada $x \in U$,

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

Algo importante que debe de destacarse en la matriz asociada a df_p es cuando ocurre que $m = n$, en tal caso tendremos una matriz cuadrada, cuyo determinante se denomina determinante jacobiano, donde habitualmente suele ser denotado por:

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Consideremos el siguiente ejemplo: Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : V \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ funciones diferenciables, donde U y V son conjuntos abiertos y además $f(U) \subseteq V$, y escribamos

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$$g(x, y, z) = (\xi(x, y, z), \eta(x, y, z)).$$

Entonces

$$g \circ f(u, v) = (\xi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \eta(x(u, v), y(u, v), z(u, v))),$$

de la regla de la cadena tenemos que $g \circ f$ es diferenciable y además podemos encontrar sus derivadas parciales de sus funciones componentes, por ejemplo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

en este caso la relación $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$ es equivalente al producto de las matrices jacobianas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Definición A.16. *Sean X un espacio métrico y $U \subseteq X$. Decimos que U es conexo si no existen dos subconjuntos abiertos V y W de X, no vacíos, tales que $V \cap W = \emptyset$ y $V \cup W = U$.*

Ahora bien, una propiedad conocida e importante para funciones de variable real es la siguiente: Si $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y si $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$ entonces f es constante en (a, b). Así, tenemos la siguiente proposición cuya demostración puede consultarse en [9, Cap.2, pp.130-131].

Proposición A.16. *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable sobre un subconjunto abierto y conexo U de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $df_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es cero para cada $p \in U$. Entonces f es constante en U.*

Definición A.17. *Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Una vecindad de x en X es un subconjunto abierto U de X tal que*

(i) $x \in U$ y

(ii) existe un subconjunto abierto V tal que $x \in V \subseteq U$.

Concluimos el repaso de diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$ con un teorema clave, que resulta de gran utilidad para la teoría desarrollada en esta tesis. La demostración de dicho teorema puede encontrarse en [21, Cap.7].

Teorema A.7 (**De la Función Inversa**). *Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable y supóngase que en $p \in U$ la diferencial $df_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Entonces existen una vecindad V de p en U y una vecindad W de $f(p)$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $f : V \longrightarrow W$ tiene una inversa diferenciable $f^{-1} : W \longrightarrow V$.*

En el año 1872 Felix Klein (1849-1925) presentó una nueva visión de la geometría en su reconocido *Programa de Erlangen*, en este manuscrito Klein, establece lo siguiente:

> *Una geometría es el estudio de las propiedades de un espacio que permanecen invariantes bajo un grupo de transformaciones.*

Con esta visión se ha introducido la noción de *grupo de transformaciones* para el estudio de la geometría, en este texto presentamos el estudio de temas relacionados con la geometría diferencial que tiene como grupo de transformaciones a los *difeomorfismos*.

Definición A.18. *Una función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m$, donde U y V son subconjuntos abiertos es un difeomorfismo si es biyectiva y la función inversa $f^{-1} : V \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$ es diferenciable.*

Hemos dicho que una función f de un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable si tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Sin embargo, si el dominio U de f no es abierto, no podemos hablar en general de las derivadas parciales, pues al no ser U abierto existirán puntos para los cuales no existan vecindades completamente contenidas en U y como las derivadas parciales están definidas en términos de un límite no tendremos posibilidad de que en dichos puntos este límite exista. Por lo que, se debe de adaptar la situación de tener subconjuntos abiertos a conjuntos más generales, para ello utilizamos la noción de extensión de funciones, esto es, una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida en un subconjunto arbitrario $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es diferenciable si se puede extender localmente a una función diferenciable en un conjunto abierto, es decir, si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $x \in U$, y una función diferenciable $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F = f|_{U \cap X}$, como veremos en la siguiente página los abiertos (relativos) de X son exactamente aquellos que pueden expresarse como $U \cap X$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, lo anterior nos dice que la diferenciabilidad es una propiedad local, esto es, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable si es diferenciable en una vecindad de cada punto de X.

Dicho lo anterior, podemos entonces hablar de difeomorfismos entre subconjuntos de espacios euclidianos más generales, digamos $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. En este sentido, diremos que X y Y son difeomorfos si existe un tal difeomorfismo que los relaciona. De esta manera, podemos reescribir el Teorema A.7 como sigue.

Teorema A.8 (**De la Función Inversa**). *Supongamos que $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^m$ es diferenciable cuya diferencial df_x en el punto $x \in X$ es un isomorfismo. Entonces f es un difeomorfismo local en x.*

De lo discutido anteriormente, se deduce el siguiente resultado.

Teorema A.9. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$, el conjunto de todos los difeomorfismos en X, denotado por* $\mathrm{Diff}(X)$ *es un grupo bajo la composición usual de funciones.*

En la Proposición A.5 vimos tres propiedades de la familia de conjuntos abiertos en un espacio métrico. Estas nos sugieren la definición básica de un espacio más general, a saber, de un espacio topológico.

Definición A.19. *Una topología sobre un conjunto X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Sea I un conjunto de índices, si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$.

(iii) Si $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \tau$, *entonces* $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Si τ es una topología sobre X, a la pareja (X, τ) se le llama espacio topológico, o simplemente espacio. Los elementos de pertenecen a τ reciben el nombre de subconjuntos abiertos de X.

De forma análoga a lo expuesto en la Definición A.17, se introduce la siguiente definición.

Definición A.20. *Sean X un espacio y $x \in X$. Entonces una vecindad de x en X es un subconjunto V de X tal que*

(i) $x \in V$ *y*

(ii) existe un subconjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq V$.

Definición A.21. *Sea (X, τ) un espacio. Una base para la topología τ es una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ tal que para cada $U \in \tau$ existe $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{G}$.*

Para nuestos fines, solo abordaremos un ejemplo de espacio topológico. Dado un espacio métrico (X, d) , se tiene que X admite una estructura de espacio topológico, lo cual se sigue al considerar, para $\epsilon > 0$, el conjunto $B_\epsilon(x)$ con $x \in X$. De esta manera, la familia $\{B_\epsilon(x)\}_{x\in X}$ forma una base para la topología en X. Por lo tanto, en particular, $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio topológico.

