

Ciudades Fractales y Análisis Espacial

Fractal Cities and Spatial Analysis

Edel Cadena Vargas^{1*}, Juan Campos Alanís¹, Román Sánchez Dávila² y Eduardo Jiménez López³

¹ Facultad de Geografía de la Universidad Autónoma del Estado de México, Cerro Coatepec s/n Ciudad Universitaria, Toluca de Lerdo, México, C.P. 50110. ecadenav@uaemex.mx, <https://orcid.org/0000-0002-3131-9597>, jcamposa@uaemex.com, <https://orcid.org/0000-0002-5391-2447>

²Facultad de Planeación Urbana y Regional de la Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca de Lerdo, México. C.P. 50130. roman.san.dav@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2292-4119>

³Centro de Investigación y Estudios Avanzados en Población de la Universidad Autónoma del Estado de México, Cerro Coatepec s/n Ciudad Universitaria, Toluca de Lerdo, México, C.P. 50110. ejimenezl@uaemex.mx, <https://orcid.org/0000-0002-1883-3890>

*Autor de Correspondencia

Recibido: 24/06/2025. Aceptado: 07/07/2025. Publicado: 08/07/2025.

Cómo citar: Cadena Vargas, E., Campos Alanís, J., Sánchez Dávila, R. & Jiménez López, E. (2025). Ciudades Fractales y Análisis Espacial. *Geografía Aplicada*, 1(2), 113-140.

Resumen

La geometría fractal es una herramienta matemática que ofrece un marco flexible, visual para describir las superficies, patrones complejos e irregulares que caracterizan el crecimiento espacial de ciudades y fenómenos naturales como las nubes, las montañas, el

sistema circulatorio, las líneas costeras o los copos de nieve, entre otros. A diferencia de la geometría euclidiana, que se basa en formas regulares y lineales, la geometría fractal permite modelar estructuras fragmentadas, heterogéneas, con propiedades de autoorganización, características de los entornos urbanos en constante evolución. La autosimilitud implica que las partes de un todo se parecen entre sí, independientemente de la escala en que se observe, lo que refleja la jerarquía y la repetición de patrones en las ciudades. En el análisis espacial urbano, la geometría fractal facilita la cuantificación de la complejidad y la irregularidad de las formas urbanas, ayudando a entender cómo se distribuyen, crecen, se organizan las áreas construidas, las fronteras y las redes de transporte.

Palabras clave: fractales, geometría fractal, autosimilitud, análisis espacial.

Abstract

Fractal geometry is a mathematical tool that offers a flexible, visual framework to describe the complex and irregular surfaces and patterns that characterize the spatial growth of cities and natural phenomena such as clouds, mountains, the circulatory system, coastlines, and snowflakes, among others. Unlike Euclidean geometry, which is based on regular and linear shapes, fractal geometry allows for modeling fragmented, heterogeneous structures with properties of self-organization—features typical of ever-evolving urban environments.

Self-similarity implies that parts of a whole resemble each other regardless of the scale at which they are observed, reflecting the hierarchy and repetition of patterns in cities. In urban spatial analysis, fractal geometry facilitates the quantification of the complexity and irregularity of urban forms, helping to understand how built-up areas, boundaries, and transportation networks are distributed, grow, and organize.

Keywords: fractals, fractal geometry, self-similarity, spatial analysis.

1. Introducción

Una de las herramientas actuales que permite el análisis espacial del crecimiento de la mancha urbana es la geometría fractal. Muchos objetos naturales se forman en complejas y atractivas formas geométricas que convencionalmente se han tratado de describir como una secuencia de puntos, líneas, superficies y volúmenes. Sin embargo, muchos fenómenos naturales no se ajustan a esta concepción clásica. Guiados por tal comprobación, distintos matemáticos formalizaron una serie de atributos geométricos, llamados fractales, llevando a la búsqueda de una representación de los objetos basada en estructuras matemáticas mucho más flexibles y visuales en contraposición a la geometría tradicional (Girón y Cisneros, 2022; Sandoval-Ruiz, 2023).

En el siglo pasado, se sugirió una denominación a este tipo de figuras utilizando la palabra latina *fractus* (fraccionado), al presentar comportamientos matemáticamente complejos y una paradoja inherente que les convierte en modelos atractivos para el estudio, análisis de fenómenos naturales, las superficies de llenado, entre otras muchas cosas más. Se puede decir que es un objeto con comportamiento definido usando una superficie compuesta por una superficie densamente poblada pero con límites finitos, nunca encontrará una superficie igual, pero indirectamente se recorre un contorno o frontera muy definida. Esta circunstancia se manifestó por primera vez en la figura matemática el copo de nieve de Koch en 1904 (Ferrer y Vélez-Santiago, 2023).

La estructura matemática de la forma en análisis se repite a distintas escalas, que se le llama fractal. Esta categoría se refiere a la idea de que la geografía del mundo físico no es siempre euclidiana, sino que a veces es fraccionada, es decir, la distancia entre dos puntos depende de dos parámetros: los puntos se separan por una distancia que puede ser recta o dependiendo del tipo de recorrido o trayecto. Esta nueva teoría es más adecuada para describir superficies rugosas que la geometría euclidiana no puede describir. Se observa cualquier estructura física (costa, cordillera, árbol, etc.) detenidamente, se verá que su forma es muy irregular. Por lo anterior se dice que la longitud de una costa es un concepto físicamente inadecuado ya que tiene un largo infinito (Llorente et al., 2023).

Para aplicar conceptos fractales al análisis espacial, primero se debe dividir la superficie a estudiar en un número adecuado de cuadrados pequeños. No usando el menor de los cuadrados, sino un cuadrado elegido al azar o mediante un diseño sobre la superficie. Basado en la longitud del perímetro, se define el factor de escala, que es calculado como la relación entre los perímetros del polígono, que corresponde al lado del cuadrado y la longitud del perímetro. Si el siguiente cuadrado tiene lados más pequeños, el perímetro también disminuirá. Por último, se calcula un promedio de escala de perímetro que relaciona el promedio entre los polígonos más pequeño y grande, por lo que un valor cercano a 1, indica bajo grado de rugosidad y un valor de 1 al existir una alta rugosidad en alguna escala. Con ello se obtiene la dimensión fractal como una curiosa forma de identificar los objetos más complejos o rugosos.

El concepto de autosimilitud asociado al espacio urbano ha generado el empleo de la estática fractal con propósitos muy específicos. Se aplica para el cálculo de la dimensión de ciudades, plasmar la complejidad urbana de acuerdo con la escala analizada, tendiendo a comportarse como un fractal en procesos de gentrificación o bajo la teoría de la organización del espacio a partir de los flujos asociados a la mancha urbana. Cada una de las utilidades se traduce en algún grado o a diferentes magnitudes a los propósitos del análisis (Xia et al., 2022).

