



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INFLUENCIA DE LA ABSORCIÓN DE MUY
CORTO ALCANCE SOBRE LA DISPERSIÓN
ELÁSTICA PARA DIFERENTES SISTEMAS
DÉBILMENTE LIGADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

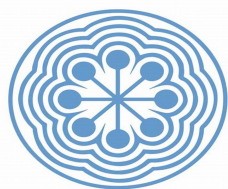
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA:

SALOMÓN GÓMEZ RIVERA

ASESORES:

DR. JUAN CARLOS MORALES RIVERA
PHD. ELÍ FRANCISCO AGUILERA REYES



ININ

Toluca, México 2024

Dedicatoria ...

Índice general

Agradecimientos	II
Notación	VII
Índice de Figuras	XIII
Índice de Tablas	XV
Resumen	XVI
Introducción	1
Objetivos	3
1 Conceptos Generales	5
§1.1 Núcleo Atómico, Fuerzas Nucleares y de Coulomb	5
§1.2 Núcleos Débilmente Ligados	6
§1.3 Reacción Nuclear	8
§1.3.1 Canales de Reacción	9
§1.3.2 Reacción Directa	10
§1.3.3 Reacción de Núcleo Compuesto	11
§1.4 Modelo Óptico	12
§1.4.1 Modelo Óptico Extendido	14
§1.4.2 Factor de Forma Woods-Saxon	16
§1.4.3 Potencial SPP	18
§1.4.4 Potenciales de Polarización Dinámica	19

§1.5 Sección Eficaz Diferencial	20
§1.5.1 Sección Eficaz Diferencial de Rutherford	21
§1.6 Sección Eficaz	24
§1.7 Relación de Dispersión	25
§1.8 Leyes de Conservación	26
§1.9 Ecuación de Schrödinger	27
§1.10 Análisis de Ondas Parciales	29
§1.11 Matriz S y Coeficientes de reflexión	31
2 Recuperación de Datos Experimentales	32
§2.1 NNDC (National Nuclear Data Center):	32
§2.1.1 Ejemplo para DA	32
§2.1.2 Ejemplo para SF	34
§2.2 NRV (Nuclear Reactions Video)	36
§2.2.1 Ejemplo para DA	36
§2.2.2 Ejemplo para SF	38
3 Programas y Herramientas	40
§3.1 Linux/Windows	40
§3.2 FRESCO	40
§3.3 SFRESCO	41
§3.4 Relación de Dispersión	42
§3.5 <i>Origin</i>	42
4 Construcción de Archivos de Entrada	44
§4.1 FRESCO	44
§4.2 SFRESCO	47
§4.3 SPP	48
5 Metodología de Optimización	51
§5.1 ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$	51
§5.2 ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$	58

§5.3 $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$	63
§5.4 $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$, $^{12}\text{C}+^9\text{Be}$	70
6 Resultados	74
§6.1 $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$	74
§6.2 $^6\text{He}+^{64}\text{Zn}$	84
§6.3 $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$	93
§6.4 $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$, $^{12}\text{C}+^9\text{Be}$	102
7 Conclusiones	122
Referencias	125
Apéndice A: Transformación entre Sistemas de Referencia.	130

Notación

Abreviación	Significado
EOM	Modelo Óptico Extendido.
V_{bare}	Potencial Desnudo.
V_C	Potencial Electroestático de Coulomb.
$U_D = V_D + iW_D$	Potencial de Polarización de Reacciones Directas.
$U_F = V_F + iW_F$	Potencial de Polarización de Fusión (Núcleo Compuesto).
W_{int}	Potencial de Absorción de muy Corto Alcance .
$f^{(0,1)}(r, a)$	Función de Woods-Saxon y su Derivada, respectivamente.
σ	Sección Eficaz.
χ^+	Función de Onda Relativa Distorsionada (en el límite asintótico).
DA	Distribución Angular.
Lab	Sistema de Referencia del Laboratorio.
E_T	Energía Total del Sistema.
C.M.	Sistema de Referencia del Centro de Masa.
SED; $d\sigma/d\Omega$	Sección Eficaz Diferencial.
$\theta_{\text{C.M.}}$	Ángulo de Dispersión Medido en el Sistema de Centro de Masa.
SDR; $d\sigma_R/d\Omega$	Sección Diferencial de Rutherford.
<i>NNDC</i>	<i>National Nuclear Data Center.</i>
<i>EXFOR</i>	<i>Experimental Nuclear Reaction Data.</i>
<i>NRV</i>	<i>Nuclear Reactions Video.</i>
χ^2	Medida de Dispersión de Datos.
A_i	Masa Atómica del Núcleo i.
Z_i	Número Atómico del Núcleo i.
SPP	Potencial de Saõ Paulo.
B	Barrera de Coulomb.
μ	Masa reducida
m_t	Masa del Núcleo Blanco
m_p	Masa del Núcleo Proyectoil
e	Carga Elemental
E	Energía del Sistema
Inc.	Incertidumbre

Tabla 1: Nomenclatura

Índice de figuras

1.1	Representación esquemática de la energía potencial repulsiva y atractiva para nucleones constituyentes de un núcleo, dentro y fuera del mismo. N para neutrones y P para protones.	6
1.2	Comportamiento de la ecuación (1.13) multiplicada por un factor de -1 (curva roja) y la ecuación (1.16) (curva azul) para $R = 1$, $a = 0.1$	16
2.1	Menú de búsqueda desplegado por NNDC.	32
2.2	Menú de búsqueda desplegado por <i>EXFOR</i>	33
2.3	Resultados de Búsqueda de datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica dentro de <i>EXFOR</i>	33
2.4	Tabla de datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica dentro de <i>EXFOR</i>	34
2.5	Leyenda de la Figura 2.4	34
2.6	Menú de búsqueda desplegado por <i>EXFOR</i>	35
2.7	Resultados de la búsqueda de datos experimentales de Sección Eficaz de Fusión dentro de <i>EXFOR</i>	35
2.8	Tabla de datos experimentales de Sección Eficaz de Fusión dentro de <i>EXFOR</i>	36
2.9	Vista de la página principal de NRV	36
2.10	Menú de búsqueda desplegada por NRV.	37
2.11	Menú desplegado por la opción <i>Java</i> en <i>Experimental Data</i> en la búsqueda de Distribución Angular para Dispersión Elástica.	37
2.12	Resultado de búsqueda de datos experimentales de Sección Eficaz Diferencial para Dispersión Elástica dentro de <i>NRV</i>	38
2.13	Menú de búsqueda desplegado por <i>NRV</i>	38

2.14	Menú desplegado por la opción <i>Java</i> en <i>Experimental Data</i> para Sección Eficaz de Fusión.	39
2.15	Resultado de búsqueda de datos experimentales para Sección Eficaz de Fusión dentro de <i>NRV</i>	39
3.1	Guía visual sobre los puntos que requiere el programa <i>threshold.exe</i> para el cálculo de la Relación de Dispersión.	43
4.1	Archivo de entrada para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$. Nombre del archivo: ' ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn.in}$ '.	45
4.2	Archivo ' <i>fort.4</i> ' que contiene el potencial nuclear numérico.	46
4.3	Archivo de entrada para SFRESCO. Nombre del archivo: <i>sf</i>	47
4.4	Archivo de entrada para el cálculo de SPP. Nombre del archivo: <i>sys1.inp</i>	48
5.1	Obtención de parámetros geométricos para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$. Los datos experimentales han sido reportados por Hugi (1981).	53
5.2	Archivo de entrada para el cálculo de SPP. Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$. Nombre del archivo: <i>sys1.inp</i>	54
5.3	Proceso de optimización para el Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$	56
5.4	Obtención de parámetros geométricos para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Z}$. Los datos experimentales han sido reportados por Pietro (2004) y Fernandez-García (2019).	58
5.5	Archivo de entrada para el cálculo de SPP. Sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$. Nombre del archivo: <i>sys1.inp</i>	60
5.6	Proceso de optimización para el Sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$	61
5.7	Sección Eficaz de Fusión mediante la ecuación de Wong para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$	62
5.8	Sección Eficaz de Fusión mediante la ecuación de Wong para el sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$	64
5.9	Archivo de entrada para SFRESCO con 2 parámetros adicionales respecto a la Figura 4.3.	66

5.10	Obtención de parámetros geométricos para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$. Los datos experimentales han sido reportados por Bock (1965).	68
5.11	Proceso de optimización para el Sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$	69
5.12	Ajuste mediante la ecuación de Wong para las estimaciones del sistema $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$ y su reacción inversa.	72
6.1	Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$ mediante SPP.	75
6.2	Relación de dispersión de los parámetros de profundidad mostrados en la Tabla 5.1 para sistema $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$	77
6.3	Secciones Eficaces de Fusión experimentales (círculos y cuadros negros) en comparación con los cálculos realizados en la presente investigación (estrellas rojas) mostrados en la Tabla 5.1 para el sistema $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$	78
6.4	Distribuciones Angulares para el sistema $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$ a diferentes energías, utilizando los parámetros de la Tabla 5.1 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.	80
6.5	Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$	81
6.6	Potencial efectivo U_{eff} del sistema $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$ para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.1.	83
6.7	Distribución Angular de Dispersión Elástica para el sistema $^9\text{Be}+^{28}\text{Si}$. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l . Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad.	84
6.8	Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema $^6\text{He}+^{64}\text{Zn}$ mediante SPP.	85

6.9	Secciones Eficaces de Fusión experimentales (cuadrados negros) en comparación con los resultados obtenidos por Aguilera (2021) (triángulos azules) y cálculos realizados en la presente investigación (triángulos rojos) mostrados en la Tabla 5.4 para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$	87
6.10	Relación de Dispersión de los parámetros de profundidad mostrados en la Tabla 5.4 para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$	88
6.11	Distribuciones Angulares para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ a diferentes energías, utilizando los parámetros de la Tabla 5.4 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.	89
6.12	Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$	90
6.13	Potencial efectivo U_{eff} del sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.4.	92
6.14	Distribución Angular de Dispersión Elástica para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l de la onda total incidente. Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i; i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i; i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad.	93
6.15	Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$ mediante SPP.	94
6.16	Secciones Eficaces de Fusión experimentales (círculos negros) en comparación con los cálculos realizados en la presente investigación (triángulo azul) para el sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$	95
6.17	Distribución Angular para el sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$, utilizando los parámetros de la Tabla 5.7 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.	97

6.18 Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$	98
6.19 Potencial efectivo U_{eff} para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.7.	99
6.20 Función de deflexión para cada l . La curva formada por segmentos de recta muestra los valores discretizados obtenidos mediante la aproximación semi-clásica. La curva punteada color rojo muestra la aproximación <i>B-Spline</i> de los mismos valores discretizados.	101
6.21 Distribución Angular de Dispersión Elástica para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l de la onda total incidente. Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad.	102
6.22 Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$ mediante SPP.	103
6.23 Relación de dispersión de los parámetros de profundidad para sistema $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$ y su reacción inversa $^{12}\text{C}+^9\text{Be}$ [Torabi,2024].	104
6.24 Secciones Eficaces de Fusión experimentales para el sistema $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$ y su reacción inversa $^{12}\text{C}+^9\text{Be}$ (círculos negros y rojos) en comparación con los resultados obtenidos por Torabi (2024) (triángulos azules).	105
6.25 Distribuciones Angulares para el sistema $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$ y $^{12}\text{C}+^9\text{Be}$ a diferentes energías, utilizando los parámetros de la Tabla 5.8 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido [Torabi,2024]. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.	106
6.26 Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema $^{12}\text{C}+^9\text{Be}$	111

6.27 Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ 113

6.28 Función de deflexión para cada l . La curva formada por segmentos de recta muestra los valores discretizados obtenidos mediante la aproximación semi-clásica. La curva punteada color rojo muestra la aproximación *Spline* de los mismos valores discretizados. 114

6.29 Potencial efectivo U_{eff} del sistema ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.8. 115

6.30 Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y su reacción inversa a diferentes energías. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l de la onda total incidente. Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad. 121

Índice de tablas

1	Nomenclatura	VII
5.1	Parámetros de Profundidad, χ^2 (para la Distribución Angular) y Sección Eficaz de Fusión para el Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ a diferentes energías. Las Secciones de Fusión reportadas corresponden a un valor de $W_{\text{int}} = 50$ MeV.	57
5.2	Datos experimentales de Sección Eficaz de Fusión para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ a diferentes energías [Scuderi,2011] y [Di Pietro,2004].	59
5.3	Secciones Eficaces de Fusión como resultado del ajuste de la ecuación de Wong y aproximaciones lineales.	60
5.4	Parámetros de Profundidad, χ^2 (para la Distribución Angular) y Sección Eficaz de Fusión para el Sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ a diferentes energías. Las Secciones de Fusión reportadas corresponden a un valor de $W_{\text{int}} = 50$ MeV.	63
5.5	Datos Experimentales de Sección Eficaz de Fusión para el sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$ a diferentes energías [Mateja,1984].	65
5.6	Razón de la Sección Eficaz Diferencial Absoluta respecto a la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford para el sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$ a energía $E_{\text{Lab}} = 25$ MeV.	67
5.7	Parámetros de profundidad, geométricos y Sección Eficaz de Fusión para el Sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$. Las Secciones de Fusión reportadas corresponden a un valor de $W_{\text{int}} = 4$ MeV.	70

5.8	Parámetros de profundidad, difusividades, χ^2 (para la Distribución Angular) y Secciones Eficaces de Fusión para el Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y su reacción inversa ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ a diferentes energías [Torabi,2024].	71
6.1	Puntos de retorno y ángulos de dispersión para diferentes ondas parciales l a diferentes energías. El punto de retorno se ha aproximado mediante una curva cuadrática sobre una vecindad centrada en el punto donde se cumple la condición de la ecuación (1.27).	100
6.2	Puntos de retorno y ángulos de dispersión para diferentes ondas parciales l a diferentes energías. El punto de retorno se ha aproximado mediante una curva cuadrática sobre una vecindad centrada en el punto donde se cumple la condición de la ecuación (1.27).	118

Resumen

La presente investigación se realizó con el objetivo de observar cuál es la influencia del Potencial de Absorción de muy corto alcance sobre la dispersión elástica de núcleos débilmente ligados, mediante un proceso que inicia con la obtención de los parámetros geométricos y de profundidad presentes en el Modelo Óptico Extendido, reproduciendo su Sección Eficaz de Fusión y su Distribución Angular de Dispersión Elástica. Posteriormente, se visualiza el efecto del Potencial de interés (exclusivamente imaginario) a muy cortas distancias sobre estos sistemas débilmente ligados.

Los sistemas de interés se han elegido bajo ciertos criterios; el primero y más importante es que el sistema contenga un núcleo débilmente ligado; el segundo es que existan datos experimentales sobre la Distribución Angular de Dispersión Elástica, de ser posible a energías por debajo de la barrera de Coulomb correspondiente del sistema, extendiéndose hasta por encima de esta, realizando una búsqueda de su Sección Eficaz de Fusión. El análisis se realiza eligiendo una herramienta computacional que permita calcular tanto la Distribución Angular de Dispersión Elástica como la Sección Eficaz de Fusión.

Se realizó una aproximación semiclásica sobre la función de deflexión utilizando los potenciales reales que reproducen los datos experimentales de Dispersión Elástica, sobre la cuál el principal objetivo fue observar cuál onda parcial era la responsable de reproducir las oscilaciones observadas en las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica.

Introducción

El estudio de núcleos débilmente ligados en reacciones nucleares ha tenido un auge principalmente a inicios de los años 90, los sistemas más comunes en este tipo de reacciones corresponden a blancos de masa pesada. Un núcleo débilmente ligado tiene como principal característica que su energía de enlace para separación en dos o más cúmulos es más baja que el promedio en núcleos estables (8 MeV/A) [Camacho,2008]; para el núcleo ${}^9\text{Be}$ es de 1.57 MeV para separación en $2\alpha\text{n}$, además, no tiene ningún estado excitado ligado. Dada su débil energía de enlace, se esperará que la presencia de procesos de rompimiento mantenga abiertos distintos canales de reacción al llevar a cabo la reacción nuclear. Lo anterior es de vital importancia, ya que estas características nos indican cuál es el marco teórico idóneo para describir este tipo de procesos [Torabi,2024].

Para estudiar la dispersión elástica de sistemas débilmente ligados u otros sistemas es común utilizar el Modelo Óptico, donde se busca formular un potencial efectivo que logre describir la dispersión elástica y a la vez tome en cuenta la existencia de otros procesos que tienen lugar en una reacción nuclear; este potencial efectivo es complejo y es llamado comúnmente Potencial Óptico. La parte real del Potencial Óptico tiene como principales componentes el potencial de Coulomb (interacción entre dos esferas uniformemente cargadas) y un potencial originado por las fuerzas nucleares de corto alcance entre nucleón-nucleón (comúnmente llamado *bare potential*). Este último puede obtenerse mediante el método de doble convolución (*double folding*) [Gomez-Rivera,2023] o mediante el potencial de São Paulo [Chamon,2002], donde se han hecho ciertas aproximaciones dentro de dicho método. La parte imaginaria se encarga de reproducir la pérdida de flujo del Canal de Entrada (es decir, el Canal Elástico), siendo exclusivamente de signo negativo. Este potencial simula el acoplamiento de diversos procesos tales como excitación, rompi-

miento, o transferencia de nucleones respecto al Canal de Entrada, especialmente cuando la energía del centro de masas crece sobre la Barrera de Coulomb.

Sin embargo, los resultados obtenidos por el Modelo Óptico en sistemas débilmente ligados, en particular, no han sido consistentes en la descripción de las Secciones Eficaces Diferenciales de Dispersión Elástica y las Secciones Eficaces de Fusión, llegando en la mayoría de los casos a sobreestimaciones de los datos experimentales de Fusión. Por otro lado, estos detalles se observaron de igual manera en modelos alternativos como el Modelo de Penetración de Barrera (BPM; *Barrier Penetration model*) y también en el método de Canales Acoplados (CC; *Coupled Channels*).

Por otro lado, Udagawa (1984,1985) formula lo que se conoce como Modelo Óptico Extendido (EOM; *Extended Optical Model*), donde el principal objetivo es describir los procesos de fusión dentro del marco de las Reacciones Directas, específicamente dentro de un marco donde tanto el Canal Elástico como el Canal de Fusión puedan ser descritos de manera consistente. En el EOM, un potencial imaginario de fusión W_F es responsable de reproducir la absorción del flujo del Canal de Entrada hacia el Canal de Fusión, mientras que W_D reproduce la absorción hacia otros Canales de Reacción Directa, satisfaciendo la relación $W_T = W_F + W_D$. En adición a esto, se añade al modelo el uso de un potencial imaginario de muy corto alcance, W_{int} , encargado de describir la absorción a muy cortas distancias, dentro de la Barrera de Coulomb ($r_{\text{int}} < R_B$ donde r_{int} es el alcance medio del potencial W_{int} y R_B es el radio de la Barrera).

Este nuevo modelo ha sido aplicado a diferentes sistemas débilmente ligados, conformados por Núcleos Blanco de masa intermedia: ${}^6\text{Li} + ({}^{58}\text{Ni}, {}^{59}\text{Co}, {}^{64}\text{Ni}, {}^{64}\text{Zn})$ [Aguilera,2020] y ${}^6\text{He} + {}^{64}\text{Zn}$ [Aguilera,2021], mostrando que la presencia del potencial imaginario de muy corto alcance W_{int} es necesario para describir las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica y Secciones Eficaces de Fusión. Sin embargo, en el estudio del sistema débilmente ligado con un Núcleo Blanco de masa ligera, ${}^9\text{Be} + {}^{12}\text{C}$, se encontró que la presencia de este potencial no se justifica, ya que de hecho empeora la descripción de los datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica.

Objetivos

La presente investigación se ha realizado bajo una motivación que surge de explicar cuál es el comportamiento y cómo se llevan a cabo Reacciones Nucleares cuando se involucran, ya sea como Núcleo Proyectoil o como Núcleo Blanco a un Núcleo Débilmente Ligado. En adición a esto, se quiere observar cuál es el efecto del potencial de absorción de muy corto alcance sobre los cálculos realizados de la Sección Eficaz Diferencial y la Sección Eficaz de Fusión.

Objetivo General

- Realizar un análisis extendido usando Núcleos Débilmente Ligados sobre núcleos de masa ligera y media, determinando si es necesaria o no la inclusión del potencial W_{int} .

Objetivos Particulares

- Obtener una sistemática que permita relacionar la energía de bombardeo del Núcleo Proyectoil y la masa del Núcleo Blanco, con el fin de determinar de manera definitiva cuando es necesario incluir el potencial W_{int} .

- Realizar comparaciones entre el Potencial desnudo (V_{bare}) de São Paulo [Chamon,2002] y *double folding* [Gomez-Rivera,2023] que permitan verificar su fiabilidad en la reproducción de datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica en su aplicación en iones de masa ligera, media y pesada.

Capítulo 1

Conceptos Generales

1.1. Núcleo Atómico, Fuerzas Nucleares y de Coulomb

Un núcleo atómico está compuesto por protones y neutrones, conocidos en el campo de la física nuclear como nucleones. Los nucleones experimentan distintas fuerzas en el interior y fuera del núcleo. Las fuerzas responsables de mantenerlos unidos fuertemente son llamadas fuerzas nucleares y son de corto alcance. Además, en virtud de la carga de los protones, existen las llamadas fuerzas electrostáticas de Coulomb, las cuales son de largo alcance y, por lo tanto, permiten que estos nucleones interactúen con un núcleo, aun cuando su distancia de separación es mayor que el rango de las fuerzas nucleares $r > R$. Se ha demostrado que los nucleones experimentan una energía atractiva promedio que es constante en el interior del núcleo [Lilley,2013].

Los neutrones (con carga neta $q = 0$) no experimentan ninguna energía potencial atractiva cuando se encuentran a una distancia mayor al alcance de las fuerzas nucleares. Sin embargo, esta energía potencial atractiva aumenta cuando el neutrón se encuentra sobre la superficie del núcleo, lugar donde la distribución de nucleones comienza a ser difusa. Esto es bastante representativo si se compara con un potencial tipo pozo. Cuando se considera una reacción nuclear donde el neutrón actúa como proyectil, la energía potencial atractiva del neutrón no cambia hasta que este interactúa con la superficie del Núcleo Blanco; en este punto, el neutrón cae al interior del núcleo debido a las fuerzas nucleares.

Por otro lado, los protones (con carga neta $q = +e$) experimentan un fenómeno adi-

cional: un potencial repulsivo de Coulomb debido a su carga neta positiva. Este potencial repulsivo actúa a distancias mayores que el alcance de las fuerzas nucleares, alcanzando un máximo de magnitud B (llamada Barrera de Coulomb) cuando el protón se encuentra en una vecindad muy cercana sobre la superficie del núcleo. Dentro del núcleo, los protones experimentan una reducción en su energía potencial atractiva, proporcional a la carga del núcleo: Ze . Sin embargo, esta reducción es bastante pequeña en comparación con la magnitud de las fuerzas nucleares.

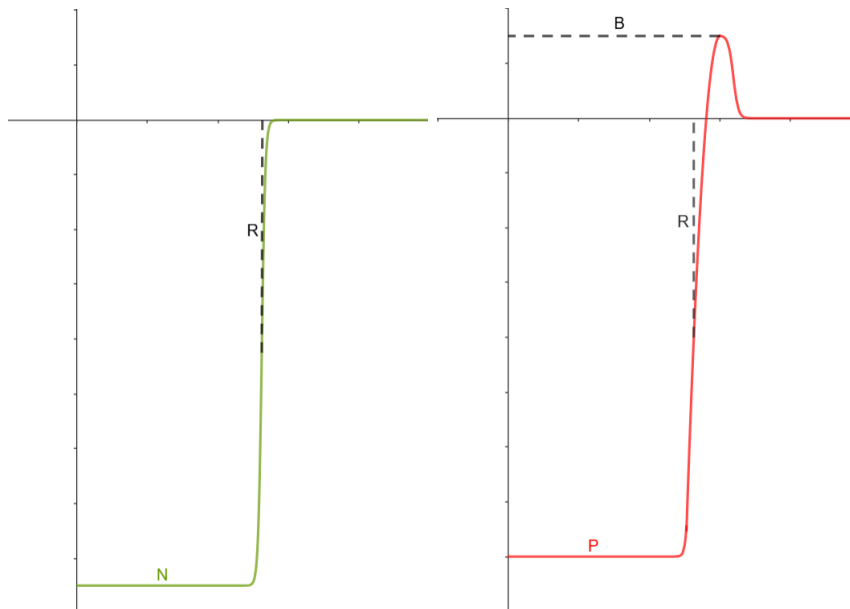


Figura 1.1: Representación esquemática de la energía potencial repulsiva y atractiva para nucleones constituyentes de un núcleo, dentro y fuera del mismo. **N** para neutrones y **P** para protones.

La Barrera de Coulomb actúa, entre muchos aspectos, como un mecanismo de estabilidad, ya que previene que en sistemas de muy baja energía, núcleos que se aproximan entre sí puedan entrar en contacto y lleven a cabo reacciones nucleares con una alta probabilidad [Lilley,2013].

1.2. Núcleos Débilmente Ligados

El estudio estructural del núcleo atómico puede realizarse desde diferentes puntos de vista, uno de ellos puede ser considerando su energía de enlace (*binding energy*), así como

sus estados excitados ligados, además de su estado base. De manera general, la energía de amarre depende de la cantidad, disposición y apareamiento de los nucleones constituyentes, siguiendo al modelo de capas nuclear (*shell model*). Esto proporciona una medida sobre la estabilidad del núcleo y la energía requerida para poder fragmentar, romper o descomponer el núcleo en diferentes constituyentes del mismo.

De esta manera, se pueden definir núcleos fuertemente ligados y débilmente ligados, como aquellos que requieren de más o menos energía para poder desintegrarse o para inducir reacciones nucleares. Núcleos exóticos (definidos así debido al inusual exceso de neutrones o protones) también son considerados como núcleos débilmente ligados (baja energía de enlace por nucleón).

Existen diferentes estructuras que conforman tanto núcleos débilmente ligados como núcleos exóticos. Uno de los ejemplos más comunes es la presencia de *halo*; es decir, unos cuantos neutrones se encuentran alrededor de un conglomerado (*core*) de nucleones con una alta energía de enlace. Sin embargo, también se pueden presentar estructuras donde el *halo* esté compuesto de partículas cargadas, así como también de distintos nucleones que formen pequeños cúmulos (*clusters*) tal como partículas α o núcleos con una alta energía de enlace por nucleón.

El núcleo ${}^9\text{Be}$ es considerado como un núcleo débilmente ligado, con energía de separación $E_S = 1.57\text{MeV}$ para la estructura de 3 clústeres $2\alpha n$. Sin embargo, pueden definirse otras estructuras de 2 *clusters* como ${}^8\text{Be}-n$ con energía de separación $E_S = 1.67\text{MeV}$ o ${}^5\text{He}-\alpha$ con energía de separación $E_S = 2.47\text{MeV}$ [Torabi,2024].

El núcleo ${}^6\text{He}$ es uno de los núcleos exóticos más estudiados debido a la facilidad para producir haces en un intervalo de energías bastante grande. Principalmente, se constituye por un *core* de partícula α con un *halo* neutrónico de 2 partículas. Esta característica lo hace el sistema ligado de 3 *clusters* más perfecto que existe, ya que es el núcleo más ligero sobre el cual predomina la estructura de *halo*, y debido a su capa cerrada en $A = 4$, se espera que este actúe como un núcleo fuertemente ligado con dos neutrones sueltos [Suzuki,2020]. Sistemas que tienen estas características comúnmente son llamados núcleos Borromeos, debido a que, si alguno de los 3 constituyentes es removido del sistema, los 2 restantes dejan de estar unidos. Esta característica también está presente en sistemas como

${}^9\text{Be}$ para la estructura $2\alpha n$, así como para ${}^{11}\text{Li}$ para la estructura ${}^9\text{Li-n-n}$ [Suzuki,2020].

La mayoría de estos núcleos débilmente ligados no tienen estados excitados ligados, como es el caso del núcleo ${}^9\text{Be}$. Sin embargo, núcleos como ${}^6\text{He}$ y ${}^{11}\text{Li}$ tienen solo un estado excitado ligado.

1.3. Reacción Nuclear

Una reacción nuclear involucra un Núcleo Proyectil P (proveniente de una fuente de iones de cualquier tipo), el cual es definido mediante su masa atómica (A_p) y número atómico (Z_p) y un Núcleo Blanco T (puede estar en reposo o no, es decir su velocidad $v_t = 0$), también definido mediante su masa atómica (A_t) y un número atómico (Z_t), donde se ha seguido la nomenclatura de la Tabla Periódica.

Se puede representar un núcleo mediante las variables que lo definen como ${}_{Z_p}^{A_p}P$, siendo P el elemento de la Tabla Periódica correspondiente (por ejemplo, el deuterón se representa mediante ${}^2_1\text{H}$). La forma más común de representar una reacción nuclear mediante los Núcleos Proyectil y Blanco es la siguiente:



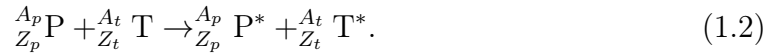
Es importante mencionar que cada uno de los componentes de la reacción (Proyectil y Blanco) tienen grados de libertad internos (ξ) que pueden definir diferentes productos de la reacción nuclear (es decir, definen el Canal de Salida). Probablemente, la característica más importante es su función de onda $\phi_0(\xi)$ (el subíndice 0 es referido al estado base del núcleo involucrado). Para definir un Canal de Salida se requiere del conocimiento del estado en el que se encuentran las funciones de onda para cada constituyente, expresados por los números cuánticos principales n, l, m, l_s, m_s . A cada conjunto de números cuánticos se les puede asociar un Canal de Reacción κ (al cual nos referimos como “canal κ ”). El estado base es definido como $\kappa=0$. En la literatura también es común referirse a diferentes Canales de Salida como Particiones [Satchler,1990]. Diferentes Canales de Reacción son mencionados a continuación:

1.3.1. Canales de Reacción

- Canal Elástico: En una reacción elástica, no se produce ningún cambio en los grados de libertad internos de cada uno de los Núcleos Proyectil y Blanco (por lo tanto, tampoco en los números cuánticos que los definen), es decir, no se produce ninguna excitación interna. Se conserva la energía total y cinética del movimiento relativo, así como el momento lineal [Bertulani,2019]. Por lo tanto, la reacción nuclear es representada cómo:

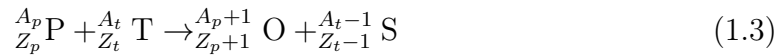


- Canal Inelástico: En este tipo de Canal de Reacción, los Núcleos Proyectil y Blanco mantienen sus identidades, es decir, $A_{p,t}$ y $Z_{p,t}$ se mantienen fijos, mientras que los grados de libertad internos de uno o ambos núcleos se han modificado (ξ^*), Obteniéndose



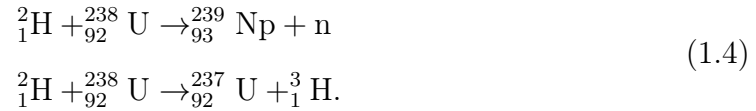
La notación ${}_{Z_p}^{A_p}\text{P}^*$ indica el cambio en los grados de libertad internos. Parte de la energía cinética del movimiento relativo es usada para excitar uno o ambos núcleos, generando una reducción de la energía cinética del núcleo emergente, es decir, del Núcleo Proyectil presente en el Canal de Salida [Bertulani,2019].

- Canal de Reacción: En este sentido, el término Canal de Reacción es usado cuando $A_{p,t}$ y $Z_{p,t}$ del Canal de Salida son diferentes de aquellos del Canal de Entrada. Por ejemplo:



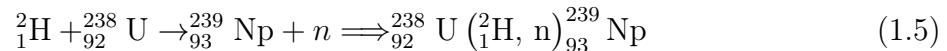
Partiendo de los Núcleos Proyectil y Blanco bien definidos, existen al menos 3 posibles tipos de Canales de Salida (los anteriormente mencionados) que cumplen con las leyes de conservación de carga, energía y momento, momento angular total, paridad, y número bariónico. Dos de los Canales de Reacción más producidos y estudiados en Física Nuclear son: *stripping reactions*, donde un nucleón constituyente del Núcleo Proyectil es transferido al Núcleo Blanco, y el proceso “inverso” llamado *pick-up reactions*, donde un nucleón constituyente del Núcleo Blanco es transferido al Núcleo

Proyectil [Bertulani,2019]. Estos dos procesos son representados a continuación con ejemplos específicos de la siguiente manera:



Es común referirse a estos dos tipos de reacciones nucleares conjuntamente como reacciones de transferencia.

Una forma alternativa para representar reacciones nucleares puede realizarse de la siguiente manera, utilizando uno de los ejemplos proporcionados en la ecuación (1.4):



la cual puede aplicarse a cualquier tipo de Canal de Reacción indistintamente.

De manera general, se pueden distinguir dos tipos de Reacciones Nucleares, que engloban el entendimiento de este tipo de fenómenos. Una de ellas son Reacciones Directas, las cuales se llevan a cabo en periodos muy cortos, y otras donde los procesos son más complejos, llevadas a cabo en periodos más prolongados debido a la formación de un estado intermedio, llamadas Reacciones de Núcleo Compuesto.

1.3.2. Reacción Directa

En este tipo de reacciones los dos núcleos pueden interactuar sin la necesidad de formar un estado intermedio, donde los estados internos de ambos núcleos pueden mantenerse intactos (ξ), pueden cambiar debido al contacto mutuo (ξ^*) o pueden transferir nucleones entre ellos cambiando la identidad del Núcleo Proyectil y Núcleo Blanco (lo que anteriormente se ha definido como reacciones de transferencia). Estas reacciones ocurren rápidamente, yendo desde el Canal de Entrada al Canal de Salida en intervalos de tiempo $\Delta t \sim 1 \times 10^{-22}$ s. Comúnmente este tipo de reacciones también pueden ser llamadas reacciones periféricas debido a que principalmente los nucleones interactuantes son aquellos que están ubicados sobre la superficie de ambos núcleos [Satchler,1990]. Este tipo de reac-

ciones serán más probables a medida que la energía de la partícula incidente aumenta; la longitud de onda de la partícula incidente es mucho más pequeña, lo cual permite al núcleo percibir más características y detalles de la superficie del Núcleo Blanco. Los productos finales que se obtienen no son exclusivos de las reacciones directas, es decir, parte de los productos finales que se obtienen pueden ser obtenidos mediante la formación intermedia de un núcleo compuesto y su posterior decaimiento [Satchler,1990]. Reacciones llamadas *knock-out* son el ejemplo más común de Reacciones Directas, caracterizadas principalmente por intercambio de nucleones entre el Núcleo Proyectil y Núcleo Blanco. Dentro de este tipo de reacciones distinguimos entre *stripping* y *pick-up*.

1.3.3. Reacción de Núcleo Compuesto

El modelo de Núcleo Compuesto surge como una explicación a reacciones nucleares que se llevan a cabo en dos etapas, una de ellas es la formación de un núcleo intermedio de vida media relativamente larga y la otra es el posterior decaimiento del núcleo [Bertulani,2019]. La formación del núcleo intermedio surge cuando el Núcleo Proyectil pierde toda su energía cinética relativa y la deposita en el Núcleo Blanco, generando que el Núcleo Proyectil ahora forme parte de un nuevo núcleo inestable, que será llamado Núcleo Compuesto. La etapa de formación se lleva a cabo en un intervalo de tiempo $\Delta t \sim 10^{-21}s$, que por lo general es el periodo necesario para que el Núcleo Proyectil viaje a través del Núcleo Blanco. Posteriormente, el decaimiento de este núcleo inestable es independiente de los núcleos que lo llevaron a su formación (en este sentido, el núcleo intermedio pierde memoria del Canal de Entrada), llegando a la siguiente relación:

$$\sigma = \sigma_{PT}^C(E)\sigma_{GJ}^C(E) \quad (1.6)$$

donde σ es la Sección Eficaz de la Reacción, $\sigma_{PT}^C(E)$ es la Sección Eficaz para la formación del Núcleo Compuesto C a través del Núcleo Proyectil P y Núcleo Blanco T, mientras que $\sigma_{GJ}^C(E)$ es la Sección Eficaz para que el Núcleo Compuesto C decaiga en los núcleos G y J [Satchler,1990]. En este sentido, si la formación del Núcleo Compuesto C se llevara a cabo de otra manera (mediante el Núcleo Proyectil H y el Núcleo Blanco K), la Sección

Eficaz para que el decaimiento llegue a G y J solo dependerá del término $\sigma_{GJ}^C(E)$. El mecanismo más común por el cual el Núcleo Compuesto lleva a cabo su decaimiento es llamado Evaporación de partículas, pero en algunos casos puede haber una cierta probabilidad de decaimiento por rayos γ . La distribución energética de las partículas emitidas a través del Canal de Evaporación tiene características esenciales, como la aparición de resonancias finas debido a niveles energéticos quasi-estacionarios del Núcleo Compuesto. Ahora bien, esta característica física solo puede explicarse a partir del decaimiento de un sistema interactuante de muchos cuerpos, que participan tanto en la formación del Núcleo Compuesto como en su decaimiento [Bertulani,2019].

1.4. Modelo Óptico

El Modelo Óptico surge como una herramienta que explica la dispersión nuclear de manera similar al comportamiento de la dispersión de luz por una esfera de cristal, reproduciendo la absorción de la luz mediante un índice de refracción complejo.

Existe un formalismo teórico que se basa en el uso de Operadores de Proyección desarrollado por Feshbach, construyendo los acoplamientos del Canal Elástico hacia otro u otros Canales de Reacción, el cual establece que cuantos más acoplamientos se logren formular y reproducir, los resultados obtenidos serán cada vez más exactos. Sin embargo, formular tantos acoplamientos entre canales como sea posible es una tarea complicada. Por otro lado, el tratamiento y uso de un Potencial Óptico permite una formulación mucho más sencilla. El objetivo de incluir este Potencial Óptico es construir un Potencial Efectivo U_{eff} que logre describir la interacción nuclear de la manera más precisa posible, que satisfice la ecuación de Schrödinger.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} [\nabla_r^2 + U_{\text{eff}} - E] R(k, r) = 0 \quad (1.7)$$

donde $R(k, r)$ es solución radial de la función de onda total Ψ , ∇_r^2 es la parte radial del operador nabla y U_{eff} es el Potencial Efectivo, que contiene al Potencial de Centrifugado V_l^C , expresados mediante:

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (1.8)$$

$$U_{\text{eff}} = V(r) + V_l^C; \quad V_l^C = \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Este potencial de centrifugado actúa como un término repulsivo representando la energía rotacional de nucleones con momento angular $l\hbar$ (en este sentido es llamado potencial, aunque en el fondo no lo sea) [Bertulani,2019].

Este Potencial Efectivo solo depende de la coordenada relativa entre los centros de masa de ambos núcleos. El componente más dominante en una Dispersión Elástica, presente en reacciones directas, comúnmente lleva al concepto de un Potencial Óptico, a través del cual se pueden realizar las correcciones necesarias que lleven a la descripción de procesos más complejos como la dispersión inelástica o incluso estados intermedios más complejos (como aquellos descritos en Reacciones de Núcleo Compuesto).

Estas correcciones también son llamadas interacciones residuales y pueden ser tan complicadas como uno quiera. Comúnmente son No-Locales, es decir, un par de nucleones salen del Canal de Entrada (para nuestro análisis, el Canal Elástico) en la posición \vec{r} y regresan en otra posición \vec{r}' . Otra característica primordial es que son dependientes de la energía, es decir, el comportamiento y la interacción de un par de nucleones puede cambiar dependiendo de la energía que tengan a su disposición para llevarlos a estados excitados más altos. Sin embargo, si los nucleones no regresan al Canal de Entrada, esto genera una pérdida de flujo, lo cual es definido como absorción. Esta pérdida de flujo se manifiesta a través del potencial efectivo U_{eff} mediante la inclusión de una parte imaginaria al Potencial Óptico. Llegando así, a la formulación más básica del Modelo Óptico:

$$V(r) = V_C + U_{\text{OM}}; \quad U_{\text{OM}} = V_R + iW_I \quad (1.9)$$

Donde V_C es el Potencial Electroestático de Coulomb, V_R es la parte real del Potencial Óptico que reproduce la dispersión elástica de los Núcleos Proyectoil y Blanco. Por otro lado, W_I es la parte imaginaria, asociada con la absorción de flujo del Canal de Entrada hacia otros Canales No-elásticos. En su formulación más básica, V_R y W_I son llamados *Bare Potentials*, lo cual significa que reproducen la interacción directa entre los nucleones

constituyentes del núcleo Proyectoil y Núcleo Blanco, sin considerar otro tipo de efectos de polarización o correcciones, como aquellas presentes en el Modelo Óptico Extendido.

1.4.1. Modelo Óptico Extendido

El Modelo Óptico convencional, descrito anteriormente, históricamente fue utilizado para reproducir datos experimentales de dispersión elástica en reacciones nucleares de iones pesados y ligeros con bastante éxito. Sin embargo, a medida que el tiempo pasaba, se fue poniendo mucho interés en reproducir los valores de las Secciones Eficaces de Fusión por debajo y encima de la barrera del sistema en cuestión utilizando los parámetros que ajustaban las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica.

Otros modelos como *Barrier Penetration Model* y *Coupled Channels* también podían reproducir los datos experimentales de dispersión elástica, pero se obtenían Secciones Eficaces de Fusión que en su mayoría estaban sobreestimadas [Udagawa,1984; Udagawa,1985].