Supongamos que τ es una topología definida sobre un conjunto X y que Y es un subconjunto de X, definimos la colección

$$\tau \restriction Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}.$$

Resulta ser que $\tau \restriction Y$ es una topología en Y (lo cual puede consultarse en [19, Cap.1, §1]), a la cual llamamos topología relativa en Y con respecto a (X, τ), y diremos que $(Y, \tau \restriction Y)$ es un subespacio de (X, τ).

Definición A.22. *Un espacio X es de Hausdorff (también llamado T_2) si y sólo si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

Definición A.23. *Un espacio topológico X es segundo númerable si admite una base numerable.*

Existe el concepto de primero numerable el cual es más débil que el concepto anterior. Dado $x \in X$, una colección $\mathcal{B}_x$ de vecindades de x se llama base local en x si toda vecindad de x contiene un $B \in \mathcal{B}_x$.

Definición A.24. *Un espacio es primero numerable si existe una base local numerable para cada $x \in X$.*

Definición A.25. *Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si para cualquier abierto V de Y, $f^{-1}(V)$ es abierto en X (es decir, la imagen inversa de abiertos en Y es un abierto en X).*

Definición A.26. *Sea X un espacio topológico.*

(i) Una sucesión en X es una función $\overline{x} : \mathbb{N} \longrightarrow X$. La sucesión $n \mapsto x_n$ es denotada por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge a un punto $x_0 \in X$ si para cada vecindad V de x_0 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in V$ siempre que $m \geq n_0$. El símbolo $x_n \to x_0$ significa que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, siendo este último el límite de la sucesión.

De la definición anterior, tenemos que si X es un espacio topológico y la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $x_0 \in X$, entonces decimos que *no converge* a x_0. En el caso en que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge hacia ningún punto de X, se dice que la sucesión es *divergente* en X.

La siguiente definición es la generalización del inciso (ii) de la Definición A.2 para espacios topológicos.

Definición A.27. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de A si cada vecindad V de x contiene algún punto de A diferente de x. Esto es, x es un punto de acumulación de A si $(A \cap V) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ para cada vecindad V de x.*

El siguiente resultado puede consultarse en [4, Cap.3, §4, p.87].

Proposición A.17. *Sean X un epacio topológico y $A \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos pertenecientes a A que convergen a x, entonces x es un punto de acumulación de A.*

Consecuencia del resultado anterior se tienen las siguientes dos proposiciones.

Proposición A.18. *Una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico es divergente si no tiene puntos de acumulación en X.*

Proposición A.19. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ cerrado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A que converge al punto x_0, entonces $x_0 \in A$.*

Concluimos este repaso de la convergencia de sucesiones en un espacio topológico con la siguiente proposición, cuya demostración puede verse en [4, Cap.3, §4, p.87].

Proposición A.20. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a x_0, entonces $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Definición A.28. *Dados X y Y espacios topológicos, una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo si tanto ella como su inversa son funciones continuas.*

De esta manera los espacios X y Y serán llamados homeomorfos si existe un homeomorfismo entre X y Y, lo cual denotamos como $X \cong Y$.

Cuando $X \cong Y$, los consideramos como objetos equivalentes en la clase de los espacios topológicos, de esta manera pueden considerarse indistintamente en nuestros discursos y argumentos.

De manera análoga como se definió la compacidad para subconjuntos de un espacio métrico (ver Definición A.9) tenemos la siguiente definición.

Definición A.29. *Un espacio X es compacto si y sólo si toda cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de X admite una subcubierta finita $\{U_{\alpha_{i_1}}, \ldots, U_{\alpha_{i_n}}\}$ que también cubren a X.*

Así mismo, se tiene el análogo de la Definición A.16 para espacios topológicos.

Definición A.30. *Un espacio X es conexo si no existen dos abiertos U y V, no vacíos, tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$.*

Definición A.31. *Una propiedad* **P** *es topológica si cada vez que un espacio X tiene la propiedad* **P**, *también la posee cualquier espacio homeomorfo a X.*

Definición A.32. *Sea X un espacio topológico y sean $x_0, x_1 \in X$. Una trayectoria (camino) de x_0 a x_1 es una función continua $\alpha : I \longrightarrow X$, tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$[2], la denotamos como $\alpha : x_0 \simeq x_1$. Al punto x_0 se le suele llamar origen de α, mientras que al punto x_1 destino de α y a ambos los designamos extremos de la trayectoria. Si los extremos coinciden, es decir, $\alpha(0) = x_0 = x_1 = \alpha(1)$, se dice que la trayectoria es cerrada o, simplemente, que es un lazo basado en x_0.*

Como ejemplos de caminos tenemos los siguientes:

(i) Dado $x \in X$, $c_x : I \longrightarrow X$, tal que $c_x(t) = x$ para cada $t \in I$, es el camino constante o el lazo constante.

(ii) Dado un camino $\alpha : I \longrightarrow X$ se tiene su camino inverso $\overline{\alpha} : I \longrightarrow X$, tal que $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. De esta manera, con la notación de la definición anterior se tiene que si $\alpha : x_0 \simeq x_1$ entonces $\overline{\alpha} : x_1 \simeq x_0$.

[2] A menos de que indiquemos lo contrario I corresponde al intervalo cerrado $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Definición A.33. *Un espacio X es arco-conexo si dados $x, y \in X$ existe $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.*

En este trabajo, consideramos espacios simplemente conexos, que, en esencia, son espacios que no tienen "agujeros". Para definir estas nociones, es necesario adentrarse en la topología algebraica, más precisamente en las ideas de homotopía y el grupo fundamental. A continuación, presentamos el material básico para poder definir a los espacios simplemente conexos. Las demostraciones y una exposición concisa de este material puede consultarse en [11, Cap.1], a menos que se indique lo contrario.

Definición A.34. *Dados dos caminos $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$, tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos el producto o pegado de ellos como el camino $\alpha\beta : I \longrightarrow X$, tal que*

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1), & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definición A.35. *Diremos que dos caminos $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ son homotópicos si tienen los mismos extremos x_0 y x_1 y existe una función continua $H : I \times I \longrightarrow X$, tal que $H(s,0) = \alpha(s)$, $H(s,1) = \beta(s)$, $H(0,t) = x_0$, $H(1,t) = x_1$, para toda $s, t \in I$.*

La función H se llama homotopía relativa a $\{0,1\}$, y esto se denota por $H : \alpha \simeq_{\partial I} \beta$, o simplemente por $\alpha \simeq_{\partial I} \beta$.