La dimensión fractal del área urbanizada indica cuánto del espacio observado resulta ser ocupado o construido. Es comparada con respecto a las fronteras de tal área, en donde la dimensión calculada por lo general es inferior a la máxima posible, que correspondería a 2 en casos generados de forma de un plano, o 3 cuando el espacio está determinado en tres dimensiones (largo, ancho y fondo) (Saganeiti et al., 2021). Como ocurre en la mancha urbana de la ciudad de Toluca, alrededor del área de igual valor cercano a 2 corresponde esencialmente al crecimiento del territorio urbanizado.

A su vez, el indicador también puede ser contrastado dentro de la misma área al mostrar los conglomerados fractales asociados a la mancha urbana y sus respectivos flujos,

considerando que los valores estudiados de acuerdo con la escala analizada por esos flujos tienden a aproximar la dimensión topológica del espacio interno. Los fractales permiten determinar áreas o lugares intermedios que pueden servir como corredores de comunicación (Badie et al., 2021).

2. Fractales en urbanismo

Existen numerosos casos en los que áreas aparentemente ordenadas presentan una complejidad extrema. Los desarrollos recientes de la Teoría de Fractales adjudican las reglas de adyacencia o vecindad a esa complejidad, complejidad que incluso pasa desapercibida para tecnologías consolidadas como la fotogrametría (técnica que consiste en tomar fotografías de un terreno para generar modelos 2D o 3D) y la fotointerpretación (analizar fotografías aéreas para identificar y deducir las características de los objetos y del área fotografiada). Así como a la ecología de paisajes, climatología, análisis morfométrico de aguas y suelos, geomorfología e hidrogeología (Akin Ateş et al., 2022).

Por otro lado, con la persistencia a lo largo del tiempo, es decir, la capacidad de mantenerse vigente sin comprometer el futuro, es decir, existir en el presente sin comprometer la persistencia de las futuras generaciones. Está asociada con el valor de un determinado arreglo ecológico, es decir, la capacidad en términos de producción biológica. Cuando se tiene en cuenta el papel de los ecosistemas en la reproducción humana, la fragilidad de los ecosistemas y de las formas de vida de muchas poblaciones (debido a los impactos negativos que el uso excesivo de recursos está causando en la biosfera), obliga a orientar el concepto de sostenibilidad más hacia la conservación equilibrada de la naturaleza, que hacia los términos de sostenibilidad productiva (Badiei et al., 2021).

Para el análisis de la estabilidad o capacidad de resistencia del conjunto, es esencial el orden en el territorio. Se considera que existen tres tipos básicos de orden: geométrico, se refiere a las formas geométricas primarias o figuras lisas; fractales para las figuras fragmentada o aparentemente irregular, que se repite a diferentes escalas; figuras específicas o trazos,

delimitado por el ser humano con base en intereses específicos y un orden conceptual distinto al geométrico (Arseniou y MacFarlane, 2021).

Por tanto, la sustentabilidad requiere una gran capacidad de adaptación, en consonancia con la gran variabilidad temporal y espacial de los sistemas ecológicos. Requeriría una producción que permita la permanente evolución de un sistema cultural que garantice el bienestar de toda la población. Entre los sistemas técnicos culturales surgidos en las diversas civilizaciones en el planeta, algunos de los cuales probablemente aún no han surgido para alcanzar la máxima eficiencia. Las ciudades pueden desempeñar un papel estratégico como sistemas integradores o “sistemas de sistemas”, capaces de fomentar nuevas relaciones equitativas de los seres humanos con la naturaleza y entre sí mismos (Jain, 2021).

3. Integración de la geometría fractal en el análisis de sustentabilidad urbana

En la integración de los dos conceptos se requiere de los siguientes elementos: i) disponibilidad de la información espacial referida a cada dimensión; ii) la selección de dimensiones clave asociadas a los principios de sustentabilidad y que puedan representarse mediante indicadores aplicables al contexto urbano; iii) el desarrollo de una función que establezca la relación entre el interés de sustentabilidad evaluado y las dimensiones con información espacial. Por ende, el concepto de fractalidad varía dependiendo del fenómeno o área de interés, lo que permite su ajuste flexible a diferentes contextos territoriales, evitando una visión exclusivamente horizontal del fenómeno fractal (Figura 1).



Figura 1. Ejemplo de Ciudades Fractales

Fuente: Elaboración propia.

La figura 1 muestra la presencia de estructuras fractales en la arquitectura y el tejido urbano, ha generado diferentes acercamientos en el ámbito de la sustentabilidad urbana. La mayoría de ellos basados en la geometría fractal a través de diferentes técnicas y mediciones dentro del ámbito de la morfología urbana. Existe una brecha respecto a estudios clásicos, que suelen limitarse a la observación del fenómeno sin incidir en la toma de decisiones de los responsables del diseño y del territorio (Aquino y Aguilar, 2022).

La distribución mundial de la urbanización y la complejidad involucrada en este proceso constituyen interrogantes centrales de las Ciencias Urbanas. La Geografía Urbana ha intentado explicar la hipótesis conocida como fractalidad urbana, propuesta por diversos autores a la morfología fractal de nuestras ciudades. Es una línea teórica que incorpora la Teoría del Caos, que se relaciona con aspectos intangibles de organización territorial a un medio urbano en forma compleja y difícil de predecir. Como el cambio climático o las transformaciones en el uso del suelo a nivel local con el proceso de sustentabilidad (Bešković y Bajec, 2021).

Por ello, la sustentabilidad implica sistemas viables que reconozcan su fragilidad: termodinámicamente, reduzcan la cantidad entre el sistema y el ambiente para que este soporte la disipación máxima. Maximicen la cantidad eficaz en vez de la cantidad total, minimicen el suministro máximo para mantener activo al conjunto y reduzcan al mínimo los gastos generales de operación, y garantice la renovación en lugar de que agote el recurso, entre otras (Khan et al., 2021).

De ahí que es fundamental enfocar el análisis espacial desde la perspectiva dinámica multifactorial y extremadamente ramificada, en un marco general de aplicaciones restringidas al campo. El desarrollo de una estructura espacial con las características como estructurada, fragmentada, yuxtapuesta, discontinua y distribuida, que a la vez exige un análisis de atributos en cada región que determinará propiedades homogéneas dentro de aquella. Variables que no son necesariamente las del vector de soporte espacial, como es el caso de la estructura con fractalidad del plano de referencia, para obtener información de la morfología de las regiones. De esta forma, el enfoque a seguir debe ser multidisciplinario, multifactorial, para lograr mayor precisión, es necesario un análisis que integre múltiples factores y el concepto de las similitudes de patrones espaciales (Dong et al., 2022).

4. Aplicación fractal en la ciudad

Las estructuras fractales comparten la misma propiedad de heterogeneidad fundamental. Como una ciudad, o como un conjunto de pueblos y ciudades, la distribución de su masa en el espacio nunca es uniforme, ni completamente densa ni totalmente dispersa. Sin embargo, esta distribución fragmentada no es puramente aleatoria, ya que los objetos fractales se estructuran siguiendo un principio central de organización, la autosimilitud a lo largo de las escalas, lo cual representa una propiedad especialmente útil para los estudios de geografía urbana (Piferi et al., 2021).