Es por este motivo que surge el Modelo Óptico Extendido, teniendo como principal objetivo eliminar las sobreestimaciones de las Secciones Eficaces de Fusión por debajo y arriba de la Barrera de Coulomb del sistema en cuestión, y reproduciendo las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica simultáneamente.

Se define el potencial W_F (término imaginario), que representa solo una parte del potencial efectivo, encargado de reproducir los efectos de fusión que están “acoplados” a la Dispersión Elástica. De tal manera que se cumple con el objetivo inicialmente propuesto por el Modelo Óptico Extendido [Udagawa,1984; Udagawa,1985].

La Sección Eficaz de Fusión se calcula mediante

$$\sigma_F = \frac{2}{\hbar\nu_a} \langle \chi^+ | W_F | \chi^+ \rangle \quad (1.10)$$

dónde \hbar es la constante de Planck reducida, χ^+ es la onda distorsionada del Canal de Entrada y ν_a es la velocidad relativa.

Por otro lado, el flujo que se pierde del Canal de Entrada no solo llega al Canal de Fusión, sino que también puede irse hacia otro tipo de Canales de Reacciones Directas. Este efecto es representado mediante el potencial W_D (término imaginario, que cumple la

relación $W_D = W_T - W_F$ donde W_T es el potencial imaginario total), que representa otra parte del potencial efectivo [Udagawa,1984] y [Udagawa,1985].

Adicional a lo anterior, se define un potencial de absorción del Canal de Entrada que tiene efectos a muy cortas distancias W_{int} , es decir, el alcance de este potencial de absorción es más pequeño que la dimensión de los Núcleos Proyectoil y Blanco, una vez están solapados. Esta corrección se integra para poder explicar reflexiones de onda parcial cuando la onda incidente penetra dentro del blanco, de tal manera que este potencial W_{int} ayudará a absorber estos efectos de interferencia que posteriormente son reflejados en las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica. En este sentido, como este potencial reproduce procesos de Fusión a muy cortas distancias, la expresión para σ_F será

$$\sigma_F = \frac{2}{\hbar\nu_a} \langle \chi^+ | W_F + W_{\text{int}} | \chi^+ \rangle \quad (1.11)$$

Por lo tanto, se llega a la siguiente formulación, siendo el Potencial Efectivo V_{eff} que proporciona el Modelo *EOM*:

$$V(r) \equiv U_{\text{EOM}} = V_{\text{bare}} + V_C - [U_D + U_F + iW_{\text{int}}] \quad (1.12)$$

El primer término V_{bare} define un *bare potential*, que se encarga de describir la interacción entre los nucleones constituyentes de los Núcleos Proyectoil y Blanco sin ningún efecto de polarización adicional. El segundo término V_C es el potencial electrostático de Coulomb. El tercer término es un potencial complejo que describe el flujo en el Canal de Entrada y la pérdida del mismo hacia otros Canales de Reacción Directa mediante una parte real e imaginaria respectivamente, es decir $U_D = V_D + iW_D$. Análogamente para el cuarto término, donde ahora se reproduce el flujo en el Canal de Entrada y la pérdida del mismo hacia el Canal de Fusión mediante una parte real e imaginaria, respectivamente, mediante $U_F = V_F + iW_F$. Por último, iW_{int} es un potencial exclusivamente imaginario que reproduce la absorción del Canal de Entrada cuando la distancia relativa entre los núcleos es muy pequeña.

1.4.2. Factor de Forma Woods-Saxon

La dispersión de una partícula sobre un núcleo está gobernada principalmente por la interacción mutua de sus nucleones constituyentes. Se considera que la densidad de nucleones (materia y carga correspondiente a nucleones y protones respectivamente) es constante en el interior del núcleo ($\rho(r < R) \approx \rho_0$, donde R es el Radio Nuclear), mientras que si nos acercamos a la superficie ($r \sim R$) esta densidad desciende siendo completamente cero fuera del núcleo ($\rho(r > R) \approx 0$) [Lilley,2013]. Es por este motivo que se opta por describir la interacción mutua entre nucleones mediante este efecto, que analíticamente puede expresarse mediante la ecuación (1.13), cuya forma es representada en la Figura 1.2.

$$f(r) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (1.13)$$

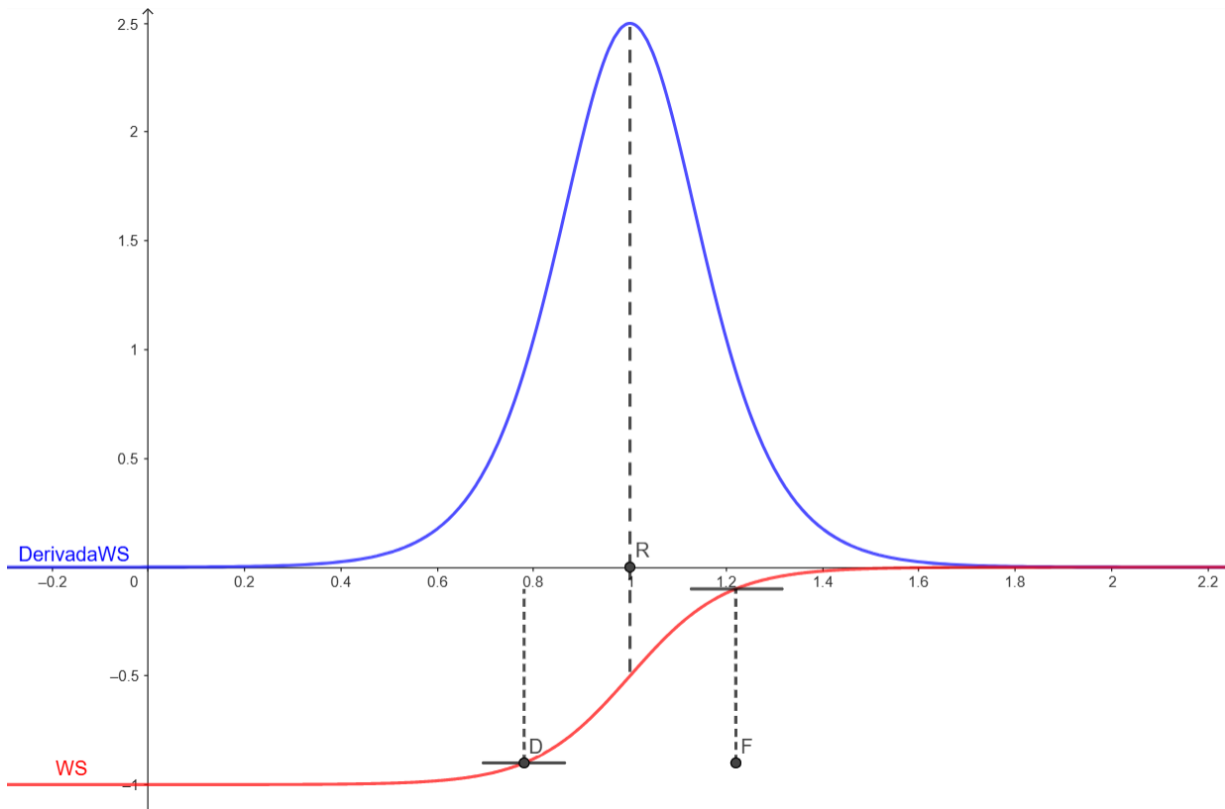


Figura 1.2: Comportamiento de la ecuación (1.13) multiplicada por un factor de -1 (curva roja) y la ecuación (1.16) (curva azul) para $R = 1$, $a = 0.1$.

Es por los motivos anteriormente mencionados que un potencial U , es expresado mediante la forma de la función $f(r)$, a la cual en el contexto del Modelo Óptico se le llama **factor de forma de Woods-Saxon**. Por lo tanto, la expresión para el potencial U que depende de la coordenada relativa r entre los centros de masa de ambos núcleos es

$$U(r) = U_0 \cdot f(r) \quad (1.14)$$

donde U_0 representa la intensidad, o profundidad, del potencial.

Como ya se ha comentado anteriormente, el potencial del Modelo Óptico Extendido se expresa mediante una parte real y una parte imaginaria, encargados de describir la Dispersión Elástica de los núcleos y la absorción de flujo del canal de entrada, respectivamente, llegando a una modificación de la ecuación (1.14):

$$U_F(r) = \left[\frac{V_{0F}}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \right] + i \left[\frac{W_{0F}}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \right] \quad (1.15)$$

donde ahora V_{0F} y W_{0F} son las profundidades de la parte real e imaginaria, respectivamente.

Para describir los procesos de fusión, que ocurren en todo el volumen nuclear, se usan potenciales de la forma de la ecuación (1.15).

En la descripción del Modelo Óptico y Modelo Óptico Extendido se menciona que la absorción de flujo del canal de entrada reproducido mediante un potencial imaginario (segundo término de la ecuación 1.15) para el caso de reacciones directas es un proceso principalmente dominado por interacciones que tienen lugar a nivel superficial. Por este motivo es que para reacciones directas se busca que el término imaginario tenga su principal contribución alrededor de R . Este efecto se reproduce mediante la derivada del factor de forma (1.13).

$$f^{(1)}(r) = \frac{-\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}{a \cdot \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]^2} \quad (1.16)$$

Llegando a la definición de U_D :

$$U_D(r) = - \left[\frac{V_{0D} \cdot \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}{a \cdot \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]^2} \right] - i \left[\frac{W_{0D} \cdot \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}{a \cdot \left[1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right]^2} \right] \quad (1.17)$$

Para el potencial puramente imaginario W_{int} se utiliza el factor de forma volumétrico de la ecuación (1.13).

Finalmente, los parámetros R y a son llamados en conjunto **parámetros geométricos**. La variable R está asociada con el radio o alcance promedio del potencial, mientras que a está asociado con la anchura en la cual el potencial muestra sensibilidad desde 0.9 hasta 0.1 veces su valor absoluto máximo (puntos D y F , respectivamente, en la Figura 1.2). La distancia horizontal entre dichos puntos D y F es igual a $\overline{DF} = 4.4a$. El factor de forma (1.13) cumple las siguientes condiciones [Bertulani,2019], [Satchler,1990]:

$$f(r = 0) \approx 1; \quad f(r = R) = \frac{1}{2}.$$

Una vez definida la parametrización apropiada para los potenciales U_D , U_F y W_{int} de la ecuación (1.12) y dado que la forma de V_C es bien conocida, resta definir la forma del potencial usado para V_{bare} , que en este trabajo fue el llamado Potencial de São Paulo, SPP por sus siglas en Inglés [Chamon,2002].

1.4.3. Potencial SPP

Este potencial ha tenido bastante éxito desde su formulación para el efecto de reproducir Dispersión Elástica y reacciones periféricas para un conjunto muy grande de sistemas que involucran iones pesados ($A > 4$), en intervalos de energía bastante amplios. [Chamon,2002] Se hace uso de lo que es llamado *foldings potential* mediante:

$$V_N(r) = V_F(r) \cdot e^{-\frac{4\nu_a^2}{c^2 a}} \quad (1.18)$$

donde $V_F(r)$ es el *foldings potential*, c es la velocidad de la luz y ν_a es la velocidad relativa entre el Núcleo Proyectoil y Núcleo Blanco.

El término $V_F(r)$ depende de las densidades nucleares del Núcleo Proyectoil $\rho_p(\vec{r}_p)$ y el

Núcleo Blanco $\rho_t(\vec{r}_t)$:

$$V_F(r) = \int \rho_p(\vec{r}_p) \rho_t(\vec{r}_t) V_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_p + \vec{r}_t) d\vec{r}_p d\vec{r}_t \quad (1.19)$$

donde \vec{r}_p es el vector distancia que ubica cada nucleón constituyente del núcleo Proyectoil, \vec{r}_t es el vector distancia que ubica cada nucleón constituyente del Núcleo Blanco, r es la distancia entre los centros de masa del Núcleo Proyectoil y Núcleo Blanco, y finalmente $\vec{r} - \vec{r}_p + \vec{r}_t$ es el vector distancia relativo entre un nucleón del Núcleo Proyectoil y un nucleón del Núcleo Blanco. El término V_0 tiene un valor de -456 MeV fm^3 [Chamon,2002].

El potencial $V_N(r)$ de la ecuación (1.18) describe la interacción entre nucleones del Núcleo Proyectoil y del Núcleo Blanco, que depende puramente de la distancia de separación entre ambos núcleos. Es decir, corresponde a lo que ya se ha definido anteriormente como *bare potential*. En otras palabras, el potencial V_{bare} en la ecuación (1.12) corresponde al potencial V_N de la ecuación (1.18). Una explicación detallada de como se obtiene este potencial se da en secciones posteriores [Chamon,2002].

1.4.4. Potenciales de Polarización Dinámica

Anteriormente, ya se ha definido el Potencial que ofrece el Modelo Óptico, ecuación (1.9), y también distintas correcciones a este modelo original que llevan a la formulación de Modelo Óptico Extendido, ecuación (1.12). La contribución más grande al Potencial Efectivo U_{eff} proviene del término V_{bare} , el cual es calculado mediante el potencial SPP. Sin embargo, existen otros potenciales no menos significativos que aparecen en otros términos que tienen contribuciones más pequeñas. A estos términos se les llama Potenciales de Polarización Dinámica (o *DPP* por sus siglas en inglés).

Estos Potenciales de Polarización Dinámica tienen su principal componente en la parte imaginaria del Potencial Efectivo, reproduciendo la absorción del Canal de Entrada hacia aquellos canales que no están incluidos dentro del análisis del proceso de dispersión nuclear. En este caso, nos enfocamos principalmente en reproducir un Canal de Reacción: Canal Elástico. Es por este motivo que los Potenciales de Polarización Dinámica van a reproducir la absorción de flujo del Canal de Entrada hacia todos los Canales No-Elásticos (por

ejemplo, Canal Inelástico, Canal de Transferencia y Canales de Reacción en General).

En el contexto del Modelo Óptico Extendido (ecuación (1.12)) los Potenciales de Polarización Dinámica serán los potenciales U_D y U_F , que producen absorción a través de sus partes imaginarias, W_D y W_F junto con el Potencial de Absorción de muy corto alcance W_{int} .

1.5. Sección Eficaz Diferencial

Cuando se lleva a cabo un experimento donde un haz conformado por Núcleos Proyectil incide sobre un material compuesto por Núcleos Blanco, se espera medir la cantidad de partículas dispersadas debido a la reacción nuclear mediante un detector ubicado a cierta distancia del punto donde se realiza la reacción. El detector posee dimensiones y una apertura bien definidas, lo cual forma un ángulo sólido respecto al lugar donde se lleva a cabo la reacción mediante $d\Omega$:

$$d\Omega(\theta, \phi) = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

donde θ y ϕ determinan la dirección de la partícula dispersada en coordenadas esféricas [Betulani,2019].

La cantidad de eventos $N(\theta, \phi)$ que tienen lugar en el punto donde se lleva a cabo la reacción debe ser proporcional al flujo incidente de Núcleos Proyectil J_{inc} sobre la muestra de Núcleos Blanco, al igual que a la cantidad de Núcleos Blanco n que están en la misma sección transversal del haz incidente. Por último, el detector solo podrá medir la cantidad de Núcleos Proyectil dispersados que viajen a través de $d\Omega$. Esto lleva a la siguiente relación:

$$\frac{dN(\theta, \phi)}{d\Omega} = J_{\text{inc}} \cdot n \cdot \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \quad (1.20)$$

donde la constante de proporcionalidad $\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$ es llamada **Sección Eficaz Diferencial**.

Esta cantidad ($\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$) mide la cantidad de Núcleos Proyectil dispersados en la dirección θ, ϕ . Es importante mencionar que esta cantidad no depende de los detalles experimentales como el tamaño del detector, el flujo de Núcleos Proyectil incidente o la cantidad de Núcleos

Blanco. Solo depende de los detalles físicos que tienen lugar a la hora de llevarse a cabo la reacción nuclear.

Una Sección Eficaz Diferencial grande en una dirección θ, ϕ específica define una probabilidad alta de encontrar un núcleo Proyectoil que ha sido dispersado en esa dirección, lo cual estará íntimamente relacionado con la naturaleza de las fuerzas implicadas en la reacción nuclear. La Sección Eficaz Diferencial se mide en unidades de área (barns: $b = 10^{-24} \text{cm}^2$) por unidad de ángulo sólido (estereorradián: sr), es decir $\frac{b}{sr}$.

1.5.1. Sección Eficaz Diferencial de Rutherford

La dispersión de partículas cargadas es uno de los fenómenos más comunes y estudiados en física debido a que todos los núcleos y la mayoría de las partículas elementales están cargadas eléctricamente. Se pueden medir diferentes magnitudes que dan información física del sistema, una de ellas es la Sección Eficaz Diferencial [Bertulani,2019].

La fuerza electrostática de Coulomb es la responsable de causar dicha dispersión entre un Núcleo Proyectoil de masa m_p y carga $Z_p \cdot e$ y un Núcleo Blanco con masa m_t y carga $Z_t \cdot e$. La fuerza electrostática de Coulomb será entonces:

$$\vec{F} = \frac{k Z_p Z_t e^2}{r^2} \cdot \hat{r} \quad (1.21)$$

donde r es la distancia de separación entre los núcleos. Mediante la definición de Fuerza conservativa se sabe

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(V)$$

donde V es el potencial asociado a \vec{F} . Por lo tanto, el potencial asociado a la fuerza electrostática de Coulomb es:

$$V(r) = \frac{k Z_p Z_t e^2}{r} \quad (1.22)$$

Es conveniente definir el parámetro de Sommerfeld η y la distancia de máximo acercamiento en una colisión frontal a mediante:

$$\eta = \frac{k Z_p Z_t e^2}{\hbar\nu}; \quad a = \frac{k Z_p Z_t e^2}{2E} \quad (1.23)$$

Obtener una expresión para la Sección Eficaz Diferencial debido a la fuerza conservativa de la ecuación (1.21) se puede realizar mediante mecánica clásica haciendo uso de la función de deflexión, o desde el punto de vista de la mecánica cuántica mediante la amplitud de dispersión. En este caso solo se revisará el procedimiento mediante la mecánica clásica. El potencial (ecuación (1.22)) es conservativo, lo cual implica que la energía total E_T y el momento angular λ se conservan.

La energía total E_T se describe en coordenadas polares mediante

$$E_T = \frac{1}{2}\mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + V(r) \quad (1.24)$$

mientras que el momento angular es

$$\lambda = \mu\nu b = \mu r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right); \quad (1.25)$$

combinando las ecuaciones (1.24) y (1.25), se obtiene una expresión para $\frac{d\phi}{dr}$ haciendo uso de la regla de la cadena $\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dr}$

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - b^2/r^2 - V(r)/E}} \quad (1.26)$$

La ecuación anterior se debe integrar en los límites asintóticos ($r \rightarrow +\infty$). En este punto se puede definir la distancia de máximo acercamiento D (también llamado en algunos contextos punto de retorno: r_0) mediante:

$$1 - b^2/D^2 - V(D)/E = 0. \quad (1.27)$$

La función de deflexión se define entonces como $\Theta(b) = \pi - \phi(b)$.

Finalmente, se puede expresar la función de deflexión en términos del momento angular (ecuación (1.25))

$$\Theta(\lambda) = \pi - 2 \int_D^\infty \frac{\lambda dr}{r^2 \sqrt{2\mu [E - \lambda^2/2\mu r^2 - V(r)]}}. \quad (1.28)$$

Se puede sustituir la ecuación (1.22) y 1.23 en (1.26) obteniendo:

$$\phi(b) = 2 \int_D^\infty \frac{b dr}{r \sqrt{r^2 - 2ar - b^2}} \quad (1.29)$$

donde la distancia de máximo acercamiento será igual a:

$$D^2 - 2aD - b^2 = 0; \quad D = a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

por lo tanto, la solución a la ecuación (1.29) es:

$$\phi(b) = 2 \left[\sin^{-1} \left(-\frac{ar + b^2}{r \sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right]_D^\infty = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \right). \quad (1.30)$$

Por lo tanto, la función de deflexión es:

$$\Theta = \pi - \left(\pi - 2 \sin^{-1} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \right) \implies \sin \frac{\Theta}{2} = \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right] \quad (1.31)$$

A partir de lo anterior, mediante propiedades trigonométricas se obtiene una expresión más simple

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \frac{a}{b} \quad (1.32)$$

y tomando su derivada

$$\frac{d\Theta}{db} = -\frac{2a}{a^2 + b^2} \quad (1.33)$$

Ahora bien, como ya se ha mencionado, el potencial es esféricamente simétrico dada la dependencia $1/r$, esto implica que la Sección Eficaz Diferencial obtiene una simetría axial (comúnmente a lo largo del eje z para simplificar los cálculos). En este sentido, $N(\theta)$ corresponde a la dispersión de Núcleos Proyectil entre dos conos de dispersión θ y $\theta + \Delta\theta$, obteniendo que

$$N(\theta) = 2\pi b \Delta b J$$

donde el factor $2\pi b \Delta b$ corresponde al área del anillo formado por los conos.

Por lo tanto, la ecuación (1.20) queda como:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{\Delta b}{\Delta \theta} \right|$$

sobre la cual ya se ha sustituido el factor $d\Omega(\theta) = 2\pi \sin \theta d\theta$.

Sin embargo, se puede utilizar la función de deflexión para expresar el cambio en el ángulo de dispersión en función del cambio del parámetro de impacto mediante $\Delta \theta = \frac{d\Theta(b)}{db} \Delta b$,

obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{\Theta(b)}{db} \right|^{-1}. \quad (1.34)$$

Sustituyendo la ecuación (1.33) en la ecuación (1.34) se obtiene:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \frac{a^2 + b^2}{2a} = \frac{a^2}{2 \sin \theta} \frac{1}{\frac{a}{b} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}} \quad (1.35)$$

Usando las ecuaciones (1.32) y (1.31) en la ecuación anterior se llega a la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{a^2}{2 \sin \theta} \frac{1}{\frac{a}{b} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}} = \frac{a^2}{4 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{a^2}{4} \left[\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \right] \quad (1.36)$$

que solo depende del ángulo θ debido a la simetría axial [Bertulani,2019].

1.6. Sección Eficaz

Usualmente, al realizar un experimento uno quiere medir la magnitud de la Sección Eficaz (σ), que de manera intuitiva mide la probabilidad de un Canal de Interacción en todas las direcciones posibles, es decir, se relaciona con la Sección Eficaz Diferencial mediante

$$\sigma = \int \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right] d\Omega \quad (1.37)$$

Finalmente, la Sección Eficaz total que mide la probabilidad de que una interacción ocurra (indistintamente de cuál sea):

$$\sigma_{total} = \sum_i \sigma_i \quad (1.38)$$

donde el subíndice i representa cada Canal de Interacción Posible.

1.7. Relación de Dispersión

El comportamiento de los parámetros de profundidad de los potenciales V_R y W_I (ecuación (1.9)) a energías cercanas a la Barrera de Coulomb B para diferentes sistemas compuestos por iones pesados ha mostrado comportamientos anómalos, los cuales están asociados a su dependencia energética ($V_R(E)$ y $W_I(E)$).

A energías por debajo de la barrera $E < B$ se observa un decremento en la magnitud del potencial imaginario; los Canales No-Elásticos empiezan a cerrarse. Por otro lado, el potencial real mostrará un incremento en forma de campana en la misma región energética debido al rol más dominante que el Canal de Dispersión Elástica adquiere. Sin embargo, se pueden observar cambios en la parte real del Potencial Óptico debido a excitaciones virtuales de la parte imaginaria debido al acoplamiento entre Canales Elásticos y No-Elásticos.

Estos efectos están incluidos en la Relación de Dispersión que conecta la parte real e imaginaria del Potencial Óptico mediante la siguiente ecuación [Nagarajan,1985], [Mahaux, 1986].

$$V(E) = V_0(E_s) + \frac{P}{\pi}(E - E_s) \int_0^\infty \frac{W(r, E')}{(E' - E_s)(E' - E)} dE' \quad (1.39)$$

donde P denota el valor principal de la integral y $V(E_s)$ es el valor de $V(r)$ en un valor de referencia E_s .

La dependencia energética del potencial imaginario se describe usualmente mediante un modelo bastante simple. Tal modelo consta de una serie de segmentos lineales que describen el decremento en magnitud a medida que la energía se acerca decreciendo a la

Barrera de Coulomb, mientras que a energías superiores se mantiene constante en un valor fijo. La inclinación del segmento inferior determinará la anchura de la campana formada por su parte real [NagaraJan,1985].

1.8. Leyes de Conservación

La interacción entre las partículas de un sistema de muchos cuerpos (como el caso de las reacciones nucleares) generalmente tiene simetrías respecto al movimiento e interacción de sus constituyentes, lo cual genera la conservación de magnitudes físicas que son muy importantes en reacciones nucleares, ya que restringen en gran medida la mayoría de los posibles Canales de Reacción [Bertulani,2019].

- **Carga y Materia:** Este es un principio de conservación fundamental en física nuclear. La cantidad de materia (contribución dada principalmente por nucleones presentes en el núcleo) y carga (contribución dada principalmente por protones en el núcleo) debe ser la misma antes y después de llevar a cabo la reacción.

$$A_P + A_T = A_{R'} + A_d$$

donde A_P y A_T es la masa de los Núcleos Proyectil y Blanco respectivamente, mientras que $A_{R'}$ y A_d es la masa de los núcleos Residual y dispersado respectivamente.

- **Energía y Momento Lineal:** Otro de los principios de conservación fundamentales en la física en general. En reacciones nucleares, la energía total del sistema (es decir, la energía cinética de los Núcleos Proyectil y Blanco más su energía en reposo) debe conservarse. Variaciones en las energías cinéticas de los Núcleos Proyectil y Blanco deben traducirse en energía resultante de la reacción $Q \neq 0$ o en energía de excitación que lleva a los núcleos a estados más altos. Por otro lado, la conservación de momento lineal va de la mano con las condiciones del sistema físico que se está considerando, es decir, que no existan fuerzas externas (como la presencia de campos magnéticos o eléctricos) que estén involucradas en el momento que se lleva a cabo la reacción nuclear. Estos dos principios de conservación permiten conocer los ángulos

de dispersión y las energías de los productos obtenidos. La simetría bajo traslación de coordenadas también está relacionada con la conservación de momento lineal.

- Momento Angular Total: El momento angular en un sistema siempre es una constante de movimiento. Por lo general, esta ley de conservación restringe la cantidad de posibles estados que los núcleos pueden alcanzar al momento de realizar la reacción nuclear. La simetría bajo rotaciones sobre ejes de coordenadas está relacionada con la conservación de momento angular total.
- Paridad: Esta ley de conservación surge del concepto de la simetría bajo reflexión de coordenadas espaciales de un sistema físico (en este caso, una reacción nuclear). Es decir, se debe cumplir que bajo la transformación $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ el sistema no debe sufrir modificaciones.

1.9. Ecuación de Schrödinger

Cuando se realiza una reacción nuclear, se está interesado en medir la dispersión de los Núcleos Proyectil y Blanco cuya función de onda debe ser una solución a la ecuación de Schrödinger que describe nuestra reacción nuclear:

$$H\Psi = E\Psi \tag{1.40}$$

$$H_\alpha\chi(r) = E_\alpha\chi(r) \tag{1.41}$$

donde H es el Hamiltoniano total, H_α es el Hamiltoniano que describe el comportamiento relativo entre los Núcleos Proyectil y Blanco, Ψ es la función de onda del sistema, χ_α es la función de onda del movimiento relativo entre los Núcleos Proyectil y Blanco, finalmente E y E_α son la energía total del sistema y la energía del movimiento relativo entre ambos núcleos respectivamente. El Hamiltoniano total $H = H_p + H_t + H_\alpha$ contiene los Hamiltonianos individuales de los Núcleos Proyectil y Blanco que describen la estructura interna del sistema, que satisfacen las ecuaciones:

$$H_p\psi_p = E_p\psi_p; \quad H_t\psi_t = E_t\psi_t$$

estas describen los estados individuales de los Núcleos Proyectoil y Blanco cuando no están interactuando. Sin embargo, el Hamiltoniano total también contiene un término que describe la energía cinética relativa entre los núcleos $\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_\alpha^2$ y un término potencial para la interacción de los mismos que solo depende de la coordenada relativa entre ellos $V(r_\alpha)$. Obteniendo la expresión:

$$H = H_p + H_t + \frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_\alpha^2 + V(r_\alpha) = H_p + H_t + H_\alpha. \quad (1.42)$$

La solución a la ecuación (1.40) debe tener la siguiente forma:

$$\Psi = A \exp(i\vec{k}_\alpha \cdot \vec{r}_\alpha)\psi_p\psi_t + \sum \Psi_{scatt} \quad (1.43)$$

donde k_α es el vector de onda incidente y r_α es la dirección de propagación [Satchler,1990]. El primer término corresponde a la onda incidente, que es solución a la ecuación (1.41) cuando el potencial $V(r_\alpha)$ es igual a cero. Sin embargo, la presencia de $V(r_\alpha)$ puede ser tratada como una interacción puntual, la cual genera ondas dispersadas elásticamente con simetría esférica, que en el límite asintótico tienen la forma:

$$\Psi_{scatt} \sim A f(\theta, \phi) \frac{\exp(ik_\alpha r_\alpha)}{r} \psi_p\psi_t. \quad (1.44)$$

Una cantidad fundamental en la descripción de Secciones Eficaces Diferenciales es la amplitud de dispersión $f(\theta, \phi)$, que describe el comportamiento de las ondas dispersadas en un canal de interacción determinado (en este caso, Dispersión Elástica). La amplitud de dispersión está conectada con la Sección Eficaz Diferencial mediante la relación:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (1.45)$$

lo cual permite calcular la Sección Eficaz Diferencial de dispersión elástica [Zettili,2009].

1.10. Análisis de Ondas Parciales

Considerando la ecuación (1.41), escribiendo el operador ∇^2 en coordenadas esféricas se llega a

$$\nabla^2 = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\lambda^2}{\hbar^2 r^2} \right] \quad (1.46)$$

donde λ^2 es el operador de momento angular cuyo eigenvalor es $\hbar^2 l(l+1)$ y eigenestado es $Y_{lm}(\theta, \phi)$ [Zettili,2009]. Sin embargo, se pueden expresar las soluciones a la ecuación (1.41) como una combinación lineal, considerando la solución radial $R_{nl}(r)$ (perteneciente al operador ∇^2) y angular $Y_{lm}(\theta, \phi)$ (perteneciente al operador λ^2) mediante:

$$\chi = R_{nl}(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.47)$$

La expansión en ondas parciales se basa en la dependencia angular de la función de onda relativa en un Canal de Reacción determinado, en términos de las soluciones radial y angular:

$$\chi = \sum_l c_l R_{nl}(r) P_l(\cos \theta) \quad (1.48)$$

donde se define de manera implícita una simetría respecto al eje azimutal z , es decir, $Y_l(\theta, \phi) \rightarrow P_l(\cos \theta)$. El objetivo central es tomar ventaja de la estructura de la ecuación anterior con el fin de obtener una expresión analítica para la amplitud de dispersión (ecuación (1.44)). Es común realizar $R_{nl}(r) = \frac{u_l(kr)}{kr}$ para buscar soluciones radiales de la ecuación (1.46), obteniendo

$$\chi = \sum_l c_l \frac{u_l(kr)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (1.49)$$

donde $\frac{u_l(kr)}{kr}$ satisface la ecuación esférica de Bessel, resultante de sustituir la ecuación (1.46) en (1.41), expresadas mediante una combinación lineal de las funciones de Bessel (las cuales son regulares en el origen $kr \rightarrow 0$) y las funciones de Neumann (las cuales son irregulares en el origen $kr \rightarrow 0$) [Bertulani,2019].

Las soluciones χ a la ecuación de onda relativa requieren estar definidas en todo el dominio de la coordenada relativa entre los Núcleos Proyectil y Blanco, es por este motivo que $u_{nl}(kr)$ solo es expresada mediante las funciones de Bessel

$$u_l(kr) \rightarrow j_l(kr)$$

donde las funciones de Bessel están definidas en el límite asintótico mediante

$$j_l(kr \rightarrow \infty) \sim \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr}.$$

Sin embargo, se puede expresar a la solución $j_l(kr)$ mediante las soluciones de Ricatti-Hankel $\hat{h}^\pm(kr)$ definidas como:

$$\sin(kr - l\pi/2) = \frac{\exp[i(kr - l\pi/2)] - \exp[-i(kr - l\pi/2)]}{2i} \quad (1.50)$$

$$\hat{h}_l(kr) = kr \cdot h^\pm(kr) = (\mp i) \exp(\pm i(kr - l\pi/2))$$

$$\sin(kr - l\pi/2) = \frac{\hat{h}_l^+(kr) + \hat{h}_l^-(kr)}{2} \quad (1.51)$$

es decir, se puede expresar en términos de ondas entrantes $\hat{h}^-(kr)$ y salientes $\hat{h}^+(kr)$. Después de que los Núcleos Proyectil y Blanco interactúan, la onda saliente es la única que cambia su amplitud debido a la absorción de flujo del Canal Incidente. En este sentido se define η_l como amplitudes de dispersión de ondas parciales:

$$\chi = \sum_l c_l \left[\frac{\eta_l \hat{h}_l^+(kr) + \hat{h}_l^-(kr)}{2kr} \right] P_l(\cos \theta). \quad (1.52)$$

La onda incidente $A \exp(ik_\alpha \vec{r}_\alpha)$ también puede ser escrita como una expansión en ondas parciales, mediante:

$$A \exp(ik_\alpha \vec{r}_\alpha) = \sum_l (2l + 1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (1.53)$$

que es conocida como *Bauer's expansion* [Satchler,1990].

1.11. Matriz S y Coeficientes de reflexión

Las amplitudes de dispersión de ondas parciales describen las ondas parciales que son dispersadas elásticamente $|\eta_l| = 1$ (propiedad de unicidad), sin embargo, si ondas parciales son absorbidas del Canal Elástico, reapareciendo en otros Canales No-Elásticos, las amplitudes de dispersión de ondas parciales serán $0 < |\eta_l| < 1$.

La propiedad de unicidad tiene un sentido físico más allá de describir la interacción entre los Núcleos Proyectoil y Blanco mediante un Canal determinado (el Canal Elástico o Canales No-Elásticos). Cuando el Núcleo Proyectoil incide sobre el Núcleo Blanco, la probabilidad de que algo emerja será igual a un 100 %. Cuando se consideran explícitamente Canales No-Elásticos en el formalismo del V_{eff} , es más conveniente usar el concepto de matriz de dispersión o Matriz S:

$$|\eta_l| \equiv |S_{\kappa\tau}| \quad (1.54)$$

donde los subíndices κ, τ indican el acoplamiento entre dos canales de reacción diferentes [Satchler,1990].

Existen diferentes propiedades que la matriz S cumple, por ejemplo: es simétrica, principalmente debido a la invarianza bajo inversión temporal; propiedad de unicidad previamente mencionada [Bertulani,2019].

Capítulo 2

Recuperación de Datos Experimentales

La búsqueda y obtención de datos experimentales se realizó en dos bases de datos, describiendo el proceso y proporcionando un ejemplo para cada uno a continuación.

2.1. NNDC (National Nuclear Data Center):

Ingresando a su página oficial en internet: NNDC | National Nuclear Data Center (<https://www.nndc.bnl.gov/>), se observa un recuadro con diferentes opciones de búsqueda (ver Figura 2.1). Para nuestro interés, se selecciona la opción *EXFOR*.



Figura 2.1: Menú de búsqueda desplegado por NNDC.

2.1.1. Ejemplo para DA

Dentro de la opción EXFOR se despliega el recuadro de la Figura 2.2, donde se colocan las características del sistema (masa y número atómico del Núcleo Proyecto y Blanco) con

el tipo de reacción de interés (en este caso, “el” se utiliza para el Canal de Dispersión Elástica):

Figura 2.2: Menú de búsqueda desplegado por *EXFOR*.

Los resultados de la búsqueda anterior se muestran en la Figura 2.3, donde se encuentra la información del tipo de datos experimentales que están disponibles, así como el formato para visualizarlos o descargarlos, según sea el caso:

n	Display	Year	Author-1	Energy range, eV	Points	Reference	Subentry#P	NSR-Key	Info+
1	30-ZN-64 (2-HE-6, EL) 30-ZN-64,, DA,, RTH Q=0 C4: MF=4 MT=2 Op=9	2019	J.P.Fernandez-Garcia+	1.49e7	1.79e7	124	+ J,FR/C,99,054605,2019	O2458003 [1] R33/0	2019FE05 Au[124]=5.96
2		2004	A.Di Pietro+	1.00e7	47	+ J,FR/C,69,044613,2004	D0258002 [3] R33/0	2004DI07 Au[47]=5.161 #2:2003d14:web	
3				1.36e7	38		D0258003 [3] R33/0	2004DI07 Au[38]=17.144 #2:2003d14:web	

List of Datasets: [\[list.csv\]](#)
 A : Automatic data re-normalization is available
 [Info] : Show Summary (with code explanation, links to dependent data, etc.)
 [X4+] : Extended EXFOR (original file with code explanation, links to Web-Journals)
 [T4] : Tabulated Data

Figura 2.3: Resultados de Búsqueda de datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica dentro de *EXFOR*.

Para la búsqueda de la Figura 2.2, los datos experimentales se proporcionan como razón respecto a la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford. Para descargar los datos experimentales se tiene que seleccionar la opción CSV, lo cual genera un archivo con extensión “.csv”. Mientras que para visualizarlos se tiene que seleccionar el signo “+” a la derecha de CSV para verlos en formato “html”. A continuación (ver Figura 2.4), se muestran los datos experimentales en formato “html”, tomando como ejemplo los datos

proporcionados por la referencia *Phys. Rev. C* **99** , 054605 (2019) (primera opción de la Figura 2.3):

Dataset.EXFOR.csv to html-table (by V.Zerkin, IAEA-NDS, ver.2023-04-23)

#	DatasetID	year1	author1	DATA (NO-DIM) 0.1 Y.Value	DATA-ERR (NO-DIM) 0.911 Y.Err+-	EN (EV) 1.1 X1 Value	ANG-CM (ADEG) 2.1 X2 Value	zaTarg1	Targ1	Proj	Emission	Prod	MF	MT	ReacType	Quant1	rx	indVars	Reacode
1	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.05232	0.00107389	1.485e+7	5.21655	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
2	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.02026	0.00131852	1.485e+7	5.50053	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
3	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.0287	0.00169369	1.485e+7	5.71013	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
4	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.01256	0.00210017	1.485e+7	6.01919	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
5	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.00723	0.0013445	1.485e+7	6.20436	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
6	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.02312	0.00172907	1.485e+7	6.54024	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
7	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.01257	0.00151743	1.485e+7	6.69542	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
8	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.01422	0.00192747	1.485e+7	7.05785	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
9	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.01254	0.00169185	1.485e+7	7.18576	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
10	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.00781	0.00213094	1.485e+7	7.57586	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
11	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.01469	0.0018728	1.485e+7	7.67686	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
12	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.996899	0.00233372	1.485e+7	8.09386	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
13	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.996589	0.0020193	1.485e+7	8.1638	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
14	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.01166	0.00259698	1.485e+7	8.60934	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
15	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.00015	0.00222855	1.485e+7	8.85399	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
16	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.988805	0.0032446	1.485e+7	9.12062	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
17	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.01114	0.00242966	1.485e+7	9.14361	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
18	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.00343	0.0028138	1.485e+7	9.6284	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
19	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.990539	0.00301901	1.485e+7	9.63326	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
20	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.990555	0.00278093	1.485e+7	10.1147	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
21	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.992531	0.00379601	1.485e+7	10.1455	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
22	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.994349	0.00348038	1.485e+7	10.597	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
23	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.99761	0.00354687	1.485e+7	10.6569	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
24	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.991916	0.0032044	1.485e+7	11.0792	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
25	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.00468	0.00444381	1.485e+7	11.1648	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
26	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.967769	0.00359501	1.485e+7	11.5604	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
27	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.00523	0.00410264	1.485e+7	11.6711	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
28	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.967752	0.00494192	1.485e+7	12.0381	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
29	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.985399	0.00458486	1.485e+7	12.1773	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
30	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.982137	0.0054383	1.485e+7	12.6816	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
31	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	0.960975	0.00808355	1.485e+7	13.1815	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
32	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.05694	0.00399245	1.485e+7	23.9646	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
33	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.08111	0.00550482	1.485e+7	28.3588	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
34	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.09401	0.0064766	1.485e+7	28.1364	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
35	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.05263	0.00510532	1.485e+7	28.7894	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH
36	O2458003	2019	J.P.Fernandez-garcia+	1.07246	0.00611052	1.485e+7	31.1924	30064	30-ZN-64	2-HE-6	EL	30-ZN-64	4	2	DA	DA	2	24	30-ZN-64(2-HE-6,EL)30-ZN-64, DA, RTH

Figura 2.4: Tabla de datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica dentro de EXFOR.

La nomenclatura de la Figura 2.4 por lo general estará disponible al final de la página “html” (ver Figura 2.5). Sin embargo, no necesariamente debe ser la misma para otro conjunto de datos experimentales, por este motivo es necesario consultarla en cada caso:

Legend:

ANG-CM	Angle, c.m. system
DATA	Value of quantity specified under REACTION
DATA-ERR	Error in value of quantity, defined under ERR-ANALYS
EN	Energy of incident projectile, laboratory system
(ADEG)	angular Degrees
(EV)	electron-Volts
(NO-DIM)	no Dimensions
DA	Differential cs d/dA rel.to Rutherford scatt.