Definición A.36. *Si un lazo α es homotópico al lazo constante c_{x_0}, esto es, $\alpha \simeq_{\partial I} c_{x_0}$, diremos que es nulhomotópico o contraíble.*

Los siguientes resultados serán importantes para definir el grupo fundamental de espacio:

Proposición A.21. *Sean $\alpha : x_0 \simeq x_1$, $\beta : x_1 \simeq x_2$ y $\gamma : x_2 \simeq x_3$ caminos en X, entonces se tienen las siguientes afirmaciones:*

(i) $\alpha(\beta\gamma) \simeq_{\partial I} (\alpha\beta)\gamma$.

(ii) $c_{x_0}\alpha \simeq_{\partial I} \alpha$ y $\alpha c_{x_1} \simeq_{\partial I} \alpha$.

(iii) $\alpha\overline{\alpha} \simeq_{\partial I} c_{x_0}$ y $\overline{\alpha}\alpha \simeq_{\partial I} c_{x_1}$.

Proposición A.22. *La relación $\simeq_{\partial I}$ es de equivalencia en el conjunto de caminos en un espacio arco-conexo X.*

Como la relación de homotopía $\simeq_{\partial I}$ es de equivalencia, para cada $\alpha : I \longrightarrow X$, llamamos clase de homotopía de α a la clase de equivalencia

$$[\alpha] = \{\beta : I \longrightarrow X : \beta \simeq_{\partial I} \alpha\}.$$

Nos interesamos en particular por las clases de homotopía de lazos basados en un punto específico, digamos $x \in X$, y en particular en la clase $[c_x]$, que denotamos por 1_x o, si no hay confusión, simplemente por 1.

Dadas las homotopías en X, $F : \alpha_0 \simeq_{\partial I} \alpha_1$ y $G : \beta_0 \simeq_{\partial I} \beta_1$, tenemos la función $H = FG : I \times I \longrightarrow X$ dada por

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t), & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,t), & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

está bien definida, es continua por el lema de pegado (véase [15, Cap.2, §18, p.123]) y es tal que $H : \alpha_0\beta_0 \simeq_{\partial I} \alpha_1\beta_1$. Así, podemos definir el producto de clases de homotopía del producto de dos caminos α y β mediante la siguiente expresión

$$[\alpha][\beta] = [\alpha\beta].$$

En vista de lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Proposición A.23. *Sean $\alpha : x \simeq_{\partial I} y$ $\beta : y \simeq_{\partial I} z$ y $\gamma : z \simeq_{\partial I} w$ caminos en X, entonces se satisfacen las siguientes igualdades:*

(i) $[\alpha]([\beta][\gamma]) = ([\alpha][\beta])[\gamma]$.

(ii) $1_x[\alpha] = [\alpha] = [\alpha]1_y$.

(iii) $[\alpha][\overline{\alpha}] = 1_x$, $[\overline{\alpha}][\alpha] = 1_y$ *(por este motivo, a $[\overline{\alpha}]$ se le donota como $[\alpha]^{-1}$).*

En la proposición anterior se tiene que gracias a (i), el producto de clases de homotopía de caminos es asociativo, de esta manera, ya no habrá confusión de escribir $[\alpha][\beta][\gamma]$.

El concepto de grupo fundamental depende de un punto base $x_0 \in X$. Restringiendo el resultado anterior a lazos, obtenemos la siguiente teorema-definición:

Definición A.37. *Sean X un espacio y x_0. El conjunto*

$$\Pi_1(X, x_0) = \{[\lambda] : \lambda \text{ es un lazo basado en } x_0\},$$

es un grupo respecto a la multiplicación $[\lambda][\alpha] = [\lambda\alpha]$, con elemento neutro $1 = 1_{x_0} = [c_{x_0}]$ y con $[\lambda]^{-1}$ como inverso de cada $[\lambda]$. A este grupo se le llama grupo fundamental de X basado en el punto x_0.

Definición A.38. *Se dice que un espacio topológico X es simplemente conexo si es arco-conexo y, dado $x_0 \in X$, el grupo fundamental $\Pi_1(X, x_0)$ es trivial.*

Para nuestros fines, mostaremos la siguiente caracterización de este concepto. La demostración de este resultado puede consultarse en [19, pp.437-438].

Proposición A.24. *Sea X un espacio arco-conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

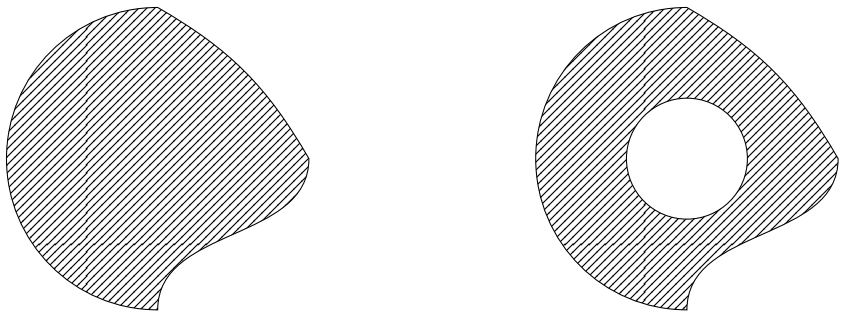
(i) X es simplemente conexo.

(ii) $\Pi_1(X, x_0) = 1$ *para cada $x \in X$.*

(iii) Todo lazo $\alpha : I \longrightarrow X$ es nulhomotópico.

(iv) $\alpha \simeq_{rel\, \partial I} \lambda$ para cualquier par de trayectorias con los mismos extremos x y y.

Este último resultado cobra relevancia a partir del Capítulo 3, donde trabajaremos con subconjuntos $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abiertos, conexos y no degenerados, a los que llamamos dominios, los cuales son simplemente conexos. Es decir, dominios para los cuales cualquier curva cerrada simple en U puede deformarse a un punto permaneciendo dentro de U, lo que significa, intuitivamente, que U no tiene "agujeros" (ver la Figura A.1). Este hecho, junto con el Teorema de la Deformación y el Teorema de Cauchy (ver Apéndice B), tiene consecuencias importantes para el desarrollo de superficies minimales con parametros isotérmicos, las cuales se abordan en los capítulos 3, 4 y 5.