Numerosas evidencias demuestran que las ciudades, en su forma orgánica e irregular, reflejan principios fractales tanto en la forma en que llena el espacio disponible para ellas a

medida que evolucionan en el tiempo, como en los patrones que crean. Estos procesos de llenado del espacio incluyen cómo se producen nuevos desarrollos cerca de sitios ya desarrollados, cómo los sitios previamente desarrollados se modifican para adaptarse al crecimiento, cómo el deseo de los individuos de espacio abierto, y el acceso a servicios se amplía hasta el patrón fractal. Los patrones incluyen la distribución del tamaño del entorno construido, incluidos los edificios, conjuntos habitacionales y redes viales. Los conceptos fractales se han aplicado principalmente como una herramienta analítica para caracterizar e interpretar áreas urbanas y han llevado a avances en los modelos de simulación urbana (Jahanmiri y Parker, 2022).

Las estructuras fractales se caracterizan por la repetición del mismo principio de distribución a distintas escalas. Este principio se manifiesta a través de distribución de elementos en una multitud de escalas. Las formas fractales simuladas se construyen a partir de la iteración de un patrón dado de puntos, curva o superficie, en infinitas escalas, ya sea multiplicando o dividiendo su masa por una cantidad fija en cada iteración del proceso. Pero, el mismo modo de distribución espacial no siempre significa la misma forma: esto sólo ocurre en el caso de patrones teóricos como el Triángulo de Sierpinski o el Helecho de Barnsley (Figura 2). Considerando las ciudades, algunos principios básicos de interacción que involucran precios del suelo o accesibilidad, entre otras. Conducen a distribuciones espaciales de elementos que parecen aparentemente diferentes, pero que en realidad son similares en términos de la forma en que los lugares libres y ocupados se alternan a través de las escalas (Principi, 2022).

Un resultado de la propiedad de autosimilitud de los fractales es la distribución espacial jerárquica regular de los elementos a través de las escalas, lo que caracteriza la distribución de los lugares centrales: la autosimilitud y la heterogeneidad (concentración local de elementos) que conducen a patrones de centro-periferia.

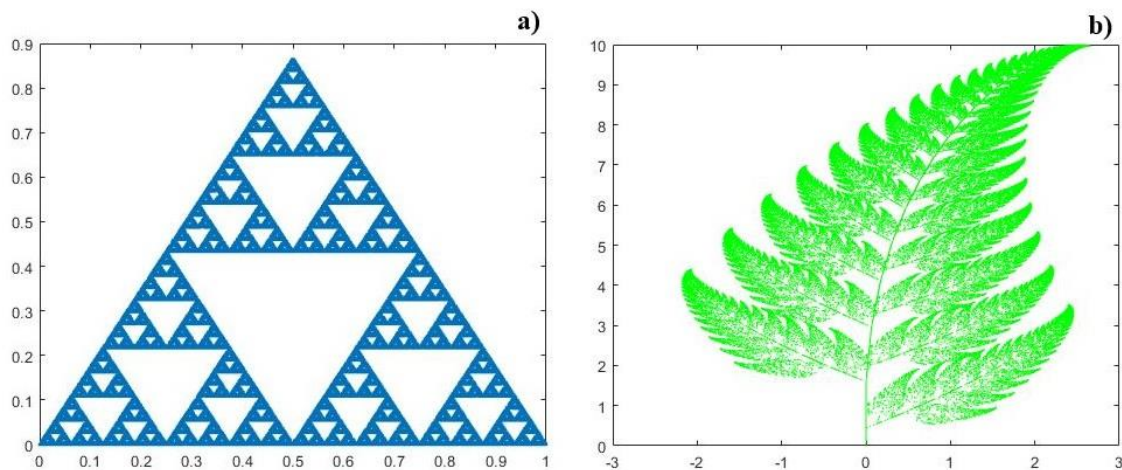


Figura 2. a) Triángulo de Sierpinski. b) Helecho de Barnsley.

Fuente: Elaboración propia con Matlab.

La autosimilitud es una propiedad que se asocia muy a menudo a efectos de escala, produciendo gradientes o jerarquías espaciales regulares. Un ejemplo bien conocido es el gradiente que describe la intensidad del uso del suelo que caracteriza la estructura interna de las ciudades (López et al., 2021). Este gradiente forma una curva exponencial para describir la disminución regular de las densidades de población o de los precios del suelo desde el centro de la ciudad hacia la periferia. La densidad $\rho(r)$ a una distancia r del centro, que tiene una densidad máxima $\rho(0)e^{-br}$, puede expresarse con la ecuación (1).

$$\rho(r) = \rho(0)e^{-br} \quad (1)$$

Con $b > 0$. Esta distribución espacial de densidades locales también puede aproximarse mediante una ley hiperbólica (es decir, una ley de potencia inversa), ecuación (2).

$$\rho(r) = \rho(0)e^{-a} \quad (2)$$

El valor estimado de a depende del tamaño y del número de subregiones. El valor absoluto de los parámetros a o b mide la velocidad según la cual la densidad disminuye con la distancia, se conoce como gradiente de densidad urbana. Ambos modelos se refieren a una distribución no lineal sino regular de la masa (de población, pero también se aplica a las áreas construidas, a los alquileres) en el espacio urbano. Las densidades disminuyen más rápidamente que proporcionalmente a la superficie cuando se consideran los anillos

exteriores más alejados del centro de la ciudad. La rapidez de esta disminución es regular y se mide mediante parámetros (b en el modelo exponencial de la ecuación (1), a en el modelo mostrado en la ecuación (2)) que tienen un valor constante para todas las estructuras urbanas.

La independencia de los parámetros a y b respecto de la distancia al centro de la ciudad es una característica importante que también existe en las estructuras fractales. Corresponde al proceso de iteración matemática que las genera. Generalmente se resume mediante una medida llamada dimensión fractal. Batty y Kim (1992) han demostrado que existe una equivalencia estricta entre el parámetro a del modelo mostrado en la ecuación (1) y la dimensión fractal D , que se relacionan mediante la expresión matemática $D + a = 2$. D y a se diseñan como exponentes de escala.

La dimensión fractal D de un patrón urbano se puede obtener contando el número de elementos edificados (o población residente) en varias escalas y luego ajustando una ley fractal. Dicha ley se puede escribir de la siguiente manera:

$$N(\varepsilon_i) = c + \varepsilon_i^D \quad (3)$$

donde c es una constante, ε_i , el nivel de análisis (e.i. la distancia considerada entre los elementos), N el número de elementos contados.

El modelo de la ecuación (1) expresa el hecho de que los elementos más grandes de una distribución estadística son mucho menos numerosos que los más pequeños y el parámetro a es una medida de la desigualdad de la distribución de los elementos con respecto a su número y su tamaño, llamado modelo de Pareto. Aplicado a las densidades urbanas se acerca a una ley fractal porque considera una distribución espacial heterogénea de los elementos, al igual que una ley fractal. Pero la dimensión fractal de un patrón es un indicador de la heterogeneidad de una distribución espacial, a una multitud de escalas, mientras que el modelo de Pareto es no escalar (o uniscalar) (Abdou y Alkama, 2022).