Figura 2.5: Leyenda de la Figura 2.4

2.1.2. Ejemplo para SF

La búsqueda de los datos experimentales para la Sección Eficaz de Fusión se realiza de una manera similar en comparación con la sección 2.1.1. Dentro del menú desplegado

por la página oficial de NNDC, se debe seleccionar *EXFOR* (ver Figura 2.1). Obteniendo la Figura 2.6, donde se realiza la búsqueda de datos experimentales, especificando las características del sistema y el Canal de Reacción (masa y número atómico de Núcleo Proyecto y Blanco, así como la palabra “fus”, utilizada para el Canal de Fusión).

Examples of requests: 1|2|3|4|5|6|7|...
 1| Cross section $\sigma(E)$ /updates/ MF3 More examples...

Request Submit Reset Help

Target Zn-64 ?
 Reaction He-6,fus ?
 Quantity ?
 Product ?
 Energy from to eV ?
 Author(s) ?
 Publication year ?
 Last modified ?
 Accession # ?

Options

Exclude superseded data
 No reaction combinations (ratios, ..)
 Exclude evaluated/calculated data
 Enhanced search of Products
 Show evaluators flags //2021
 Retrieve listing only
 Disable Prompt-help

Sort by: reaction publication
 View: basic extended

Plotting. See also: [video-guide]

Ranges (Z,A)
Reaction Sub-Fields
Feedback and User's Input
 Clone Request:
 CINDA ENDF
 More Web Tools

Extended Keywords Expert Evaluator
 Submit Reset

Figura 2.6: Menú de búsqueda desplegado por *EXFOR*

El resultado de la búsqueda se muestra en la Figura 2.7, donde se despliegan los datos experimentales disponibles para el sistema en cuestión ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$.

Data Selection

Retrieve Selected Unselected All Reset in new Window

Output: X4+ EXFOR Bibliography TAB C4 PlotC4 CSV: original basic universal narrow-font

Plot: Quick-plot (cross-sections) ungroup /product: Advanced plot [how-to] using C5 with cm2lab, convert ratios to σ

Narrow incident energy (optional), eV: Min: Max:

Apply Data re-normalization (for advanced users, results in: C4, TAB and Plots)

n	Display	Year	Author-1	Energy range, eV	Points	Reference	Subentry#P	NSR-Key	Info+
1	<input checked="" type="radio"/> 30-ZN-64 (2-HE-6, FUS),,SIG C4: MF=3 MT=? Op=0	2004	A.Di Pietro+	8.24e6	1.29e7 4	+ J, FR/C, 69, 044613, 2004	D0258009 [3]	2004DI07 #2:2003d14:web	
2	<input checked="" type="radio"/> 30-ZN-64 (2-HE-6, FUS),,SIG,ER C4: MF=3 MT=? Op=0	2011	V.Scuderi+	1.39e7	1.76e7 4	+ J, FR/C, 84, 064604, 2011	O1970005 [1]	2011SC28 #2:2019e05:web	

List of Datasets: [list.csv]
 A: Automatic data re-normalization is available
 [Info]: Show Summary (with code explanation, links to dependent data, etc.)
 [X4+]: Extended EXFOR (original file with code explanation, links to Web-Journals)
 [T4]: Tabulated Data

Figura 2.7: Resultados de la búsqueda de datos experimentales de Sección Eficaz de Fusión dentro de *EXFOR*

Las opciones de visualización y descarga de los datos experimentales son similares en comparación con la sección 2.1.1. Para descargar los datos experimentales se tiene que seleccionar la opción CSV, lo cual genera un archivo con extensión “.csv”. Mientras que para visualizarlos se tiene que seleccionar el signo “+” a la derecha de CSV para verlos en formato “html”. A continuación se muestran los datos experimentales en formato “html”

(ver Figura 2.8), tomando como ejemplo los datos proporcionados por la referencia *Phys. Rev. C* **69**, 044613 (2004) (primera opción de la Figura 2.7):

Dataset EXFOR.csv to html-table (by V.Zerkin, IAEA-NDS, ver.2023-04-23)

#	DatasetID	year1	author1	DATA (B) Y.Value	-DATA-ERR (B) Y.Err-	+DATA-ERR (B) Y.Err+	EN-CM (eV) X1.Value	+MISC-ERR (B) ZZZ	-MISC-ERR (B) ZZZ	MISC (B) ZZZ	zaTarg1	Targ1	Proj	Emission	Prod	MF	MT	ReactType	Quant1	rx	indVars	Reacode
1	D0258009	2004	A.Di.pietro+	0.563	0.07	0.0715	1.183e+7	0.0645	0.063	0.362	30064	30-ZN-64	2-HE-6	FUS		3	0	CS	CS	1	2	30-ZN-64(2-HE-6,FUS),SIG
2	D0258009	2004	A.Di.pietro+	0.504	0.043	0.045	1.055e+7	0.028	0.027	0.238	30064	30-ZN-64	2-HE-6	FUS		3	0	CS	CS	1	2	30-ZN-64(2-HE-6,FUS),SIG
3	D0258009	2004	A.Di.pietro+	0.287	0.022	0.074	9.14e+6	0.059	0.007	0.119	30064	30-ZN-64	2-HE-6	FUS		3	0	CS	CS	1	2	30-ZN-64(2-HE-6,FUS),SIG
4	D0258009	2004	A.Di.pietro+	0.128	0.011	0.022	7.53e+6	0.011	0.001	0.03655	30064	30-ZN-64	2-HE-6	FUS		3	0	CS	CS	1	2	30-ZN-64(2-HE-6,FUS),SIG

Legend:

+DATA-ERR	+ Unsymmetric data error, see ERR-ANALYS
+MISC-ERR	+ Unsymmetric error in miscellaneous value
-DATA-ERR	- Unsymmetric data error, see ERR-ANALYS.
-MISC-ERR	- Unsymmetric error in miscellaneous value
DATA	Value of quantity specified under REACTION
EN-CM	Sum of projectile and target energies in c.m.s.
MISC	Miscellaneous Information, defined under MISC-COL
(B)	barns
(eV)	electron-Volts
CS	Cross section

Figura 2.8: Tabla de datos experimentales de Sección Eficaz de Fusión dentro de *EXFOR*.

2.2. NRV (Nuclear Reactions Video)

Ingresando a su página web principal NRV | NUCLEAR REACTIONS VIDEO Project (<http://nrv.jinr.ru/nrv/>), se despliega el siguiente menú (ver Figura 2.9), donde la columna *Nuclear Reactions* es de principal interés.

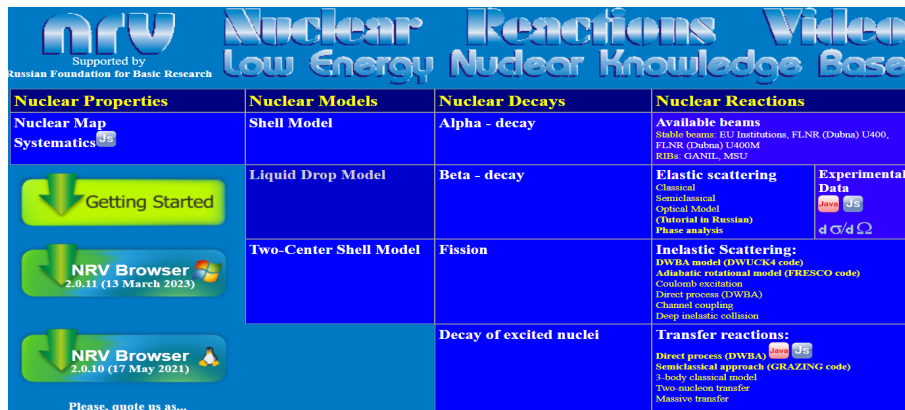


Figura 2.9: Vista de la página principal de NRV

2.2.1. Ejemplo para DA

En la columna *Nuclear Reactions* de la Figura 2.9 se encuentran diferentes secciones donde se pueden encontrar datos experimentales de diferentes Canales de Reacción. Para

nuestro interés, en el apartado *Elastic Scattering* se encuentran dos diferentes formatos de búsqueda del Canal de Dispersión Elástica (ver Figura 2.10).



Figura 2.10: Menú de búsqueda desplegada por NRV.

Para realizar una búsqueda de Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica hay que dirigirse a la sección *Elastic Scattering* \rightarrow *Experimental Data*. Existen dos opciones para realizar la búsqueda en dos diferentes formatos (ver 2.11): Java y Java Script. Usando el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ como ejemplo, se busca en lista junto con todos los sistemas disponibles, los cuales están ordenados de menor a mayor en cuanto al número atómico del Núcleo Proyectil y número atómico del Núcleo Blanco.

${}^6\text{He} + {}^{27}\text{Al}$	$E_{\text{lab}} = 9.5, 11, 12, 13.4$ MeV	E.A. Benjamin, A. Lepine-Szily, D.R. Mendes Junior, R. Lichtenhaler,	Physics Letters, B647 (2007) 30-35
${}^6\text{He} + {}^{48}\text{Ti}$	$E_{\text{lab}} = 7.9$ MeV	R.J. Smith, J.J. Kolata, K. Lamkin, A. Morsad, K. Ashktorab, F.D. Becc	Physical Review, C43 (1991) 761
${}^6\text{He} + {}^{58}\text{Ni}$	$E_{\text{lab}} = 10$ MeV	R.E. Warner, F.D. Becchetti, J.W. Janecke, D.A. Roberts, D. Butts, C.L	Physical Review, C51 (1995) 178
${}^6\text{He} + {}^{58}\text{Ni}$	$E_{\text{lab}} = 9$ MeV	L. R. Gasques, L. C. Chamon, D. Pereira, V. Guimaraes, A. Lepine-Szily	Physical Review, C67 (2003) 024602
${}^6\text{He} + {}^{58}\text{Ni}$	$E_{\text{lab}} = 12.2, 16.5, 21.7$ MeV	V.Morcelle, K.C.C.Pires, M.Rodriguez-Gallardo, R.Lichtenhaler, A.Lepi	Physics Letters, B732 (2014) 228-232
${}^6\text{He} + {}^{65}\text{Cu}$	$E_{\text{lab}} = 22.6$ MeV	A. Chatterjee, A. Navin, A. Shrivastava, S. Bhattacharyya, M. Rejmund,	Physical Review Letters, 101 (2008) 032701
${}^6\text{He} + {}^{65}\text{Cu}$	$E_{\text{cm}} = 17.9, 27.5$ MeV	A. Navin, V. Tripathi, Y. Blumenfeld, V. Nanal, C. Simenel, J. M. Casa	Physical Review, C70 (2004) 044601
${}^6\text{He} + {}^{64}\text{Zn}$	$E_{\text{cm}} = 9, 12.4$ MeV	A. Di Pietro, P. Figuera, F. Amorini, C. Angulo, G. Cardella, S. Cheru	Physical Review, C69 (2004) 044613
${}^6\text{He} + {}^{64}\text{Zn}$	$E_{\text{lab}} = 14.85, 17.9$ MeV	J.P. Fernandez-Garcia, A. Di Pietro, P. Figuera, J. Gomez-Camacho, M.	Physical Review, C99 (2019) 054605
${}^6\text{He} + {}^{120}\text{Sn}$	$E_{\text{lab}} = 17.4, 18.05, 19.8, 20.5$ MeV	P. N. de Faria, R. Lichtenhaler, K.C.C. Pires, A.M. Moro, A. Lepine-S	Physical Review, C81 (2010) 044605
${}^6\text{He} + {}^{197}\text{Au}$	$E_{\text{lab}} = 27$ MeV	O.R. Kakuee, M.A.G. Alvarez, M.V.Andres, S. Cherubini, T. Davinson, A.	Nuclear Physics, A765 (2006) 294-306
${}^6\text{He} + {}^{197}\text{Au}$	$E_{\text{lab}} = 9$ MeV	R.J. Smith, J.J. Kolata, K. Lamkin, A. Morsad, K. Ashktorab, F.D. Becc	Physical Review, C43 (1991) 761
${}^6\text{He} + {}^{197}\text{Au}$	$E_{\text{lab}} = 10.1$ MeV	R.E. Warner, F.D. Becchetti, J.W. Janecke, D.A. Roberts, D. Butts, C.L	Physical Review, C51 (1995) 178
${}^6\text{He} + {}^{197}\text{Au}$	$E_{\text{lab}} = 29, 40$ MeV	K. Rusek, I. Martel, J. Gomez-Camacho, A. M. Moro, R. Raabe	Physical Review, C72 (2005) 037603
${}^6\text{He} + {}^{206}\text{Pb}$	$E_{\text{lab}} = 18$ MeV	L.Standylo, L.Acosta, C. Angulo, R.Berjillos, J.A.Duenas, M.S.Golovkov,	Physical Review, C87 (2011) 064603
${}^6\text{He} + {}^{208}\text{Pb}$	$E_{\text{lab}} = 55$ MeV	N.K. Skobelev, S.M. Lukyanov, Yu.E. Penionzhkevich, S.P. Tretyakova,	Zeitschrift fur Physik, A341 (1992) 315-318
${}^6\text{He} + {}^{208}\text{Pb}$	$E_{\text{lab}} = 27$ MeV	O.R. Kakuee, J. Rahighi, A.M. Sanchez-Benitez et al.	Nuclear Physics, A728 (2003) 339
${}^6\text{He} + {}^{208}\text{Pb}$	$E_{\text{lab}} = 18, 22$ MeV	A.M.Sanchez-Benitez, D.Escrib, M.A.G.Alvarez, M.V.Andres, C. Angulo, M.	Journal of Physics: Nuclear Physics, G31 (2005) S1953
${}^6\text{He} + {}^{208}\text{Pb}$	$E_{\text{lab}} = 14, 16$ MeV	A.M.Sanchez-Benitez, D.Escrib, M.A.G.Alvarez, M.V.Andres, C. Angulo, M.	Nuclear Physics, A803 (2008) 30

Figura 2.11: Menú desplegado por la opción *Java* en *Experimental Data* en la búsqueda de Distribución Angular para Dispersión Elástica.

Al seleccionar una energía en un sistema de interés, se despliega una ventana (ver Figura 2.12) donde se encuentra una vista previa de los datos de Distribución Angular, características y especificaciones del instrumental que se utilizó en la realización del experimento, así como la herramienta utilizada para la digitalización de datos.

θ_{cm} (deg)	σ/σ_r (ratio)	error (%)	+5 σ	-5 σ
5.36	1.04081	0.298	0.0031	0.0031
6.08	1.01591	0.46	0.00467	0.00467
6.66	0.99724	0.468	0.00466	0.00466
6.81	1.03768	0.302	0.00313	0.00313
7.82	1.019	0.307	0.00312	0.00312
8.97	0.9972	0.312	0.00311	0.00311
9.26	0.97075	0.64	0.00621	0.00621
10.28	1.01274	0.463	0.00468	0.00468
10.85	0.98784	0.63	0.00622	0.00622
11.72	0.95827	0.652	0.00624	0.00624
12.15	0.97382	0.479	0.00466	0.00466
12.58	0.93337	0.337	0.00314	0.00314
13.31	0.95358	0.492	0.00469	0.00469
13.74	0.98313	0.318	0.00312	0.00312
19.54	1.08104	0.285	0.00308	0.00308
21.56	1.06234	0.443	0.0047	0.0047
24.16	1.02497	0.459	0.0047	0.0047
26.47	0.99382	0.318	0.00316	0.00316
28.06	0.97357	0.636	0.00619	0.00619
28.63	0.90667	0.516	0.00467	0.00467
30.94	0.87086	0.538	0.00468	0.00468
34.11	0.78214	0.995	0.00778	0.00778
37.28	0.67786	0.459	0.00311	0.00311

Figura 2.12: Resultado de búsqueda de datos experimentales de Sección Eficaz Diferencial para Dispersión Elástica dentro de *NRV*.

2.2.2. Ejemplo para SF

Para realizar una búsqueda de las Secciones Eficaces de Fusión, hay que dirigirse a la sección *Fusion* \rightarrow *Experimental Data*. Se puede elegir entre dos opciones para realizar la búsqueda: Java y Java Script (ver Figura 2.13).

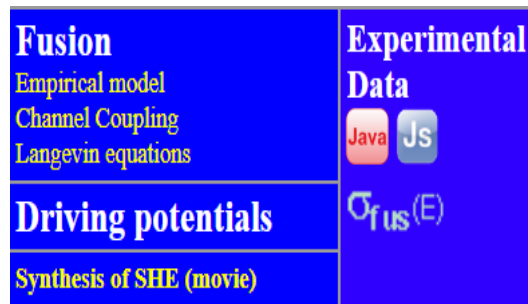


Figura 2.13: Menú de búsqueda desplegado por *NRV*.

Usando el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ como ejemplo, se debe buscar en lista junto con todos los demás sistemas. De nuevo, están ordenados de menor a mayor en cuanto al número atómico del Núcleo Proyectoil y número atómico del Núcleo Blanco.

Al elegir un sistema en particular se puede tener la opción de seleccionar datos experimentales que han sido medidos mediante diferentes técnicas experimentales: *Evaporation Residues (EvR)* donde se miden partículas ligeras emitidas por el Canal de Evaporación y *Fission Fragmentations (FF)* donde se miden los productos de fisión emitidos por el Núcleo Compuesto altamente excitado.

${}^6\text{He} + {}^{63}\text{Cu} \rightarrow {}^{69}\text{Ga}$ (EvR)	A. Navin, V. Tripathi, Y. Blumenfeld et al.,	Physical Review, C 70 (2004) 44601
${}^6\text{He} + {}^{65}\text{Cu} \rightarrow {}^{71}\text{Ga}$ (EvR)	A. Navin, V. Tripathi, Y. Blumenfeld et al.,	Physical Review, C 70 (2004) 44601
${}^6\text{He} + {}^{64}\text{Zn} \rightarrow {}^{70}\text{Ge}$ (X-rays from EC of EvR)	M. Fischella, V. Scuderi, A. Di Pietro et al.,	Journal of Physics, 282 (2011) 012014
${}^6\text{He} + {}^{64}\text{Zn} \rightarrow {}^{70}\text{Ge}$ (EvR)	V. Scuderi, A. Di Pietro, P. Figuera et al.,	Physical Review, C 84 (2011) 64604
${}^6\text{He} + {}^{64}\text{Zn} \rightarrow {}^{70}\text{Ge}$ (EvR)	A. Di Pietro, P. Figuera, V. Scuderi et al.,	Physics of Atomic Nuclei, 69 (2006) 1366
${}^6\text{He} + {}^{188}\text{Os} \rightarrow {}^{194}\text{Pt}$ (EvR)	A. Navin, V. Tripathi, Y. Blumenfeld et al.,	Physical Review, C 70 (2004) 44601
${}^6\text{He} + {}^{192}\text{Os} \rightarrow {}^{198}\text{Pt}$ (EvR)	A. Navin, V. Tripathi, Y. Blumenfeld et al.,	Physical Review, C 70 (2004) 44601
${}^6\text{He} + {}^{197}\text{Au} \rightarrow {}^{203}\text{Tl}$ (EvR)	Yu.E. Penionzhkevich, R.A. Astabatyán, N.A. Demekhina et al.,	European Physical Journal, A 31 (2007) 185
${}^6\text{He} + {}^{206}\text{Pb} \rightarrow {}^{212}\text{Po}$ (EvR)	R. Wolski, I. Martel, L. Standlyo et al.,	European Physical Journal, A 47 (2011) 111
${}^6\text{He} + {}^{206}\text{Pb} \rightarrow {}^{212}\text{Po}$ (EvR)	S.M. Lukyanov, Yu.E. Penionzhkevich, R.A. Astabatyán et al.,	Physics Letters, B 670 (2009) 321
${}^6\text{He} + {}^{206}\text{Pb} \rightarrow {}^{212}\text{Po}$ (gamma-rays of EvR)	Yu.E. Penionzhkevich, R.A. Astabatyán, N.A. Demekhina et al.,	European Physical Journal, A 31 (2007) 185
${}^6\text{He} + {}^{206}\text{Pb} \rightarrow {}^{212}\text{Po}$ (alpha-decay of EvR)	Yu.E. Penionzhkevich, V.I. Zagrebaev, S.M. Lukyanov et al.,	Physical Review Letters, 96 (2006) 162701
${}^6\text{He} + {}^{209}\text{Bi} \rightarrow {}^{215}\text{At}$ (FF)	Yu.E. Penionzhkevich, Yu.A. Muzychka, S.M. Lukyanov et al.,	European Physical Journal, A 13 (2002) 123
${}^6\text{He} + {}^{209}\text{Bi} \rightarrow {}^{215}\text{At}$ (FF)	A.S. Fomichev, I. David, Z. Dlouhy et al.,	Zeitschrift für Physik, 351 (1995) 129
${}^6\text{He} + {}^{209}\text{Bi} \rightarrow {}^{215}\text{At}$ (EvR)	J.J. Kolata, V. Guimaraes, D. Peterson et al.,	Physical Review Letters, 81 (1998) 4580
${}^6\text{He} + {}^{209}\text{Bi} \rightarrow {}^{215}\text{At}$ (FF)	Yu. E. Penionzhkevich,	Nuclear Physics, A 688 (1995) 259
${}^6\text{He} + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{244}\text{Pu}$ (FF)	R. Raabe, J. L. Sida, J. L. Charvet et al.,	Nature, 431 (2004) 823
${}^6\text{He} + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{244}\text{Pu}$ (FF)	M. Trotta, J.L. Sida, N. Alamanos et al.,	Physical Review Letters, 84 (2000) 2342
${}^6\text{He} + {}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{244}\text{Pu}$ (FF)	J.L. Sida, N. Alamanos, C. Daniel et al.,	Nuclear Physics, A 685 (2001) 51

Figura 2.14: Menú desplegado por la opción *Java* en *Experimental Data* para Sección Eficaz de Fusión.

Seleccionando cualquiera de las opciones de búsqueda (Java y Java Script) se despliega una ventana donde se encuentran los datos experimentales de Sección Eficaz de Fusión para diferentes sistemas (ver Figura 2.14).

Una vez se tiene claro el sistema en cuestión, el Núcleo Compuesto y la técnica de medición se despliega una ventana que contiene los datos experimentales, como se ha comentado en la sección 2.2.1, se encuentra una vista previa de los datos de Sección Eficaz para Diferentes Energías, así como características y especificaciones del instrumental que se utilizó en la realización del experimento, así como la herramienta utilizada para la digitalización de datos (ver Figura 2.15).

${}^6\text{He} + {}^{64}\text{Zn}$		Download data			
V. Scuderi, A. Di Pietro, P. Figuera et al., Physical Review, C 84 (2011) 64604 (access to the source may be restricted by owner!)		E_{cm} (MeV)	σ (mb)	$+\delta\sigma$	$-\delta\sigma$
Comments		7.448	37.21	10.6	4.966
Beam quality: 1000000 pps		9.071	121.7	58.77	14.33
Target: ${}^{64}\text{Zn}$: 530 mcg/cm ² , self-supporting foil		10.58	241.1	37.13	26.5
Detected particles: EvR		11.87	371.5	68.89	68.89
Data obtained: author's graph		12.64	500	134.5	134.5
Centre de Recherches du Cyclotron at Louvain la Neuve, Belgium		13.83	519.4	89.06	89.06
		14.95	628.3	136.8	63.99
		16	629.6	169.5	169.5

Figura 2.15: Resultado de búsqueda de datos experimentales para Sección Eficaz de Fusión dentro de *NRV*.

Capítulo 3

Programas y Herramientas

3.1. Linux/Windows

El uso de estas herramientas se ha llevado a cabo en diferentes circunstancias. Por un lado, Linux al ser un sistema operativo de código abierto, tiene la ventaja de ocupar recursos computacionales básicos para su funcionamiento. En este mismo, se ha llevado a cabo la instalación de FRESCO y su adjunto SFRESCO. Por otro lado, Windows es un sistema operativo de Microsoft compatible con la herramienta *Origin*. Sin embargo, los recursos computacionales que requiere son relativamente más grandes.

De manera simultánea, ambas herramientas han contribuido de manera significativa en el cumplimiento de objetivos tanto generales como particulares.

3.2. FRESCO

El uso de la Herramienta Computacional (FRESCO, SFRESCO) se ha llevado a cabo sobre el Sistema Operativo Linux, mediante la distribución Ubuntu. FRESCO es un programa escrito por I. J. Thompson [Thompson,1988], una herramienta que realiza cálculos sobre el formalismo de Canales de Reacción Acoplados, es decir, incluye posibles estados excitados de los Núcleos Proyectil y Blanco que surgen del acoplamiento de Canales de Reacción al Canal de entrada (comúnmente el canal de reacción más simple es decir, el Canal de Dispersión Elástica).

El uso de FRESCO requiere de 2 archivos de entrada (ver capítulo 4). Se puede ejecutar sobre una terminal Linux mediante:

- `fresco < archivo-de-entrada.in`

donde los detalles generales del cálculo realizado (por ejemplo, el potencial efectivo V_{eff} , los estados definidos de los Núcleos Proyecto y Blanco, el resultado de la Sección Diferencial Absoluta y la razón respecto a la Sección Diferencial de Rutherford etc.) serán impresos sobre la terminal donde se ejecutó el programa. Sin embargo, se puede guardar toda esta información sobre un archivo de texto mediante:

- `fresco < archivo-de-entrega.in > archivo-de-salida.out`

es decir, ahora el “archivo-de-salida.out” es generado por el programa FRESCO. La extensión de este archivo puede ser cualquier extensión de lectura de texto (por ejemplo, *.txt*, *.dat*, etc.)

3.3. SFRESCO

Por otro lado, SFRESCO se basa en cálculos de FRESCO para realizar una búsqueda y optimización de parámetros para la correcta descripción de datos correspondientes a medidas de dispersión dadas (minimización de χ^2). Los comandos utilizados para la optimización se enlistan a continuación:

- *q*: Utilizado para mostrar en pantalla los parámetros del potencial U_{EOM} que están definidos al momento.
- *set var val*: Utilizado para asignarle un valor diferente “*val*” a la variable “*var*”.
- *scan var valmin valmax step*: Utilizado para realizar una corrida continua desde el valor “*valmin*” hasta “*valmax*” en pasos de “*step*” sobre la variable “*var*”.
- *plot “file.dat”*: Utilizado para graficar la DA y la Sección Eficaz de Fusión con los valores definidos actuales del potencial U_{EOM} , junto con los valores experimentales.

El archivo puede generarse en otra extensión diferente como “.txt” “.cvs” etc. Por defecto, el archivo se guarda como “*search.plot*”. El archivo generado por este comando está preparado para ejecutarse sobre el programa *xmgrace* de Linux.

- *line “file.dat”*: Utilizado para graficar solamente DA y Sección Eficaz con los valores definidos actuales del Potencial U_{EOM} . Siguiendo los mismos aspectos del comando plot “*file.dat*” para las extensiones del archivo generado.
- *min*: Utilizado para llamar al software MINUIT, el cual optimiza en conjunto los parámetros del potencial U_{EOM} mediante diferentes subrutinas que están integradas.
- *fix var*: Utilizado para fijar la variable “*var*”, teniendo como consecuencia que dentro de MINUIT la variable no será optimizada.
- *mini* (sobre el prompt min): Utilizado para ejecutar la subrutina MINIMIZE.
- *exit* (sobre el prompt min): Para salir del software MINUIT.
- *ex*: Para salir de SFRESCO.

3.4. Relación de Dispersión

El cálculo de Relación de Dispersión se basa en la aproximación de la dependencia energética del potencial imaginario de polarización $W_{0F,0D}$ mediante segmentos de recta. Esta aproximación se utiliza en la ecuación (1.39) para calcular la contraparte real del potencial de polarización correspondiente $V_{0D,0F}$.

Estos cálculos se han llevado a cabo mediante un programa numérico llamado *threshold.exe*, al cual se le proporcionan los puntos E_0 , E_1 , E_2 , W_0 y W_1 . A partir de estos, se calcula la contra parte real. Una guía visual se ofrece en la Figura 3.1.

3.5. *Origin*

Origin es un programa que se utiliza tanto para el análisis de datos en diferentes áreas de la ciencia en ingeniería, como para creación de gráficos con amplias opciones de

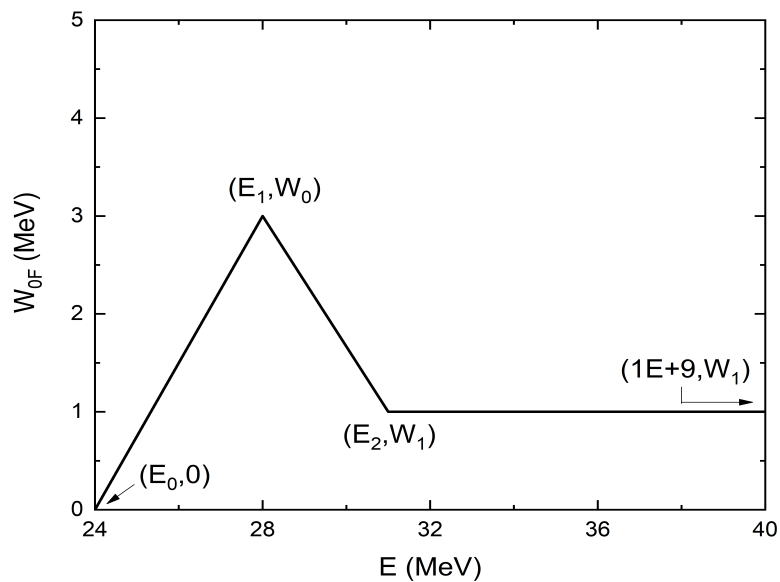


Figura 3.1: Guía visual sobre los puntos que requiere el programa *threshold.exe* para el cálculo de la Relación de Dispersión.

personalización. Es lanzado por la empresa *OriginLab Corporation* en el año 2009.

Este programa se ha utilizado para la manipulación de las Secciones Eficaces Diferenciales de Dispersión Elástica y Secciones Eficaces de Fusión, tanto para los datos experimentales como los cálculos realizados por FRESKO. También se han realizado cálculos sobre la Función de Deflexión (ver ecuación 1.28) al ofrecer información del comportamiento de las ondas parciales incidentes (ver capítulo 6).

Capítulo 4

Construcción de Archivos de Entrada

4.1. FRESCO

En esta sección se describe la manera particular sobre el uso de FRESCO en este trabajo, sin pretender dar una guía general para este versátil código. Nuestro uso de FRESCO requiere 2 archivos de entrada para su funcionamiento. Para el archivo principal de entrada se ilustrará la versión conocida como "namelist input". El primero de ellos es un archivo con extensión 'file.in' (ver Figura 4.1), el cual contiene información básica, necesaria para el cálculo que se requiera obtener, por ejemplo: E_{Lab} , Z_t , Z_p , A_t , A_p , J_t^π , J_p^π y los parámetros del potencial efectivo que será utilizado para calcular la Distribución Angular. La Figura 4.1 solo sirve como guía en la descripción de los componentes necesarios para el funcionamiento de FRESCO.

De la línea 1 a 10 se proporcionan los parámetros necesarios para el cálculo de FRESCO, como la energía medida en el sistema de laboratorio E_{Lab} , los pasos del ángulo de dispersión θ_h y los límites de la Distribución Angular $\theta_{\text{C.M.}} = \theta_{\text{min}} + h \theta_h$; $h = 0, 1, \dots, N$; $\theta_h = \theta_{\text{max}}/N$, así como otros que definen el tipo de cálculo que se lleva a cabo.

De la línea 12 a 17 se colocan las características de los Núcleos Proyectoil y Blanco, es decir Z_t , Z_p , A_t , A_p , J_t^π y J_p^π que define el estado en el que inicialmente se encuentran los Núcleos Proyectoil y Blanco (en nuestro caso, ambos en el estado base).

Por último, de la línea 19 a la línea 26 se muestran los parámetros del potencial efectivo que van a describir la interacción mutua entre ambos núcleos (ecuación (1.12)). La línea

19 define el potencial de Coulomb V_C como una carga puntual en un campo esférico de distribución de carga con radio $R_C = r_C(A_p^{1/3} + A_t^{1/3})$. La línea 20 define el potencial V_{bare} , el cual es obtenido en pasos posteriores, leído en el archivo ‘*fort.4*’.

```

6He(0+) + 64Zn(0+) el scat with SPP, Vsurf, WSurf & int W, 17.93 lab MeV
NAMELIST
&FRESKO hcm=0.01 rmatch=60.0 jtmax=50
      absend=-1 jump(1:6:1)= 0 0 0 0 0 0 jbord(1:6)=
      0 0 0 0 0.0 0.0 kqmax=1 thmin=1.00
      thmax=180.00 thinc=2.00 smats=2
      xstabl=1 veff=-1 kfus=2 bpm=1 wdisk=1
      elab(1:4)= 17.93 0 0 0 nlab(1:3)= 0
      0 0
      /

&PARTITION namep='6He' massp=6 zp=2 namet='64Zn'
      masst=64 zt=30 qval=0.0 pwf=F nex=1 /
&STATES jp=0.0 bandp=+1 kkp=0.0 jt=0.0
      bandt=+1 et=0.0 kkt=0.0 /

&partition /
&POT kp=1 ap=6 at=64 rc=1.20 /
&POT kp=1 type=1 shape=7 p1=1 /
&POT kp=1 type=2 shape=0 p1=-0.5108 p2=1.53 p3=1.061 p4=0.29413
p5=1.53 p6=1.061 /
&POT kp=1 type=1 shape=0 p1=0.8 p2=1.4 p3=0.43 p4=4.3
p5=1.4 p6=0.43 /
&POT kp=1 type=1 p1=0.0 p2=0. p3=0. p4=0.0
p5=1.0 p6=0.2 /
&POT kp=2 type=1 p4=0.0 p5=1.0 p6=0.2 /
&POT kp=2 type=1 shape=0 p4=4.3 p5=1.4 p6=0.43 /
&pot /

&overlap /
&coupling /
Output code for fresco input written by xfresco version 2.1
at Thu Sep 29 15:10:22 2016

```

Figura 4.1: Archivo de entrada para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$. Nombre del archivo: ‘*6He+64Zn.in*’.

La línea 21 contiene los parámetros de profundidad y geométricos del potencial U_D en el siguiente orden (ecuación (1.17)); $p_1 = V_{0D}$, $p_2 = r_D$, $p_3 = a_D$, $p_4 = W_{0D}$, $p_5 = r_D$ y $p_6 = a_D$. La línea 22 define los parámetros de profundidad y geométricos del potencial U_F en el siguiente orden (ecuación (1.15)); $p_1 = V_{0F}$, $p_2 = r_F$, $p_3 = a_F$, $p_4 = W_{0F}$, $p_5 = r_F$ y $p_6 = a_F$. La línea 23 define los parámetros de profundidad y geométricos del potencial W_{int}

en el siguiente orden (ver sección 1.4.2): $p4 = W_{0\text{int}}$, $p5 = r_{\text{int}}$ y $p6 = a_{\text{int}}$. Finalmente, las líneas 24 y 25 son utilizadas para calcular la Sección Eficaz de Fusión (ecuación (1.11)).

En la Figura 4.1 se pueden distinguir diferentes opciones para definir la variable kp . La primera opción $kp = 1$ define potenciales que describen el Canal de Interacción “1”; es decir, Dispersión Elástica. La segunda opción $kp = 2$ define potenciales que describen el Canal de Interacción “2”; es decir, Canal de Fusión. Mientras que $type=1, 2$ define un potencial volumétrico o superficial respectivamente.

```
SPP 6He+64Zn, 17.93 LAB, 16.4 CM
1500 0.01 0.01
-270.3563989
-270.3551088
-270.3529583
-270.3499476
-270.3460762
-270.3413440
-270.3357507
-270.3292958
-270.3219789
-270.3137996
-270.3047572
-270.2948512
-270.2840808
-270.2724455
-270.2599443
.
.
.
```

Figura 4.2: Archivo ‘*fort.4*’ que contiene el potencial nuclear numérico.

El segundo archivo necesario para FRESCO es ‘*fort.4*’, con la siguiente información (ver Figura 4.2); la primera línea contiene comentarios sobre el sistema que el usuario puede colocar, la segunda línea muestra el número de pasos N , el primer punto de la distancia relativa r_1 entre ambos núcleos y posteriormente el aumento de la distancia relativa a cada paso h tal que $r = r_1 + h \cdot n$, $n = 1, \dots, N$. Finalmente, se coloca el valor numérico del potencial en aumentos de r consecutivos.

4.2. SFRESCO

El archivo necesario para SFRESCO debe tener la información necesaria sobre el tipo, ubicación y nombre de las variables de búsqueda. Un ejemplo se muestra en la Figura 4.3, el cual solo sirve como guía en la descripción de los componentes principales para el funcionamiento de SFRESCO.

La línea 1 contiene el nombre del archivo que contiene todos los detalles del sistema (${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn.in}$, ver sección 4.1), el archivo donde se va a guardar la salida del programa (${}^{\prime}fm.out^{\prime}$), el número de variables que se quieren optimizar (siguiendo a la Figura 4.3, son 4 variables) y el conjunto de datos experimentales proporcionados (siguiendo a la Figura 4.3, son 2 conjuntos de datos experimentales).

```
'6He+64Zn.in' 'fm.out' 4 2
&variable kind=1 name='Vf' kp=1 pline=4 col=1 valmin=-3.65 valmax=-3.45/
&variable kind=1 name='Vd' kp=1 pline=3 col=1 valmin=-0.43 valmax=-0.41/
&variable kind=1 name='Wd' kp=1 pline=3 col=4 valmin=0.425 valmax=0.445/
&variable kind=1 name='Wf' kp=1 pline=4 col=4 valmin=3.5 valmax=6.0/
&data type=0 iscale=-1 idir=1 lab=F abserr=T/
5.21495 1.03802 0.000608212
5.51416 1.02624 0.000705487
5.71191 1.01437 0.000954662
6.03352 1.02029 0.000967109
6.20396 1.01129 0.000774825
6.55479 0.997907 0.000771396
6.69442 1.0362 0.000890744
7.07281 1.00865 0.000874779
7.18789 1.02161 0.000977073
7.58874 1.00693 0.000969705
7.67797 1.0137 0.00106978
8.10593 0.999518 0.00106445
8.16924 0.999156 0.00115738
8.62018 1.0054 0.00117284
8.6557 1.00608 0.00127984
9.13683 0.978874 0.0012567
9.14283 1.01398 0.00139346
.
.
.
&data type=3 ic=0 ia=2 idir=0 abserr=T/
17.43 629.6 62.9
&
```

Figura 4.3: Archivo de entrada para SFRESCO. Nombre del archivo: sf

La línea 2 define la variable V_{0F} (siguiendo la ecuación (1.15)), donde hay que pro-

porcionar la información de kp , línea y columna a la cual pertenece dentro del archivo ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn.in}$, así como el valor mínimo y máximo para su optimización posterior. De la línea 3 a 5 son los mismos casos para las profundidades del potencial U_{EOM} restantes.

Los datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica son mostrados a partir de la línea 6 en el formato siguiente: $\theta_{\text{C.M.}} \frac{\text{SDA}}{\text{SDR}}$ Incertidumbre. Finalmente, la Sección Eficaz de Fusión es mostrada a partir de la línea 17 en el formato $E_{\text{Lab}} \sigma_{\text{F}}$ Incertidumbre. Este conjunto de datos experimentales son obtenidos siguiendo los pasos del Capítulo 2.

4.3. SPP

El potencial V_{bare} presente en la ecuación (1.12) se obtiene mediante el Potencial de São Paulo (SPP, véase sección 1.4.3), para cuyo cálculo existe un código que requiere de un archivo de entrada que debe contener toda la información del sistema. Cabe resaltar que la peculiaridad de SPP es que no tiene parámetros ajustables, basándose en observaciones experimentales y cálculos teóricos, permitiendo su uso solo mediante características como E_{Lab} , $A_{p,t}$ y $Z_{p,t}$, siempre y cuando el Núcleo Proyectoil no sea una partícula α . Un ejemplo y su descripción es explicada a continuación (ver Figura 4.4).

17.93	6	2	64	30	
15	60	0.01			
0	0	0.56	0.53	0.56	0.53
1	0.78	50.0	1.0	0.2	
1	1	-1	-1	0	

Figura 4.4: Archivo de entrada para el cálculo de SPP. Nombre del archivo: sys1.inp

La línea 1 muestra $E_{\text{Lab}} A_p Z_p A_t Z_t$ en este orden, es decir, describe la masa y número atómico del Núcleo Proyectoil y Blanco, así como la energía disponible por el sistema para llevar a cabo la Reacción Nuclear medida en el sistema de referencia de laboratorio.

La línea 2 contiene características sobre el cálculo que SPP va a realizar, es decir, el radio máximo R_{max} para el potencial nuclear, el momento angular máximo L_{max} y el paso h (cumpliendo con $R_{\text{max}} = r_1 + h \cdot N$) con el cual se va a calcular, apareciendo en el orden $R_{\text{max}} L_{\text{max}} h$.