(a) (b)

Figura A.1: (a) Simplemente conexo y (b) No simplemente conexo

A continuación, definimos las funciones cubrientres, que son de importancia a lo largo del Capítulo 5.

Definición A.39. *Sea X un espacio, una función cubriente sobre X es una función $p : \hat{X} \longrightarrow X$, $\hat{X} \neq \emptyset$, tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U en X que satisface*

(a) La imagen inversa de U, $p^{-1}(U)$, es la unión de abiertos $\hat{U}_j \subseteq \hat{X}, j \in \mathcal{J}$, donde $\mathcal{J}$ es algún conjunto no vacío de índices.

(b) Para cada $j \in \mathcal{J}$, la restricción $p \restriction_{\hat{U}_j} : \hat{U}_j \longrightarrow U$ es un homeomorfismo.

Para ejemplificar la definición anterior, consideremos la función exponencial $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi i}t$, una manera de visualizar la acción geométrica de esta función lo ilustra la Figura A.2 siguiente.

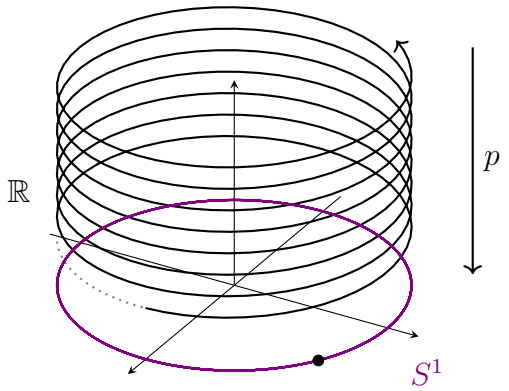


Figura A.2: La función exponencial es una función cubriente de $\mathbb{S}^1$

Definición A.40. *Se dice que una función cubriente $p : \hat{X} \longrightarrow X$ es universal si el espacio $\hat{X}$ es simplemente conexo. Al espacio $\hat{X}$ lo llamamos espacio cubriente universal.*

Definición A.41. *Se dice que un espacio X es localmente arco-conexo si cada punto $x \in X$ tiene una base local formada por vecindades arco-conexas.*

Definición A.42. *Un espacio X es semilocalmente simplemente conexo si cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U, tal que cada lazo en U es nulhomotópico en X.*

Definición A.43. *Un espacio X es suficientemente conexo si X es conexo, arco-conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo.*

Para abordar la teoría espacios cubrientes y consultar la demostración del siguiente resultado remitimos al lector a [19, Cap.15, pp.468-497].

Teorema A.10 (**Existencia de la aplicación cubriente universal**)**.** *Todo espacio suficientemente conexo X tiene una función cubriente universal $p : \hat{X} \longrightarrow X$.*

Concluimos este capítulo enunciando las siguientes propiedades topológicas, importantes para nuestro estudio. La demostración de la primera puede consultarse en [19, Cap.8, §1, p.199], y de la segunda, en [19, Cap.6, §1, p.145].

Teorema A.11 (**Compacidad como invariante topológico**)**.** *Sean X y Y espacios, con X compacto, sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre X y Y. Entonces Y es compacto.*

Teorema A.12 (**Conexidad como invariante topológico**)**.** *Sean X y Y espacio topológicos, con X conexo, sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo entre X y Y. Entonces Y es conexo.*

Una propiedad topológica que suele abordarse menos en cursos básicos, aunque de suma importancia, se enuncia en el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [19, Cap.10, §1, pp.292].

Teorema A.13 (**Dimensión como invariante topológico**)**.** *La dimensión de un espacio topológico es invariante bajo homeomorfismos.*

APÉNDICE B

Elementos de variable compleja

Las demostraciones de los resultados que se exponen a continuación pueden ser consultadas en [13, Cap.1, §1, pp.47-70]. Nos centraremos en el estudio de funciones que tienen como dominio un subconjunto del plano complejo (generalmente un conjunto abierto) y con codominio $\mathbb{C}$, a estas funciones les llamamos funciones complejas de variable compleja.

Del hecho de que existe una corresponcia biunívoca de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ mediante la función

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x + iy &\longmapsto (x, y), \end{aligned}$$

podemos pensar a este tipo de funciones como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. De esta manera, es usual denotar a estas funciones como

$$f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy),$$

donde u y v son funciones con valores reales. En este trabajo, abusando de la notación, escribiremos simplemente $f(x, y)$, $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

De esta manera, dada la función $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, escribiendo $f(z) = u(z) + iv(z)$, diremos que $\mathrm{Re}\{f(z)\} = u(z)$ y $\mathrm{Im}\{f(z)\} = v(z)$.

Definición B.1. *Sean $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$ punto de acumulación de A se dice que $\lim_{z\to a} f(z) = L$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |z - a| < \delta$, se tiene que $|f(z) - L| < \epsilon$.*

Observemos que, esta definición es identica a la definición de límite para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, por lo que todas las propiedades demostradas para dichas funciones son válidas en nuestro caso. Por ejemplo, la unicidad y el hecho de que el límite de la suma es la suma de los límites. Más aún, las mismas demostraciones hechas en cálculo vectorial son de utilidad para mostrar que

(i) Si $\lim_{z\to a} f(z) = L_1$ y $\lim_{z\to a} g(z) = L_2$, entonces

$$\lim_{z\to a} f(z)g(z) = L_1 L_2.$$

(ii) Si $\lim_{z\to a} f(z) = L_1$ y $\lim_{z\to a} g(z) = L_2$, con $L_2 \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ para cada z, entonces

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Y como ya no es de sorprenderse la continuidad se define igual que en los cursos de cálculo.

Definición B.2. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es continua en $z_0 \in A$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|z - z_0| < \delta$, se tiene que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.*

Nuevamente como en el cálculo de variables reales, la suma, el producto, el cociente (siempre y cuando este definido) y composición de funciones continuas resulta ser una función continua.

Definición B.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}$, se dice que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido complejo en $z_0 \in A$, si*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Dicho límite es llamado la derivada y se denota por $f'(z_0)$. Diremos que f es diferenciable en el sentido complejo en A, si lo es en cada punto de A.