Por tanto, se requiere una precisión: incluso si la función de densidad puede derivarse de una organización espacial de naturaleza jerárquica, no sería el caso inverso. En otras

palabras, si se observa una jerarquía, entonces es posible determinar un gradiente que describe (mide) el cambio entre un nivel y otro. Pero la existencia de un gradiente no implica necesariamente una organización espacial jerárquica. Un gradiente es un enfoque puramente descriptivo que no se basa en un modelo explicativo ni en un marco teórico subyacente. Básicamente, un gradiente es la derivada del cambio incremental de algo (Yang et al., 2021).

En el caso del modelo de Pareto aplicado a las densidades urbanas, la formalización se refiere implícitamente a un modelo radioconcéntrico de la ciudad. La diferencia con una distribución fractal de elementos es la naturaleza geométrica explícita de dicho modelo, que es intrínsecamente jerárquico (Wang y Sun, 2024).

En otra escala de análisis, las leyes de potencia inversa también se utilizan con mucha frecuencia para modelar la organización jerárquica de los sistemas urbanos. Conocida como la regla de tamaño de rango de Zipf, este modelo describe la distribución del número de pueblos y ciudades según el tamaño de su población como una función de Pareto. Según la notación de Zipf, la población P_i de un pueblo o una ciudad está inversamente relacionada con su rango R_i en el sistema de ciudades mediante una ley de potencias mostrado en la ecuación (4) (Kafri, 2023).

$$P_i = k/R_i^a \quad (4)$$

La ley de Zipf es obviamente una ley hiperbólica, en ese caso se puede derivar la misma analogía con una distribución fractal. En uno de los primeros artículos sobre fractales en geografía (Frankhauser y Pumain, 2022) se sugiere que la geometría de los lugares centrales es un subconjunto de la geometría fractal, y que un proceso fractal iterativo podría generar todos los sistemas posibles de lugares centrales. Lo ha demostrado para los modelos de Christaller y ha aplicado mediciones de dimensión fractal al sistema francés de pueblos y ciudades (Frankhauser, 2021).

En este contexto, es necesario hacer una aclaración sobre lo que se denomina la estructura jerárquica de un sistema geográfico. Un primer significado de este término es que un

conjunto de objetos geográficos (subsistemas) se diferencian fuertemente por su tamaño (que puede medirse por el número de elementos más pequeños que contiene cada subsistema). Este efecto de escala puede expresarse mediante una distribución estadística que sigue una ley de potencias o medirse por una única dimensión fractal que puede caracterizar a todo el sistema (Wang et al., 2021).

Un segundo significado de un sistema jerárquico se basa en el concepto de escala geográfica. Los objetos geográficos pueden definirse como estructuras multiescalares y sus relaciones pueden observarse de manera significativa en diferentes escalas de análisis porque las propiedades significativas aparecen solo en niveles de observación determinados.

Por ejemplo, un sistema urbano puede conceptualizarse en tres niveles: a escala individual, hay actores o agentes urbanos (como residentes, empresas, organismos políticos otros grupos) que, a través de sus interacciones, generan lo que se llama una "ciudad", o sea, un objeto geográfico diferente cuyas propiedades agregadas no pueden derivarse simplemente de la mera adición de características. Del mismo modo, las ciudades en interacción definen en un tercer nivel de observación un nuevo tipo de objeto geográfico conocido como "red urbana" o "sistema de ciudades", que se caracteriza por nuevas propiedades emergentes (como la estructura jerárquica según la ley de Zipf y la primera definición).

En ese sentido, aunque las estructuras fractales se pueden observar en ambos casos, las dimensiones fractales no son las mismas: mientras que sus valores suelen estar comprendidos entre 1 y 2 a nivel de ciudad, oscilan entre 0 y 1 para los sistemas de ciudades. Esto refleja dos formas diferentes de estructurar el espacio geográfico, con diferentes propósitos en términos de ubicación e interacción, la organización intraurbana de actividades por un lado y las conexiones interurbanas por otro (Batty, Longley, 1994).

Si se considera únicamente la organización espacial intraurbana, a menudo se puede observar la combinación de diferentes tipos de comportamientos fractales a diferentes

escalas de análisis. En la práctica, no es fácil separar las fluctuaciones locales, más o menos aleatorias, en torno a una dimensión fractal estimada, es decir, una combinación sistemática de diferentes procesos puede conducir a la multifractalidad. No obstante, es probable que métodos adaptados mejoren nuestra comprensión de estos casos complejos. Varios aspectos del crecimiento urbano concuerdan perfectamente con la descripción fractal de las ciudades. La primera y más sencilla observación que se puede hacer es que, cuanto más se extiende una ciudad en superficie, más fragmentada y desmenuzada parece como se ilustra en la figura 3, que es la Ciudad de Toluca en el año 2010.



Figura 3. Ciudad de Toluca en el año 2010.

Fuente: Elaboración propia con Matlab.

La segunda observación ha surgido de estudios que relacionan la superficie construida de un conjunto de áreas urbanas con la longitud de su borde. Si esas áreas fueran simples objetos geométricos, su borde estaría caracterizado por la dimensión 1 y su superficie por la dimensión 2. Aunque la relación observada entre borde y superficie fuera regular, la

relación entre superficie y borde era aproximadamente 1.05, lo que contradice la geometría euclidiana y corresponde a la geometría fractal.

Este fenómeno se explica por el propio alargamiento del borde urbano, que tiende a cubrir completamente el espacio, cerca de un plano. Además, es posible trazar un paralelo con las observaciones relacionadas con la evolución de las ciudades. Ello porque sabemos que a una distribución espacial específica de las actividades corresponde una manera específica de actuar de las personas en ese espacio. En ese sentido, el alargamiento mismo de la frontera urbana puede ser en parte resultado del hecho de que cada persona que vive en una zona suburbana quiere vivir cerca de una zona verde. De hecho, algunos ejemplos de planes urbanos fueron concebidos siguiendo el principio de que cada edificio debería estar conectado tanto a la red de transporte como a una zona verde.

Al implementar esto de manera fractal, se busca que toda la población tenga acceso cercano a zonas verdes sin perder demasiado tiempo en llegar a otros servicios más centrales. Esta idea de que cada edificio es parte de la frontera de toda el área urbana corresponde exactamente a la geometría fractal de las alfombras de Sierpinski (Figura 2a) y muestra como estas estructuras tienden a descomponerse en elementos aislados, aunque formen grupos, una estructura donde el perímetro se incrementa indefinidamente, aunque la superficie total disminuya (Jiménez-López y López-Rivera, 2023).