La línea 3 contiene información sobre los parámetros (no ajustables) necesarios para realizar el cálculo de las densidades de distribución de materia y carga nuclear de los Núcleos Proyecto y Blanco, donde se puede poner una etiqueta a cada número como sigue: *Ide1 Ide2 am1 ac1 am2 ac2*. *Ide1* e *Ide2*, los cuales dicen al programa el tipo de distribución que se va a usar para las densidades de materia y carga nuclear. *Ide1, Ide2=0* (*Ide1* debería ser igual a 1 si el Núcleo Proyecto es una partícula α) definen una distribución de tipo 2pF (distribución de Fermi de 2 parámetros) de la forma:

$$\rho(r) = \frac{\rho_o}{1 + \exp\left(\frac{r-R_o}{a}\right)} \quad (4.1)$$

Donde es $R_o = 1.31A^{1/3} - 0.84$ fm definida para la densidad de materia nuclear y $R_o = 1.76Z^{1/3} - 0.96$ fm para la densidad de carga nuclear [Chamon,2002]. Por último, *am1* y *ac1* son las difusividades de materia y carga nuclear para el proyectil, *am2* y *ac2* las difusividades de materia y carga nuclear para el blanco respectivamente. El valor numérico de las difusividades de materia *am1*, *am2* y carga nuclear *ac1*, *ac2* son igual a 0.56 fm y 0.53 fm respectivamente.

La línea 4 define un potencial imaginario. Sin embargo, SPP es calculado exclusivamente para el potencial V_{bare} , es por este motivo que no se dará información detallada sobre el significado de esta línea.

Por último, la línea 5 define el formato de escritura del archivo de salida, recomendando dejar los mismos valores si se requiere reproducir los resultados. Poniendo un nombre específico para su identificación se obtiene *I1 I2 L1 L2 dang Ichi*. El parámetro *I1* diferente de cero indica que las densidades nucleares serán impresas en el archivo de salida, por otro lado, *I2* diferente de cero indica que los potenciales serán impresos de igual manera. Un valor de cero en ambos casos indica que no serán impresos en ningún caso. El parámetro *L1* indica la onda parcial para la cual se imprimirá el potencial efectivo, en caso de no requerirlo debe definirse como un número negativo. *L2* indica la onda parcial para la cual la función de onda dispersada elásticamente deberá ser impresa, en caso de no requerirlo se define como un número negativo. *dang* indica el paso mediante el cual la Distribución Angular será calculada e impresa en el archivo de salida. Por último, si *Ichi* es diferente de

cero, se imprimirá χ^2 correspondiente al conjunto de puntos proporcionados en un archivo que deberá ser llamado *SPOMC.ent*.

Capítulo 5

Metodología de Optimización

En este trabajo se analizaron cuatro sistemas dentro del marco del EOM, a saber: ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$, ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$, ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$, ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ (y su reacción inversa: ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$). Es importante mencionar que se ha adoptado la siguiente convención: en la Reacción Nuclear ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$, el Núcleo Proyectil es aquel que aparece primero en la notación (es decir, ${}^9\text{Be}$), por lo tanto, el Núcleo Blanco será aquel que aparezca a la derecha del Núcleo Proyectil (es decir, ${}^{12}\text{C}$). A continuación se describen las particularidades del análisis para cada sistema.

5.1. ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$

Para este sistema, se tienen datos experimentales de Dispersión Elástica y Sección Eficaz de Fusión en un amplio intervalo de energías que se extienden desde una vecindad muy cercana a la Barrera de Coulomb, hasta por encima de la misma; $E_{\text{Lab}} = 12, 13, 14, 17, 20, 23, 26, 30$ MeV, para las cuales, los datos experimentales se han recuperado siguiendo la metodología del capítulo 2. La altura de la Barrera de Coulomb para este sistema es de $B_{\text{Lab}} = 11.5$ MeV, obtenida mediante la salida del potencial SPP.

Como primer paso, se realizó una transformación del ángulo de dispersión $\theta_{\text{C.M.}}$ a distancia reducida de máximo acercamiento entre los núcleos d , mediante [Torabi,2020]:

$$D = d(A_p^{1/3} + A_t^{1/3}) = \frac{Z_p Z_t e^2}{2E_{\text{C.M.}}} \left[1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta_{\text{C.M.}}}{2}} \right], \quad (5.1)$$

donde D es la distancia de máximo acercamiento y d es la respectiva distancia reducida. Es importante mencionar el por qué de esta transformación: Cada ángulo de dispersión tiene asociada, en una aproximación semiclásica, ciertas características físicas del sistema tales como una distancia de máximo acercamiento, un ángulo de dispersión y un parámetro de impacto, entre otros. De manera que, cuando el ángulo de dispersión $\theta_{\text{C.M.}}$ para una reacción puntual es pequeño, implica que el parámetro de impacto asociado a tal ángulo será relativamente grande en comparación con otros parámetros de impacto, y como consecuencia directa corresponde a una distancia de máximo acercamiento grande. Por otro lado, observar un ángulo de dispersión $\theta_{\text{C.M.}}$ definido en ángulos muy grandes, implica que el parámetro de impacto es relativamente más pequeño, y como consecuencia, una distancia de máximo acercamiento igualmente pequeña. Esto se puede observar comparando directamente las Distribuciones Angulares en función de $\theta_{\text{C.M.}}$ con Distribuciones Angulares en función de la distancia reducida de máximo acercamiento d .

Se grafica la razón entre la Sección Eficaz Diferencial Absoluta y la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford contra la distancia reducida con el fin de obtener los parámetros geométricos del potencial de Reacciones Directas. Experimentalmente, se ha observado que, en promedio, el Canal de Reacciones Directas en una Reacción Nuclear domina sobre otros Canales de Reacción cuando la razón entre SDA y SDR es aproximadamente de 0.25 [Aguilera,2021]. Por otro lado, se esperaría que el Canal de Fusión adquiriera una relevancia importante a distancias reducidas menores. Es decir, las fuerzas nucleares deben ser mucho más fuertes para que dominen los procesos de Fusión en comparación con Reacciones Directas.

$$\text{Reacciones Directas} \rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) / \left(\frac{d\sigma_R}{d\Omega} \right) \equiv 0.25$$

El resultado es una curva universal (ver Figura 5.1) del comportamiento de Reacciones Nucleares para Dispersión Elástica de Iones Pesados, donde se pueden observar aquellas distancias en las cuales las fuerzas de Coulomb dominan (a grandes distancias reducidas de máximo acercamiento, cuando la razón es muy cercana a la unidad) y aquellas donde las fuerzas nucleares adquieren un rol más dominante (a distancias pequeñas, cuando la razón empieza menor de la unidad, lo cual es evidencia de su corto alcance).

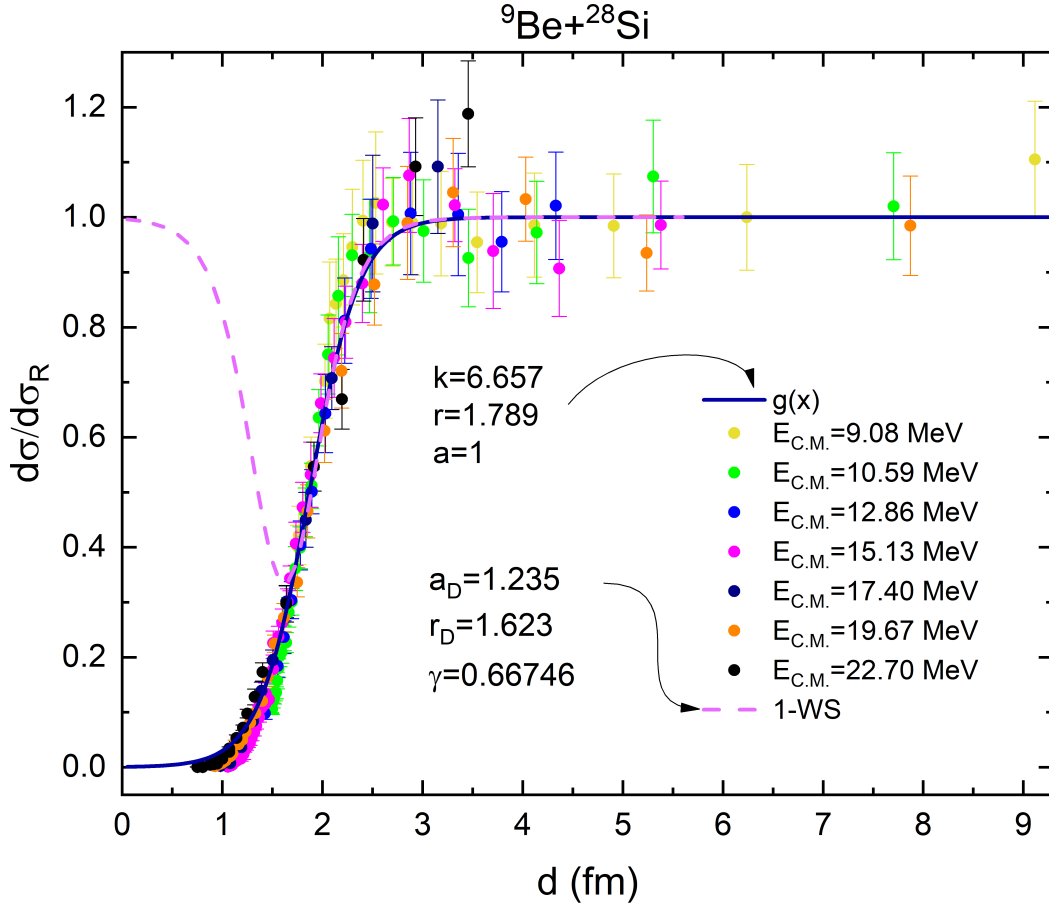


Figura 5.1: Obtención de parámetros geométricos para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$. Los datos experimentales han sido reportados por Hugí (1981).

Con el fin de obtener una distancia reducida de máximo acercamiento que sea característica de las Reacciones Directas ($d\sigma/d\sigma_R \equiv 0.25$), se ajusta una curva sin significado físico de 2 parámetros ajustables (k, d_c) de la forma:

$$g(d) = \frac{a}{1 + e^{-k(d-d_c)}} \quad (5.2)$$

Donde comúnmente a se fija en un valor de 1 o muy cercano a él. Este ajuste se puede realizar con cualquier programa de análisis de datos, en nuestro caso, se ha realizado con la herramienta *Origin* mediante las funciones *Analysis* \rightarrow *Fitting* \rightarrow *Non Linear Curve*. Una vez obtenido el ajuste, se obtiene aquella distancia reducida de máximo acercamiento d_{max} para la cual $g(d_{max}) = 0.25$ (típico de Reacciones Directas), obteniendo el primer parámetro geométrico del sistema mediante $d_{max} = r_D$, es decir; esta distancia de máximo

acercamiento es el valor más probable del alcance del potencial responsable de este tipo de reacciones. Para obtener el valor de la difusividad se realiza un segundo ajuste de la curva $1 - \gamma f_D^{(1)}(r_D, a_D)$ sobre $g(d)$, permitiendo así, obtener el segundo parámetro geométrico a_D del sistema. La función $f_D^{(1)}(r_D, a_D)$ actúa como aquella responsable de describir las interacciones periféricas (es decir, en la superficie) entre los dos núcleos, es por este motivo que se elige para calcular el parámetro geométrico a_D .

Una vez realizado este proceso (ver Figura 5.1), se obtiene un radio reducido de Reacciones Directas $r_d = 1.623\text{fm}$ y una difusividad de $a_d = 1.253\text{fm}$. Estos dos parámetros geométricos se han comparado con aquellos presentados por So (2010) ($r_d = 1.5\text{fm}$, $a_d = 0.6\text{fm}$), en el cual se utilizó el mismo potencial efectivo proporcionado por el Modelo Óptico Extendido (1.12) usando un potencial *double folding* para V_{bare} . El principal objetivo es elegir el conjunto de parámetros geométricos idóneo para realizar el análisis.

Como conclusión de esta comparación, se ha optado por seguir aquellos parámetros geométricos mencionados en el artículo por un tema de simplicidad, permitiendo asimismo realizar una comparación directa entre el potencial SPP y *double folding*. De igual manera, el propósito es mejorar la descripción de la DA a energías cercanas a la Barrera de Coulomb, es decir, $E_{\text{Lab}} = 12, 13$ y 14MeV , así como realizar una buena descripción las Secciones Eficaces de Fusión. Los parámetros geométricos para el potencial de Fusión se han considerado como $r_F = 1.4\text{ fm}$, $a_F = 0.5\text{ fm}$, los cuales surgen de observaciones experimentales detalladas.

Una vez bien definidos los parámetros geométricos del sistema, es momento de calcular el potencial V_{bare} mediante la metodología de la sección 4.3. Un ejemplo del archivo de entrada para SPP es mostrado a continuación, para la energía $E_{\text{Lab}} = 30\text{MeV}$ (ver Figura 5.2):

30	9	4	28	14	
15	60	0.01			
0	0	0.56	0.53	0.56	0.53
1	0.78	50.0	1.0	0.2	
1	1	-1	-1	0	

Figura 5.2: Archivo de entrada para el cálculo de SPP. Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$. Nombre del archivo: sys1.inp

Se debe extraer exclusivamente el potencial nuclear del archivo de salida (columna etiquetada como SPP) y guardarlo con la extensión correcta ‘(fort.4)’ para poder calcular las Distribuciones Angulares, la Sección Eficaz de Fusión y realizar las optimizaciones pertinentes mediante FRESCO y SFRESCO, tal y como se menciona en la sección 4.1 y 4.2.

En caso de que los artículos que contienen los datos experimentales de Distribución Angular no mencionen la Sección Eficaz de Fusión a las mismas energías de bombardeo, se recupera información experimental del sistema en las bases de datos antes mencionadas (NNDC y NRV, tal como se menciona en las secciones 2.1.2 y 2.2.2) que permitirán realizar una interpolación/extrapolación mediante la ecuación de Wong de tres parámetros ajustables ($R_B, V_B, \hbar\omega$), obteniendo las estimaciones de las Secciones Eficaces de Fusión a las energías de interés.

$$\sigma(E) = \frac{\hbar\omega R_B^2}{2E} \text{Ln} \left(1 + e^{\frac{2\pi(E-V_B)}{\hbar\omega}} \right) \quad (5.3)$$

Sin embargo, para este sistema no es necesario realizar dicho proceso, ya que las Secciones Eficaces de Fusión a las mismas energías de bombardeo se encuentran en la referencia de Hugi (1981).

En cuanto a la obtención de los parámetros de profundidad, la optimización se ha llevado a cabo mediante SFRESCO, que permite realizar una búsqueda detallada de los parámetros de profundidad, minimizando χ^2 para la Distribución Angular y Sección Eficaz de Fusión, haciendo uso de las subrutinas MINUIT. La optimización se inicia desde la energía más alta (en este caso $E_{\text{Lab}} = 30$ MeV) hasta la energía más pequeña ($E_{\text{Lab}} = 12$ MeV). Lo anterior tiene el siguiente sentido: Las relaciones de dispersión predicen un comportamiento constante de los potenciales de polarización a energías altas, por lo cual, reproducir este comportamiento de manera inicial llevará a una buena descripción de la Relación de Dispersión a medida que la energía se acerca a la Barrera de Coulomb $B_{\text{Lab}} = 11.5$ MeV. Un comportamiento característico en la vecindad de la Barrera de Coulomb es un decremento hasta 0 MeV de la profundidad de estos potenciales de polarización. (ver Figura 6.6).

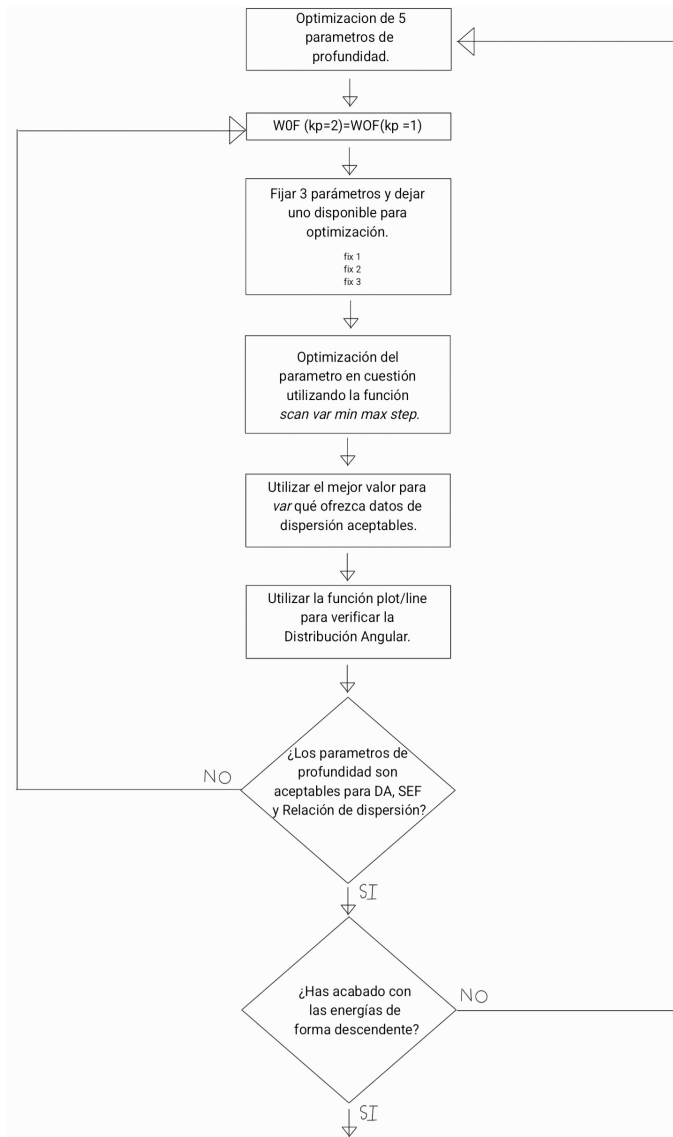


Figura 5.3: Proceso de optimización para el Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$.

Como primer paso, se ha realizado una optimización de 5 parámetros (es decir: V_{0D} , V_{0F} , W_{0D} y ambos W_{0F} presentes en $kp = 1$ y $kp = 2$), esto permitirá obtener aquella χ^2 que sea mínima, lo que ofrece una buena base para las siguientes optimizaciones. Una vez realizada la optimización, igualamos el valor de W_{0F} presente en $kp = 1$ al de $kp = 2$. A partir de aquí, se realiza una optimización parámetro por parámetro, siendo los potenciales de polarización imaginarios aquellos que deben reproducir un comportamiento constante. Para llevar a cabo este proceso se opta por usar las funciones *set*, *scan* y *line* para observar a cada paso si los parámetros de profundidad son los mejores para reproducir los siguientes

tres aspectos físicos: 1. Distribución Angular para la Dispersión Elástica, 2. Sección Eficaz de Fusión y 3. Relación de Dispersión. Como resultado, los parámetros de profundidad se presentan en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Parámetros de Profundidad, χ^2 (para la Distribución Angular) y Sección Eficaz de Fusión para el Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ a diferentes energías. Las Secciones de Fusión reportadas corresponden a un valor de $W_{\text{int}} = 50$ MeV.

E_{Lab} (MeV)	V_{0D} (MeV)	W_{0D} (MeV)	V_{0F} (MeV)	W_{0F} (MeV)	χ^2	σ_F (mb)
12	-0.04	0.76	1.10	6.2	0.199	125.21
13	0.11	0.88	0.10	6.90	0.656	208.57
14	0.10	0.95	-1.57	8.2	0.33	286.43
17	0.25	0.95	-0.53	8.32	0.155	525.00
20	0.39	0.98	-3.64	7.33	1.119	641.44
23	0.51	0.90	-3.76	8.64	0.264	821.51
26	0.42	0.88	-4.07	7.18	0.998	881.20
30	0.46	1.04	-4.71	6.98	2.235	924.13

Posteriormente, se realizan diferentes cálculos utilizando FRESCO, variando el parámetro W_{int} (potencial de absorción de muy corto alcance) desde 0 a 50 MeV en diferentes pasos (ver la línea 23 y 24 de la Figura 4.1). Se requieren al menos 4 diferentes valores de W_{int} para cada energía E_{Lab} , lo cual permite conocer cuál es el efecto de este Potencial de Absorción de muy corto alcance sobre la Distribución Angular para Dispersión Elástica. Los resultados obtenidos se presentan en la sección 6.1

La salida correspondiente de Distribuciones Angulares se puede visualizar en el archivo *fort.16* (presentados como la razón de la Sección Eficaz Diferencial Absoluta entre la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford) que se genera al ejecutar FRESCO. Para visualizar cuál es el valor de σ_F se tienen dos opciones: utilizar el comando *show* dentro de SFRESCO o buscando dentro del archivo de salida '*fm.out*' (comúnmente esta información se encuentra justo antes de las Distribuciones Angulares, seguido del texto: *Cross Section by absorptive potential 2:*).

5.2. ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$

Anteriormente, Aguilera (2021) realizó un análisis en profundidad del mismo sistema utilizando el Modelo Óptico Extendido, obteniendo parámetros geométricos y de profundidad que reproducen la Distribución Angular de Dispersión Elástica, la Sección Eficaz de Fusión y que cumplen con la Relación de Dispersión. El análisis realizado en la presente investigación permite observar y analizar ciertas ambigüedades del potencial óptico, siendo que existen más de un conjunto de parámetros que reproducen los aspectos físicos anteriormente mencionados. En adición a esto, se realizan diferentes cálculos con diferente profundidad de W_{int} , donde se observará cuál es el efecto de este en las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica.

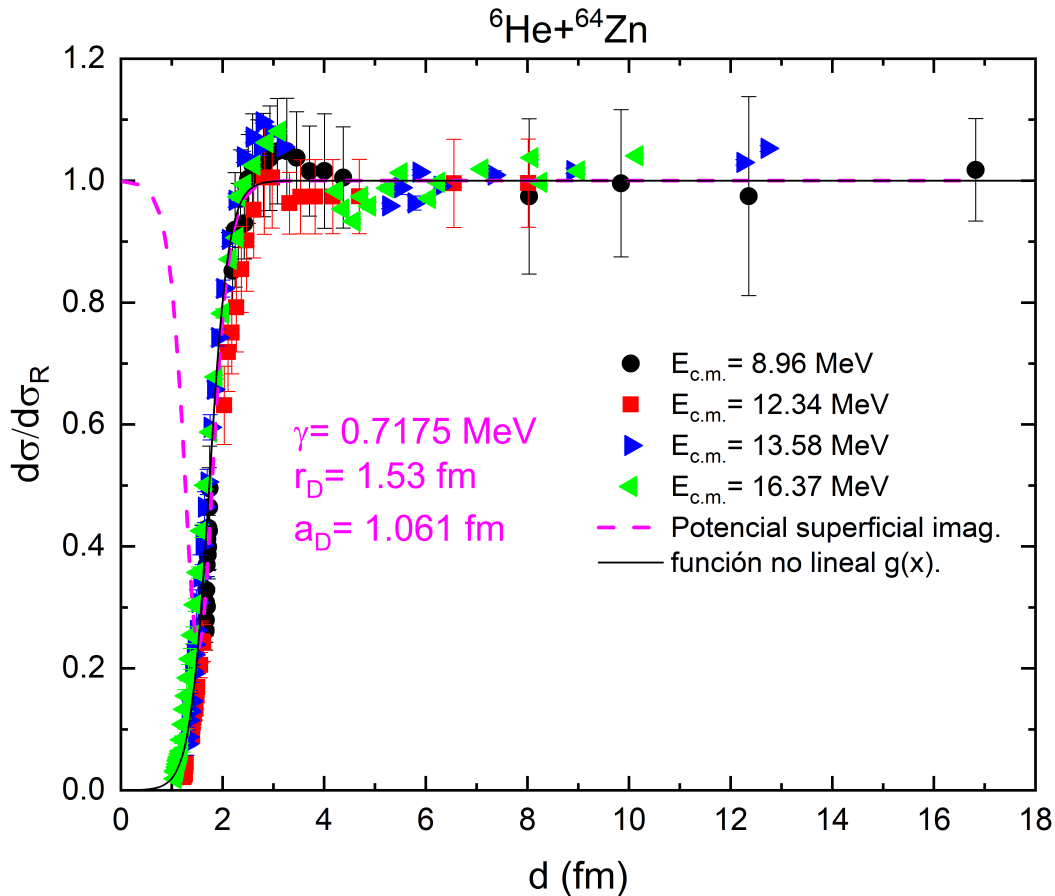


Figura 5.4: Obtención de parámetros geométricos para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$. Los datos experimentales han sido reportados por Pietro (2004) y Fernandez-García (2019).

Este sistema tiene disponibles datos experimentales de Distribución Angular a energías

de $E_{\text{Lab}} = 9.84, 13.45, 14.85$ y 17.93 MeV. La altura de la Barrera de Coulomb se encontraría a una altura $B = 8.4$ MeV, que equivale aproximadamente a $B_{\text{Lab}} = 9.2$ MeV en el sistema de referencia del laboratorio, es decir, por abajo de todas las energías medidas. Las Secciones Eficaces de Fusión son obtenidas mediante una interpolación usando la ecuación de Wong:

$$\sigma(E) = \frac{\hbar\omega R_B^2}{2E} \text{Ln} \left(1 + e^{\frac{2\pi(E-V_B)}{\hbar\omega}} \right)$$

Se inicia por la obtención de los datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica a las energías mencionadas, disponibles en las bases de datos (NNDC y NRV) siguiendo la metodología del capítulo 2. Posteriormente, se realiza una búsqueda de datos experimentales de Secciones de Fusión para la Reacción Nuclear ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn} \rightarrow {}^{70}\text{Ge}^*$ (ver Figura 6.9) recuperando los datos mostrados en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2: Datos experimentales de Sección Eficaz de Fusión para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ a diferentes energías [Scuderi,2011] y [Di Pietro,2004].

E_{Lab} (MeV)	σ_{F} (mb)	Inc.+ (mb)	Inc.- (mb)
8.24	36.55	11	1
10	119	59	7
11.54	238	28	27
12.94	362	64.5	63
13.83	500	134.5	134.5
15.13	519.4	89.06	89.06
16.35	628.3	136.8	63.99
17.5	629.6	169.5	169.5

Inicialmente, se realiza la transformación $\theta_{\text{C.M.}} \rightarrow d$ de la misma manera que para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ [Torabi,2020]. Esto ofrece información sobre el rol y dominio de las diferentes fuerzas implicadas en una reacción nuclear (Fuerza de Coulomb y Fuerzas nucleares de corto alcance) aportando información valiosa sobre las características físicas del sistema en cuestión.

Realizando la misma metodología de la sección 5.1 para obtener los parámetros geométricos del sistema, se ajusta una curva de 2 parámetros ajustables sin significado físico $g(d)$ y mediante la relación $g(d_{\text{max}}) = 0.25$; $d_{\text{max}} = r_d$ se obtiene el radio reducido. Este radio

reducido en promedio describe la distancia a la que ocurren las Reacciones Directas en la reacción nuclear. Posteriormente, se ajusta una segunda curva de la forma $1 - \gamma f_D^{(1)}(r_D, a_D)$ (con el uso de la herramienta Origin mediante las funciones *Analysis* \rightarrow *Fitting* \rightarrow *Non Linear Curve*) de tal manera que el ala derecha de esta curva se traslape con $g(d)$, obteniendo la difusividad del potencial periférico que describe las Reacciones Directas.

Una vez realizado este proceso, se obtienen los siguientes parámetros geométricos: $r_D = 1.53$ fm, $a_D = 1.061$ fm, $r_F = 1.4$ fm y $a_F = 0.43$ fm, donde los dos últimos son resultado de investigaciones y observaciones experimentales (ver Figura 5.4).

17.93	6	2	64	30	
15	60	0.01			
0	0	0.56	0.53	0.56	0.53
1	0.78	50.0	1.0	0.2	
1	1	-1	-1	0	

Figura 5.5: Archivo de entrada para el cálculo de SPP. Sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$. Nombre del archivo: sys1.inp

Posteriormente, se debe calcular el potencial V_{bare} mediante SPP. Se debe extraer exclusivamente el potencial nuclear etiquetado mediante la columna SPP en el archivo de salida del programa. La Figura 5.5 muestra el archivo de entrada para el correspondiente cálculo a una energía $E_{\text{Lab}} = 17.93\text{MeV}$. Para su uso en FRESKO y SFRESKO, se debe guardar con la extensión ‘*fort.4*’ para poder calcular las Distribuciones Angulares y las Secciones Eficaces de Fusión.

Tabla 5.3: Secciones Eficaces de Fusión como resultado del ajuste de la ecuación de Wong y aproximaciones lineales.

E_{Lab}	$\sigma_F(mb)$
9.84	111.50
13.45	406.27
14.85	513.00
17.93	691.25

Para realizar el ajuste de la ecuación de Wong sobre los datos de la Tabla 5.2 se hace uso de la herramienta *Origin*, mediante las funciones *Analysis* \rightarrow *Fitting* \rightarrow *Non Linear Curve*. Una vez realizado el ajuste, se utiliza la función *Data Reader* sobre la curva de la

ecuación de Wong para obtener una aproximación de la Sección Eficaz de Fusión a las energías $E_{\text{Lab}} = 9.84 \text{ MeV}$, 13.45 MeV , 14.85 MeV y 17.93 MeV .

Del tratamiento anterior se obtiene la estimación de las Secciones Eficaces de Fusión, mostradas en la Tabla 5.3. Esta información será usada para realizar optimizaciones posteriores mediante SFRESCO.

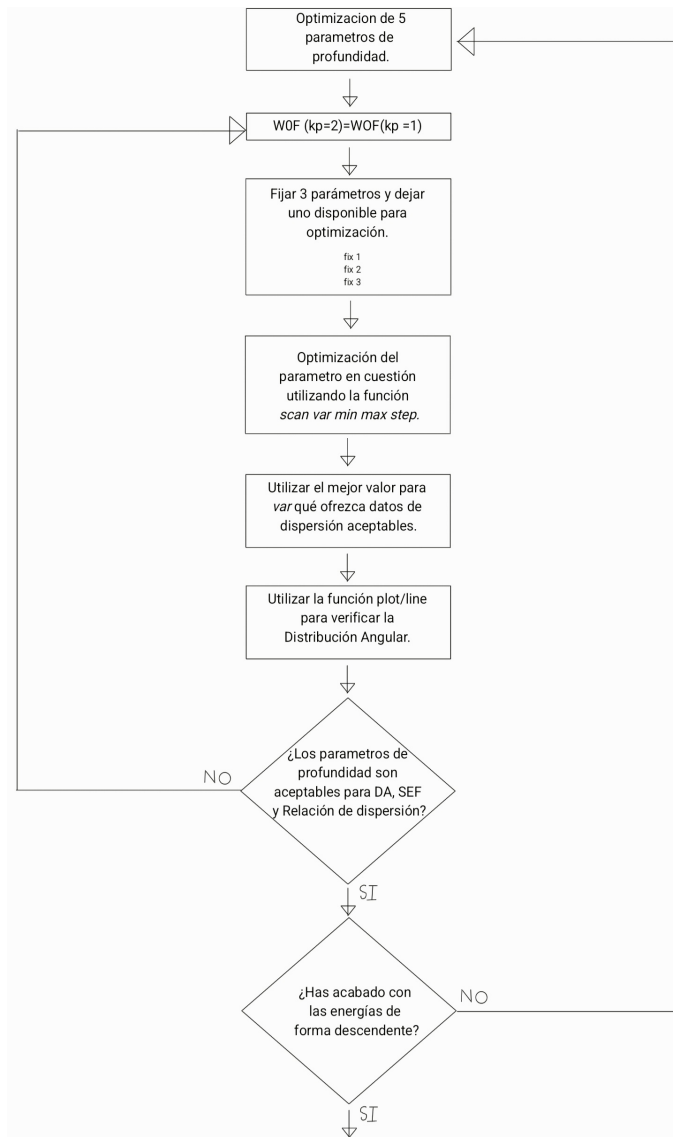


Figura 5.6: Proceso de optimización para el Sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$.

Sin embargo, la Sección Eficaz de Fusión para la energía $E_{\text{Lab}} = 9.84 \text{ MeV}$ se ha obtenido mediante un ajuste lineal tomando los puntos $E_{\text{Lab}} = 8.24$ y $E_{\text{Lab}} = 10 \text{ MeV}$, de la Tabla 5.2. Es importante mencionar que la aproximación lineal utilizada no tiene

diferencias significativas con las estimaciones realizadas mediante la ecuación de Wong.

Posteriormente, se realiza un proceso de optimización (ver Figura 5.6) de manera similar al sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$. Se inicia mediante una optimización de 5 parámetros (es decir: V_{0D} , V_{0F} , W_{0D} y ambos W_{0F} presentes en $kp = 1$ y $kp = 2$). Esto permite obtener un punto de partida conveniente, con el objetivo de reproducir los mismos tres aspectos físicos relacionados con: 1. Distribución Angular para la Dispersión Elástica, 2. Sección Eficaz de Fusión y 3. Relación de Dispersión.

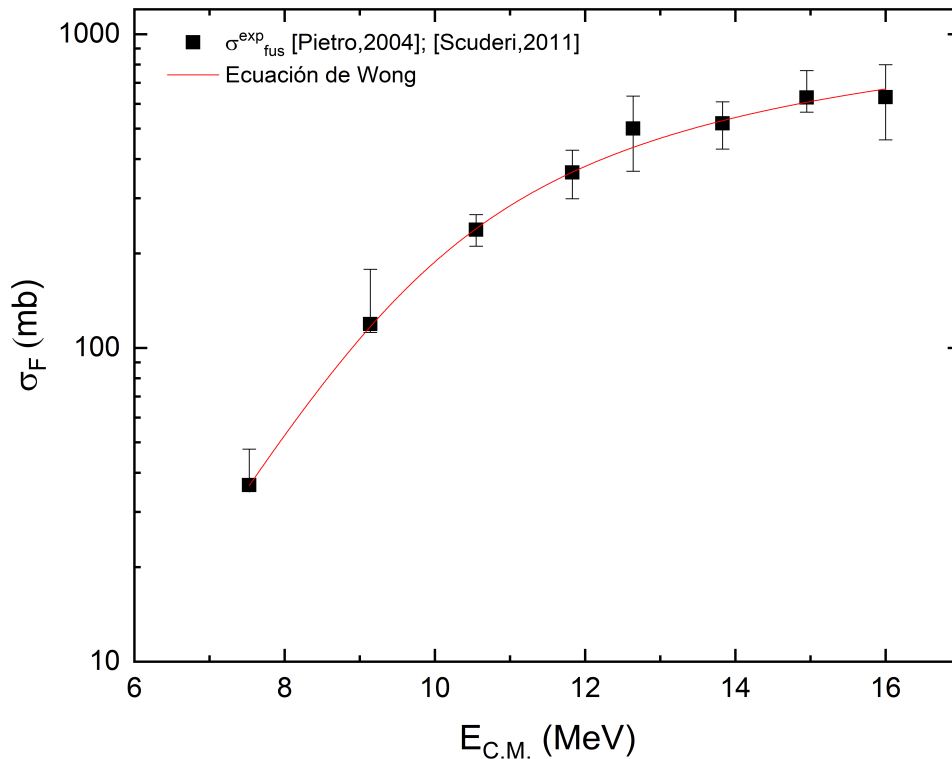


Figura 5.7: Sección Eficaz de Fusión mediante la ecuación de Wong para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$.

Inicialmente, los valores de W_{0F} en ambos casos ($kp=1$ y $kp=2$) generalmente serán diferentes, por lo tanto, se iguala el valor de W_{0F} presente en $kp = 1$ al valor de $kp = 2$.

Posteriormente, se realizan optimizaciones individuales sobre cada parámetro, partiendo de la energía más alta disponible del sistema, buscando obtener parámetros de profun-

didad conectados mediante la Relación de Dispersión.

Tal Relación de Dispersión (ver Figura 6.10) muestra un comportamiento constante de los potenciales imaginarios a altas energías. Cumpliendo lo anterior, es muy probable conseguir una buena descripción a energías que se acerquen a la Barrera de Coulomb.

Tabla 5.4: Parámetros de Profundidad, χ^2 (para la Distribución Angular) y Sección Eficaz de Fusión para el Sistema $^6\text{He}+^{64}\text{Zn}$ a diferentes energías. Las Secciones de Fusión reportadas corresponden a un valor de $W_{\text{int}} = 50$ MeV.

E_{Lab} (MeV)	$V_{0\text{D}}$ (MeV)	$W_{0\text{D}}$ (MeV)	$V_{0\text{F}}$ (MeV)	$W_{0\text{F}}$ (MeV)	χ^2	σ_{F} (mb)
9.84	-0.28	0.41	3.00	4.00	0.336	132.09
13.45	-0.39	0.73	1.96	4.60	0.435	410.55
14.85	-0.53	0.26	1.25	4.30	56.748	748.53
17.93	-0.51	0.29	0.80	4.3	211.348	976.89

El uso del comando *line* (ver sección 3.3) ofrece una guía visual sobre qué tan bien se está reproduciendo la Distribución Angular Experimental, mientras que el comando *show* permite conocer el valor numérico de la Sección Eficaz de Fusión.

Los parámetros de profundidad resultantes se presentan en la Tabla 5.4, los cuales reproducen los datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica y Sección Eficaz de Fusión, mientras que la Relación de Dispersión también se reproduce de buena manera.

Posteriormente, con el fin de visualizar la influencia del potencial W_{int} , se realizarán diferentes cálculos para cada una de las energías $E_{\text{Lab}} = 9.84$ MeV, 13.45 MeV, 14.85 MeV y 17.93 MeV, variando la profundidad de W_{int} desde un valor de 0 a 50 MeV, en al menos 4 diferentes pasos. Los resultados se muestran en la sección 6.2, donde se puede apreciar que las oscilaciones en las Distribuciones Angulares, que se presentan cuando W_{int} es pequeño, aparecen primordialmente a ángulos grandes (\rightarrow parámetros de impacto pequeños \rightarrow distancias de máximo acercamiento pequeñas).

5.3. $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$

La única energía disponible para este sistema, donde el proyectil es ^{14}N , es $E_{\text{Lab}} = 25$ MeV, siendo la única reportada en las bases de datos antes mencionadas. Corresponde a

una energía muy por encima de la altura de la Barrera de Coulomb ($B = 4.58$ MeV, o $B_{\text{Lab}} = 11.7$ MeV). Los datos experimentales de Sección Eficaz Diferencial de Dispersión Elástica están disponibles en unidades de mb/sr, es decir, si se requiriere realizar un análisis usando la razón entre la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford habría que realizar los cálculos correspondientes.

Se ha utilizado la herramienta *Origin* debido a su versatilidad a la hora de realizar cálculos y visualizar datos simultáneamente.

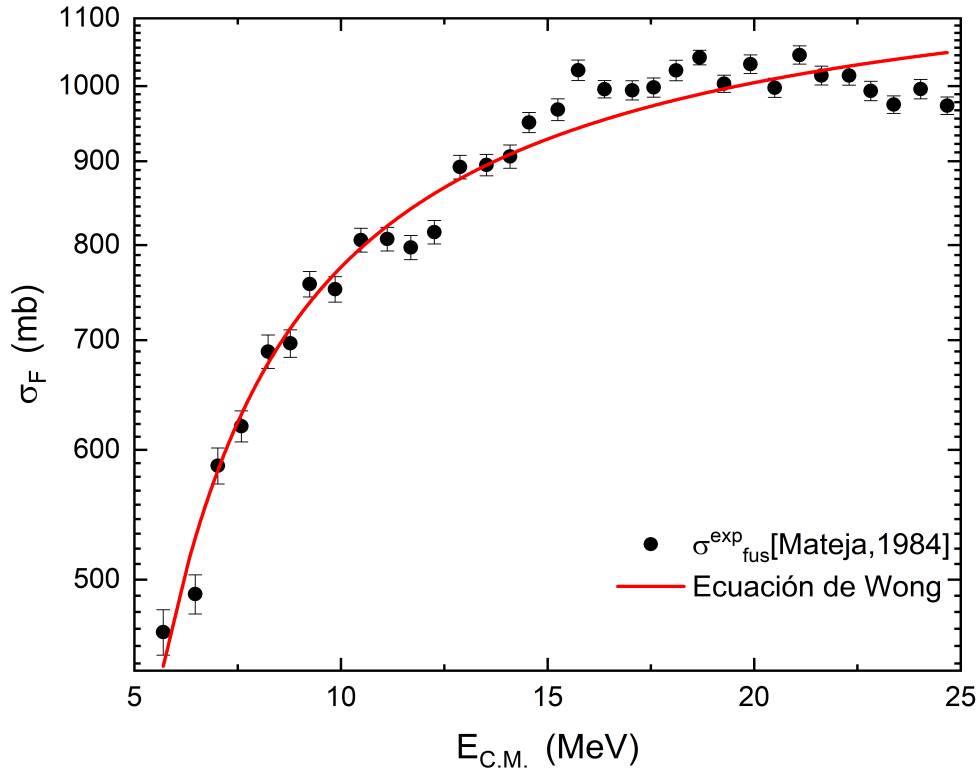


Figura 5.8: Sección Eficaz de Fusión mediante la ecuación de Wong para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$.

Se calcula la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford a los ángulos $\theta_{\text{C.M.}}$ presentes en los datos experimentales de Distribución Angular mediante la ecuación (1.36):

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{a^2}{4} \left[\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta_{\text{C.M.}}}{2}\right)} \right]; \quad a = \frac{Z_p Z_t e^2}{2E}; \quad e^2 = 1.44 \text{ MeV fm}$$

Para realizar el cálculo es importante resaltar que $\theta_{\text{C.M.}}$ debe estar expresado en radianes, además de considerar la transformación de unidades $\text{fm}^2 \rightarrow \text{b}$ ($1\text{fm} = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$, $1\text{barn} = 1 \times 10^{-28} \text{ m}^2 \Rightarrow 1\text{barn} = 1 \times 10^2 \text{ fm}^2$) con el objetivo de coincidir con las unidades de los datos experimentales. Una vez realizado el cálculo de la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford para los $\theta_{\text{C.M.}}$ presentes en los datos experimentales, se calcula la razón con los datos experimentales al mismo ángulo de dispersión.