Definición B.4. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Se dice que f es analítica u holomorfa en $z_0 \in A$, si f es diferenciable en el sentido complejo en una vecindad alrededor de z_0. Se dice que una función es holomorfa (o analítica) en A si lo es en cada punto de A.*

Definición B.5. *Si una función es holomorfa en $\mathbb{C}$ se dice que es entera.*

Algunas propiedades de la analiticidad, como las que mencionamos a continuación, se demuestran de manera idéntica al caso real de una variable, por lo que se omiten las demostraciones. Se recomienda al lector interesado revisar [13, Cap.1, §4].

Proposición B.1. *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ analíticas en A, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) Si $f'(z_0)$ existe, entonces f es continua en z_0.

(ii) La función $\alpha f + \beta g$ es analítica en A y

$$(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta g'(z), \text{ para cada } z \in A \text{ y para cualesquiera } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

(iii) La función fg es analítica en A y

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \text{ para cada } z \in A.$$

(iii) Si $g(z) \neq 0$ para cada $z \in A$, entonces $\frac{f}{g}$ es analítica en A y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}, \text{ para cada } z \in A.$$

Como es de esperarse, la regla de la cadena se cumple para funciones analíticas, como se expresa en la siguiente proposición.

Proposición B.2. *Sean A, B abiertos en $\mathbb{C}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas, tales que $f(A) \subseteq B$, entonces la composición $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en A y*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \text{ para cada } z \in A.$$

Lema B.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe, entonces existen $\lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}\{f(z)\}$ y $\lim_{z\to z_0} \mathrm{Im}\{f(z)\}$, y además*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}\{f(z)\} + i \lim_{z\to z_0} \mathrm{Im}\{f(z)\}.$$

Los siguientes teoremas son de suma importancia para la teoría desarrollada en esta tesis.

Teorema B.1. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $z_0 \in A$, entonces si $f(z) = u(z) + iv(z)$, se tiene*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Estas ecuaciones son las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema B.2. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $z_0 \in A$. La función $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en z_0 si y sólo si en una vecindad de z_0, f es diferenciable en el sentido real y satisface las ecuacioes de Cauchy-Riemann.*

Como consecuencia del resultado anterior se tiene el siguiente:

Corolario B.1. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función con derivadas parciales continuas en una vecindad de $z_0 \in A$, que además satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en dicha vecindad), entonces f es analítica.*

Definición B.6. *Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto, una función de clase C^2 $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que es armónica en A si para cada $z \in A$ se tiene que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0.$$

A esta última expresión se le llama el laplaciano de u y se le denota por $\nabla^2 u$.

Proposición B.3. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, con $f(z) = u(z) + iv(z)$. Entonces, u y v son funciones armónicas en A.*

Definición B.7. *Sean A y B regiones (subconjuntos abiertos y conexos) de $\mathbb{C}$, diremos que $f : A \longrightarrow B$ es conforme si es biyectiva y preserva ángulos.*

Teorema B.3. *Una función $f : A \longrightarrow B$ es conforme si y sólo si es biyectiva, holomorfa y con derivada distinta de cero.*

Otra forma de definir a las funciones conformes es la siguiente:

Definición B.8. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, se dice que una función diferenciable $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es conforme en $x_0 \in A$, si $Df(x_0)$ es el producto de una matriz ortogonal por una matriz kI, con $k \in \mathbb{R}^+$ y donde I corresponde a la matriz identidad.*

A continuación, definimos la integral compleja y enunciamos el Teorema de Cauchy, que es de suma importancia en este escrito. Para el lector interesado en analizar la teoría necesaria para llegar a la discusión del Teorema de Cauchy así como su demostración lo remitimos a [13, Cap.2, §3, pp.71-106]. En el enunciado del Teorema de Cauchy se mencionan las ideas de homotopía y conjuntos simplemente conexos; estas nociones fueron discutidas al final del Apéndice A.

Definición B.9. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + iv(t)$, con u y v funciones continuas. Se define*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt.$$

Definición B.10. *Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva continua, decimos que γ es de clase C^1 a trozos, si existe una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < b$ de $[a, b]$, tal que para cada i se satisface que $\gamma|_{(x_{i-1},x_i)}$ es diferenciable y la restricción de $\gamma'|_{(x_{i-1},x_i)}$ tiene una extensión continua a $[x_{i-1}, x_i]$*

Definición B.11. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua y $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ una curva continua. Se define*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Note que esta definición se extiende de manera natural a curvas de clase C^1 a trozos, sumando cada contribución.

Con la definición de la integral compleja estamos listos para enunciar un importante resultado de la variable compleja.

Teorema B.4 (**Teorema de la Deformación**). *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ una región y γ_0, γ_1 dos curvas cerradas de clase C^1 a trozos, que son homotópicas en A. Supóngase también que $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Teorema B.5 (**Cauchy**). *Sean A una región, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y γ una curva cerrada de clase C^1 a trozos, que es homotópica a un punto en A, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

En particular, cuando A es simplemente conexo, esto se cumple si γ es cualquier curva cerrada de clase C^1 a trozos.

Definición B.12. *Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada de clase C^1 a trozos, y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. El índice (o número de vueltas) de γ con respeto a z_0 se define como*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}.$$

Este número (que de hecho es un número entero) se denota por $I(\gamma, z_0)$.

El siguiente resultado, además de ser importante para el cálculo de integrales, tiene como consecuencia otros resultados, como el principio del máximo para funciones holomorfas y para funciones armónicas. Nuevamente, se remite lector interesado en profundizar en este resultado a [13, Cap.2, §4, pp.111-115].

Teorema B.6 (**Fórmula Integral de Cauchy**). *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ una región, $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva cerrada de clase C^1 a trozos homotópica a un punto en A, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y $z \in A \setminus \gamma([a,b])$, entonces*

$$f(z)I(\gamma.z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Como aplicaciones de este último teorema tenemos los siguiente resultados, cuyas demostraciones pueden consultarse en [13, Cap.2, §5, pp.124-131].

Teorema B.7 (**Propiedad del Valor Intermedio**). *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ una región, $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in A$ y $\overline{B_r(z_0)} \subseteq A$, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

El siguiente resultado nos dice que una función holomorfa no puede tener máximos locales.