La sinuosidad de la frontera urbana proporciona una manera de mejorar la accesibilidad de la población a los servicios. Pero la sinuosidad de la frontera urbana es también una propiedad de los patrones urbanos que surgen del comportamiento de los residentes. Los residentes de un área urbana tienden a preservar esta propiedad impidiendo que otras personas se instalen cerca de su casa y obstaculizando su acceso a las áreas verdes. Estas observaciones apoyan la hipótesis que las interacciones entre la planificación urbana y los procesos de autoorganización conducen a las ciudades fractales (Frankhauser, 2021; Zhang et al., 2022).

Existen analogías obvias entre el carácter incremental de la evolución urbana y la forma en que se generan las formas fractales, a través de procesos matemáticos iterativos. Al relacionar las leyes de escala de los patrones residenciales en tres ciudades mexicanas con el grado con que se llena el espacio y la velocidad a la que se ocupa, comparando las dimensiones fractales observadas y las resultantes de un proceso estocástico de difusión (modelo de agregación limitada por difusión). Como los objetos fractales pueden generarse mediante procesos dinámicos no lineales, un programa de investigación fructífero es identificar posibles procesos sociales que conduzcan a diferentes formas urbanas y simular cómo pueden generar patrones fractales o no (Garrocho et al., 2021).

Las aplicaciones de la geometría fractal en el ámbito urbano son hoy demasiado numerosas para poder analizarlas en su totalidad en este artículo. El uso más frecuente de la dimensión fractal en geografía urbana ha implicado la medición de las dimensiones fractales de los patrones urbanos, con el objetivo de encontrar nuevas descripciones de la variedad de morfologías urbanas. La morfología de los patrones urbanos se analiza siguiendo los principios de la geometría fractal. Este análisis se basa principalmente en el estudio de la superficie edificada de las ciudades, la forma y longitud de sus fronteras (Saganeiti et al., 2021).

Se pueden tener tres principales resultados. i) La verificación de la naturaleza jerárquica de la estructura espacial y la caracterización de esta jerarquía. ii) La identificación de umbrales en la organización espacial de la ciudad. iii) La determinación del número de diferentes tipos de organización espacial (por ejemplo, agrupaciones edificadas conectadas y débilmente jerárquicas cuando se considera una ventana de análisis de longitud de 0 a 200 metros, luego agrupaciones edificadas no conectadas y más jerárquicas para una ventana de análisis mayor de 200 metros). Estos resultados podrían estar relacionados con la multifractalidad de una estructura urbana (Garrocho et al., 2021).

Las medidas de dimensión fractal son un buen instrumento para una comparación global de la morfología de las ciudades. Las dimensiones fractales cercanas a 2 reflejan ciudades

muy poligénicas caracterizadas por sus fuertes gradientes de densidad desde el centro de la ciudad hacia la periferia (dimensiones fractales entre 1 y 2, pero más cercanas a 1). Sin embargo, el número de medidas comparables no es suficiente para obtener una clasificación clara de las ciudades de las diferentes partes del mundo. Además, los resultados obtenidos por el análisis fractal dependen en gran medida de los métodos de generalización de los mapas que representan las superficies construidas que se utilizan para la medición de la dimensión fractal (Frankhauser, 2021).

Además del análisis estático de las formas urbanas, el análisis temporal de las dimensiones fractales puede arrojar luz sobre el proceso de crecimiento urbano. El estudio de la evolución de las dimensiones fractales de una ciudad a lo largo del tiempo muestra cómo el patrón urbano se autoorganiza progresivamente, siguiendo un gradiente de centro a periferia. La estructuración de las áreas periféricas suele producirse mucho tiempo después de la aparición de los primeros edificios en los suburbios. Una serie de análisis fractales de patrones urbanos a lo largo del tiempo han demostrado que el espacio urbanizado está cada vez más fuertemente organizado en torno a un conjunto central. Además, la urbanización va acompañada de un proceso de autoestructuración que se manifiesta en la regularidad creciente de las curvas resultantes del análisis fractal, a pesar de la morfología fragmentada de los patrones urbanos (Frankhauser y Pumain, 2022).

El análisis y medición de las morfologías urbanas ha llevado a la concepción de modelos urbanos que simulan el crecimiento urbano y son capaces de reproducir las propiedades observadas de los patrones espaciales urbanos (Saganeiti et al., 2021). En ese campo de aplicación, los fractales tienen dos tipos diferentes de contribuciones. Pueden utilizarse para controlar los resultados de las simulaciones y ayudan a definir si los resultados son realistas o no (Roura et al., 2021).

Los fractales también pueden utilizarse como principios básicos para generar formas urbanas (Jiménez-López, 2019). Los autómatas celulares se utilizan con frecuencia como herramienta de simulación para modelar el crecimiento urbano o los cambios en el uso del

suelo, mientras que los modelos de crecimiento físico disponibles podrían sustituirse de forma rentable por modelos más detallados y realistas de evolución espacial que aborden los procesos sociales.

Como ejemplo, una imagen rasterizada de un patrón urbano formado por dos tipos de píxeles: negros que representan espacios edificados y blancos que representan espacios no edificados. Se aplica a la imagen un modelo iterativo de crecimiento fractal (Jiménez-López, 2019). En cada paso de iteración, aparecen nuevos píxeles edificados bajo la restricción de que su ubicación sea compatible con la naturaleza fractal del patrón simulado. Se han integrado en el modelo otras restricciones no fractales, acelerando, ralentizando o impidiendo la aparición de las áreas edificadas (equipamiento urbano, declive del terreno, leyes de construcción, lugares de recarga de agua, entre otras. En la ciudad de Toluca, el modelo simulado mostraba una morfología global semejante a la ciudad en años anteriores. Pero localmente, los patrones simulados y los reales podían ser muy diferentes (Garrocho et al., 2021).

Siguiendo la misma dirección, sería particularmente interesante proporcionar varios modelos de crecimiento fractal que permitieran la simulación de patrones urbanos con características bien diferenciadas. Así, sería posible simular diferentes evoluciones concebibles de un patrón urbano original, correspondiendo cada una de las simulaciones a una visión particular del proceso de urbanización (por ejemplo, intensificación o expansión urbana, jerarquía creciente o decreciente, entre otros muchos factores).

El análisis de las imágenes tiene como objetivo explorar la capacidad de las medidas fractales para caracterizar el proceso de expansión urbana. El objetivo es proporcionar un conjunto de análisis que puedan utilizarse para comparar las realidades urbanas de una variedad de ciudades utilizando una herramienta metodológica única.

5. Método de análisis

Para este trabajo se desarrolló una herramienta diseñada para calcular la dimensión fractal de patrones urbanos en Matlab. El primer ejemplo de su uso se realiza con la ciudad de Toluca. La elección de esta ciudad es debido a que es la quinta ciudad más grande y capital de Estado de México, la entidad más poblada del país.