Tabla 5.5: Datos Experimentales de Sección Eficaz de Fusión para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$ a diferentes energías [Mateja,1984].

$E_{\text{C.M.}}$ (MeV)	σ_{F} (mb)	Inc. (mb)	$E_{\text{C.M.}}$ (MeV)	σ_{F} (mb)	Inc. (mb)
5.699	464.49	14.797	15.74	1022.7	14.805
6.473	489.94	13.478	16.38	995.72	12.110
7.018	586.74	14.801	17.05	994.28	13.451
7.587	620.29	13.475	17.57	998.24	13.463
8.234	688.82	16.154	18.11	1022.4	14.812
8.775	696.81	13.459	18.68	1041.1	10.768
9.241	757.29	13.463	19.27	1003.4	12.106
9.858	751.81	13.463	19.91	1031.5	13.455
10.48	805.54	13.463	20.5	997.8	13.451
11.12	806.79	13.428	21.1	1044.8	13.451
11.69	797.29	13.444	21.63	1015.1	13.455
12.26	814.69	13.451	22.3	1015	13.455
12.88	892.64	14.801	22.82	993.42	13.451
13.52	895.24	13.459	23.38	974.49	12.106
14.09	905.92	14.809	24.03	995.93	13.451
14.55	950.25	13.451	24.67	972.96	12.106
15.25	967.64	14.801			

La incertidumbre se ha obtenido realizando el cociente entre la Incertidumbre en unidades Absolutas y la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford. El cálculo anterior permite ser más versátil a la hora de realizar las optimizaciones pertinentes, ya que se podría realizar sobre la SED absoluta o sobre la razón resultante de los cálculos (Tabla 5.6). Esto también permitirá verificar que los cálculos realizados sobre SED de Rutherford son correctos, mediante la conservación de χ^2 .

Posterior a esto, se ha realizado una estimación de la Sección Eficaz de Fusión experimental mediante la ecuación de Wong (5.3), tomando los datos de la Tabla 5.5, usando la

herramienta *Origin* mediante las funciones *Analysis* \rightarrow *Fitting* \rightarrow *Non Linear Curve*.

Este ajuste proporciona la curva roja de la Figura 5.8, donde el valor extraído a $E_{\text{Lab}} = 25\text{MeV} \rightarrow E_{\text{C.M.}} = 9.782\text{MeV}$ es $\sigma_{\text{F}} = 765.32\text{mb}$ utilizado en el proceso de optimización. La incertidumbre en la Tabla 5.5 no está presente en el artículo original, sin embargo, esta corresponde al radio del símbolo tal como se reporta en el artículo original. Es probable que la incertidumbre real reportada por los autores se encuentre por dentro de este símbolo. Sin embargo, se ha incluido dentro del análisis de datos debido a la baja resolución de la gráfica original.

```
'14n+9be.in' 'fm.out' 9 2
&variable kind=1 name='Vd' kp=1 pline=3 col=1 valmin=-70.0 valmax=70.0/
&variable kind=1 name='Wd' kp=1 pline=3 col=4 valmin=0.0 valmax=80.0/
&variable kind=1 name='Vf' kp=1 pline=4 col=1 valmin=-70.0 valmax=70.0/
&variable kind=1 name='Wf1' kp=1 pline=4 col=4 valmin=0.0 valmax=90.0/
&variable kind=1 name='Wf2' kp=2 pline=2 col=4 valmin=0.0 valmax=90.0/
&variable kind=1 name='ad1' kp=1 pline=3 col=3 valmin=0.0 valmax=90.0/
&variable kind=1 name='ad2' kp=1 pline=3 col=6 valmin=0.0 valmax=90.0/
&variable kind=1 name='rd1' kp=1 pline=3 col=2 valmin=0.0 valmax=90.0/
&variable kind=1 name='rd2' kp=1 pline=3 col=5 valmin=0.0 valmax=90.0/
&data type=0 iscale=2 idir=0 lab=F abserr=T/
40.277 244.9 36.735
53.963 59.35 8.9025
59.043 30.99 4.6485
63.963 20.76 3.114
67.826 14.62 2.193
68.704 13.45 2.0175
74.154 9.007 1.35105
79.08 6.664 0.9996
82.077 6.022 0.9033
84.009 5.097 0.76455
89.11 3.647 0.54705
94.211 2.61 0.3915
98.953 1.72 0.258
.
.
.
&
&data type=3 ic=0 ia=2 idir=0 abserr=T/
25 765.32 7.65
&
```

Figura 5.9: Archivo de entrada para SFRESCO con 2 parámetros adicionales respecto a la Figura 4.3.

Hasta este punto, se tiene listo el conjunto de datos experimentales para empezar el proceso de optimización. Se realizó la transformación $\theta_{\text{C.M.}} \rightarrow d$, donde se observó que

debido a la falta de datos experimentales a ángulos de dispersión $\theta_{\text{C.M.}}$ pequeños, los cuales proporcionan información sobre los valores más grandes de las distancias reducidas de máximo acercamiento, los ajustes de las curvas $g(x)$ y $1 - \gamma f_{\text{D}}^{(1)}(r_{\text{D}}, a_{\text{D}})$ no proporcionaron parámetros geométricos confiables. Por este motivo, mediante los datos experimentales disponibles no es posible distinguir la transición entre el dominio de las fuerzas predominantes en reacciones directas, que actúan en la periferia, y aquellas de más corto alcance, tal y como se muestra en la Figura 5.10.

Tabla 5.6: Razón de la Sección Eficaz Diferencial Absoluta respecto a la Sección Eficaz Diferencial de Rutherford para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$ a energía $E_{\text{Lab}} = 25$ MeV.

$\theta_{\text{C.M.}}$	$d\sigma/d\sigma_R$	Inc.	$\theta_{\text{C.M.}}$	$d\sigma/d\sigma_R$	Inc.
40.277	0.324	0.049	109.151	0.035	0.005
53.963	0.237	0.036	113.737	0.035	0.005
59.043	0.172	0.026	119.053	0.050	0.008
63.963	0.154	0.023	124.152	0.038	0.006
67.826	0.133	0.020	128.907	0.034	0.005
68.704	0.128	0.019	134.014	0.029	0.004
74.154	0.112	0.017	138.953	0.027	0.007
79.080	0.103	0.015	143.716	0.026	0.003
82.077	0.105	0.016	149.014	0.027	0.007
84.009	0.096	0.014	153.800	0.037	0.006
89.110	0.083	0.012	158.754	0.043	0.006
94.211	0.071	0.011	164.042	0.037	0.005
98.953	0.054	0.008	168.838	0.056	0.015
104.044	0.039	0.006			

Es por este motivo que el proceso de optimización es un poco diferente, tomando el siguiente sentido. Se inicia mediante un conjunto de parámetros geométricos ya reportados para un sistema de masa similar. En este caso, se ha iniciado mediante el conjunto $r_{\text{D}} = 1.55\text{fm}$ y $a_{\text{D}} = 0.5\text{fm}$ los cuales fueron reportados para el sistema $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$ [Torabi,2024]. Estos parámetros geométricos son añadidos en el proceso de optimización.

Como consecuencia, el proceso de optimización requiere de modificaciones sobre los archivos de entrada para SFRESCO.

El conjunto de líneas de 7-10 en el archivo de entrada a SFRESCO (ver Figura 5.9) corresponde a la definición de parámetros geométricos r_{D} y a_{D} . La línea 7, 8 define el

parámetro a_D correspondiente al potencial real (adR) e imaginario (adI), respectivamente, mientras que la línea 9, 10 define el parámetro r_D correspondiente al potencial real (rdR) e imaginario (rdI), respectivamente. $idir = 0$ significa que la Distribución Angular de Dispersión Elástica está dada en unidades absolutas e $iscale = 2$ indica que está dado en unidades de mb/sr.

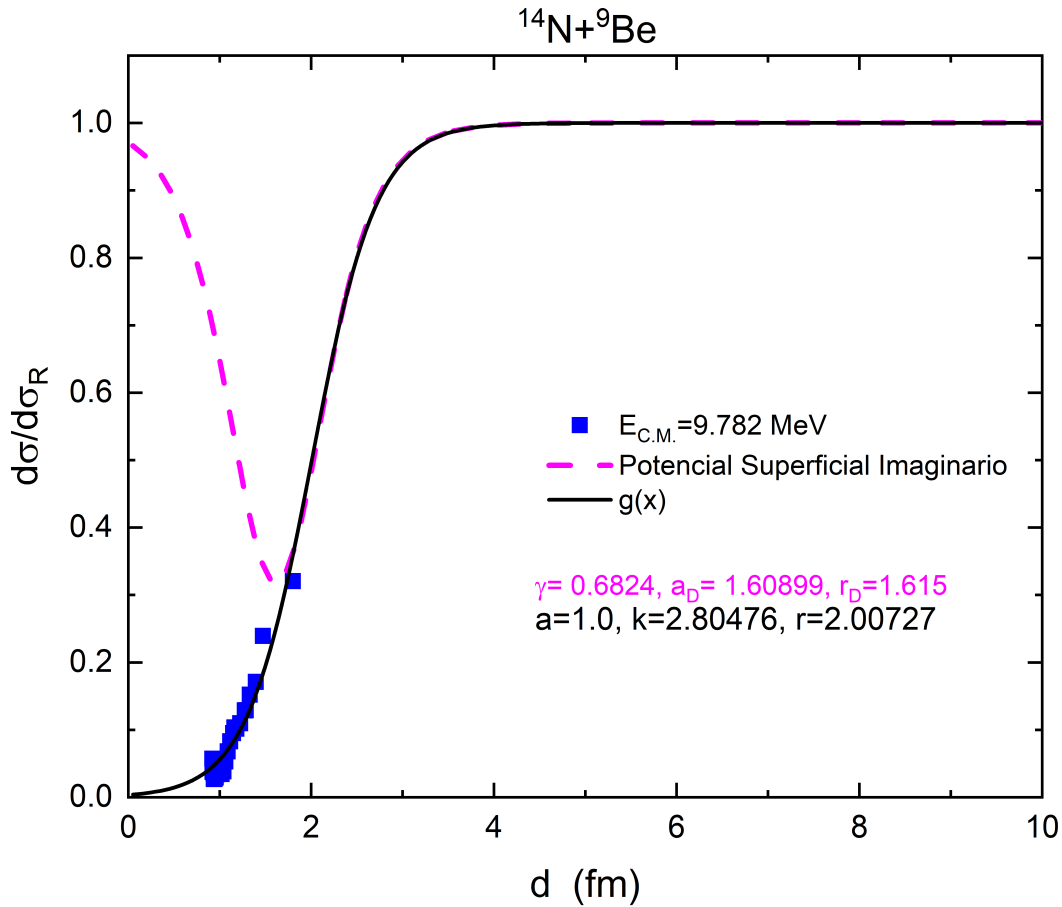


Figura 5.10: Obtención de parámetros geométricos para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$. Los datos experimentales han sido reportados por Bock (1965).

El proceso de optimización (ver Figura 5.11) inicia por definir los parámetros geométricos: $r_D = 1.55$ fm y $a_D = 0.5$ fm. Posteriormente, se realiza una optimización de 5 parámetros de profundidad: V_{0D} , V_{0F} , W_{0D} y ambos W_{0F} presentes en $kp = 1$ y $kp = 2$

Antes de seguir con el proceso es importante igualar el valor de W_{0F} presente en $kp = 2$ al valor de W_{0F} presente en $kp = 1$. Una vez optimizados los parámetros de profundidad para un conjunto dado de parámetros geométricos, se realiza una optimización adicional

sobre estos últimos. Esto se realiza de manera individual, es decir, se optimiza el radio reducido y difusividad de manera separada. Mediante el comando *fix* se fijan los 7 parámetros que no corresponden al parámetro geométrico en sí, dejando libres los 2 componentes este parámetro geométrico, los cuales aparecen en la parte real e imaginaria del potencial de polarización.

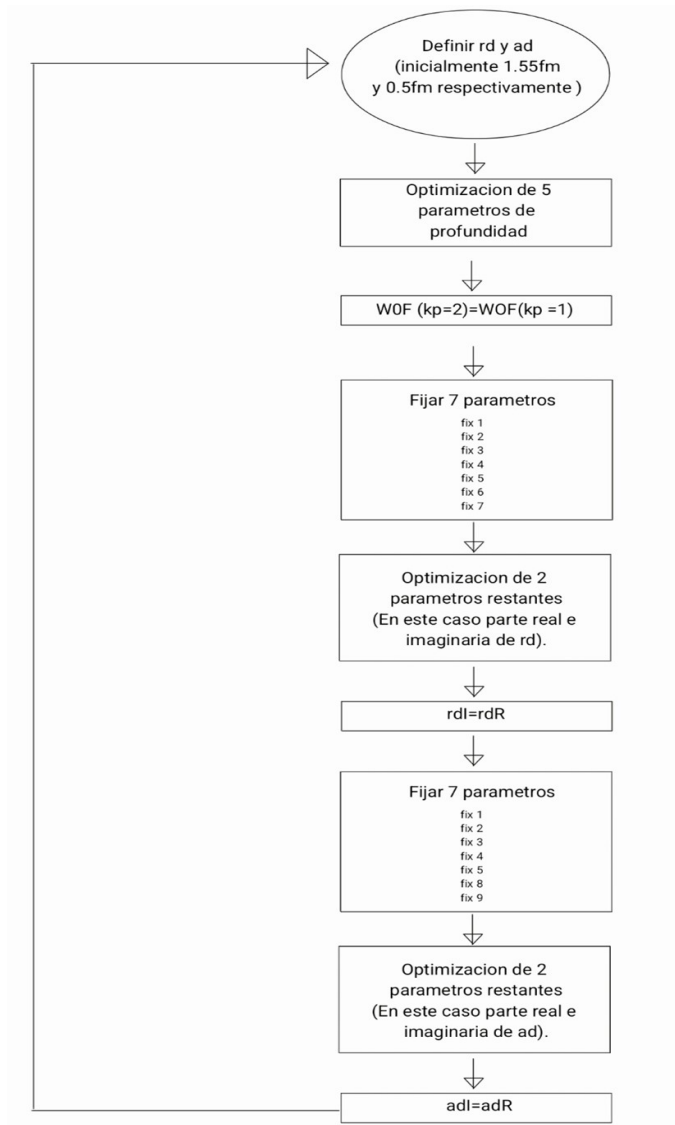


Figura 5.11: Proceso de optimización para el Sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$.

Finalmente, se realiza el mismo proceso para los 2 parámetros geométricos restantes (real e imaginario). Esto proporcionará otro conjunto de datos, los cuales deberán ser optimizados de nuevo en el mismo proceso anterior. Un diagrama de flujo sobre este proceso

es mostrado en la Figura 5.11.

La optimización se detiene hasta alcanzar una buena descripción de los datos experimentales, cuando los parámetros geométricos alcancen valores razonables y/o cuando la herramienta SFRESCO lo permita. El último proceso de optimización debe ser sobre los 5 parámetros de profundidad, ya que serán esos lo mejores para el conjunto de parámetros geométricos r_D y a_D . Los parámetros finales son mostrados en la Tabla 5.7.

Obteniendo los mejores parámetros geométricos y de profundidad, se realizan diferentes cálculos sobre W_{int} desde 0 MeV a 50 MeV al menos en 4 diferentes pasos, esto con el fin de observar cuál es el efecto del potencial de absorción de muy corto alcance sobre la Distribución Angular de dispersión elástica.

Tabla 5.7: Parámetros de profundidad, geométricos y Sección Eficaz de Fusión para el Sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$. Las Secciones de Fusión reportadas corresponden a un valor de $W_{\text{int}} = 4$ MeV.

$V_{0D}(\text{MeV})$	$W_{0D}(\text{MeV})$	$V_{0F}(\text{MeV})$	$W_{0F}(\text{MeV})$	$r_{0D}(\text{fm})$	$a_{0D}(\text{fm})$	$\sigma_F(\text{mb})$
-0.01	0.19	-3.60	6.30	1.63	0.90	762.81

Los resultados obtenidos que muestran la sensibilidad y efecto de W_{int} serán mostrados en la sección 6.3, donde se observa que un valor de profundidad $W_{\text{int}} = 4$ MeV tiende a reproducir de buena manera las oscilaciones que aparecen desde ángulos medios $\theta_{\text{C.M.}} \sim 40^\circ$, verificando la tendencia de los datos experimentales presentes a ángulos mayores.

5.4. ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$, ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$

Este sistema débilmente ligado tiene disponibles Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica en un amplio intervalo de energías. Específicamente $E_{\text{Lab}} = 13, 14.5, 17.3, 19$ y 21 MeV reportados por Oliveira (2011), $E_{\text{Lab}} = 14$ MeV reportado por Ungricht (1979) y $E_{\text{Lab}} = 19.95$ MeV reportado por Jarczyk (1979). Estos sistemas se midieron específicamente al llevar a cabo la reacción ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$, es decir, usando ${}^9\text{Be}$ como proyectil. Sin embargo, existen más Distribuciones Angulares a energías $E_{\text{Lab}} = 12, 15, 18$ y 21 MeV reportados por Barker (1970) para la reacción inversa ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$.

Este sistema ha sido estudiado recientemente por Torabi (2024), realizando la metodología antes mencionada. Es decir, el potencial efectivo se describe por la ecuación (1.12). En adición a esto, la obtención de los parámetros geométricos se basa en estimaciones sobre sistemas débilmente ligados. Los parámetros de profundidad han sido optimizados bajo el mismo concepto, es decir, ofrecer una buena reproducción de los datos experimentales de Distribución Angular de Dispersión Elástica, Sección Eficaz de Fusión y también que los parámetros de profundidad cumplan la Relación de Dispersión. Los radios reducidos para describir los potenciales de Reacciones Directas y de Fusión (U_D y U_F respectivamente) se han fijado en $r_D = 1.55\text{fm}$ y $r_F = 1.4\text{fm}$.

Por otro lado, los parámetros de profundidad y difusividades que cumplen con los 3 requisitos físicos mencionados anteriormente (reproducir la Distribución Angular, Sección Eficaz de Fusión y Relación de Dispersión) son mostrados a continuación.

Tabla 5.8: Parámetros de profundidad, difusividades, χ^2 (para la Distribución Angular) y Secciones Eficaces de Fusión para el Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y su reacción inversa ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ a diferentes energías [Torabi,2024].

$E_{C.M.}$ (MeV)	V_{0D} (MeV)	W_{0D} (MeV)	a_D (fm)	V_{0F} (MeV)	W_{0F} (MeV)	a_F (fm)	χ^2	σ_F (mb)
5.14	0.55	0.85	0.5	4.1	5.3	0.43	1.367	340.00
6.43	0.2	0.99	0.5	4.0	6.5	0.43	1.261	481.33
7.43	0.38	0.68	0.6	4.0	6.5	0.43	2.967	651.64
7.71	0.12	0.6	0.6	6.4	8.7	0.4	13.782	684.00
8.0	0.16	0.53	0.6	4.5	7.3	0.4	2.339	719.71
8.29	0.35	0.42	0.68	3.63	9.0	0.35	6.395	753.25
9.0	0.17	0.25	0.82	6.8	9.0	0.29	19.187	822.63
9.89	0.21	0.31	0.82	4.5	9.3	0.29	10.465	839.50
10.86	0.33	0.38	0.85	4.7	11.5	0.29	18.254	862.32
11.43	0.27	0.35	0.85	2.8	10.7	0.29	33.924	883.22
12.0	0.35	0.36	0.85	3.1	10.5	0.26	29.706	890.86

El intervalo energético disponible es bastante amplio, incluso se extiende a energías $E_{C.M.}$ de 3 veces la Barrera de Coulomb. Por este motivo, las difusividades sufren diferentes modificaciones a medida que la energía aumenta (ver Tabla 5.8). El aumento de la difusividad para el potencial de Reacciones Directas a_D muestra que este potencial es más difuso a medida que la energía aumenta, es decir, indica que los mecanismos de rom-

pimiento aparentemente se propagan en mayor medida conforme la energía aumenta. Por otro lado, la difusividad para el potencial que describe los procesos de Fusión a_F indica una compresión de este potencial a medida que la energía aumenta, es decir, el efecto empieza a ser muy parecido al de una barrera de potencial (ya que a_F define una distancia sobre la cual el potencial cambia su valor de 0.1 a 0.9 veces su valor) en el cual mientras más grande sea la energía, mejor definida está la frontera donde inician los procesos de fusión.

Las estimaciones experimentales de las Secciones Eficaces de Fusión se realizan mediante la ecuación de Wong (ver ecuación (5.3)), haciendo uso de la herramienta *Origin*. Los datos experimentales utilizados para realizar esta estimación se recuperaron de Jarczyk (1981) y Cheung (1979).

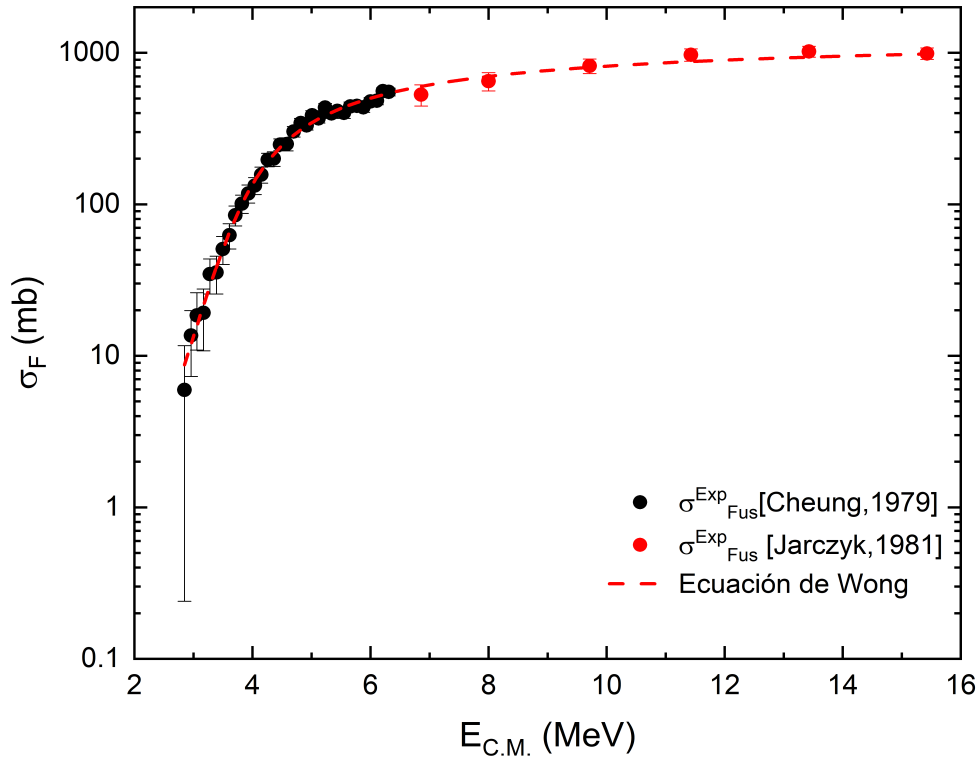


Figura 5.12: Ajuste mediante la ecuación de Wong para las estimaciones del sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y su reacción inversa.

Mediante los parámetros geométricos y de profundidad de la Tabla 5.8, y haciendo

uso de la herramienta FRESCO, se realizan diferentes cálculos con al menos 4 variaciones del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} , desde 0 MeV hasta 50 MeV. Los resultados respectivos se discutirán en el Capítulo 6.

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo se parte de los parámetros obtenidos antes para la descripción de las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica (y Fusión) y se realiza un análisis de la influencia y efecto del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} sobre dichas Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica y Secciones Eficaces de Fusión. En adición a esto, se realiza un análisis de ondas parciales mediante los elementos de la Matriz S en función del momento angular. Así mismo, se ha caracterizado la Barrera de Coulomb correspondiente del sistema para referencia en cualquier análisis posterior mediante *Threshold Anomaly* o *Break-up Threshold Anomaly*. Finalmente, se ha realizado una aproximación semiclásica al calcular la función de deflexión para cada onda parcial l que muestre comportamientos diferentes para diferentes valores del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} .

6.1. ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$

Este sistema débilmente ligado es de particular interés debido al amplio intervalo energético disponible de datos para las Distribuciones Angulares y Secciones Eficaces de Fusión. Es preciso mencionar que este sistema ha sido ya analizado dentro del marco del EOM [So,2010], pero usando un potencial "double folding" para V_{bare} , mientras en el presente trabajo se usa SPP. La característica de mayor interés de la Barrera de Coulomb en nuestro análisis es su altura. Para caracterizarla se hace uso de SPP (que proporciona el

potencial nuclear sin ningún efecto de polarización adicional), en adición con el Potencial electrostático de Coulomb (ver Figura 6.1).

La suma de estos potenciales ofrece una curva similar a la Figura 1.1. Es decir, el potencial atractivo a cortas distancias (cuando los núcleos están solapados uno sobre el otro) es bastante fuerte, disminuyendo a medida que la distancia se acerca a la superficie de los núcleos. Sin embargo, cuando los Núcleos Proyectil y Blanco se separan a distancias similares a la suma de sus radios (es decir, es un contacto superficial) domina el potencial repulsivo debido a la carga de los núcleos, es aquí donde la Barrera adquiere su sentido físico y, por lo tanto, su altura máxima.

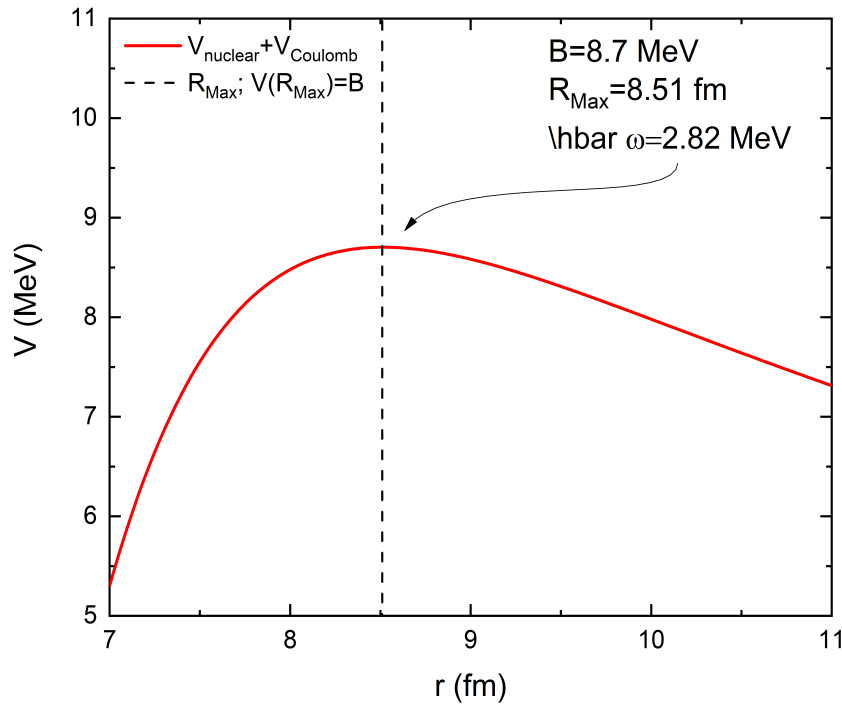


Figura 6.1: Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ mediante SPP.

En la Figura 6.1 se muestra que la altura de la Barrera es $B = 8.7$ MeV. La distancia r es la distancia de separación entre los centros de masa de los Núcleos Proyectil y Blanco y $R_{\text{Max}} = 8.51$ fm es la distancia a la cual la Barrera adquiere su valor máximo. Por último, $\hbar\omega = 2.82$ MeV caracteriza la anchura de la Barrera. Esta puede ser interpretada

como la energía necesaria para que el Núcleo Proyectil tenga mayores probabilidades de experimentar un efecto de tunelamiento y posteriormente llevar a cabo la reacción nuclear.

La altura de la Barrera es necesaria para dar lectura a la Relación de dispersión (ver Figura 6.2), especialmente por la dependencia energética de la profundidad de los potenciales de polarización. La altura de la Barrera en el sistema de Laboratorio es aproximadamente $B_{\text{Lab}} = 11.5 \text{ MeV}$.

La Relación de Dispersión mostrada en la Figura 6.2 muestra las estimaciones obtenidas mediante la optimización de los parámetros de profundidad, la dependencia energética de los potenciales imaginarios y el resultado de la misma sobre los potenciales reales mediante la ecuación (1.39). Los parámetros de la Tabla 5.1 satisfacen la Relación de Dispersión tal como se muestra en la Figura 6.2, esto significa que tanto la dependencia energética de las partes reales como las imaginarias es correcta y reproducen de buena manera los efectos anómalos que están presentes en las vecindades de la Barrera. Estos efectos anómalos se visualizan en la caída a cero de los potenciales imaginarios (que absorben el flujo del Canal Elástico) y una forma de campana en los potenciales reales, lo cual significa que la dispersión elástica adquiere un rol más dominante sobre otros Canales de Reacción en ese intervalo energético.

La caída a cero de los potenciales imaginarios se asocia con el cierre de los Canales de Fusión y Reacciones Directas (llamado comúnmente *Threshold Anomaly*) debido a que la energía disponible por el sistema para llevar a cabo la Reacción Nuclear ahora es muy pequeña. Es decir, cuanto más complejo sea el Canal de Reacción, será más probable que el Canal se cierre. Por este motivo, el flujo presente en el Canal Elástico no es absorbido por otros canales y por eso el aumento en forma de campana de los potenciales reales.

Finalmente, la Relación de Dispersión (ver Figura 6.2) muestra un comportamiento bastante consistente de las profundidades obtenidas mediante optimización (Tabla 5.1) respecto al comportamiento predicho por la teoría, dado por las curvas mostradas en la figura. Esto se cumple tanto a energías que se extienden por encima de la Barrera de Coulomb B , hasta energías muy próximas a la misma. Para realizar un análisis más completo de las Distribuciones Angulares, Secciones Eficaces de Fusión y Relación de Dispersión, se ha añadido la energía $E_{\text{Lab}} = 13 \text{ MeV}$ reportado por Zisman (1980), con

el objetivo de verificar que el comportamiento del parámetro de profundidad W_{0F} a bajas energías sea el predicho por la Relación de Dispersión. Dicha energía $E_{\text{Lab}} = 13 \text{ MeV}$ no fue incluida en el análisis de la Referencia [So,2010].

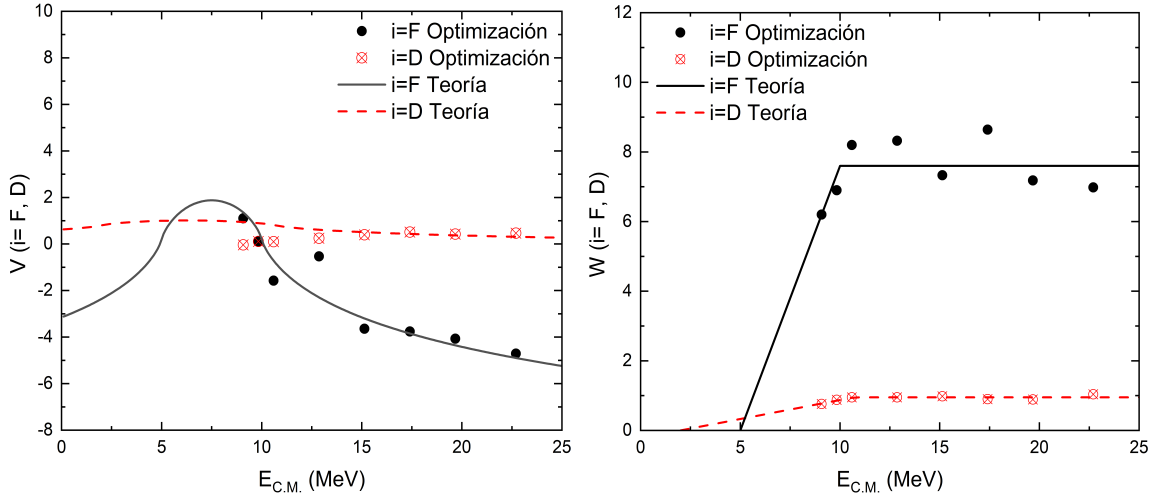


Figura 6.2: Relación de dispersión de los parámetros de profundidad mostrados en la Tabla 5.1 para sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$.

Ahora bien, existe cierta ambigüedad en los parámetros del potencial que satisfacen las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica, es decir, existen más de un conjunto de parámetros de profundidad y geométricos que logran ajustarse de muy buena manera a los datos experimentales. Sin embargo, el objetivo es eliminar estos problemas, encontrando conjuntos de parámetros que satisfagan tanto las Distribuciones Angulares, la Relación de Dispersión y además las Secciones Eficaces de Fusión (ver Figura 6.3). Para el presente sistema se reproducen de buena manera los datos experimentales de Distribución Angular, tanto a energías bajas $E_{\text{Lab}} = 12, 13$ y 14 MeV , como a energías grandes $E_{\text{Lab}} = 26$ y 30 MeV .

Por otro lado, tomando los parámetros de profundidad de la Tabla 5.1 y haciendo uso de la herramienta FRESCO se realizan variaciones en el parámetro W_{int} desde 0 MeV a 50 MeV en al menos 4 diferentes pasos, esto con el fin de observar cuál es su efecto en las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica. Estos efectos se visualizan en las Figuras 6.4. Este potencial de muy corto alcance se manifiesta al suprimir oscilaciones que se presentan primordialmente a ángulos medios y grandes para energías altas, como puede verse en la Figura 6.4 a partir de 20 MeV . Esto tiene el siguiente sentido físico:

clásicamente, cada ángulo de dispersión tiene asociado un parámetro de impacto y una distancia de máximo acercamiento que depende tanto de los detalles superficiales de los Núcleos Proyectoil y Blanco como de la energía disponible por el sistema para llevar a cabo la Reacción Nuclear.

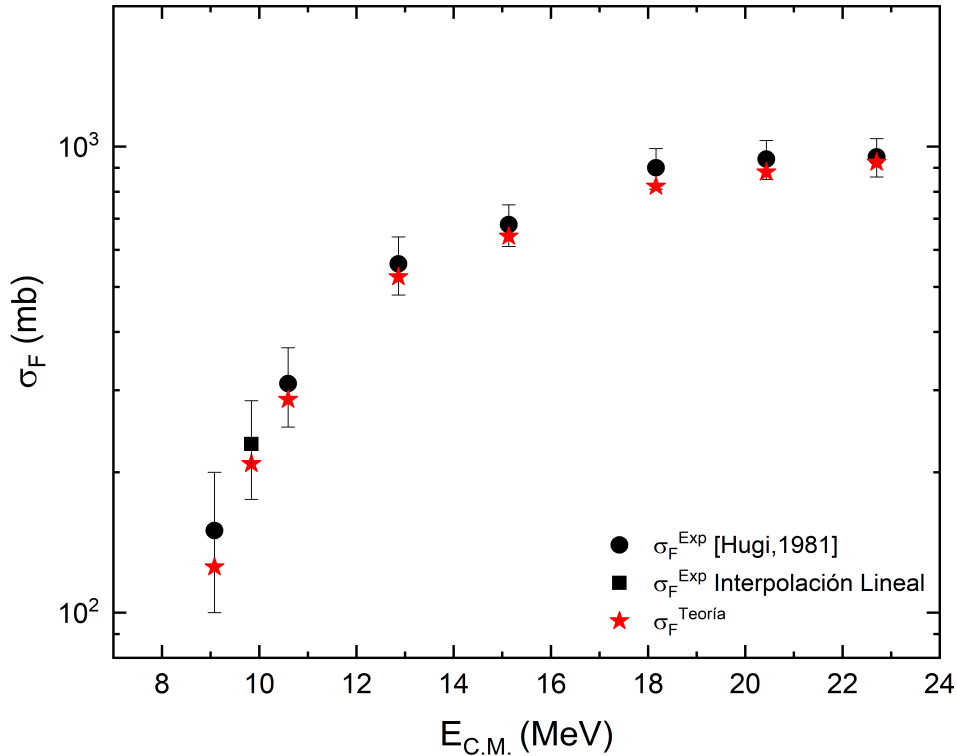


Figura 6.3: Secciones Eficaces de Fusión experimentales (círculos y cuadros negros) en comparación con los cálculos realizados en la presente investigación (estrellas rojas) mostrados en la Tabla 5.1 para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$.

Esta región de ángulos medios y grandes tiene asociados parámetros de impacto y distancias de máximo acercamiento que empiezan a ser comparables e incluso menores que el radio de absorción fuerte entre ambos núcleos. Por este motivo es que las interacciones que producen ángulos de dispersión grandes (es decir, parámetros de impacto pequeños y, por lo tanto, distancias de máximo acercamiento pequeñas) serán aquellas que con mayor probabilidad causen una absorción de ondas parciales de la onda total incidente dentro del Núcleo Blanco.

Esta transmisión y absorción de ondas parciales se debe ver reflejada de dos diferentes maneras: mediante los coeficientes de reflexión que determinan la amplitud de la onda parcial saliente (Matriz S), y mediante un aumento de la probabilidad de interacción.

Por otro lado, la dependencia energética de W_{int} sobre las Distribuciones Angulares indica que a medida que la energía disponible por el sistema $E_{\text{C.M.}}$ para llevar a cabo la Reacción Nuclear disminuye, las oscilaciones desaparecen. Esto es consecuencia directa de que ahora la energía de la onda parcial incidente (con número cuántico l) ya no es suficiente para penetrar y transmitirse a través del Núcleo Blanco, es decir, las probabilidades de que la onda parcial l experimente un efecto de tunelamiento son muy bajas, por lo tanto, las oscilaciones en la Distribución Angular desaparecen de manera significativa.

La Figura 6.5 muestra la magnitud de los elementos de la Matriz S en función del número cuántico de momento angular orbital l . Se comparan la energía disponible más pequeña $E_{\text{Lab}} = 12$ MeV respecto la energía disponible más alta $E_{\text{Lab}} = 30$ MeV con el objetivo de visualizar de manera clara la dependencia energética sobre el parámetro W_{int} .

Para la energía más baja, la magnitud del elemento correspondiente de la Matriz S (o coeficiente de reflexión) en función del momento angular l muestra que existe una pérdida de flujo del Canal Elástico desde la onda parcial $l = 0$ hasta la onda parcial $l = 8$ para ambos valores de W_{int} . La absorción de la onda parcial con número cuántico l se traduce en un aumento de la Sección Eficaz de Fusión por un factor proporcional a $(2l + 1)[1 - |S|^2]$. Sin embargo, no se pierde flujo desde el Canal Elástico totalmente (satisfaciendo $0 < |S| < 1$), ya que la energía disponible por el sistema se encuentra en una vecindad bastante cercana a la Barrera de Coulomb. Solo aquellas ondas parciales con l pequeña podrán experimentar Canales de Reacción más complejos que el Canal Elástico.

Para la energía más alta, la magnitud de los elementos correspondientes de la Matriz S indican que la pérdida de flujo del Canal Elástico es mucho mayor (satisfaciendo $|S| \approx 0$), yendo desde ondas parciales con $l = 0$ hasta $l \approx 24$. Ahora las ondas parciales que llevan a los Núcleos Proyectoil y Blanco a Canales de Reacción más complejos son mayores en cantidad, esto debido a que ahora la energía disponible es mucho más grande y permite que ondas parciales con parámetros de impacto mayores puedan ser absorbidas fuera del Canal Elástico.