Teorema B.8. *Sea f analítica en una región $A \subseteq \mathbb{C}$. Supongamos que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para cada $z \in B_r(z_0)$, entonces f es constante en $B_r(z_0)$.*

Teorema B.9 (**Principio del Máximo**). *Sea $f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua, donde $A \subseteq \mathbb{C}$ es una región acotada, supóngase también que $f|_A$ es analítica. Entonces, el supremo de los valores $|f(z)|$, $z \in \overline{A}$ se alcanza en $\mathrm{Fr}(A)$, y si en algún punto de A se alcanza este valor máximo, f es constante.*

Observación B.1. *Los resultados anteriores son válidos para funciones armónicas.*

El siguiente resultado es una aplicación del principio del máximo que describe las funciones holomorfas del disco unitario en su cerradura que fijan al origen.

Teorema B.10 (**Lema de Schwarz**). *Sean $f : B_1(0) \longrightarrow \overline{B_1(0)}$ una función holomorfa. Supóngase también que $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ para cada $z \in B_1(0)$ y $|f'(0)| \leq 1$. Más aún, si existe $z_0 \in B_1(0)$, $z_0 \neq 0$, tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces f es una rotación.*

La analiticidad de una función puede ser definida en términos de una serie de potencias convergente.

Definición B.13. *Una serie de potencias compleja es una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \text{ donde } z_0 \in \mathbb{C} \text{ y } a_n \in \mathbb{C} \text{ para cada } n.$$

Las demostraciones de los siguientes tres resultados pueden consultarse en [13, Cap.3, §2, pp.156-165].

Teorema B.11. *La serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

es holomorfa en el interior del círculo de convergencia.

Teorema B.12 (**Coeficientes de Taylor**). *Sean* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias,* R *el radio de convergencia y* $z \in B_R(z_0)$*, entonces*

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} \quad y \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Más aún, el radio de convergencia de esta nueva serie es también R*.*

Teorema B.13 (**Taylor**). *Sea* f *una función holomorfa en una región* A*, donde el disco* $\overline{B_r(z_0)} \subseteq A$*, entonces para cada* $z \in \overline{B_r(z_0)}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Esta serie se llama serie de Taylor.

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden ser consultadas en [13, Cap.3, §3, pp.166-182].

Teorema B.14 (**Laurent**). *Sea* f *holomorfa en el anillo*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

Entonces, para cada $z \in A$ *se tiene que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

la convergencia es absoluta en A *y uniforme en subanillos de* A *de la forma*

$$A_{s_1}^{s_2} = \{z \in \mathbb{C} : s_1 \leq |z - z_0| \leq s_2\},$$

donde $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$*.*

Un caso de suma importancia es cuando se tiene una función holomorfa en un anillo degenerado, esto es, una región de la forma

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r, \text{ donde } 0 < r \leq \infty\}.$$

En este caso por el teorema de Laurent se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Al punto z_0 se le llama singularidad aislada de f. En este caso existen tres posibilidades excluyentes:

(i) $b_k \neq 0$ y $b_l = 0$ para cada $l > k$.

(ii) $b_k \neq 0$ para un número infinito de subínidices.

(iii) $b_k = 0$ para cada k.

En el primer caso diremos que f tiene un polo de orden k en z_0, en el segundo que f tiene una singularidad esencial en z_0 y en el tercero que z_0 es una singularidad removible de f. Algo que podemos resaltar es que en el último caso f es analítica en una vecindad de z_0 (recuerdese el Teorema de Taylor). Si el orden de un polo es 1, diremos que es un polo simple.

Definición B.14. *Sea z_0 una singularidad aislada de una función f, al número complejo b_1 en la expansión de Laurent se le llama residuo de f en z_0.*

Definición B.15. *A una función que es holomorfa en $\mathbb{C}$, excepto por los polos se le llama meromorfa.*

Los siguientes resultados son críterios que nos proporcionan ayuda para entender los tipos de singularidades que se nos presenten:

Proposición B.4. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ una región, $z_0 \in A$ y $f : A \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) z_0 es una singularidad removible de f.

(ii) $f(z)$ está acotada en una vecindad agujerada de z_0.

(iii) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ *existe.*

(iii) $\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$.

Proposición B.5. *Sean $A \subseteq \mathbb{C}$ una región, $z_0 \in A$ y $f : A \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, entonces las siguientes afirmacines son equivalentes:*

(i) z_0 es un polo de orden menor o igual a k, o una singularidad removible.

(ii) $f(z)(z-z_0)^k$ *está acotada en una vecindad agujerada de* z_0.

(iii) $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)$ *existe.*

(iv) $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k+1}f(z)=0$.

Proposición B.6. *Sea* f *analítica en una región que contiene un anillo de la forma*

$$A=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-z_0|<r,\ \ donde\ 0<r\leq\infty\},$$

y b_1 *el residuo en* z_0. *Si* γ *es cualquier círculo con centro en* z_0, *y contenido en el anillo, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i b_1.$$

Corolario B.2. *Sean* $A\subseteq\mathbb{C}$ *una región,* $z_0\in A$ *y* $f:A\setminus\{z_0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ *una función analítica, entonces* z_0 *es un polo simple si y sólo si* $\lim_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)$ *existe y no es cero. Este límite es el residuo de* f *en* z_0.

Finalmente, terminamos el análisis de los tipos de singularidades con el siguiente:

Corolario B.3. *Sean* $A\subseteq\mathbb{C}$ *una región,* $z_0\in A$ *y* $f:A\setminus\{z_0\}\longrightarrow\mathbb{C}$ *una función analítica, entonces* z_0 *es un polo de orden* $k\geq 1$ *si y sólo si existe* $g:V\longrightarrow\mathbb{C}$ *una función analítica, donde* V *es una vecindad de* z_0 *en* A, $g(z_0)\neq 0$, *y se cumple* $f(z)(z-z_0)^k=g(z)$.

Para el caso de singularidades esenciales el comportamiento es mucho más complicado, para ilustrar esta situación, culminamos este apéndice enunciando los siguientes resultados importantes, cuyas demostraciones pueden consultarse en [14, pp.343-344].