El análisis se realizó paso a paso siguiendo un principio de iteración. En cada paso, el análisis consistió en contar los píxeles negros (edificaciones), los cuales se incrementan en cada iteración. Al hacer esto, se cambia artificialmente el nivel de análisis de la imagen. Por lo tanto, para cada análisis se tiene dos elementos que varían según el paso de conteo (paso de iteración). i) la cantidad de elementos contados (que es aproximadamente la cantidad de píxeles negros presentes) (N).

Esto genera una serie de puntos que pueden representarse en un gráfico cartesiano. El eje de las ordenadas corresponde al número de elementos contados (N) y el eje de las abscisas corresponde al tamaño de la caja de conteo o al tamaño del elemento de referencia que aumenta de paso a paso (Figura 4).

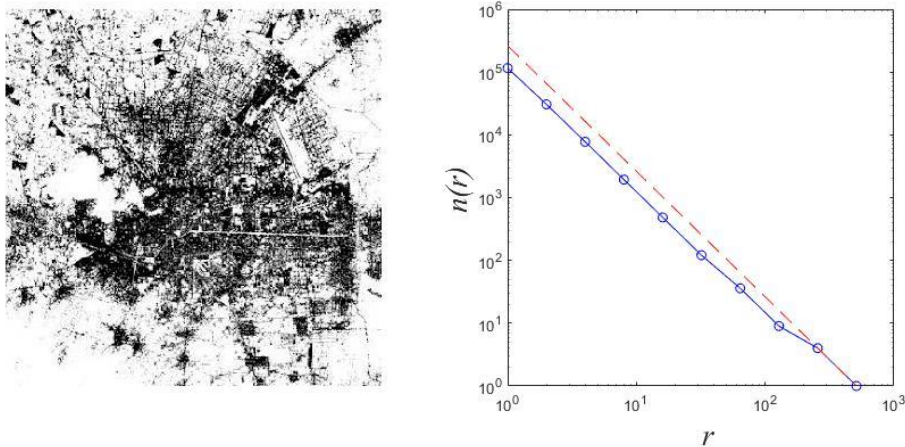


Figura 4. Cálculo de la dimensión fractal de una imagen urbana.

Fuente: Elaboración propia con Matlab.

Matemáticamente, la serie de puntos es una curva (llamada curva empírica). Se ajusta esta curva empírica con otra, la curva estimada de una proyección. La curva estimada debería ajustarse a una ley de potencia, que puede ser representada por funciones hiperbólicas en algunos casos.

Dado que, la imagen urbana no representa un fractal puro (no es una función continua sino discreta y finita), solo es posible aproximarse a la ley fractal. Esto explica por qué no se estima directamente la ley fractal sino una generalización de ella. La calidad de la estimación se cuantifica utilizando un coeficiente de correlación. Si el ajuste entre las dos curvas (la empírica y la estimada) es malo, es posible lo siguiente: el patrón en estudio no es de naturaleza fractal o es de naturaleza multifractal. En el segundo caso, la curva empírica debe dividirse en varias porciones, cada una de las cuales corresponde a una curva estimada diferente (i.e. según la porción de curva considerada, la regresión no lineal da valores diferentes para los parámetros).

Se destaca que las estimaciones de la dimensión fractal de una estructura son el resultado de un proceso empírico. De hecho, es posible obtener una gran variedad de estimaciones de la dimensión fractal a partir de una única curva empírica. Diferentes opciones metodológicas conducen a diferentes estimaciones de la dimensión fractal. Esto debe considerarse al interpretar los resultados obtenidos.

Al estudiar la evolución de la forma de la ciudad de Toluca, se utilizaron dos tipos de enfoques metodológicos que aportan perspectivas complementarias para caracterizar la fractalidad de los patrones urbanos. El primer método es el cálculo de la dimensión fractal de las imágenes mediante el uso del análisis de correlación. El segundo se basa en una transformación iterativa de las imágenes (dilatación paso a paso) y una representación gráfica bidimensional de variables asociadas a las imágenes transformadas en cada iteración. Este segundo enfoque no proporciona ningún cálculo de la dimensión fractal, sino que es el resultado de un razonamiento multiescalar sobre una naturaleza fractal típica.

6. Resultados

Se analizó la relación entre la dimensión fractal y el crecimiento urbano para el caso de la ciudad de Toluca, México. Específicamente, se utilizaron las áreas urbanizadas de la zona urbana de Toluca de dos períodos de tiempo 2010 y 2020. Las áreas urbanizadas, que se mostraron en la Figura 3, se obtuvieron del satélite Landsat 8 en los dos tiempos de captura y convertidas en imágenes raster binarias (blanco y negro) conforme a los requerimientos del algoritmo fractal. Estas imágenes urbanas se sintetizaron a partir de múltiples capas en el mapa, pendientes, equipamiento urbano, zonas de recarga de agua, información digital georreferenciada sobre el uso de suelo y cartografía vectorial digital con escalas que van desde 1:12 000 a 1:250 000.

Las áreas urbanizadas de la ciudad de Toluca crecieron sustancialmente en el transcurso de 10 años, por lo que la relación positiva entre las áreas urbanizadas y la dimensión fractal indica que la dimensión fractal es una medida razonablemente buena del crecimiento espacial urbano. La calidad del ajuste en cada año se refleja en los valores de varianza explicada mejora de manera consistente desde 0.7435 en 2010 hasta 0.8671 en 2020. Esta variación temporal se muestra en la Figura 5. Si bien la inexactitud de la estimación del conteo de cajas es bien conocida, la diferencia observada sugiere que el algoritmo de conteo de cajas ofrece mayor precisión en áreas urbanizadas más desarrolladas.

La figura 5 muestra que las áreas urbanizadas de Toluca, aumenta de manera constante para el año 2020. La tasa de crecimiento fue relativamente constante durante el periodo 2010-2020. Un crecimiento más lento se produjo en años anteriores a este periodo por observaciones realizadas en la calibración del modelo. La tendencia proyectada para 2030 también muestra una correlación positiva se puede ver claramente en la figura 6. La dimensión fractal no siempre presenta una correspondencia lineal positiva con el crecimiento poblacional o disminución de la población.

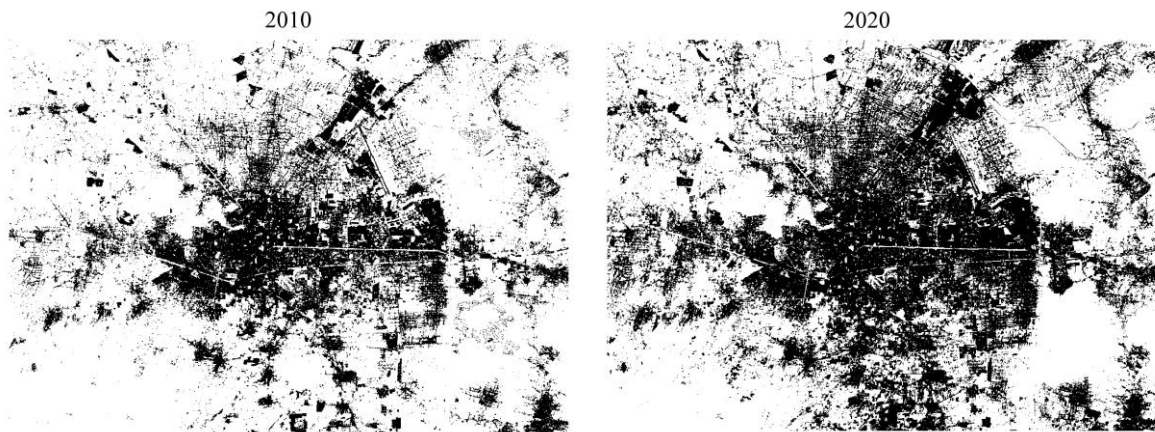


Figura 5. Ciudad de Toluca 2010-2020.