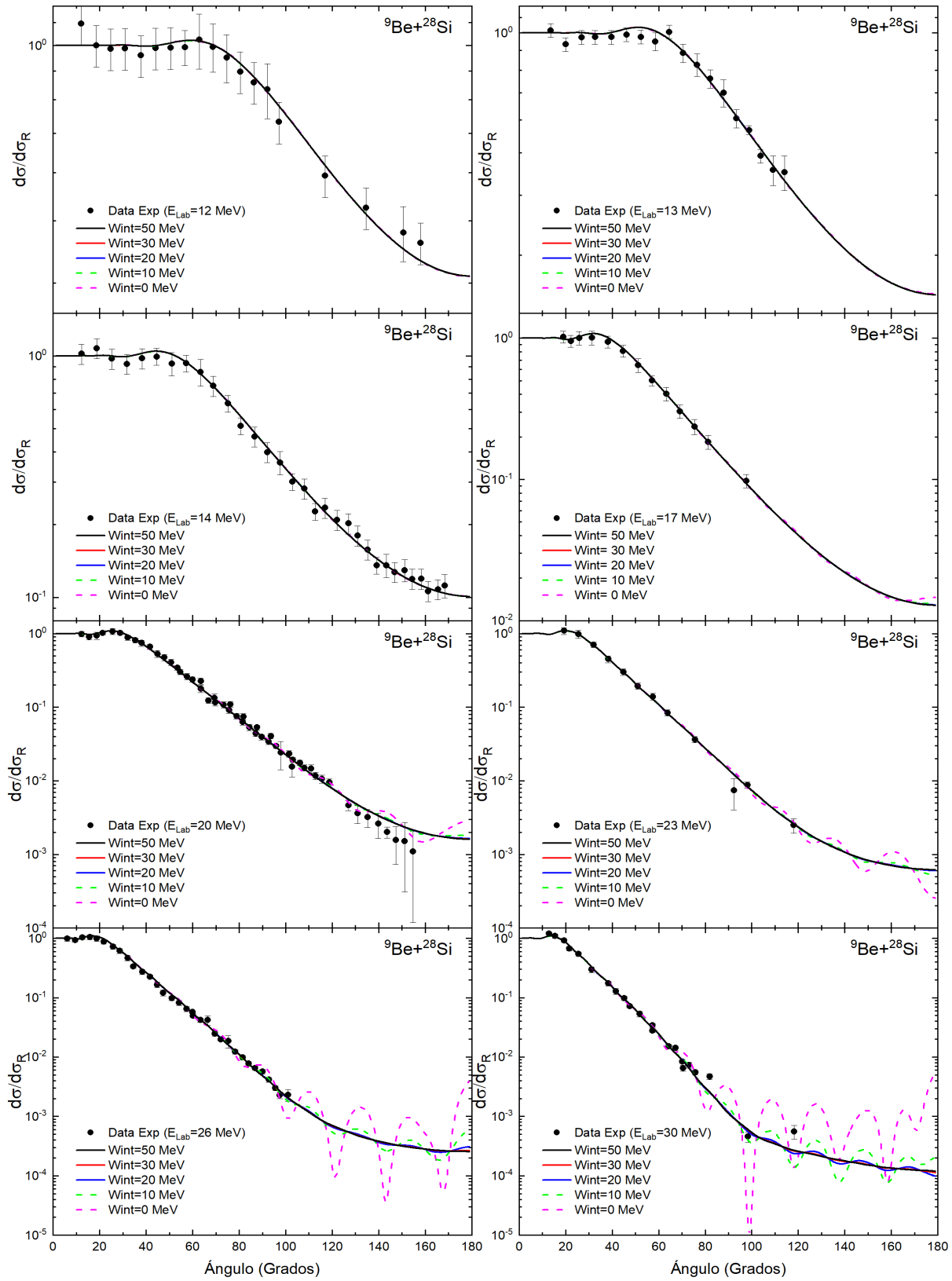


Figura 6.4: Distribuciones Angulares para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ a diferentes energías, utilizando los parámetros de la Tabla 5.1 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.

Ahora bien, se comparan las magnitudes de los elementos de la Matriz S (coeficientes de reflexión) para ambos valores de W_{int} al calcular la razón entre ambos, con el fin de ofrecer información sobre cuál onda parcial es aquella que reproduce el efecto de oscilación en las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica.

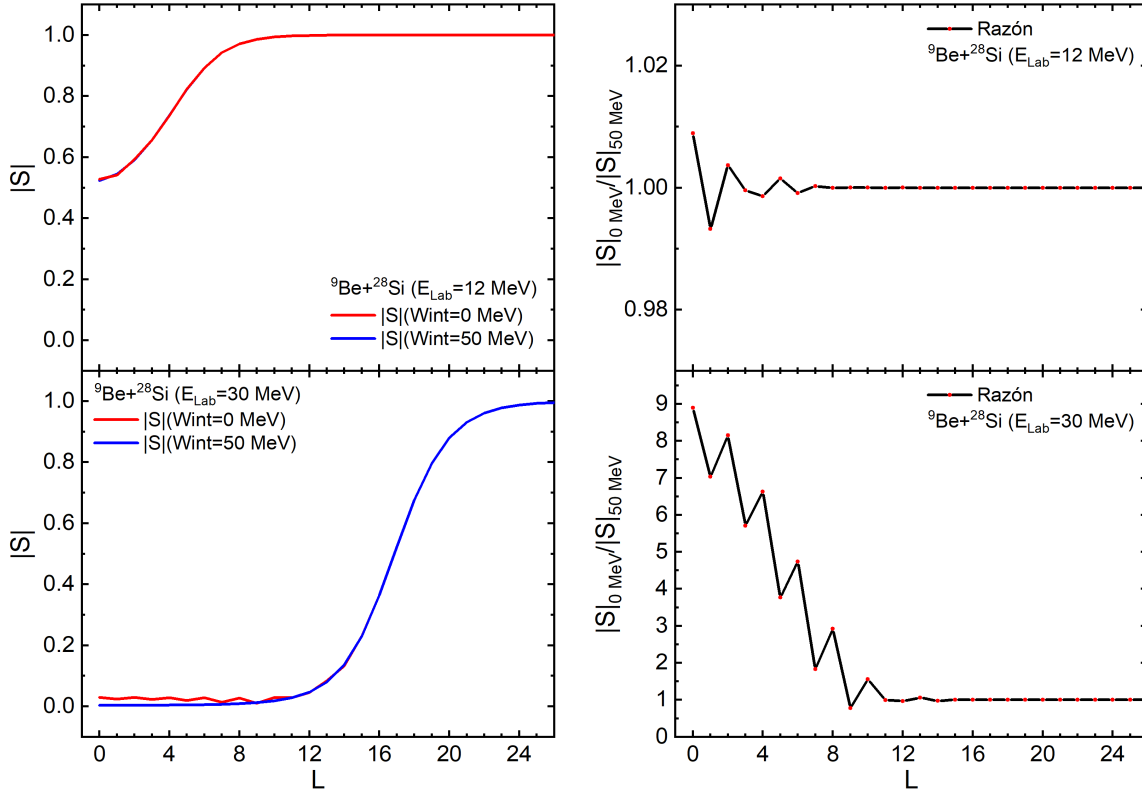


Figura 6.5: Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$.

Al comparar los coeficientes de reflexión de las Distribuciones Angulares para dos valores diferentes de W_{int} , se pueden obtener dos diferentes resultados: Que la razón entre ambos sea un número muy cercano a la unidad, es decir, que no existen apenas diferencias entre los coeficientes de reflexión y, por lo tanto, se describe la Reacción Nuclear de la misma manera, o que la razón se desvíe de la unidad, mostrando que existe una diferencia notable entre el coeficiente de reflexión $|S|_{0\text{MeV}}$ respecto al coeficiente de reflexión $|S|_{50\text{MeV}}$, es decir, la misma onda l se comporta de diferente manera con diferentes valores de W_{int} , siendo esta la responsable de reproducir las oscilaciones dentro de la Distribución Angular de Dispersión Elástica.

El análisis de los coeficientes de reflexión para los diferentes cálculos del potencial de absorción de muy corto alcance se realizará tomando como referencia $W_{\text{int}} = 0$ MeV. Para la energía $E_{\text{Lab}} = 12$ MeV, las ondas parciales $l = 0, 2$ y 5 son transmitidas y mayormente reflejadas por el Núcleo Blanco. Mientras que las ondas parciales $l = 1, 3, 4$ y 6 son transmitidas de igual manera pero mayormente absorbidas por el mismo.

Por otro lado, para $E_{\text{Lab}} = 30$ MeV se reproduce un comportamiento diferente. Para $W_{\text{int}} = 0$ se observa una desviación a ángulos grandes de la Distribución Angular correspondiente, aumentando significativamente la Sección Eficaz Diferencial. Esto implica que el coeficiente de reflexión para $W_{\text{int}} = 0$ MeV será mayor que para $W_{\text{int}} = 50$ MeV, efecto mostrado en la magnitud de los elementos de la Matriz S (ver Figura 6.5). Finalmente, las oscilaciones mostradas en la Figura 6.4 para energías altas se deben principalmente a la reflexión de las ondas parciales con $l = 0$ hasta $l = 12$.

Los datos experimentales de Dispersión Elástica existentes para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ (ver Figura 6.4) no muestran las oscilaciones que se reproducen en los cálculos para $W_{\text{int}} = 0$ MeV. Por esta razón se adopta el uso del valor $W_{\text{int}} = 50$ MeV en la descripción de todas las distribuciones angulares correspondientes.

La influencia del potencial de absorción de muy corto alcance se manifiesta a través de las diferencias entre los coeficientes de reflexión para dos valores distintos de este potencial W_{int} . Es por este motivo que se ha realizado una aproximación semiclásica para obtener un análisis más preciso de cuáles son los ángulos de deflexión de cada onda parcial con número cuántico de momento angular l . Recordando que los mejores resultados se obtuvieron cuando $W_{\text{int}} = 50$ MeV, la aparición de las oscilaciones en la Sección Eficaz Diferencial se consideran físicamente no realistas. Es decir, esta aproximación semiclásica tiene como fin elucidar los efectos de este potencial al obtener los ángulos de dispersión para cada onda parcial, verificando que estas son las responsables de las oscilaciones. Se ha calculado la función de deflexión (ecuación 1.28) para cada onda parcial l con magnitud de momento angular $\lambda = \hbar\sqrt{l(l+1)} \rightarrow \hbar[l + \frac{1}{2}]$. El potencial $V(r)$ es aquel que reproduce la Dispersión Elástica dentro del formalismo del Modelo Óptico Extendido, es decir, $V(r) = V_{\text{bare}} + V_{\text{C}} + V_{\text{D}} + V_{\text{F}}$. El punto de retorno para cada onda parcial se obtiene al satisfacer la condición (1.27).

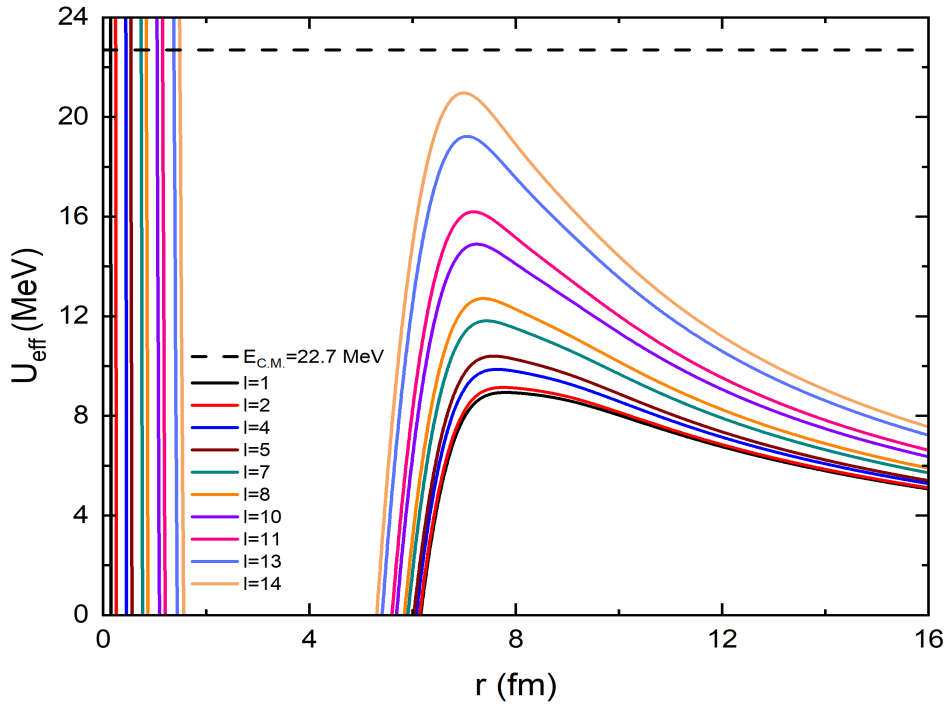


Figura 6.6: Potencial efectivo U_{eff} del sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.1.

La Figura 6.6 muestra los potenciales efectivos para cada onda parcial l . Todas las ondas parciales que mostraron coeficientes de reflexión diferentes para dos distintos valores del potencial de absorción de muy corto alcance, W_{int} , logran cubrir todo el intervalo angular, con puntos de retorno muy pequeños, interiores al radio de absorción fuerte. Estos puntos de retorno pequeños principalmente muestran que el potencial efectivo dominante para estas ondas parciales es atractivo, es decir, estas logran penetrar al Núcleo Blanco y producen ángulos de dispersión negativos. Esto se cumple para ondas parciales con número cuántico de momento angular $l \leq 14$. Por otro lado, para ondas parciales con $l \geq 15$ el potencial efectivo dominante es repulsivo, reproduciendo puntos de retorno más grandes (exteriores al radio de absorción fuerte) con ángulos de dispersión positivos.

En la Figura 6.7 se muestran los resultados de esta aproximación semiclásica. Los resultados empiezan a ser más claros a partir de la onda parcial $l = 7$, que reproduce de buena manera la oscilación presente a un ángulo de dispersión $\theta_7 = 56.52^\circ$. De la misma

manera, las ondas parciales posteriores $l = 8$, $l = 9$, $l = 10$, $l = 11$, $l = 12$, $l = 13$ y $l = 14$ reproducen de muy buena manera las oscilaciones ubicadas en los ángulos de dispersión $\theta_8 = 68.55^\circ$, $\theta_9 = 82.23^\circ$, $\theta_{10} = 98.5^\circ$, $\theta_{11} = 107.59^\circ$, $\theta_{12} = 128.77^\circ$, $\theta_{13} = 148.86^\circ$ y $\theta_{14} = 168.93^\circ$.

La mayoría de las ondas parciales logra reproducir una oscilación de la Sección Eficaz Diferencial, sin embargo, estas oscilaciones no aparecen en los datos experimentales. Este análisis se ha aplicado de la misma manera para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$, donde los mejores resultados se obtuvieron con el mismo potencial de absorción de muy corto alcance, es decir, $W_{\text{int}} = 50 \text{ MeV}$.

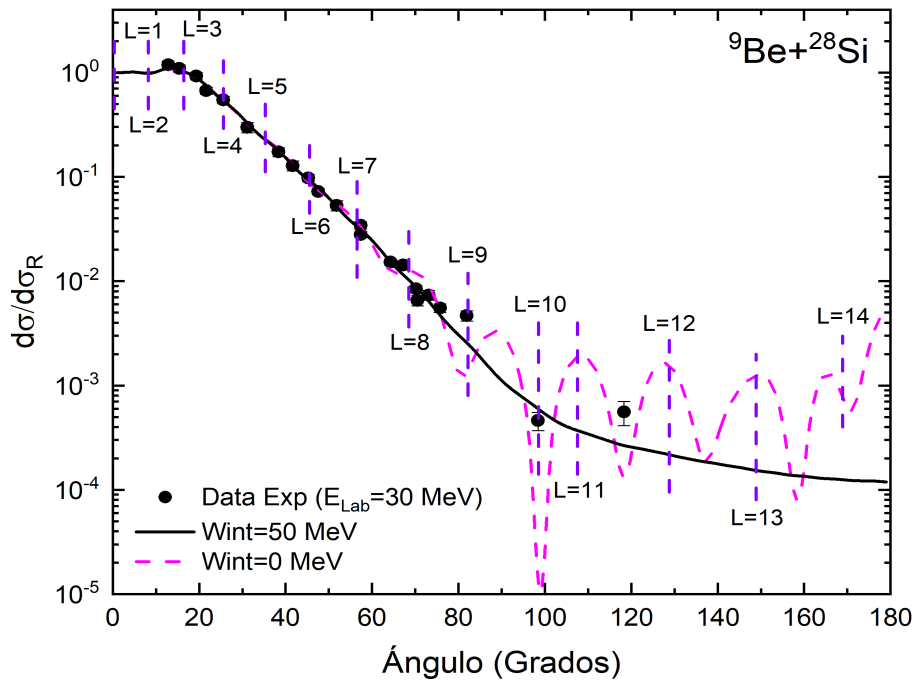


Figura 6.7: Distribución Angular de Dispersión Elástica para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l . Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad.

6.2. ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$

Este sistema débilmente ligado incluye como Núcleo Proyectoil un núcleo exótico radioactivo, ${}^6\text{He}$. El intervalo energético disponible en las Distribuciones Angulares de Dis-

persión Elástica y Secciones Eficaces de Fusión es más pequeño que para otros sistemas debido a los desafíos que se abordan experimentalmente, por ejemplo, la generación del haz es bastante complicada y las corrientes del haz de Núcleos Proyecto son menores.

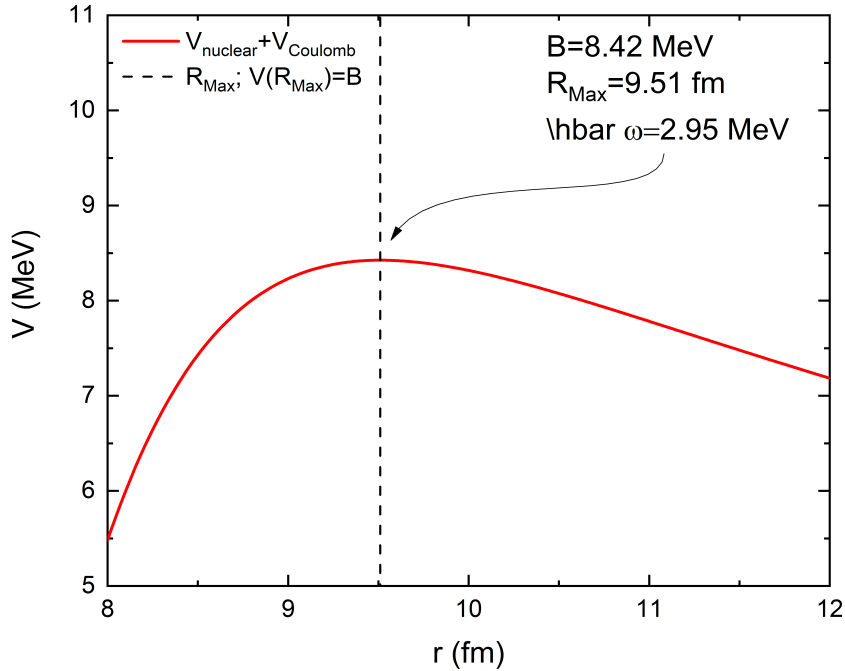


Figura 6.8: Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ mediante SPP.

La altura de la Barrera de Coulomb para este sistema se caracteriza mediante la salida de SPP, considerando la suma del potencial nuclear V_{bare} y el potencial electrostático de V_{C} . Los resultados se observan en la Figura 6.8. En el sistema de referencia de Laboratorio, la altura de la Barrera es $B_{\text{Lab}} = 9.2$ MeV, que es tomada en cuenta cuando se realice el análisis de la Relación de Dispersión correspondiente, ya que mediante su dependencia energética se puede ofrecer información valiosa sobre los mecanismos de reacción presentes a la hora de llevar a cabo la Reacción Nuclear.

La Relación de Dispersión mostrada en la Figura 6.10 muestra las estimaciones obtenidas mediante la optimización de los parámetros de profundidad, la dependencia energética de los potenciales imaginarios y el resultado de la misma sobre los potenciales reales

mediante la ecuación (1.39). El comportamiento del potencial imaginario asociado a la absorción de Flujo del Canal Elástico hacia el Canal de Fusión W_F es el esperado respecto a la literatura, es decir, el potencial adquiere en promedio una profundidad constante a energías muy por encima de la Barrera de Coulomb, mientras que su parte real V_F suprime la presencia y dominio del Canal Elástico a medida que la energía aumenta.

Si la energía se acerca a la vecindad de la Barrera $B = 8.42$ MeV, la mayoría de los diferentes Canales de Reacción que no son el Canal Elástico se cierran debido a la poca energía disponible por el sistema. En el potencial imaginario se reproduce una caída hacia 0 MeV, mientras que el potencial real adquiere una forma de campana en el mismo intervalo energético. Así como en el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$, esto comúnmente es llamado *Threshold Anomaly*.

Las Secciones Eficaces de Fusión calculadas, presentadas en la Tabla 5.4, son comparadas con los resultados experimentales [Pietro,2004] y [Scuderi,2011], incluyendo también los resultados de un análisis del mismo sistema mediante la misma metodología [Aguilera,2021]. Los resultados son favorables, cumpliendo de manera exitosa con las estimaciones predichas por el ajuste no lineal de la ecuación de Wong (ver Figura 6.9), mejorando incluso los resultados ya reportados por Aguilera (2021), principalmente a energías bajas.

Por otro lado, para los potenciales que describen la pérdida de flujo del Canal Elástico hacia otros Canales de Reacciones Directas (V_D , W_D) muestran características bastante interesantes. Inicialmente, el potencial imaginario describe un aumento de su profundidad a energías cercanas a la Barrera, con un máximo en $E = 12$ MeV, disminuyendo a 0 MeV cuando la energía es menor que esta (esto es comúnmente llamado *Break-up Threshold Anomaly*). Esto describe una pérdida mayor de flujo del Canal Elástico debido a la presencia de los mecanismos de rompimiento del Proyectoil debido a su débil ligadura. Estos mecanismos de ruptura comprenden diferentes procesos como *Elastic Break-up*, donde los constituyentes del Núcleo Proyectoil son dispersados elásticamente por el Núcleo Blanco, *Inelastic Excitations*, donde debido a la ruptura, los núcleos constituyentes pueden transferir energía cinética en mayor proporción en comparación a la energía que el Núcleo Proyectoil lo haría antes de la ruptura, *Incomplete Fusion*, donde alguno de los constituyentes es absorbido por el Núcleo Blanco, *Sequential Complete Fusion*, donde uno

a uno los núcleos constituyentes del Núcleo Proyecto son absorbidos después de la ruptura, *n-Transfer or Cluster Fusion*, dónde el Núcleo Proyecto transfiere uno o dos neutrones al Núcleo Blanco, dispersando inelásticamente el *cluster* restante o viceversa.

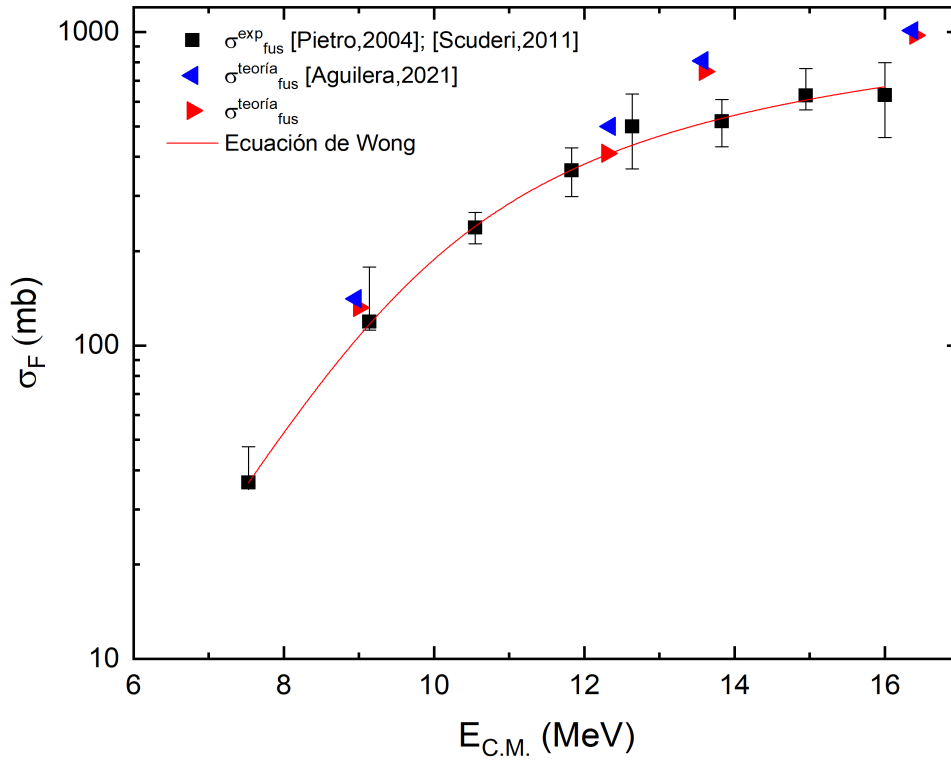


Figura 6.9: Secciones Eficaces de Fusión experimentales (cuadrados negros) en comparación con los resultados obtenidos por Aguilera (2021) (triángulos azules) y cálculos realizados en la presente investigación (triángulos rojos) mostrados en la Tabla 5.4 para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$.

La contribución de todos estos mecanismos de ruptura, en promedio, se ve reflejada en esta característica del potencial imaginario W_D . Esto produce ligeros cambios en el potencial real V_D . En la misma región energética donde se observa el pico máximo del potencial imaginario ($E = 12$ MeV) se genera una caída en la profundidad del potencial real. Es decir, un aumento en la absorción del flujo del Canal Elástico debido a los mecanismos de ruptura produce un debilitamiento de este, ya que otros Canales de Reacción adquieren un mayor dominio en la Reacción Nuclear.

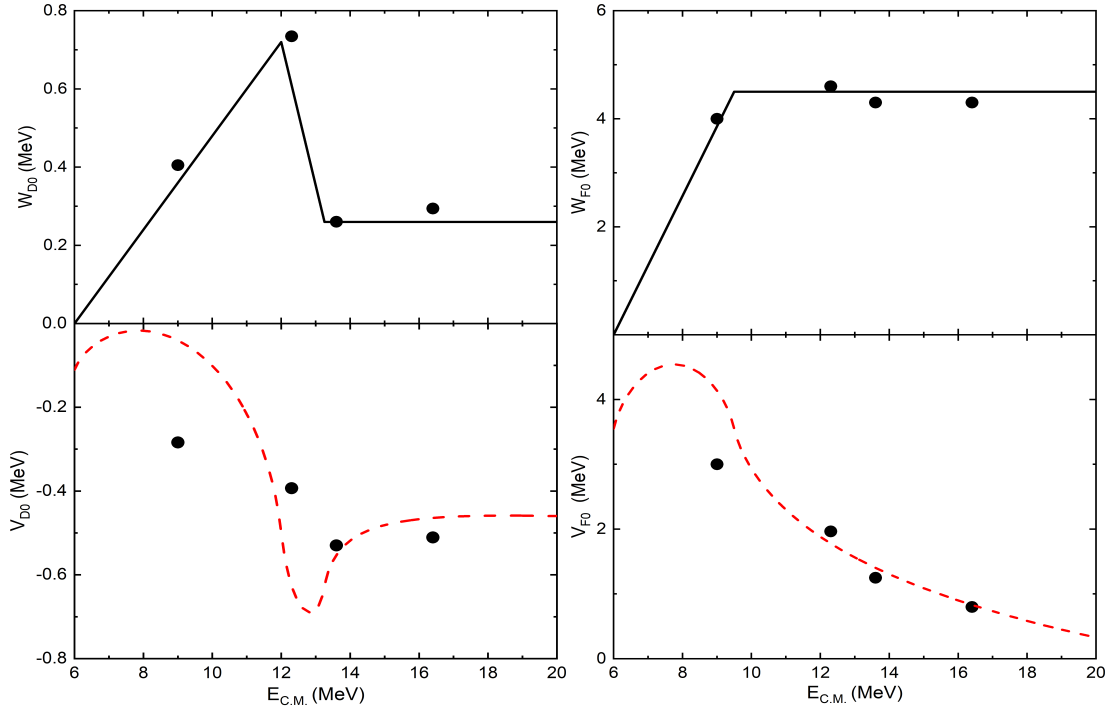


Figura 6.10: Relación de Dispersión de los parámetros de profundidad mostrados en la Tabla 5.4 para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$.

Por supuesto, se deben incluir los efectos del Núcleo Proyectoil debido a su naturaleza exótica. La inestabilidad del núcleo tiende a intensificar estos mecanismos de ruptura. En un estudio realizado por Guimarães (2021) se ha concluido que núcleos con estructura de *halo* neutrónico presentan regiones de interacción para Reacciones Directas relativamente más grandes en comparación con núcleos en los cuales esta estructura no se presenta. El valor máximo del potencial imaginario presente en $E = 12$ MeV incluso puede ser asociado con esta naturaleza. Sin embargo, este valor máximo es correlacionado con la presencia de un máximo local en la Sección Eficaz de Reacción [Aguilera,2021].

En las Figuras 6.11 se muestran las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica, usando los parámetros de la Tabla 5.4 y la herramienta FRESCO. Se observa una muy buena reproducción de los datos experimentales al usar $W_{\text{int}} = 50$ MeV, sin embargo, se han incluido 3 diferentes cálculos con diferentes valores de este potencial de muy corto alcance con el fin de observar cuál es la influencia del mismo.

El efecto del potencial de muy corto alcance W_{int} se presenta de la misma manera que para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$, es decir, mediante oscilaciones en la Sección Eficaz Diferencial,

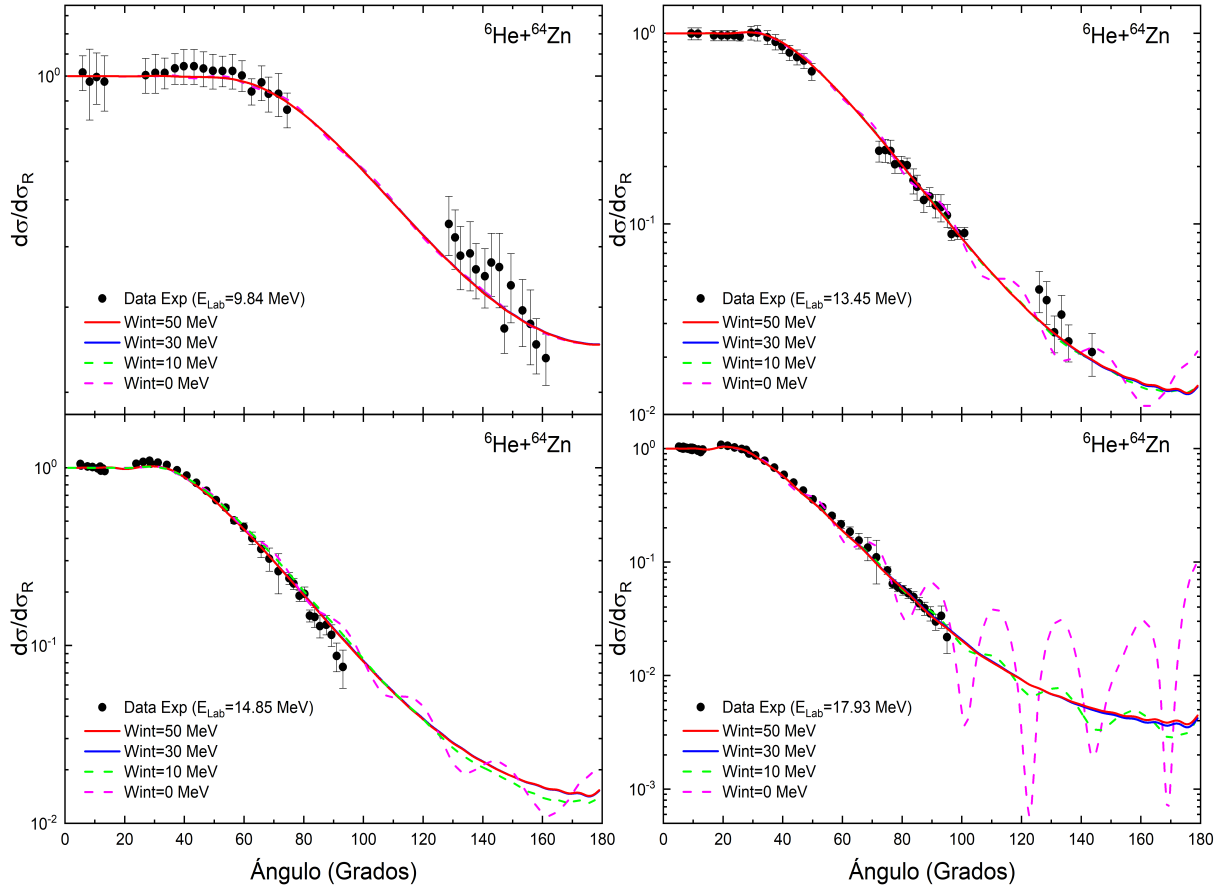


Figura 6.11: Distribuciones Angulares para el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ a diferentes energías, utilizando los parámetros de la Tabla 5.4 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.

primordialmente a ángulos medios y grandes. Así como ya se ha comentado anteriormente, la región de ángulos medios está asociada a parámetros de impacto cuya magnitud empieza a ser comparable con el rango de interacción fuerte de ambos núcleos. Mientras que la región de ángulos grandes corresponde a parámetros de impacto, donde ahora la probabilidad de transmitir ondas parciales a través del Núcleo Blanco es bastante alta. En conjunto, estas regiones angulares dependen fuertemente de los detalles superficiales estructurales de ambos núcleos.

La energía disponible por el sistema para llevar a cabo la Reacción Nuclear también juega un papel primordial en la presencia de oscilaciones sobre las Distribuciones Angulares, ya que a medida que esta disminuye, las oscilaciones también disminuyen su amplitud de manera significativa. Esto sucede así debido a que ahora la energía disponible por cada

onda parcial incidente no es suficiente para penetrar a través de la Barrera de Coulomb, así que esta es reflejada.

La reflexión y absorción de ondas parciales se manifiesta de diferentes maneras, una de ellas es mediante la magnitud de los elementos de la Matriz S, que determinan la amplitud de la onda parcial saliente, y la otra es mediante un aumento de la probabilidad de interacción.

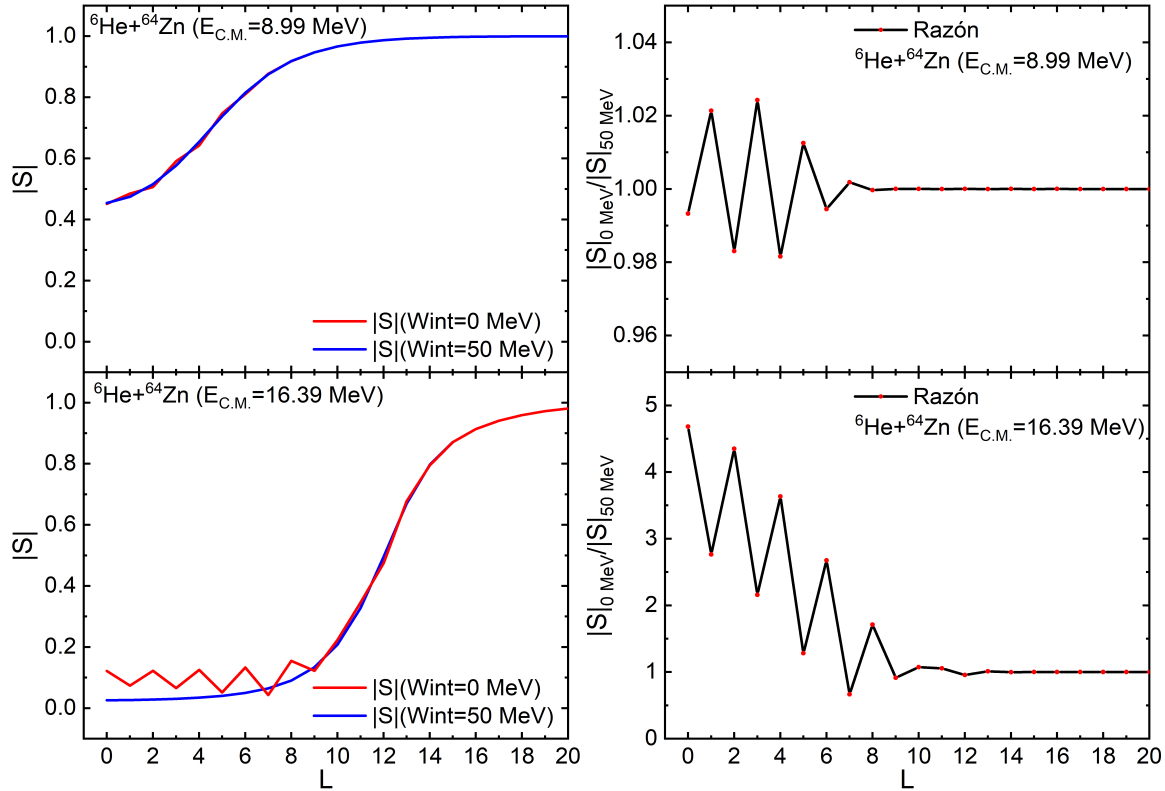


Figura 6.12: Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$.

La Figura 6.12 muestra la magnitud de los elementos de la Matriz S en función del número cuántico de momento angular l para dos valores diferentes de W_{int} . Esto se hace para dos diferentes energías, específicamente $E_{\text{Lab}} = 9.84$ MeV y $E_{\text{Lab}} = 17.93$ MeV para que la dependencia energética sea más evidente.

Iniciando por la energía más baja ($E_{\text{Lab}} = 9.84$ MeV), se observa una absorción incompleta de flujo del Canal Elástico (satisfaciendo la relación $0 < |S| < 1$), donde la mayor absorción se presenta sobre la onda parcial $l = 0$. La absorción de la onda parcial con

número cuántico de momento angular l se traduce en un aumento de la Sección Eficaz de Fusión por un factor proporcional a $(2l + 1)[1 - |S|^2]$. Esta absorción se lleva a cabo de manera similar para ambos valores del potencial W_{int} ya que la energía disponible no permite que las ondas parciales se transmitan de manera diferente. Si se observa la razón entre las magnitudes correspondientes de la Matriz S, se verifica que la Reacción se lleva a cabo de manera similar y que las ondas parciales transmitidas y absorbidas son las de menor momento angular, es decir, ondas parciales con $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 7 .

Por otro lado, para la energía más grande ($E_{\text{Lab}} = 17.93$ MeV), la absorción de flujo del Canal Elástico es mucho más fuerte. Para las ondas parciales con números cuánticos de momento angular pequeños, la absorción es casi total, siendo estas las que llevan al sistema a canales de interacción más complejos que el Canal Elástico. En esta energía, sí existen diferencias notables en sus coeficientes de reflexión, y por lo tanto, también en sus Distribuciones Angulares. Al observar la Figura 6.11, en esta energía se observa una gran desviación de su Sección Eficaz Diferencial, cuando el valor del potencial imaginario de absorción de muy corto alcance es 0 MeV, esto reproduce un aumento en sus coeficientes de reflexión correspondientes. Lo anterior se verifica al calcular la razón entre los coeficientes de estos dos valores ($W_{\text{int}} = 0$ MeV y $W_{\text{int}} = 50$ MeV), reproduciendo una desviación hacia valores positivos, es decir, el coeficiente $|S|_{0 \text{ MeV}}$ es mayor en comparación a $|S|_{50 \text{ MeV}}$. Las ondas parciales responsables de reproducir dicho aumento en la Sección Eficaz Diferencial se extienden desde un valor de $l = 0$ hasta aquellas con $l = 12$.

Finalmente, se ha realizado una aproximación semiclásica para obtener un análisis más preciso de cuáles son los ángulos de deflexión de cada onda parcial con número cuántico de momento angular l . Sin embargo, como se puede observar en la Figura 6.11, los mejores resultados se obtuvieron cuando el potencial de absorción de muy corto alcance tiene una profundidad de $W_{\text{int}} = 50$ MeV, por lo tanto, esta aproximación semiclásica solo pretende elucidar cuáles son los efectos de este potencial al reproducir las oscilaciones (consideradas como físicamente no realistas respecto a lo mostrados en los datos experimentales) en la Sección Eficaz Diferencial. Se ha calculado la función de deflexión (ecuación (1.28)) para cada onda parcial l con magnitud de momento angular $\lambda = \hbar\sqrt{[l(l+1)]} \rightarrow \hbar[l + \frac{1}{2}]$. El potencial $V(r)$ es aquel que reproduce la Dispersión Elástica dentro del formalismo del

Modelo Óptico Extendido, es decir, $V(r) = V_{\text{bare}} + V_C + V_D + V_F$. El punto de retorno para cada onda parcial se obtiene al satisfacer la condición (1.27).

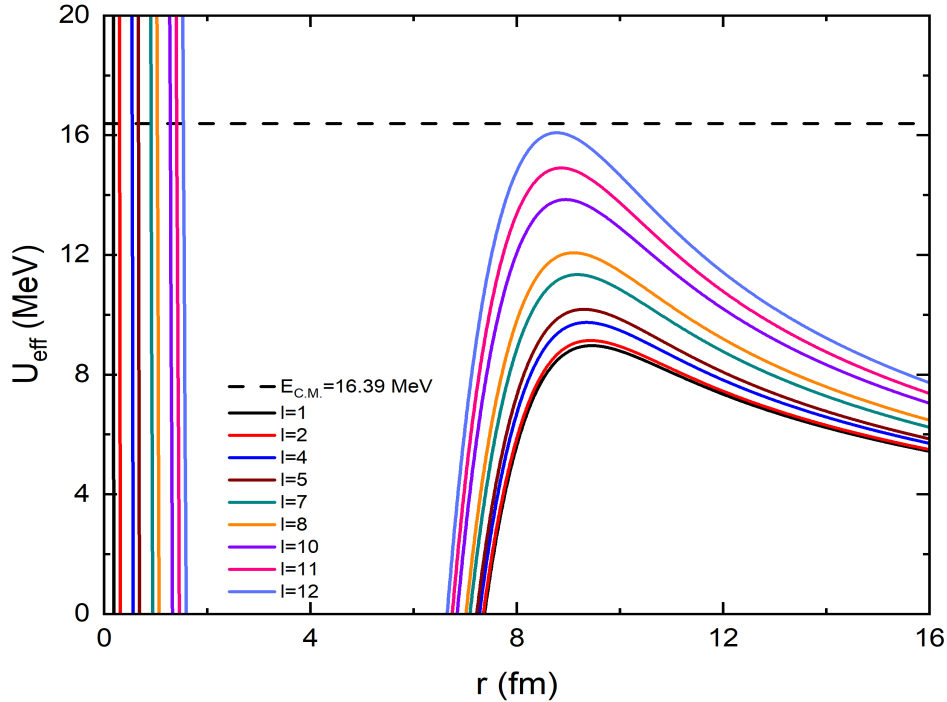


Figura 6.13: Potencial efectivo U_{eff} del sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.4.