Teorema B.15 (**Gran Teorema de Picard**). *Sea* f *una función holomorfa en una vecindad agujerada* V *de* z_0, *donde este punto es una singularidad esencial. Entonces* f *toma en* V *cualquier valor en el plano complejo, salvo una excepción. En dicha vecindad, cualquier de estos valores son tomados un número infinito de veces.*

Como consecuencia del teorema anterior se tiene.

Teorema B.16 (**Pequeño Teorema de Picard**). *Una función entera no constante toma todos los valores complejos, salvo (quizá) uno de ellos.*

APÉNDICE C

Detalles técnicos para la generación de figuras

En este apéndice se presentan los códigos fuente utilizados para la generación de algunas figuras incluidas en este trabajo. Estas figuras fueron creadas utilizando el entorno `TikZ` y `pgfplots` en LaTeX, herramientas ampliamente utilizadas para la representación gráfica de conceptos matemáticos. Las figuras presentadas en esta tesis fueron elaboradas siguiendo las directrices expuestas a continuación. Para evitar una extensión innecesaria del presente documento y por razones de tiempo, no se incluyen todas las figuras. No obstante, destacamos que estas pueden ser generadas utilizando las ideas plasmadas en los códigos fuente proporcionados. Solo se requiere algo de paciencia y creatividad para reproducir no solo las figuras mostradas, sino también otras adicionales. Al lector interesado en cuestiones relacionadas con el manejo del editor de textos científicos LaTeX recomendamos consultar [3] y [10] como referencias en el tema.

El preámbulo básico que se empleo para la elaboración de figuras de este documento es el siguiente:

```
\documentclass[12pt]{book} % Clase de documento tipo libro
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage{amsmath, amssymb} % Paquetes para símbolos y entornos matemáticos
\usepackage{pgfplots} % Paquete para crear gráficos avanzados,
específicamente en 3D
\pgfplotsset{compat=1.18} % Nos asegura compatibilidad con la versión 1.18
del paquete de arriba
\usepackage{graphicx} % Permite incluir gráficos en nuestro documento

% Configuración para incluir figuras con TikZ
\usepackage{tikz} % TikZ para gráficos vectoriales
\usetikzlibrary{3d} % Librería para gráficos en 3D si es necesario
```

En el Capítulo 1 ilustramos la Definición 1.1 mediante la Figura 1.1 cuyo código es:

```
\begin{tikzpicture}
```

```
% Función X
\path[<-] (0.8, 0) edge [bend right] node[left, xshift=-2mm] {$X$} (-1, -2.9);
\draw[white,fill=white] (0.06,-0.57) circle (.15cm);

% Superficie
\draw[smooth cycle] plot coordinates
{(2,2) (-0.5,0) (3,-2) (5,1)} node at (3,2.3) {$X(\mathcal{D})$};

% Ejes
\draw[thick, ->] (-3,-5) -- (0, -5) node [label=above:$\mathcal{D}$]{};
\draw[thick, ->] (-3,-5) -- (-3, -2) node [label=right:$\mathbb{R}^2$] {};

% Área gris en R^2
\begin{scope}
    \clip [smooth cycle] plot coordinates
    {(-2, -4.5) (-2, -3.2) (-0.8, -3.2) (-0.8, -4.5)};
    \draw[smooth cycle,fill=gray!50, dashed] plot coordinates
    {(-2, -4.5) (-2, -3.2) (-0.8, -3.2) (-0.8, -4.5)};
\end{scope}

\end{tikzpicture}
```

Para este código señalamos lo siguiente:

- Se crea una flecha curvada para representar la función X del dominio $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^n$, el comando `\path[<-]` crea la flecha con la etiqueta X.
- El comando `\draw[smooth cycle]` traza una curva cerrada que representa $X(\mathcal{D})$. Esta superficie se etiqueta con $X(\mathcal{D})$ en la parte superior.
- Los ejes de $\mathbb{R}^2$ se representan con flechas utilizando el comando `\draw[thick, ->]`.
- Para resalta el dominio en el espacio $\mathbb{R}^2$ usamos el comando `\fill[gray!50]` dentro de un área cerrada. Esta área se define por las coordenadas dadas en el código de arriba.

La Figura 6.9 ilustra la superficie minimal de Catalán, definida por funciones paramétricas en tres dimensiones, a continuación, mostramos su código fuente.

```
\begin{tikzpicture} % Entorno TikZ para gráficos en 3D
  \begin{axis}[ % Ejes tridimensionales
    view={60}{30}, % Ángulo de visión 3D
    domain=-6.28:6.28, % Rango de la variable u
    y domain=-2:2, % Rango de la variable v
    samples=40, % Muestras en la dirección u
    samples y=40, % Muestras en la dirección v
```

```
    axis equal, % Escala igual en todos los ejes
    colormap/violet, % Paleta de colores violeta (puede ocuparse
    otra configuración
    de colores, por ejemplo: hot, hot2, jet, blackwhite, bluered,
    cool, greenyellow, redyellow.
    xlabel=$x$, ylabel=$y$, zlabel=$z$ % Etiquetas para los ejes
  ]
    \addplot3[ % Superficie tridimensional
      surf, % Estilo de superficie
    ]
    (
      {x - sin(deg(x))*cosh(y)}, % Componente x(u,v)
      {1 - cos(deg(x))*cosh(y)}, % Componente y(u,v)
      {-sin(deg(x)/2)*sinh(y/2)} % Componente z(u,v)
    );
  \end{axis}
\end{tikzpicture}
```

En seguida hacemos algunos comentarios sobre este código:

- El entorno `axis` define un sistema de coordenadas tridimensional.
- La clave `view={60}{30}` ajusta el ángulo de visión para que la superficie sea fácil de interpretar.
- Los rangos y muestras, `domain=-6.28:6.28` y `y domain=-2:2`, establecen los valores de las variables paramétricas u y v, respectivamente.
- La acción `samples` controla cuántos puntos se calculan en las direcciones u y v. Un mayor número genera una superficie más suave.
- La opción `surf` especifica que se debe dibujar una superficie. Donde, las expresiones dentro de las llaves definen las funciones paramétricas para $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$, que generan la geometría de la superficie.