Fuente: Elaboración propia.

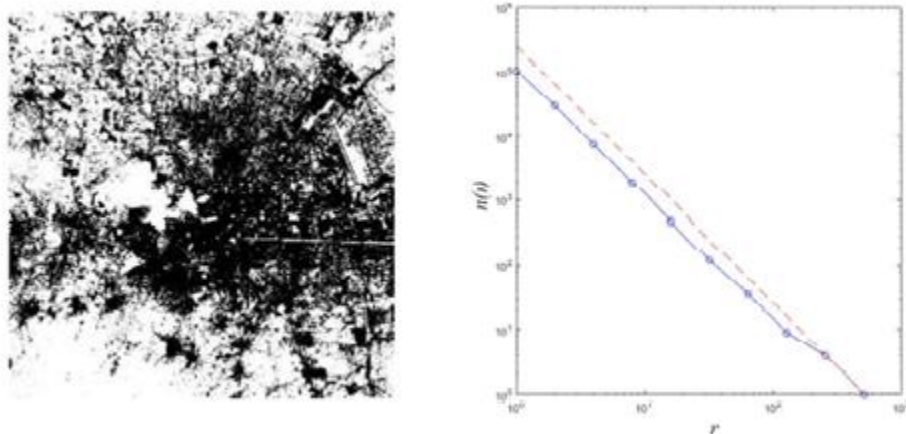


Figura 6. Ciudad de Toluca 2030, Dimensión fractal.

Fuente: Elaboración propia con Matlab.

7. Conclusiones

Evaluar los principales beneficios del uso de fractales en geografía no es una tarea sencilla, y de manera más general, en las ciencias sociales. La incorporación del enfoque fractal es relativamente reciente en la literatura geográfica, y probablemente en breve se obtendrán conocimientos más profundos a medida que los estudios se vuelvan más numerosos y sistemáticos. La principal ventaja de la geometría fractal es proporcionar un modelo de

referencia que resulta más adecuado que la geometría euclidiana a la descripción de las formas espaciales creadas por la sociedad.

Las características de heterogeneidad, autosimilitud y jerarquía están incluidas desde el principio en las estructuras fractales. Al comparar los patrones espaciales observados con la geometría euclidiana, estas propiedades se presentan como desviaciones relevantes respecto a los modelos tradicionales que especifican los sistemas sociales, mientras que la comparación directa con los modelos fractales puede revelar características específicas que aún no se han notado. Otra propiedad muy importante de los fractales, aunque aún no completamente explorada, es su relación con los mecanismos generativos no lineales subyacentes. El diseño y uso en simulación de modelos que vinculen explícitamente el comportamiento individual o los microprocesos con la aparición de morfologías fractales en niveles superiores de observación mejoraría enormemente la comprensión de tales formas y permitiría una exploración más sistemática de su estabilidad, límites y fundamentos.

Se pueden enumerar algunas de las muchas preguntas que permanecen parcial o totalmente sin resolver en este momento. ¿Cuál sería un índice de la fractalidad de la ciudad en estudio? Por la homogeneidad, una ciudad perfectamente compacta no es fractal, como tampoco lo son los suburbios que estarían homogéneamente dispersos. ¿cómo deberían interpretarse las variaciones en el grado de fractalidad? Las dimensiones fractales pueden compararse, ya que son estructuras urbanas muy bien delimitadas que pueden ser diferentes mientras muestran la misma dimensión fractal. Las propiedades fractales urbanas no se conocen lo suficientemente bien hasta ahora como para dar una interpretación verdaderamente consistente.

La integración de diversas métricas puede contribuir a determinar si la fractalidad se explica mejor relacionándola con diferentes escuelas de urbanismo (distintas corrientes de pensamiento sobre la morfología urbana) o con pasos sucesivos en el proceso de urbanización. Resulta pertinente explorar la posible relación entre calidad de vida urbana y el grado de fractalidad de la forma urbana, ¿Sería más relevante para las políticas, en lugar

de distinguir entre compacidad, dispersión urbana, diferenciar entre ciudades fractales y no fractales?

Como lo sugieren las aplicaciones a la geografía urbana, los fractales también pueden usarse en arqueología para el estudio de las estructuras espaciales como los edificios, las redes de transporte y el uso del suelo. Esto podría ofrecer referencias valiosas como la velocidad de construcción, alcance espacial, posible extensión, jerarquía y diferenciación de las ciudades. Un problema importante es obtener una mejor cartografía de las supuestas estructuras fractales y poder compararlas a un nivel de resolución determinado y bien identificado.

Más aún, la comparación de las estructuras espaciales de años anteriores a la actualidad podría ayudar a identificar los procesos sociales que están detrás de su forma. Lo anterior plantea la necesidad de investigaciones interdisciplinarias, entre disciplinas como la geografía, el análisis espacial, la economía, demografía, ciencias computacionales y matemáticas, entre otras tantas.

8. Conflictos de interés

Los autores de esta investigación declaran bajo protesta de decir la verdad que este es un trabajo original y que no existen conflictos de interés.

9. Referencias

Abdou, A., y Alkama, D. (2022). Study of the Spatial Growth Factors by the use of the Fractal Analysis Case Study City of Biskra. *International Journal of Innovative Studies in Sociology and Humanities*, 7(2), 1-12. <https://doi.org/10.20431/2456-4931.0702001>

Akın Ateş, M., Suurmond, R., Luzzini, D., y Krause, D. (2022). Order from chaos: a meta-analysis of supply chain complexity and firm performance. *Journal of Supply Chain Management*, 58(1), 3-30. <https://doi.org/10.1111/jscm.12264>