Los potenciales efectivos para cada onda parcial l se muestran en la Figura 6.13, los cuales muestran que todas las ondas parciales que presentan diferencias en los coeficientes de reflexión principalmente tienen puntos de retorno muy pequeños, interiores al radio de absorción fuerte, es decir, estas ondas logran penetrar al Núcleo Blanco y posteriormente son deflectadas. El potencial efectivo dominante para estas ondas $l \leq 12$ es atractivo, lo cual reproduce ángulos de dispersión negativos. Ondas parciales $l \geq 13$ reproducen ángulos de dispersión positivos debido al potencial efectivo repulsivo dominante, con puntos de retorno exteriores al radio de absorción fuerte.

Como puede observarse en la Figura 6.14, las ondas parciales con diferentes coeficientes de reflexión para dos diferentes potenciales de absorción de muy corto alcance W_{int} cubren

todo el intervalo angular. Particularmente, la onda parcial $l = 6$ reproduce de buena manera la oscilación presente a un ángulo de dispersión $\theta_6 = 52^\circ$. De igual manera, la onda parcial $l = 7, 8, 9$ y $l = 10$ reproducen las oscilaciones ubicadas en los ángulos de dispersión $\theta_7 = 65.5^\circ$, $\theta_8 = 80.83^\circ$, $\theta_9 = 99.17^\circ$ y $\theta_{10} = 112.61^\circ$. Finalmente, las ondas parciales $l = 11$ y $l = 12$ reproducen las oscilaciones en los ángulos de dispersión $\theta_{11} = 147.18^\circ$ y $\theta_{12} = 158.98^\circ$, sin embargo, estas últimas se encuentran desfasadas respecto a ondas parciales con menor momento angular.

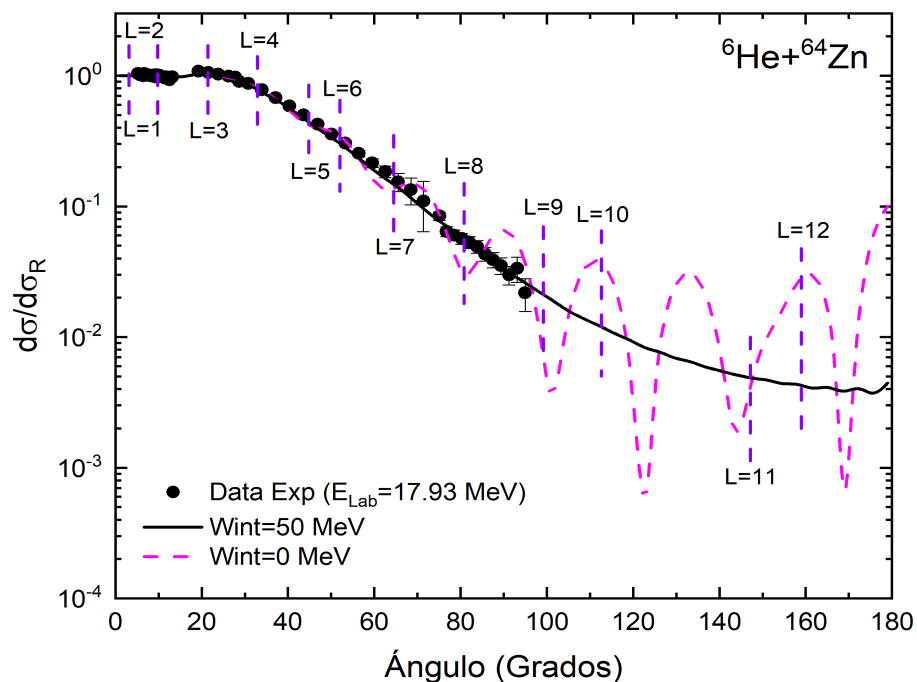


Figura 6.14: Distribución Angular de Dispersión Elástica para el sistema $^6\text{He}+^{64}\text{Zn}$. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l de la onda total incidente. Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad.

6.3. $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$

Este sistema se compone por un núcleo débilmente ligado como Núcleo Blanco. Existe solo una energía disponible para la Distribución Angular de Dispersión Elástica [Bock,1965]. Sin embargo, se tiene bastante información experimental acerca de la Sección Eficaz de Fusión en un amplio intervalo de energías.

La caracterización de los detalles de la Barrera de Coulomb para este sistema, así como para los anteriores, se ha realizado mediante la salida de SPP, sobre la cual se puede relacionar el potencial nuclear V_{bare} y V_C numéricamente (ver Figura 6.15). La altura de la Barrera en el sistema de laboratorio es $B_{\text{Lab}} = 11.7$ MeV.

El hecho de no tener datos experimentales de Distribución Angular de Dispersión Elástica a diferentes energías implica que no se puede construir una dependencia energética de los parámetros de profundidad. Por este motivo, no se construye una Relación de Dispersión para este sistema.

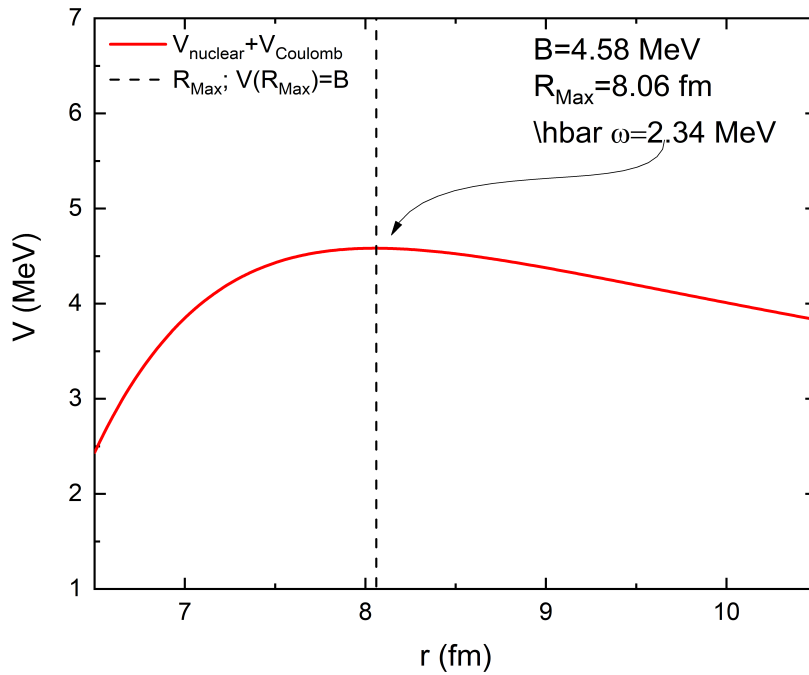


Figura 6.15: Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$ mediante SPP.

Por otro lado, la Figura 6.16 muestra con un triángulo azul la Sección Eficaz de Fusión calculada para este sistema. Se logra observar que los parámetros de profundidad y geométricos describen de muy buena manera las estimaciones realizadas mediante el ajuste no lineal a la ecuación de Wong (5.3). Esto ratifica la optimización de los parámetros resultantes, ya que logra reproducir los datos experimentales de Dispersión Elástica, así

como la Sección Eficaz de Fusión. Sin embargo, se requiere un análisis en profundidad incluyendo energías cercanas a la altura de la Barrera de Coulomb y por encima de esta para eliminar las posibles ambigüedades del Modelo Óptico. El valor relativamente alto de la difusividad (ver Tabla 5.7) va en consonancia con los parámetros obtenidos por Torabi (2024) para el sistema $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$ de la sección 6.4.

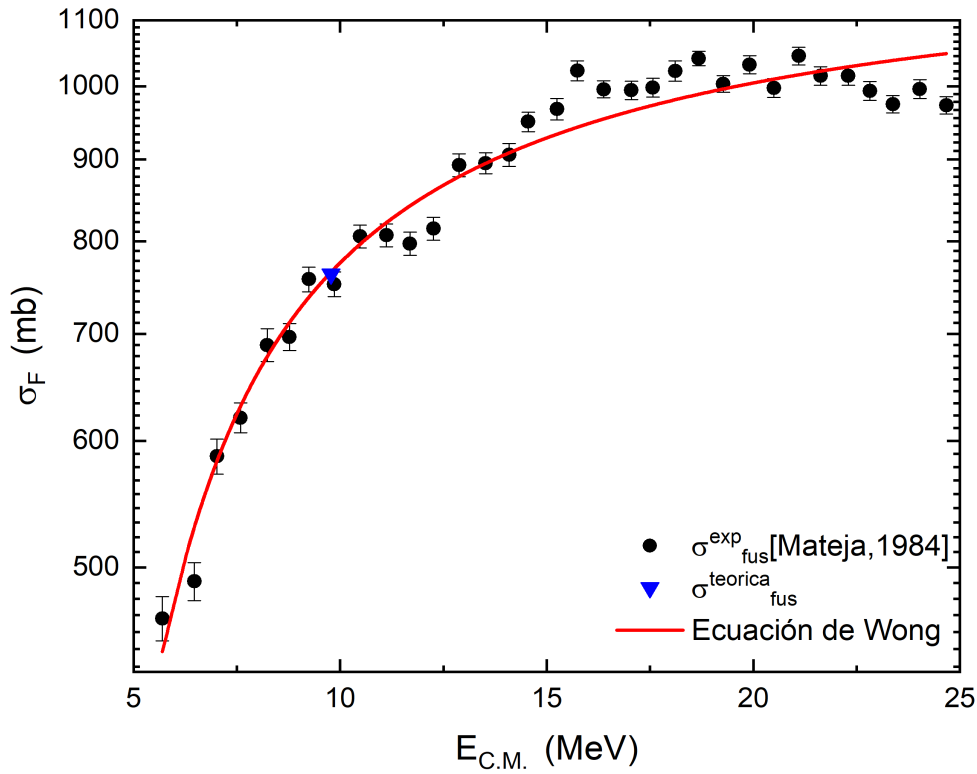


Figura 6.16: Secciones Eficaces de Fusión experimentales (círculos negros) en comparación con los cálculos realizados en la presente investigación (triángulo azul) para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$.

Se ha optado por considerar físicamente correctos estos parámetros geométricos y de profundidad, ya que tanto la Sección Eficaz de Fusión como la Distribución Angular de Dispersión Elástica se describen correctamente. Sin embargo, se requiere un análisis adicional sobre estos parámetros.

En las Figuras 6.17 se muestra la Distribución Angular de Dispersión Elástica para la energía $E_{\text{Lab}} = 25$ MeV, tomando los parámetros de la Tabla 5.7. Se han realizado cálculos

con al menos 4 diferentes valores de Potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} haciendo uso de la herramienta FRESCO, con el fin de observar cuál es el efecto y cuál es la profundidad idónea para el actual sistema.

Se puede apreciar que los datos experimentales de Distribución Angular para Dispersión Elástica se describen de mejor manera cuando $W_{\text{int}} = 4$ MeV. Cuando este potencial es totalmente suprimido ($W_{\text{int}} = 0$ MeV) o se le da una profundidad relativamente alta ($W_{\text{int}} = 50$ MeV) la descripción de los datos experimentales no es lo suficientemente realista. Se observan ciertas oscilaciones en los datos experimentales a partir de ángulos que van desde $\theta_{\text{C.M.}} = 40^\circ$ hasta $\theta_{\text{C.M.}} = 180^\circ$. Estas oscilaciones no están presentes cuando el potencial es $W_{\text{int}} = 50$ MeV y son sobreestimadas cuando $W_{\text{int}} = 0$ MeV.

La descripción de los datos experimentales con $W_{\text{int}} = 4$ MeV reproduce de muy buena manera tanto la amplitud de la oscilación, como el ángulo $\theta_{\text{C.M.}}$ sobre la cual se presenta. Teniendo como antecedente a los dos sistemas anteriores, esta buena descripción adquiere mayor sentido en el análisis posterior de ondas parciales.

En la Figura 6.18 se presenta la magnitud de los coeficientes de reflexión mediante la magnitud los elementos de la Matriz S para dos valores diferentes del potencial de absorción de muy corto alcance. En adición a esto, se calcula la razón entre estas dos magnitudes.

Las ondas parciales con momento angular l pequeño son aquellas que se absorben desde el flujo del Canal Elástico casi en su totalidad. Como ya se ha comentado anteriormente, estas ondas parciales están definidas mediante parámetros de impacto que son menores que el radio de absorción fuerte. Esto se cumple desde ondas parciales con $l = 0$ hasta $l = 10$. Sin embargo, aún existe cierta absorción de flujo del Canal Elástico, desde ondas parciales con momento angular $l = 11$ hasta $l = 16$, lo cual puede adjudicarse al radio relativamente grande del potencial que describe las Reacciones Directas. Recordemos que la absorción de la onda parcial con número cuántico l se traduce en un aumento de la Sección Eficaz de Fusión por un factor proporcional a $(2l + 1) [1 - |S|^2]$.

Por otro lado, la razón entre las magnitudes de los coeficientes de reflexión correspondientes a los dos valores del potencial de absorción de muy corto alcance muestra diferencias significativas entre la aparición de oscilaciones en la Distribución Angular de Dispersión Elástica ($|S|_{4 \text{ MeV}}$) y la supresión de las mismas ($|S|_{50 \text{ MeV}}$). La descripción de reflexión

y absorción se llevará a cabo tomando como referencia el cálculo cuando el potencial de absorción de muy corto alcance es $W_{\text{int}} = 0$ MeV. La onda parcial $l = 0$ es transmitida siendo mayormente reflejada por el Núcleo Blanco, es decir, esta no es absorbida hacia otros Canales de interacción más complejos. La onda parcial $l = 1$ es igualmente transmitida, penetrando y absorbiéndose en mayor medida por el Núcleo Blanco. La onda $l = 2$ experimenta un fenómeno similar a $l = 0$, mientras que $l = 3$ lo hace con $l = 1$. Este efecto de reflexión y absorción se reproduce de la misma manera para las ondas parciales $l = 4$ y $l = 5$. Estas diferencias en el comportamiento de las ondas parciales son prácticamente nulas cuando $l \geq 8$. Posteriormente, se explicará cuál es la naturaleza de estas ondas parciales.

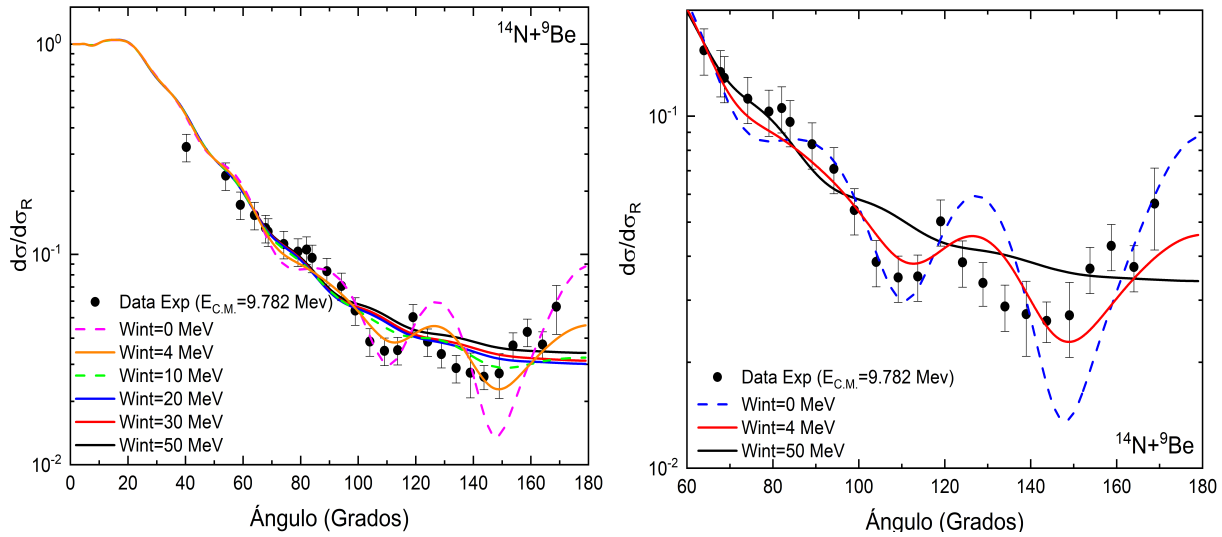


Figura 6.17: Distribución Angular para el sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$, utilizando los parámetros de la Tabla 5.7 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.

Ahora bien, se ha realizado una aproximación semiclásica que proporciona información sobre la influencia del potencial de muy corto alcance W_{int} sobre las oscilaciones presentes en la Sección Eficaz Diferencial, tanto en los datos experimentales como en el cálculo realizado con W_{int} (ver Figura 6.17). Se ha calculado la función de deflexión (ecuación (1.28)) para cada onda parcial con número cuántico de momento angular l . Este cálculo se ha realizado sobre aquellas ondas parciales que muestran coeficientes de reflexión diferentes para diferentes valores de W_{int} (ver Figura 6.18).

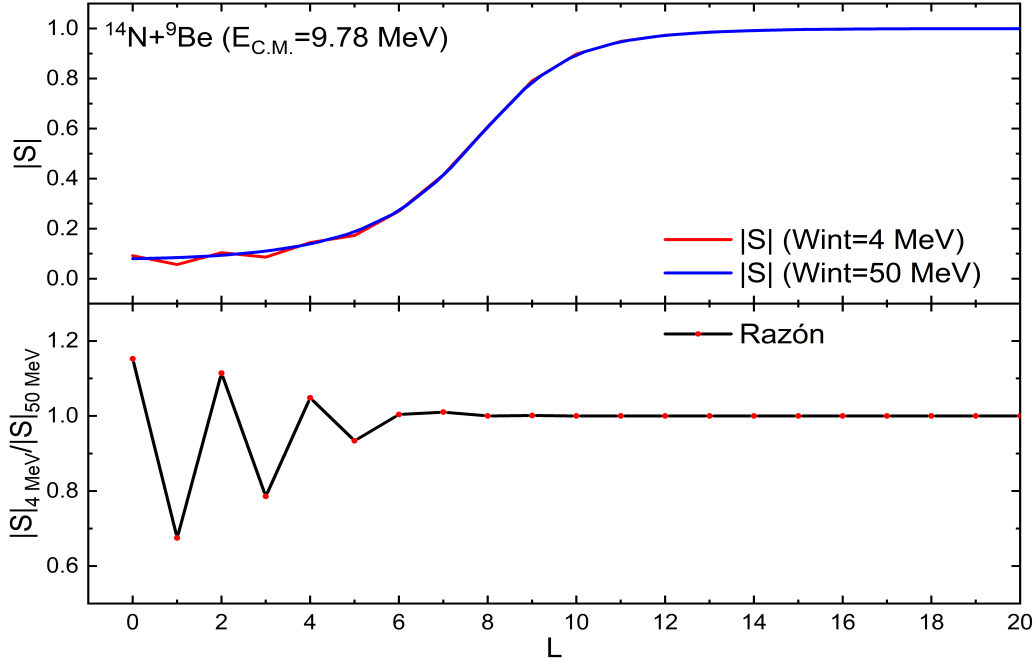


Figura 6.18: Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$.

Esta aproximación semiclásica depende de la magnitud de momento angular $\lambda = \hbar\sqrt{[l(l+1)]} \rightarrow \hbar[l + \frac{1}{2}]$ para cada onda parcial con número cuántico de momento angular l . El potencial $V(r)$ es aquel que describe los procesos de Dispersión Elástica presentes en el Modelo Óptico Extendido. Este potencial se calcula mediante la suma de los potenciales reales de la ecuación (1.12), es decir $V(r) = V_{\text{bare}} + V_{\text{C}} + V_{\text{D}} + V_{\text{F}}$. El punto de retorno para cada onda parcial se obtiene al satisfacer la condición (1.27).

La Figura 6.19 muestra el potencial efectivo $U_{\text{eff}} = V_l^{\text{C}} + V(r)$ para cada onda parcial con número cuántico l . Respecto a la Figura 6.18, las ondas parciales $l < 8$ son aquellas que muestran coeficientes de reflexión que adquieren una dependencia respecto al potencial de muy corto alcance W_{int} . El potencial efectivo de estas ondas parciales principalmente es dominado por las fuerzas atractivas nucleares, esto genera que el punto de retorno se encuentre a distancias muy pequeñas que son menores que el radio de absorción fuerte. La energía $E_{\text{C.M.}}$ es mayor que el potencial efectivo que estas ondas parciales experimentan, es por este motivo que ondas parciales del Núcleo Proyectoil con número cuántico l pueden penetrar con mayor probabilidad al Núcleo Blanco y reproducir puntos de retorno muy

pequeños. Por otro lado, ondas parciales con $l > 8$ experimentan un potencial repulsivo efectivo dominante a distancias mayores al radio de absorción fuerte, es por este motivo que el punto de retorno para estas ondas es mayor.

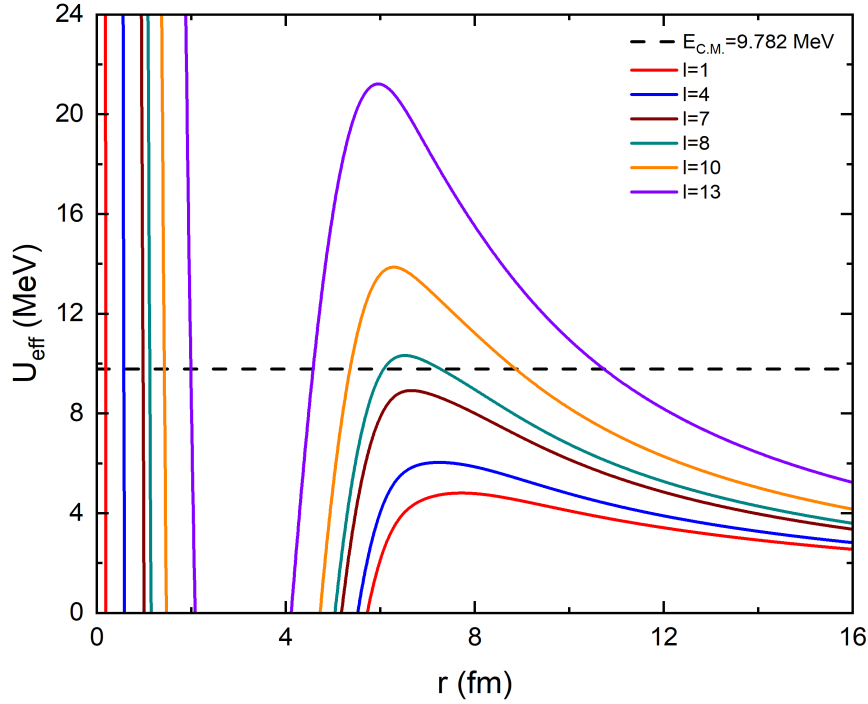


Figura 6.19: Potencial efectivo U_{eff} para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.7.

Debido a la discusión anterior, ondas parciales sobre las cuales el potencial efectivo dominante sea atractivo van a reproducir valores de la función de deflexión que son negativos, mientras que aquellas ondas parciales sobre las cuales el potencial efectivo dominante sea repulsivo van a reproducir valores de la función de deflexión que son positivos (por ejemplo, la dispersión de partículas debida al potencial electrostático de Coulomb). La función de deflexión de este sistema en particular se ha construido mediante valores discretos mostrados en la Figura 6.20. La aproximación *B-Spline* de los valores discretizados sobre la Figura 6.20 solo se incluye como guía visual, sin pretender ofrecer la curva continua exacta de la función de deflexión para este sistema.

Tabla 6.1: Puntos de retorno y ángulos de dispersión para diferentes ondas parciales l a diferentes energías. El punto de retorno se ha aproximado mediante una curva cuadrática sobre una vecindad centrada en el punto donde se cumple la condición de la ecuación (1.27).

Energía y Longitud de Onda De Broglie: $E_{C.M.}; \lambda_{DB}$	Número Cuántico de Momento Angular l	Punto de Retorno r_0 (fm)	Función de Deflexión $ \Theta = \theta$ (grados)
$E_{C.M.} = 9.78$ MeV $\lambda_{DB} = 1.53$ fm	$l = 1$	$r_0 = 0.188$	$\Theta = -6.33$
	$l = 2$	$r_0 = 0.315$	$\Theta = -33.79$
	$l = 3$	$r_0 = 0.442$	$\Theta = -46.29$
	$l = 4$	$r_0 = 0.571$	$\Theta = -73.07$
	$l = 5$	$r_0 = 0.703$	$\Theta = -94.16$
	$l = 6$	$r_0 = 0.838$	$\Theta = -127.40$
	$l = 7$	$r_0 = 0.976$	$\Theta = -176.88$
	$l = 8$	$r_0 = 7.279$	$\Theta = 22.86$
	$l = 9$	$r_0 = 8.174$	$\Theta = 38.05$
	$l = 10$	$r_0 = 8.868$	$\Theta = 39.25$
	$l = 11$	$r_0 = 9.506$	$\Theta = 40.20$
	$l = 12$	$r_0 = 10.124$	$\Theta = 39.67$
	$l = 13$	$r_0 = 10.736$	$\Theta = 38.23$

Por otro lado, los resultados de esta aproximación semiclásica reproducen algunas de las oscilaciones mostradas en la Sección Eficaz Diferencial cuando el valor del potencial de muy corto alcance $W_{\text{int}} = 4$ MeV. La Figura 6.21 muestra con una línea punteada vertical el ángulo de deflexión de la onda parcial con número cuántico de momento angular l .

La onda parcial $l = 4$ reproduce el inicio de las oscilaciones a un ángulo de dispersión $\theta_4 = 73.07^\circ$ de la Sección Eficaz Diferencial que posteriormente se intensifican. La onda parcial $l = 5$ reproduce un pequeño máximo de la Sección Eficaz Diferencial ubicado en un ángulo de dispersión $\theta_5 = 94.16^\circ$. La onda parcial $l = 6$ muestra un máximo al ángulo de dispersión $\theta_6 = 127.4^\circ$ que si bien se encuentra desfasado respecto a los datos experimentales de Dispersión Elástica, si llega a reproducir el efecto oscilatorio mostrado

por el cálculo teórico con un valor del potencial de muy corto alcance igual a $W_{\text{int}} = 4$ MeV. La onda parcial $l = 7$ predice el perfil en forma de máximo de la Sección Eficaz Diferencial a ángulos grandes, específicamente al ángulo de dispersión $\theta_7 = 176.88^\circ$. Las ondas parciales $l = 1, 2, 3$ se encuentran en una región angular donde no se tienen datos experimentales de Dispersión Elástica.

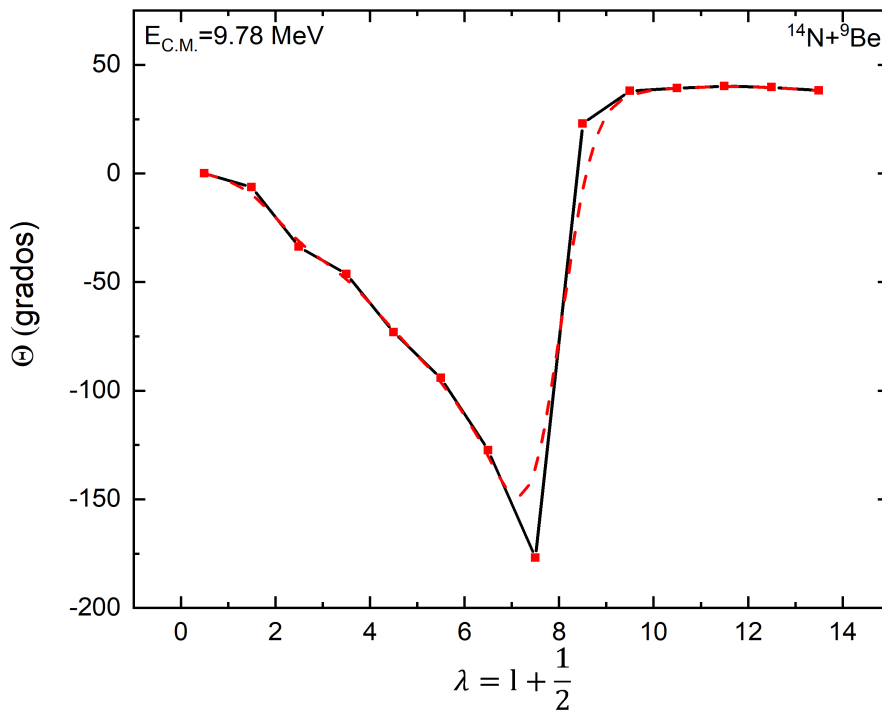


Figura 6.20: Función de deflexión para cada l . La curva formada por segmentos de recta muestra los valores discretizados obtenidos mediante la aproximación semiclásica. La curva punteada color rojo muestra la aproximación *B-Spline* de los mismos valores discretizados.

En la Tabla 6.1 se muestran tanto los puntos de retorno como el valor de la función de deflexión en la aproximación semiclásica, tanto para las ondas parciales dispersadas por el dominio del potencial efectivo atractivo ($l \leq 7$) como para aquellas dispersadas por el dominio del potencial efectivo repulsivo ($l \geq 8$).

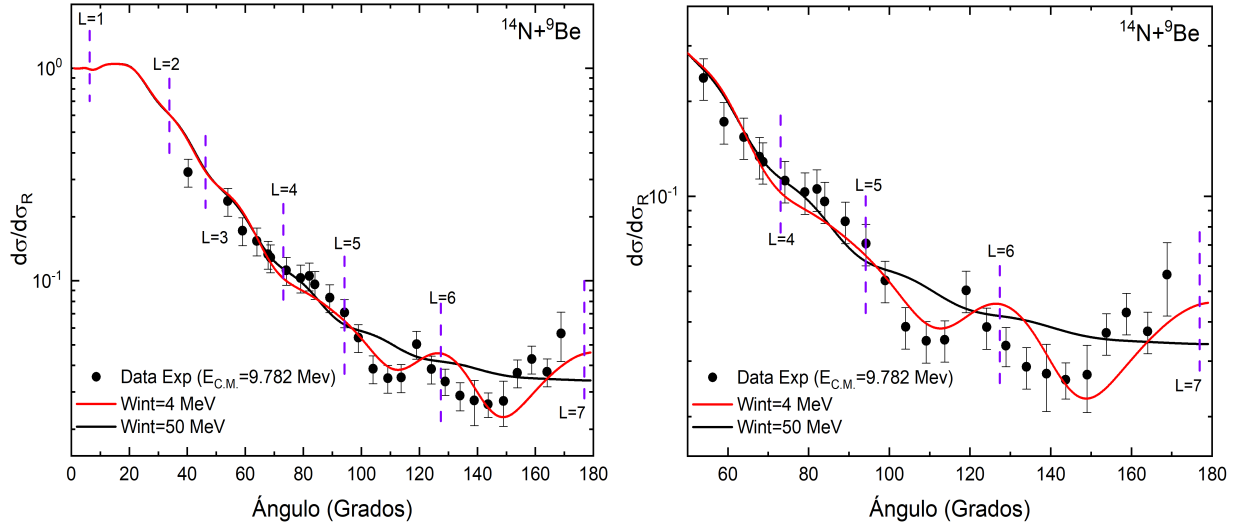


Figura 6.21: Distribución Angular de Dispersión Elástica para el sistema ${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l de la onda total incidente. Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad.

6.4. ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$, ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$

Este sistema débilmente ligado se compone de un Núcleo Blanco de masa pequeña, con Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica y Secciones Eficaces de Fusión en un amplio intervalo de energías. La Barrera de Coulomb del sistema es bastante importante, ya que los datos experimentales reportados se presentan tanto para la Reacción Nuclear ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$, como para su reacción inversa ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$.

La Barrera de Coulomb es caracterizada mediante la salida SPP, usando el potencial nuclear debido a la interacción nucleón-nucleón V_{bare} en adición al potencial electrostático de Coulomb V_C . Los resultados se muestran en la Figura 6.22. La altura es aproximadamente igual a 4 MeV, es decir, todo el intervalo energético donde hay datos disponibles se encuentra por encima de esta.

La altura de la Barrera es necesaria para dar lectura a la Relación de Dispersión. Es decir, la dependencia energética se interpreta en gran medida alrededor de la vecindad energética de la altura de la Barrera.

Las Secciones Eficaces de Fusión se muestran en la Figura 6.24. Los resultados obtenidos concuerdan bastante con las estimaciones realizadas mediante la ecuación de Wong,

la cual es resultado de un ajuste no lineal mediante la herramienta *Origin* en los dos conjuntos de datos experimentales disponibles, tanto para energías cercanas a la Barrera de Coulomb, como por encima de la misma [Jarczyk,1981] y [Cheung,1979]. Los resultados de las Secciones Eficaces de Fusión de la Figura 6.24 (triángulos azules) son obtenidas mediante los parámetros que también reproducen las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica [Torabi,2024].

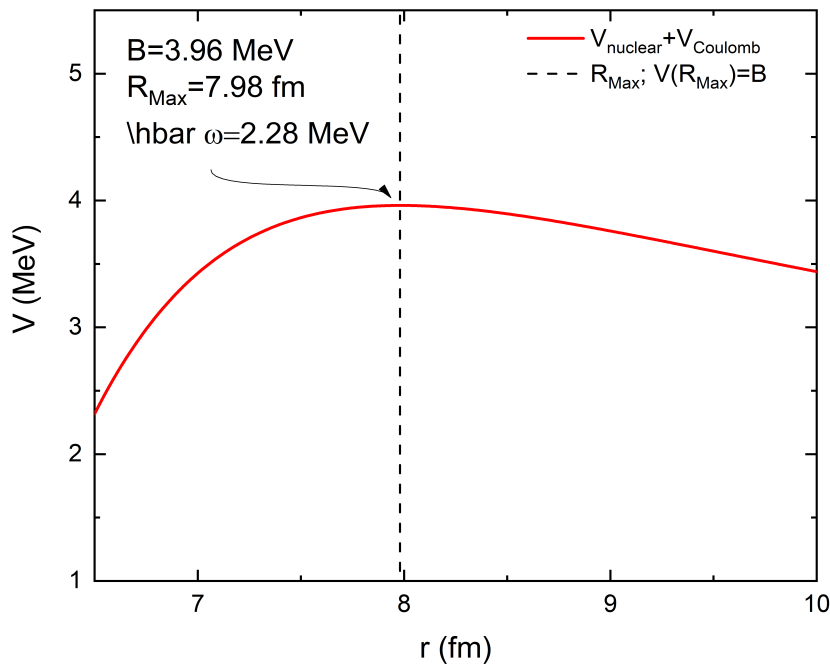


Figura 6.22: Caracterización de la Barrera de Coulomb para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ mediante SPP.

Por otro lado, estos parámetros de profundidad también cumplen con la Relación de Dispersión mostrada en la Figura 6.23. Dicha figura muestra las estimaciones obtenidas mediante la optimización de los parámetros de profundidad, la dependencia energética de los potenciales imaginarios y el resultado de aproximar la misma con segmentos de recta y calcular los potenciales reales mediante la ecuación (1.39).

El potencial imaginario de Fusión W_{0F} es constante a energías grandes, empezando a decrecer a energías del doble de la Barrera de Coulomb del sistema, siendo completamente

cero cuando la energía es aproximadamente $E_{C.M.} = 2.4$ MeV. Este comportamiento observado en sistemas anteriores representa un cierre del Canal de Fusión debido a la energía disponible del sistema. La contraparte real V_{0F} muestra algunas ligeras desviaciones respecto a la curva, aunque los parámetros de profundidad reproducen la tendencia decreciente a energías grandes.

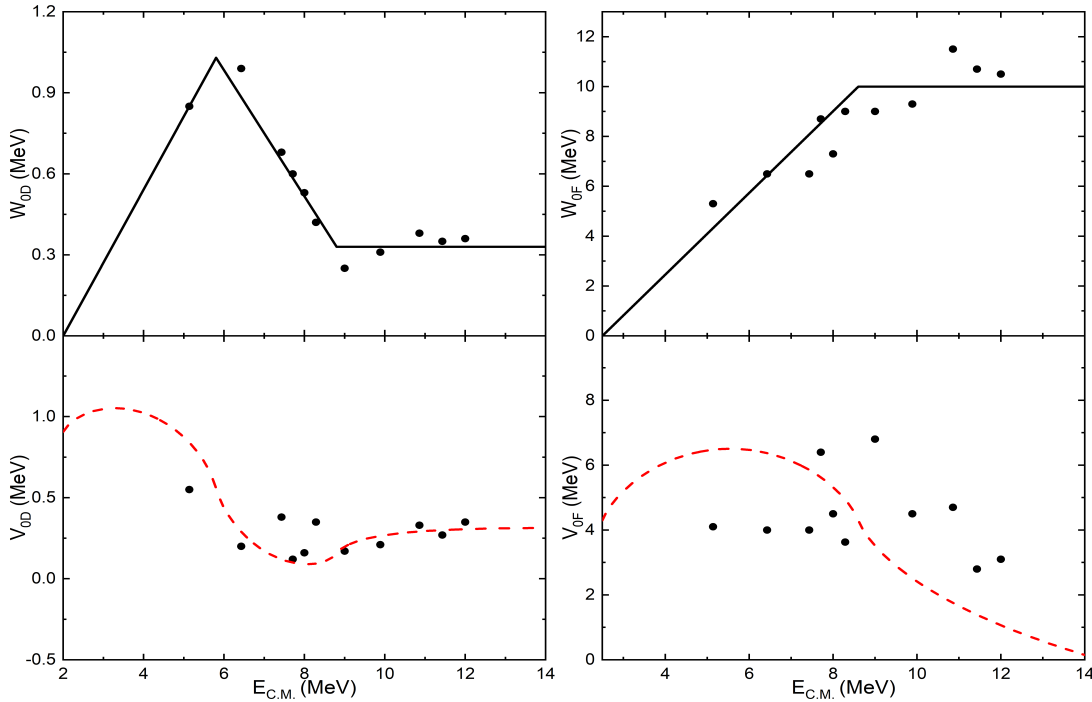


Figura 6.23: Relación de dispersión de los parámetros de profundidad para sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y su reacción inversa ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ [Torabi,2024].

El potencial imaginario de Reacciones Directas W_{0D} también es constante a energías grandes, experimentando cambios en su dependencia energética cuando la energía es del doble de la Barrera de Coulomb, mostrando un aumento significativo en una vecindad bastante cercana ($E_{C.M.} = 5.8$ MeV) a la Barrera y cayendo a cero cuando la energía es aproximadamente $E_{C.M.} = 2$ MeV. Este comportamiento también visto en el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ se asocia a la presencia y dominio de los mecanismos de ruptura del Núcleo Proyectil debido a su débil ligadura, algo que parece haberse suprimido en el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$. La contraparte real V_{0D} muestra un debilitamiento del Canal Elástico, principalmente por la aparición de los mecanismos de ruptura.

Las Figuras 6.25 muestran los resultados de las Distribuciones Angulares utilizando

la herramienta FRESCO, con los parámetros de profundidad de la Tabla 5.8. Se observa una muy buena reproducción de los datos experimentales de Distribución Angular de Dispersión Elástica cuando el valor del potencial de absorción de muy corto alcance es $W_{\text{int}} = 0$ MeV. Sin embargo, se incluyen diferentes cálculos con diferentes valores de este potencial para poder observar cuál es el efecto en la Distribución Angular.

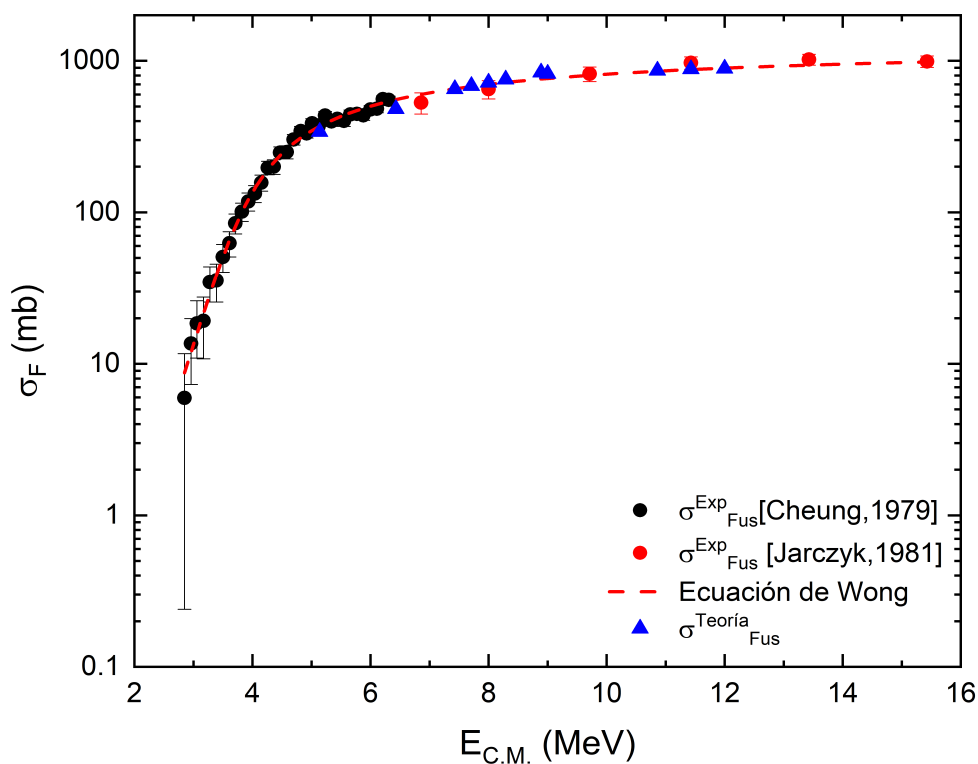


Figura 6.24: Secciones Eficaces de Fusión experimentales para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y su reacción inversa ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ (círculos negros y rojos) en comparación con los resultados obtenidos por Torabi (2024) (triángulos azules).