Para generar la Figura 2.1 elaboramos el siguiente código:

```
\begin{tikzpicture}

% Definimos algunos parámetros
\def\shift{0.7}
\def\levels{5}

% Dibujamos los niveles curvados
\foreach \i in {0,...,\levels} {
    \begin{scope}[shift={(0, \i*\shift)}, xscale=1.3]
```

```
        % Coloreamos de gris la segunda superficie
        \ifnum\i=1
            \fill[gray] plot [smooth cycle, tension=1] coordinates
            {(0,0) (2,0.7) (3,0.3) (2,-0.5) (0.5,-0.8)};
        \fi
        \draw [thick] plot [smooth cycle, tension=1] coordinates
        {(0,0) (2,0.7) (3,0.3) (2,-0.5) (0.5,-0.8)};
    \end{scope}
}

% Etiquetas de nivel
\foreach \i/\text in {0/{0}, 1/{\( \lambda hN \)},
2/{\( \lambda hN \)}, -1/{\(-\lambda hN\)}} {
    \node[left] at (-0.7, \shift*\i) {\text};
}

% Flechas y etiquetas en el lado izquierdo
\draw[->,very thick](-0.2,-0.7)--(-0.2,0.4);
\draw[->,very thick](-0.2,0.3)--(-0.2,2.3);
\draw[->,very thick](-0.2,2.2)--(-0.2,3.4);

% Flechas y etiquetas en el lado derecho
\draw[->](3,1.5)--(4.3,1.5) node[right]{\( X + \lambda hN(\mathcal{D}) \)};
\draw[->] (3, 0) -- (4, -0.7) node[right] {$(X-\lambda hN)(\mathcal{D})$};
\draw[->] (3, \shift) -- (4, 0.3) node[right] {$X(\mathcal{D})$};

\end{tikzpicture}
```

En este código destacamos lo siguiente:

- La acción `\def\shift{0.7}` define el desplazamiento vertical entre niveles que se muestran en la superficie.
- La acción `\def\levels{5}` define el número de niveles a dibujar.
- El bucle `\foreach \i in {0,...,\levels}` genera múltiples niveles curvados. Dentro del bucle se aplica una traslación vertical mediante `\begin{scope}`.
- La condición `\ifnum\i=1` rellena el segundo nivel con un color gris mediante `\fill[gray]`.
- La opción `\draw[thick] plot[smooth cycle, tension=1]` genera curvas suaves cerradas a partir de coordenadas.
- Las etiquetas 0, λhN, entre otras se posicionan usando `\node`. Las flechas conectan puntos relevantes con sus etiquetas como $X(\mathcal{D})$.

Culminamos este apéndice con la Figura 5.6, que ilustra la aplicación de Gauss de la superficie minimal de Enneper. A continuación, mostramos su código.

```
\begin{tikzpicture}
  % Configuración del eje tridimensional sin ejes
  \begin{axis}[
    hide axis, % Oculta los ejes.
    axis equal,
    view={45}{60}, % Perspectiva ajustada para visualizar mejor el polo
    norte eliminado
    colormap/violet, % Colormap (color violeta)
    opacity=0.8, % Opacidad para mejor visualización
    scale=9, % Escala de la figura al imprimirse en la hoja
  ]
    % Esfera: x^2 + y^2 + z^2 = 1 (Esfera unitaria), excluyendo el polo norte
    \addplot3[
      surf,
      colormap/violet, % Colores
      samples=40, domain=0:360, y domain=-90:85, % Excluyendo
      polo norte (z=1)
    ]
    (
      {cos(x)*cos(y)}, % Radio = 1
      {sin(x)*cos(y)},
      {sin(y)}
    );
  \end{axis}
\end{tikzpicture}
```

En este código destacamos:

- La acción \hide axis oculta los ejes para que solo se vea la superficie.
- La acción\view=4560 establece la perspectiva del gráfico. El primer valor controla el ángulo de rotación en el plano horizontal, mientras que el segundo valor controla la inclinación en el plano vertical.
- La acción \opacity=0.8 ajusta la opacidad de la superficie para darle un efecto de transparencia.
- La acción \scale=9 es la escala que posee la superficie en la hoja en la que se imprime.
- Las coordenadas parametrizadas de la esfera son $\cos(x)\cos(y)$, $\sin(x)\cos(y)$, y $\sin(y)$, con x y y representando los ángulos esféricos.
- El comando \addplot3[surf] dibuja una superficie 3D usando la parametización de $\mathbb{S}^2$.
- La clave \domain=0:360, y \domain=-90:85 definen los rangos de los ángulos x y y para generar la esfera excluyendo el polo norte, donde $z = 1$.

Bibliografía

[1] L.V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.

[2] S. Axler, P. Bourdon and R. Wade, *Harmonic Function Theory*. 2nd ed, New York, Springer, 2001.

[3] A. Borbón A. y W. Mora, *Edición de Textos Científicos LaTeX. Composición, Gráficos, Inkscape y Presentaciones Beamer*, 2da ed., Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2016.

[4] F. Casarrubias Segura y Á. Tamirz Mascarúa, *Elementos de topología general*, Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2019.

[5] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Interscience, New York, 1950.

[6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience, New York, 1962.

[7] M. Clapp, *Análisis Matemático*, Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2015.

[8] U. Dierkes, S. Hildebrandt and F. Sauvigny, *Minimal surfaces*, 2nd ed., Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[9] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 2nd ed. , Dover, 1976.

[10] G. Grätzer, *More Math Into LaTeX*, 5th ed., Springer, 2016.

[11] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, 2nd ed., Cambridge University Press, 2002.

[12] L.P. Jorge and W.H. Meeks, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian Curvature*, Topology, 22(1983).

[13] A. Lascurain Orive, *Curso básico de variable compleja*, 3er ed., Facultad de Ciencias, UNAM, 2013.

[14] A. I. Markushevich, *Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. III, Prentice Hall, 1967.

[15] J.R. Munkres, *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000.

[16] E. Nahmad-Achar, *Topología y Geometría Diferencial con Aplicaciones a la Física*, 1er ed., Facultad de Ciencias, UNAM, 2022.

[17] H. Omori, *Immersions of Riemannian Manifolds*, J. Math. Soc. Japan, 1967.

[18] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand, 1969.

[19] C. Prieto de Castro, *Topología básica*, 2. ed., Fondo de Cultura Económica, 2013.

[20] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.

[21] M. Spivak, *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.