- Aquino, V. H., y Aguilar, A. G. (2022). La verticalización corporativa del espacio urbano en la Ciudad de México (1940-2018). *Revista de Geografía Norte Grande*, (81), 161-182. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-34022022000100161>
- Arseniou, G., y MacFarlane, D. W. (2021). Fractal dimension of tree crowns explains species functional-trait responses to urban environments at different scales. *Ecological Applications*, 31(4), e02297. <https://doi.org/10.1002/eap.2297>
- Badie, N., Almodaresi, S. A., y Hosein, S. M. (2021). A systematic review of fractal theory and its application in geography and urban planning. *International Journal of Applied Arts Studies (IJAPAS)*, 6(3), 59-77. <http://ijapas.ir/index.php/ijapas/article/view/325>
- Batty, M., y Sik, K. (1992). Form follows function: reformulating urban population density functions. *Urban studies*, 29(7), 1043-1069. <https://doi.org/10.1080/00420989220081041>
- Batty, M., y Longley, P. A. (1994). *Fractal cities: a geometry of form and function*. Academic press. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/179240>
- Batty, M., y Xie, Y. (1996). Preliminary evidence for a theory of the fractal city. *Environment and Planning A*, 28(10), 1745-1762. <https://doi.org/10.1068/a281745>
- Beškovnik, B., y Bajec, P. (2021). Strategies and approach for smart city–port ecosystems development supported by the internet of things. *Transport*, 36(5), 433-443. <https://doi.org/10.3846/transport.2021.16194>
- Dong, J., Jiang, H., Gu, T., Liu, Y., y Peng, J. (2022). Sustainable landscape pattern: a landscape approach to serving spatial planning. *Landscape Ecology*, 1-12. <https://doi.org/10.1007/s10980-021-01329-0>
- Ferrer, G., y Vélez-Santiago, A. (2023). 3D Koch-type crystals. *Journal of Fractal Geometry*, 10(1), 109-149. <https://doi.org/10.4171/JFG/130>
- Frankhauser, P. (2021). Fractal geometry for analyzing and modeling urban patterns and planning sustainable cities. In *Handbook on cities and complexity* (pp. 154-175). Edward Elgar Publishing. <https://doi.org/10.4337/9781789900125.00016>

- Frankhauser, P., y Pumain, D. (2022). Fractals and geography. *Machine learning and the city: Applications in architecture and urban design*, 31-55. <https://doi.org/10.1002/9781119815075.ch3>
- Garrocho, C., Chávez, T., y Jiménez-López, E. (2021). Autómata Celular Metro-NASZ: laboratorio experimental de expansión urbana. CONAPO, La situación demográfica de México, 149-175. <https://www.gob.mx/conapo/documentos/la-situacion-demografica-de-mexico-2021>
- Girón, D., y Cisneros, E. (2022). Reflexiones sobre los paradigmas de la investigación científica; la geometría fractal un enfoque sistémico para la investigación interdisciplinar. *Éndoxa*, (50), 187-208. <https://doi.org/10.5944/endoxa.50.2022.24660>
- Jahanmiri, F., y Parker, D. (2022). An overview of fractal geometry applied to urban planning. *Land*, 11(4), 475. <https://doi.org/10.3390/land11040475>
- Jain, S. (2021). *Smart Connected World*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-76387-9>
- Jiménez-López, E. (2019). Cadenas de Markov espaciales para simular el crecimiento del Área Metropolitana de Toluca, 2017-2031. *Economía, sociedad y territorio*, 19(60), 109-140. <https://doi.org/10.22136/est20191324>
- Jiménez-López, E., y López-Rivera, L. A. (2023). Artificial neural networks in the application of the growth of the urban sprawl. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 11(21), 109-119. <https://doi.org/10.29057/icbi.v11i21.10565>
- Kafri, O. (2023). Zipf's law, Benford's law, and Pareto rule. *Advances in Pure Mathematics*, 13(3), 174-180. <https://doi.org/10.4236/apm.2023.133010>
- Khan, A., Chen, L. R., y Hung, C. Y. (2021). The role of corporate social responsibility in supporting second-order social capital and sustainable innovation ambidexterity. *Sustainability*, 13(13), 6994. <https://doi.org/10.3390/su13136994>
- Khan, S. A. R., Ponce, P., Yu, Z., Golpîra, H., y Mathew, M. (2022). Environmental technology and wastewater treatment: Strategies to achieve environmental

sustainability. *Chemosphere*, 286, 131532.

<https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2021.131532>

Llorente, M., Mera, M. E., y Morán, M. (2023). The Centered Hausdorff Measure of the SIERPIŃSKI Gasket. *Fractals*, 31(09), 2350107.

<https://doi.org/10.1142/S0218348X23501074>

López, C., Méndez-Lemus, Y., y Medrano, J. (2021). Propuesta metodológica para analizar la segregación socio-espacial en el periurbano de ciudades intermedias en México. *Estudios Geográficos*, 82(290), e060-e060. <https://doi.org/10.3989/estgeogr.202072.072>

Piferi, C., Bazaka, K., D'Aversa, D. L., Di Girolamo, R., De Rosa, C., Roman, H. E., Riccardi, C., y Levchenko, I. (2021). Hydrophilicity and Hydrophobicity Control of Plasma-Treated Surfaces via Fractal Parameters. *Advanced Materials Interfaces*, 8(19), 2100724.

<https://doi.org/10.1002/admi.202100724>

Principi, N. (2022). Modelado de expansión urbana mediante autómatas celulares y redes neuronales artificiales. *Revista Universitaria de Geografía*, 31(1), 10-12.

Roura, E., Maclair, G., Andorrà, M., Juanals, F., Pulido-Valdeolivas, I., Saiz, A., ... y Villoslada, P. (2021). Cortical fractal dimension predicts disability worsening in Multiple Sclerosis patients. *NeuroImage: Clinical*, 30, 102653. <https://doi.org/10.1016/j.nicl.2021.102653>

Saganeiti, L., Mustafa, A., Teller, J., y Murgante, B. (2021). Modeling urban sprinkling with cellular automata. *Sustainable Cities and Society*, 65, 102586.

<https://doi.org/10.1016/j.scs.2020.102586>

Sandoval-Ruiz, C. (2023). Kirigami, estructuras geométricas fractales y ondas de luz. *Revista REC Perspectiva*, 21(1), 44-58.

<https://produccioncientificaluz.org/index.php/perspectiva/article/view/40438/45965>

Wang, J., Jiang, F., Zhang, C., Song, Z., y Mo, W. (2021). Study on the pore structure and fractal dimension of tight sandstone in coal measures. *Energy & Fuels*, 35(5), 3887-3898.

<https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.0c03991>

Wang, Y., y Sun, B. (2024). The types of city size distributions and their evolution. *Cities*, 150, 105045. <https://doi.org/10.1016/j.cities.2024.105045>

Xia, H., Liu, Z., Efremochkina, M., Liu, X., y Lin, C. (2022). Study on city digital twin technologies for sustainable smart city design: A review and bibliometric analysis of geographic information system and building information modeling integration. *Sustainable Cities and Society*, 84, 104009. <https://doi.org/10.1016/j.scs.2022.104009>

Yang, S., Tian, Y., He, C., Zhang, X., Tan, K. C., y Jin, Y. (2021). A gradient-guided evolutionary approach to training deep neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 33(9), 4861-4875. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2021.3061630>

Zhang, H., Lan, T., y Li, Z. (2022). Fractal evolution of urban street networks in form and structure: A case study of Hong Kong. *International Journal of Geographical Information Science*, 36(6), 1100-1118. <https://doi.org/10.1080/13658816.2021.1974451>