El efecto del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} se manifiesta a través de la presencia de oscilaciones que aparecen a partir de ángulos medios y se intensifican a ángulos grandes. A diferencia de los anteriores sistemas, estas oscilaciones parecen ser mucho más intensas a energías bajas, lo cual puede sugerir una dependencia del potencial W_{int} respecto a la masa del Núcleo Blanco A_t .

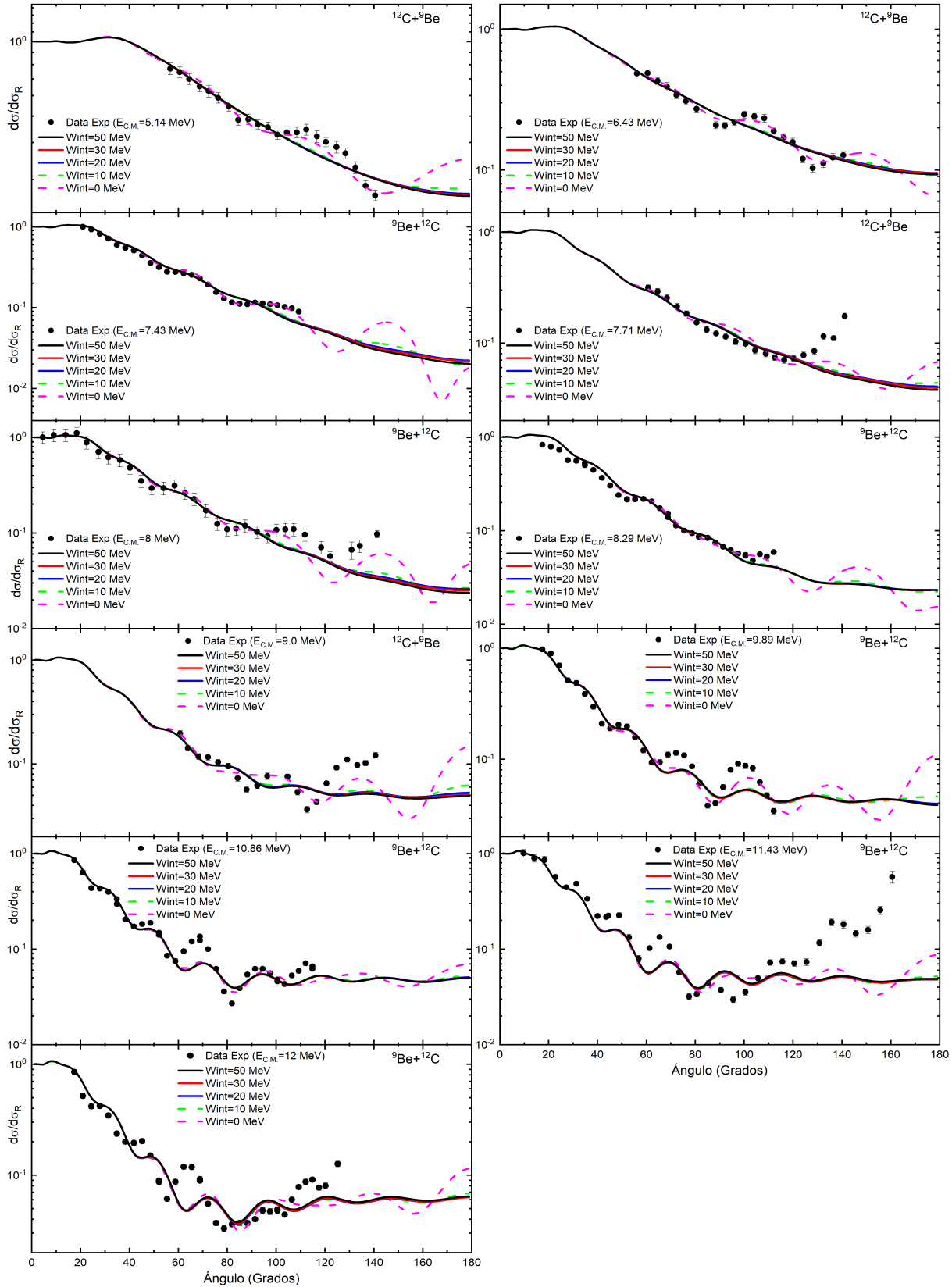


Figura 6.25: Distribuciones Angulares para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ a diferentes energías, utilizando los parámetros de la Tabla 5.8 que pertenecen al Modelo Óptico Extendido [Torabi,2024]. El ángulo de dispersión es expresado en el sistema C.M.

A energías bajas, la descripción de los datos experimentales ofrece muy buenos resultados, específicamente a las energías $E_{\text{C.M.}} = 5.14$, 6.43 y 7.43 MeV. El cálculo con $W_{\text{int}} = 0$ MeV muestra oscilaciones que sí aparecen en los datos experimentales, reproduciendo las tendencias en ángulos de dispersión $\theta_{\text{C.M.}}$ pequeños (ver energía $E_{\text{C.M.}} = 7.43$ MeV) como en ángulos de dispersión grandes (ver energía $E_{\text{C.M.}} = 5.14$ y 6.43 MeV). Los puntos donde las oscilaciones presentan máximos y mínimos se manifiestan tanto en los datos experimentales como en los cálculos realizados.

Por otro lado, a energías superiores $E_{\text{C.M.}} = 7.71$, 8 , 8.29 y 9 MeV, se observan ligeras desviaciones de los cálculos realizados respecto a los datos experimentales. Específicamente, la energía $E_{\text{C.M.}} = 7.71$ MeV muestra desviaciones a ángulos grandes, lo cual sugiere la realización de optimizaciones adicionales. Sin embargo, la descripción a ángulos pequeños y medios es bastante buena, reproduciendo el ligero máximo presente en $\theta_{\text{C.M.}} \approx 60$ y el mínimo presente en $\theta_{\text{C.M.}} \approx 120$. La descripción a la energía $E_{\text{C.M.}} = 8$ MeV es bastante buena, especialmente a ángulos pequeños y medios, mostrando desviaciones a partir del ángulo de dispersión $\theta_{\text{C.M.}} = 100$. Sin embargo, estas desviaciones pueden asociarse a la intensidad de las mismas, ya que los máximos y mínimos presentes en $\theta_{\text{C.M.}} \approx 100$, $\theta_{\text{C.M.}} \approx 120$ y $\theta_{\text{C.M.}} \approx 140$ se observan tanto en los datos experimentales, como en los cálculos de $W_{\text{int}} = 0$ MeV. La energía $E_{\text{C.M.}} = 8.29$ MeV muestra desviaciones especialmente a ángulos pequeños. Sin embargo, la falta de datos experimentales a ángulos grandes no permite definir de manera precisa la fiabilidad de los cálculos realizados. La desviación de la energía $E_{\text{C.M.}} = 9.0$ MeV es mayor que para otros casos, esto se debe principalmente a la falta de datos experimentales a ángulos pequeños. Sin embargo, los máximos y mínimos presentes en $\theta_{\text{C.M.}} \approx 100$, $\theta_{\text{C.M.}} \approx 115$ y $\theta_{\text{C.M.}} = 135$ aparecen en los datos experimentales y el cálculo simultáneamente.

Las cuatro últimas energías ofrecen resultados bastante interesantes. Los resultados obtenidos para la energía $E_{\text{C.M.}} = 9.89$ MeV ofrecen una descripción bastante buena tanto a ángulos pequeños como medios, reproduciendo las tendencias oscilatorias de manera satisfactoria, esto proporciona solidez a las oscilaciones observadas a ángulos grandes, donde existen datos experimentales. Esta misma descripción se aplica para $E_{\text{C.M.}} = 10.86$ MeV, donde si bien la intensidad de las oscilaciones no se ajusta de manera perfecta

con los datos experimentales, los máximos y mínimos sí están presentes. Las desviaciones observadas para la energía $E_{\text{C.M.}} = 11.43$ MeV son grandes; las oscilaciones se ajustan de manera realista en ángulos pequeños y medios, pero no así para ángulos grandes. Los puntos experimentales a ángulos grandes indican una reflexión mucho mayor de las ondas parciales incidentes, algo que no se reproduce en los cálculos realizados. Algo similar sucede para la energía $E_{\text{C.M.}} = 12$ MeV, donde se cumple la buena reproducción de los datos a ángulos pequeños y medios, pero con variaciones significativas a ángulos grandes. A pesar de la falta de datos experimentales en este último intervalo angular, se espera un comportamiento similar al presente para la energía $E_{\text{C.M.}} = 11.43$ MeV.

Las distribuciones Angulares obtenidas ofrecen en la mayoría de los casos una descripción bastante buena, especialmente a energías cercanas a la Barrera o incluso al doble de esta. A energías grandes existen ciertas desviaciones, sin embargo, en la mayoría de los casos las tendencias observadas en los datos experimentales también se reproducen en los cálculos realizados, algo que resulta importante en el análisis de los coeficientes de reflexión.

El análisis de los coeficientes de reflexión a partir de la magnitud de los elementos de la Matriz S se ha separado en dos bloques, uno para la Reacción Nuclear ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ y otro para ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$. La Figura 6.26 muestra las magnitudes de los coeficientes de reflexión para la Reacción Nuclear ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ en función del número cuántico de momento angular l para cada onda parcial. Recordemos que la absorción de la onda parcial con número cuántico l se traduce en un aumento de la Sección Eficaz de Fusión por un factor proporcional a $(2l + 1) [1 - |S|^2]$.

La magnitud de los elementos de la Matriz S considerando dos valores diferentes del potencial de absorción de muy corto alcance (W_{int}) para cada una de las energías se muestran en la parte izquierda de la Figura 6.26, mientras que la razón entre estos dos valores se muestra en la parte derecha de la misma Figura. Especialmente se eligen estos diferentes valores de W_{int} ya que uno de ellos suprime totalmente este potencial de absorción de muy corto alcance (y también es el que mejor se ajusta a los datos experimentales $W_{\text{int}} = 0$ MeV) y el otro es lo suficientemente fuerte como para absorber las ondas parciales transmitidas a través del Núcleo Blanco.

La magnitud de los elementos de la Matriz S para la energía $E_{\text{C.M.}} = 5.14$ MeV muestran absorción incompleta de flujo del Canal Elástico hacia otros Canales de Reacción. Esto se cumple para ondas parciales con momento angular pequeño ($|S|(l = 0, 1) \approx 0.3$). Ondas parciales con momento angular más grande experimentan una absorción del Canal Elástico en menor medida (satisfaciendo la relación $0.3 < |S|(2 < l < 7) < 1.0$). Finalmente, ondas parciales con momento angular $l > 7$ contribuyen totalmente al flujo del Canal Elástico y no son absorbidas del mismo.

Ondas parciales con determinado momento angular l tienen asociado un parámetro de impacto definido, si su momento angular es pequeño el parámetro de impacto también lo será. Es por esto mismo que ondas parciales con l pequeño tienen mayores probabilidades de ser absorbidas del Canal Elástico.

Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 6.43$ MeV, se observa una absorción de flujo del Canal Elástico en mayor medida que para la energía anterior. Para $l = 0, 1$ la magnitud de los elementos de la Matriz S es $|S|(l = 0, 1) \approx 0.18$. Ondas parciales con momento angular más grande experimentan una absorción menor (satisfaciendo la relación $0.18 < |S|(2 < l < 9) < 1.0$). Finalmente, ondas parciales con momento angular $l > 9$ contribuyen al Canal Elástico en su totalidad.

Para las energías $E_{\text{C.M.}} = 7.71$ y 9.0 MeV se reproduce un comportamiento similar. En ambos casos los coeficientes de reflexión son bastante parecidos para ondas parciales de momento angular pequeño ($|S| \approx 0.1$). Esta absorción se propaga hasta ondas parciales de momento angular $2 < l < 10$ para la energía $E_{\text{C.M.}} = 7.71$ MeV y ondas parciales de momento angular $2 < l < 11$ para la energía $E_{\text{C.M.}} = 9.0$ MeV. Es decir, la absorción de ondas parciales tiene una clara dependencia energética; a mayor energía disponible para llevar a cabo la Reacción Nuclear $E_{\text{C.M.}}$, el alcance de la absorción sobre ondas parciales es mayor.

Por otro lado, la razón entre los coeficientes de reflexión para ambos valores de W_{int} proporciona información sobre el comportamiento de cada onda parcial de manera individual. El comportamiento de cada onda parcial se describirá tomando como referencia $W_{\text{int}} = 0$ MeV. Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 5.14$ MeV, la onda parcial con $l = 0$ se transmite y es mayormente absorbida por el Núcleo Blanco. Por otro lado, la onda parcial $l = 1$

se transmite de igual manera, pero es mayormente reflejada por el Núcleo Blanco. Las ondas parciales de momento angular $l = 2$ y 4 experimentan un comportamiento similar a $l = 0$. Por otro lado, la onda parcial con $l = 3$ experimenta un comportamiento parecido a $l = 1$. Este mismo razonamiento se aplica para la energía $E_{\text{C.M.}} = 6.43$ MeV, las ondas parciales $l = 0, 2$ y 4 se transmiten siendo mayormente absorbidas por el Núcleo Blanco, mientras que las ondas $l = 1, 3$ y 5 son mayormente reflejadas por el mismo. Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 7.71$ y 9.0 MeV las ondas parciales que se transmiten y se absorben con una mayor probabilidad son $l = 1, 3, 6$ y $l = 1, 6$ respectivamente, mientras que aquellas que son reflejadas con mayor probabilidad son $l = 0, 2$ y $l = 0, 2, 5, 7$ respectivamente.

La parte izquierda de la Figura 6.27 muestra las magnitudes de los coeficientes de reflexión para la Reacción Nuclear ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ en función del número cuántico de momento angular l de cada onda parcial. De manera inicial, se observa la dependencia energética de la que se habló anteriormente, es decir, la absorción de flujo del Canal Elástico es más fuerte y absorbe más ondas a medida que la energía aumenta. Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 7.43$ MeV, la absorción se presenta en ondas parciales con momento angular $0 < l < 9$. Para las energías $E_{\text{C.M.}} = 8$, y 8.29 MeV la absorción se presenta a través de las ondas parciales $0 < l < 10$ en ambas energías. Para las energías $E_{\text{C.M.}} = 9.89$, y 10.86 MeV las ondas absorbidas del flujo del Canal Elástico son $0 < l < 11$ y $0 < l < 13$ respectivamente. Finalmente, las energías $E_{\text{C.M.}} = 11.43$, y 12 MeV presentan absorción de flujo del Canal Elástico para las ondas $0 < l < 13$ en ambas energías.

Finalmente, la razón mostrada en la parte derecha de la Figura 6.27 se interpreta de manera similar al caso de la Reacción inversa ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$. Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 7.43$ MeV, se observa una ligera desviación del cálculo $W_{\text{int}} = 0$ MeV respecto a $W_{\text{int}} = 50$ MeV. Las ondas parciales con momento angular pequeño son mayormente reflejadas por el Núcleo Blanco. Ondas parciales con momento angular $l \geq 4$ muestran un comportamiento de reflexión y transmisión más consistente con lo que ya se ha comentado para sistemas y energías anteriores. Sucede algo similar para $E_{\text{C.M.}} = 8.0$ MeV, existe cierta desviación entre ambos cálculos de W_{int} , donde ondas parciales con momento angular l pequeño son mayormente reflejadas por el Núcleo Blanco, no es hasta ondas parciales con $l \geq 4$ donde se presentan de manera más consistente el fenómeno de reflexión y transmisión.

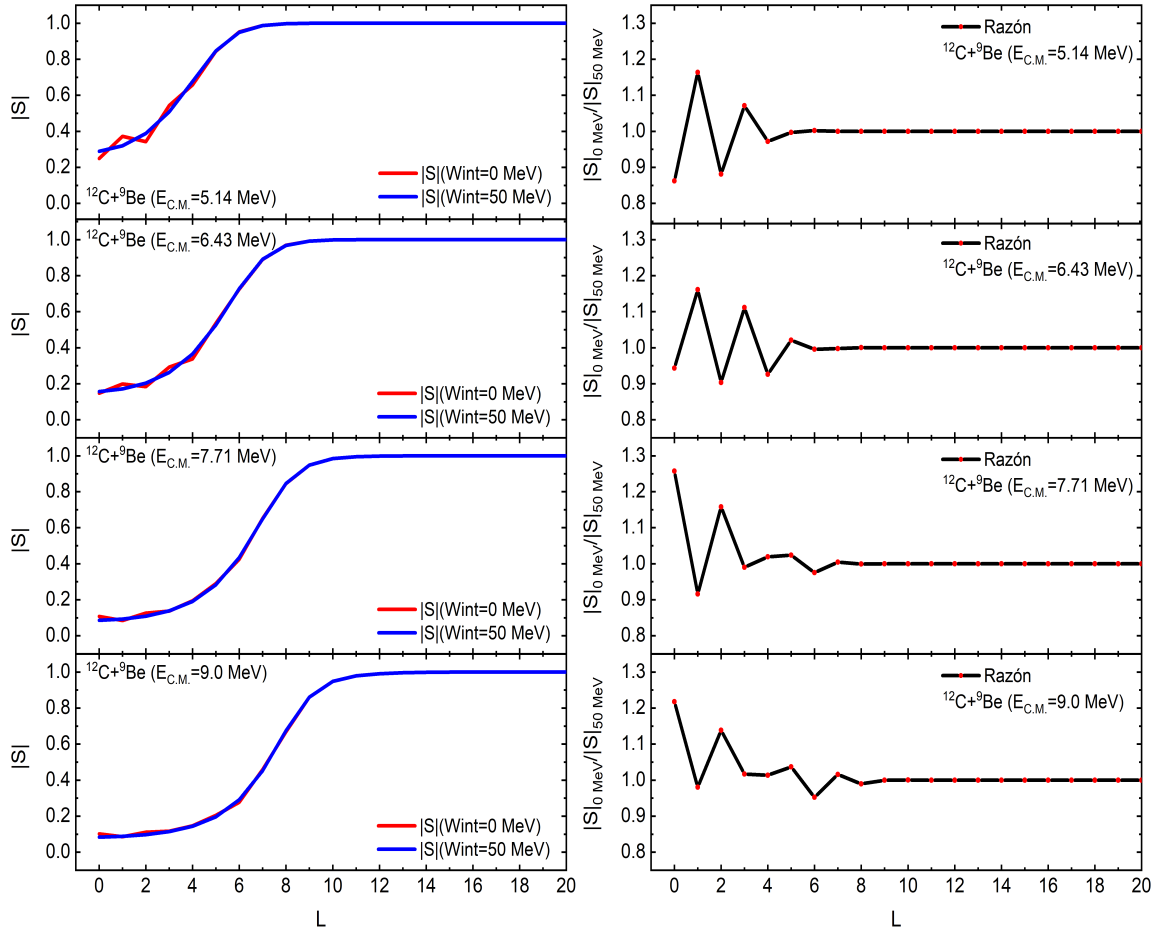


Figura 6.26: Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$.

Para las energías $E_{\text{C.M.}} = 8.29$ y 9.89 MeV, se aprecia la dependencia energética de forma clara: las ondas que son transmitidas y son absorbidas con mayor probabilidad son $l = 0, 2, 4$ y 6 en ambas energías, mientras que aquellas que son transmitidas y reflejadas con mayor probabilidad son $l = 1, 3, 5$ para $E_{\text{C.M.}} = 8.29$ MeV y $l = 1, 3, 5, 7$ para $E_{\text{C.M.}} = 9.89$ MeV, es decir, una onda parcial adicional. La energía $E_{\text{C.M.}} = 10.86$ MeV muestra un comportamiento similar, sin embargo, la diferencia entre los cálculos realizados entre $W_{\text{int}} = 0$ MeV y $W_{\text{int}} = 50$ MeV es pequeña, algo que se puede confirmar al observar su Distribución Angular (ver Figura 6.25). Para esta energía, las ondas parciales con momento angular pequeño $l < 3$ se comportan de manera similar en ambos casos, mientras que las de momento angular $3 < l < 9$ si muestran diferencias mínimas. Para las dos últimas energías,

sí se reproduce un comportamiento que es consistente con lo esperado. Las ondas parciales que son transmitidas y mayormente absorbidas por el Núcleo Blanco $l = 0, 2, 4, 6$ y 8 para ambas energías. Mientras que aquellas que son transmitidas y mayormente reflejadas son $l = 1, 3, 5$ y 7 para ambas energías. A medida que la energía aumenta, la reflexión y transmisión de ondas parciales tiene un alcance mayor.

Con el fin de elucidar los efectos del potencial de muy corto alcance W_{int} , se ha realizado una aproximación semiclásica. Se ha calculado el ángulo de dispersión para las ondas parciales con número cuántico de momento angular l , cuyos coeficientes de reflexión son diferentes para diferentes valores del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} . Dicho cálculo se llevó a cabo mediante la función de deflexión (ecuación (1.28)), donde la magnitud del momento angular ha considerado la corrección $\lambda = \hbar\sqrt{[l(l+1)]} \rightarrow \hbar[l + \frac{1}{2}]$. El punto de retorno para cada onda parcial se obtiene al satisfacer la condición (1.27). Por otro lado, el término $V(r)$ se ha calculado mediante la suma de los potenciales reales que describen la Dispersión Elástica presentes en la formulación del Modelo Óptico Extendido, es decir, $V(r) = V_{\text{bare}} + V_{\text{C}} + V_{\text{F}} + V_{\text{D}}$.

Para cada onda parcial se ha calculado el potencial U_{eff} , el cual es distinto para diferentes momentos angulares de magnitud λ , ya que dentro de él está incluido el potencial centrífugo (ecuación (1.8)). Un ejemplo de los potenciales efectivos para cada onda parcial se muestra en la Figura 6.29.

Las ondas parciales con número cuántico $l = 1, 2, 3$ y 4 experimentan un potencial cuya altura de Barrera es menor que la energía $E_{\text{C.M.}}$, es por este motivo que el punto de retorno se ubica a distancias de separación demasiado pequeñas, es decir, la onda parcial incidente del Núcleo Proyectoil penetra sobre el Núcleo Blanco. El potencial dominante para estas ondas parciales es atractivo, ya que logran superar la Barrera centrífuga, es decir, la deflexión de estas ondas parciales se ve principalmente afectada por los potenciales volumétricos y de muy corto alcance. Por otro lado, las ondas parciales con número cuántico $l = 5$ y 6 experimentan un potencial cuya altura de Barrera es mayor que la energía $E_{\text{C.M.}}$, es decir, ahora el potencial dominante para estas ondas parciales es repulsivo (principalmente por la contribución del Potencial de Coulomb más el Potencial Centrífugo) a distancias mayores, superiores al radio de absorción fuerte.

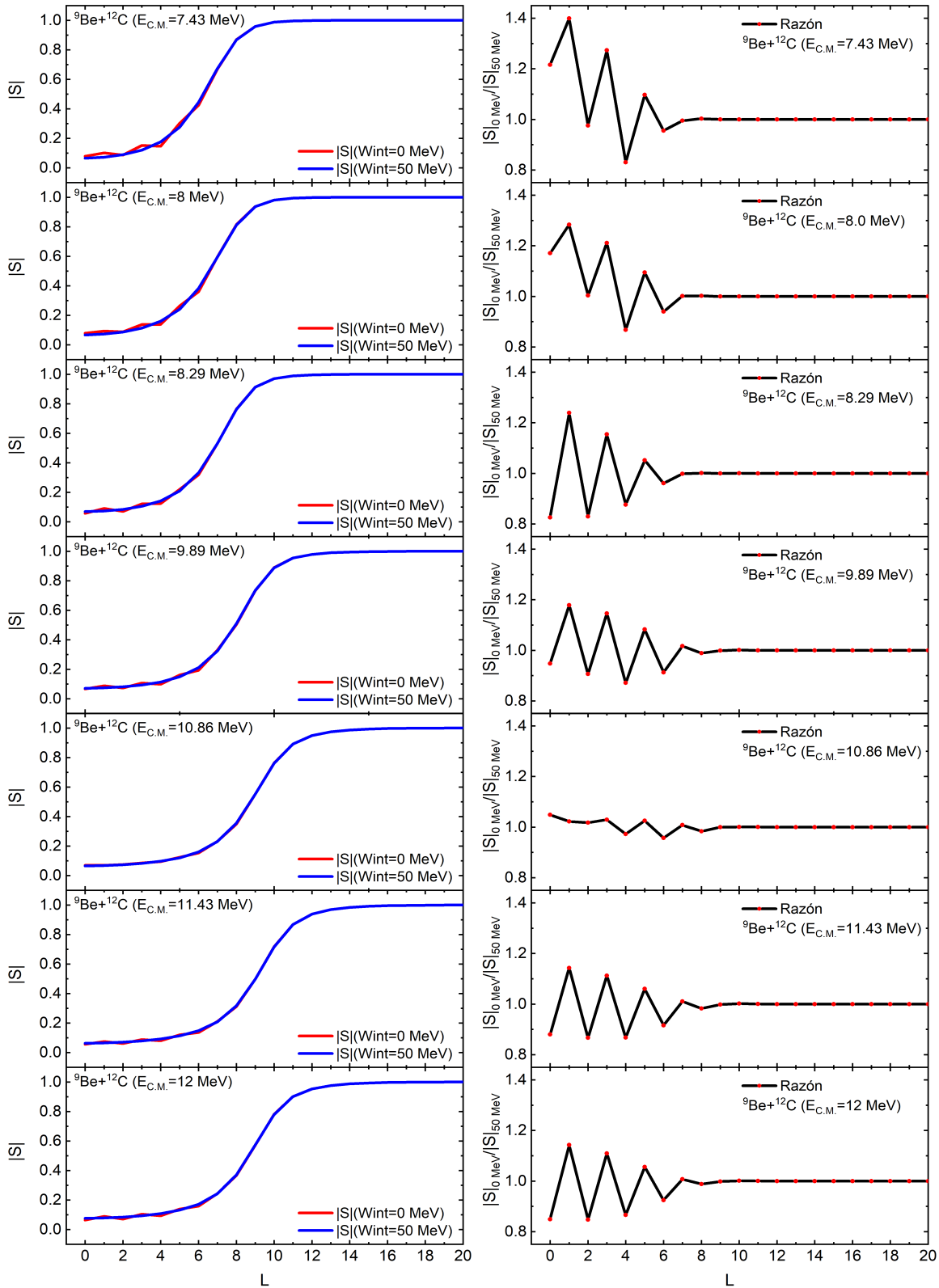


Figura 6.27: Magnitud de los elementos de la Matriz S y comparación mediante la razón entre dos diferentes valores de W_{int} en función del momento angular l . Sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$.

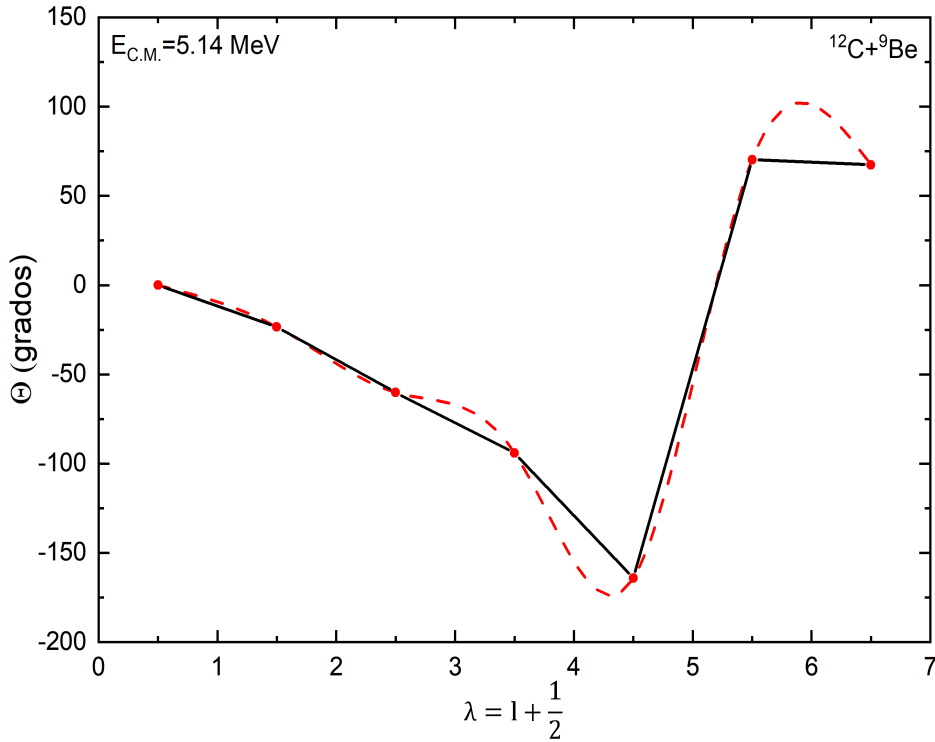


Figura 6.28: Función de deflexión para cada l . La curva formada por segmentos de recta muestra los valores discretizados obtenidos mediante la aproximación semiclásica. La curva punteada color rojo muestra la aproximación *Spline* de los mismos valores discretizados.

La función de deflexión para esta energía en particular ($E_{C.M.} = 5.14$ MeV) se muestra en la Figura 6.28. La aproximación *Spline* de los valores discretizados en la Figura 6.28 solo se incluye como guía visual, sin pretender ofrecer la curva continua exacta de la función de deflexión para este sistema. Ondas parciales con puntos de retorno pequeños que logran penetrar al Núcleo Blanco tienen ángulos de deflexión negativos, mientras que aquellos que tienen puntos de retorno mayores que el radio de absorción fuerte adquieren valores del ángulo de deflexión positivos.

Los resultados de la función de deflexión en la aproximación semiclásica se muestran en la Figura 6.30, donde se han colocado líneas verticales punteadas específicamente al ángulo de dispersión resultante para cada onda parcial con número cuántico de momento angular l . El cálculo de la integral presente en la ecuación 1.28 se ha realizado hasta $r = 100$ fm, que se considera lo suficientemente grande en comparación a los radios de los núcleos

involucrados en la Reacción Nuclear.

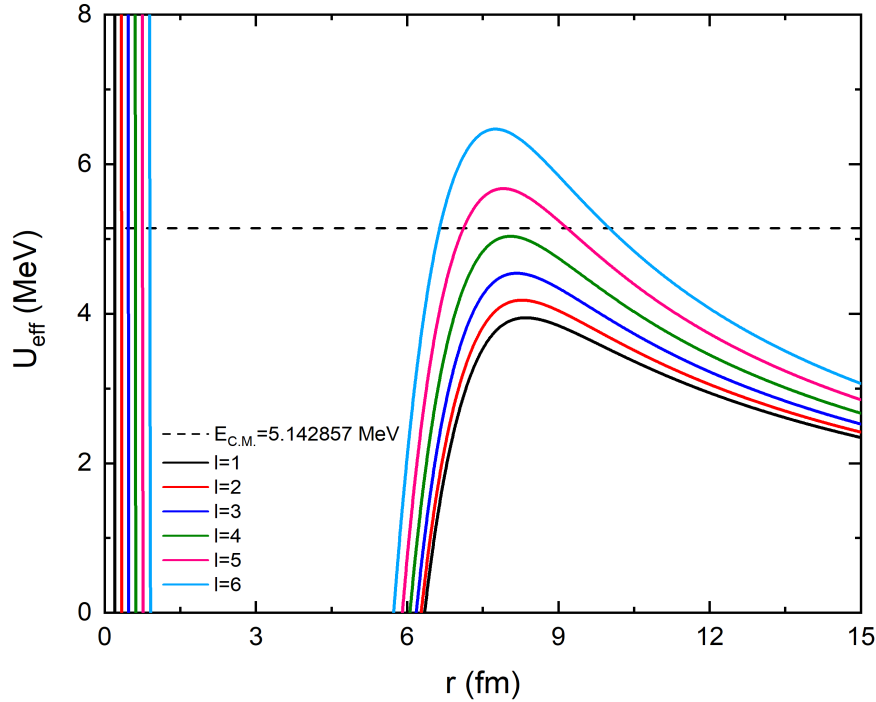


Figura 6.29: Potencial efectivo U_{eff} del sistema ${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$ para distintas ondas parciales con número cuántico de momento angular l descrito por los potenciales reales de la Tabla 5.8.

Se obtiene una buena descripción de las oscilaciones que se reproducen cuando la profundidad del potencial de absorción de muy corto alcance es nula (es decir, $W_{\text{int}} = 0$ MeV). Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 5.14$ MeV, las ondas parciales $l = 2$ y 3 reproducen los pequeños incrementos y decrementos de la Sección Eficaz Diferencial ubicados en los ángulos de dispersión $\theta_2 = 60.21^\circ$ y $\theta_3 = 94.10^\circ$ respectivamente. Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 6.43$ MeV, las ondas parciales $l = 3$ y 4 ubican de muy buena manera las oscilaciones que se reproducen en el cálculo con $W_{\text{int}} = 0$ MeV, ubicadas a los ángulos de dispersión $\theta_3 = 70.21^\circ$ y $\theta_4 = 111.65^\circ$ respectivamente. La onda parcial $l = 5$ parece predecir un aumento en la Sección Eficaz Diferencial a un ángulo de dispersión igual a $\theta_5 = 147.16^\circ$. La energía $E_{\text{C.M.}} = 7.43$ MeV parece reproducir un caso similar que la energía anterior. La onda parcial $l = 2$ parece reproducir el inicio de las oscilaciones (ubicado en $\theta_2 = 39.5^\circ$) que se intensificarán a ángulos de dispersión mayores. Las ondas parciales $l = 3$ y 4 ubican

pequeñas oscilaciones ubicadas en los ángulos de dispersión $\theta_3 = 59.37^\circ$ y $\theta_4 = 84.29^\circ$ respectivamente. Sin embargo, la onda parcial $l = 5$, así como para la energía anterior, parece predecir una disminución de la Sección Eficaz Diferencial ubicada en un ángulo de dispersión $\theta_5 = 124.66^\circ$. Sin embargo, el análisis para la energía $E_{\text{C.M.}} = 7.71$ MeV no es del todo satisfactorio, ya que solo la onda parcial $l = 3$ predice una pequeña oscilación ubicada en un ángulo de dispersión $\theta_3 = 63.42^\circ$. Las ondas parciales restantes no ofrecen una buena descripción de las oscilaciones presentes a distintos ángulos de dispersión, aunque la onda parcial $l = 6$ parece reproducir el aumento mostrado en los datos experimentales. Por otro lado, la descripción para la energía $E_{\text{C.M.}} = 8$ MeV es bastante buena, especialmente para la onda parcial $l = 3, 4, 5$ y 6 . Estas ondas parciales logran reproducir las oscilaciones de la Sección Eficaz Diferencial presentes en los ángulos de dispersión $\theta_3 = 67.68^\circ$, $\theta_4 = 84.93^\circ$, $\theta_5 = 106.57^\circ$ y $\theta_6 = 145.19^\circ$. La energía $E_{\text{C.M.}} = 8.29$ MeV muestra ciertas diferencias respecto a la energía anterior. La descripción de las oscilaciones es buena, especialmente para las ondas parciales $l = 2, 3$ y 5 , cuyos ángulos de dispersión se presentan en $\theta_2 = 35.84^\circ$, $\theta_3 = 53.93^\circ$ y $\theta_5 = 111.44^\circ$. Esta última onda parcial parece predecir un aumento en la Sección Eficaz Diferencial a ángulos de dispersión más grandes, sin embargo, la falta de datos experimentales en esta región angular hace imposible predecir si el cálculo con $W_{\text{int}} = 0$ MeV y en ángulo de dispersión de la onda parcial $l = 6$ son consistentes. Continuando con la descripción de las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica en la aproximación semiclásica, para la $E_{\text{C.M.}} = 9$ MeV, solo las ondas parciales con $l = 3, 5$ y 6 logran reproducir los comportamientos ondulatorios de la Sección Eficaz Diferencial, específicamente a los ángulos de dispersión $\theta_3 = 54.10^\circ$, $\theta_5 = 95.16^\circ$ y $\theta_6 = 120.46^\circ$. Para la energía $E_{\text{C.M.}} = 9.89$ MeV la descripción de las oscilaciones es más completa, ondas parciales con $l = 2, 3, 4$ y 5 muestran una buena descripción de las oscilaciones presentes en ángulos de dispersión $\theta_2 = 29.30^\circ$, $\theta_3 = 45.30^\circ$, $\theta_4 = 69.62^\circ$ y $\theta_5 = 86.17^\circ$. Sin embargo, la onda parcial $l = 6$ logra reproducir la disminución de la Sección Eficaz Diferencial ubicada en un ángulo de dispersión $\theta_6 = 120.56^\circ$. Caso similar para la energía $E_{\text{C.M.}} = 10.86$ MeV, donde las ondas parciales $l = 2, 3, 4, 5$ y 6 reproducen oscilaciones presentes en ángulos de dispersión $\theta_2 = 26.31^\circ$, $\theta_3 = 40.94^\circ$, $\theta_4 = 63.55^\circ$, $\theta_5 = 83.09^\circ$ y $\theta_6 = 102.37^\circ$. La energía $E_{\text{C.M.}} = 11.43$ MeV es especialmente importante en este análisis debido a que tiene

datos experimentales en casi toda la región angular desde 0° hasta 180° . En este caso, la mayoría de las ondas parciales ofrece una buena descripción de las oscilaciones presentes en la sección eficaz, especialmente $l = 2, 3, 4, 5$ y 7 , cuyos ángulos de dispersión se ubican en $\theta_2 = 26.17^\circ$, $\theta_3 = 50.58^\circ$, $\theta_4 = 58.02^\circ$, $\theta_5 = 83.30^\circ$ y $\theta_7 = 133.96^\circ$. En esta última, a pesar de que el cálculo con $W_{\text{int}} = 0$ MeV no se ubique sobre los datos experimentales, si reproduce un perfil bastante similar. Por último, La energía $E_{\text{C.M.}} = 12$ MeV no tiene datos experimentales que se extiendan sobre toda la región angular, pero el análisis de ondas parciales es bastante satisfactorio. Ondas parciales con $l = 2, 3, 4, 5, 6$ y 7 logran reproducir diferentes oscilaciones presentes en ángulos de dispersión $\theta_2 = 24.90^\circ$, $\theta_3 = 47.15^\circ$, $\theta_4 = 55.18^\circ$, $\theta_5 = 74.05^\circ$, $\theta_6 = 103.03^\circ$ y $\theta_7 = 119.09^\circ$.

Esta aproximación semiclásica describe de buena manera el comportamiento de las ondas parciales con número cuántico de momento angular l . Sin embargo, se requiere un análisis adicional donde se incluyan más aspectos que describan cada vez más aspectos cuánticos del sistema.

En la Tabla 6.2 se muestran los puntos de retorno y los ángulos de dispersión para cada onda parcial a distintas energías. La onda parcial $l = 1$ muestra un comportamiento sistemático en función de la energía $E_{\text{C.M.}}$. A energías pequeñas, esta onda parcial sufre ángulos de dispersión que parten desde $\theta_1 = 23.39^\circ$ y a medida que la energía aumenta, esta sufre desviaciones a ángulos menores. Esto se debe a que a medida que la energía cinética del Núcleo Proyectil aumenta, este será cada vez menos sensible al potencial central efectivo U_{eff} del sistema. Es decir, el tiempo de tránsito del Núcleo Proyectil a través del Núcleo Blanco, es cada vez menor. Este comportamiento sistemático se mantiene no solo para la onda parcial $l = 1$, sino que también se presenta para la mayoría de las ondas parciales.

Es importante mencionar que la influencia del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} se manifiesta solamente sobre ondas parciales con número cuántico de momento angular l que logran penetrar a través del Núcleo Blanco. Es decir, sobre aquellas ondas que logran entrar en el campo de acción de este potencial, las cuales satisfacen la relación $E_{\text{C.M.}} > U_{\text{eff}}$ principalmente en la distancia de absorción fuerte. Aquellas ondas parciales que estén dominadas por un potencial efectivo repulsivo que satisface la relación $E_{\text{C.M.}} < U_{\text{eff}}$ en la distancia de absorción fuerte (ver ondas parciales $l = 5$ y 6 de la Figura

6.29) no son sensibles al potencial de absorción de muy corto alcance.

Tabla 6.2: Puntos de retorno y ángulos de dispersión para diferentes ondas parciales l a diferentes energías. El punto de retorno se ha aproximado mediante una curva cuadrática sobre una vecindad centrada en el punto donde se cumple la condición de la ecuación (1.27).

Energía y Longitud de Onda De Broglie: $E_{C.M.}; \lambda_{DB}$	Número Cuántico de Momento Angular l	Punto de Retorno r_0 (fm)	Función de Deflexión $ \Theta = \theta$ (grados)
$E_{C.M.} = 5.14$ MeV $\lambda_{DB} = 2.39$ fm	$l = 1$	$r_0 = 0.201$	$\Theta = -23.39$
	$l = 2$	$r_0 = 0.335$	$\Theta = -60.21$
	$l = 3$	$r_0 = 0.471$	$\Theta = -94.10$
	$l = 4$	$r_0 = 0.610$	$\Theta = -164.21$
	$l = 5$	$r_0 = 9.170$	$\Theta = 70.27$
	$l = 6$	$r_0 = 10.010$	$\Theta = 67.40$
$E_{C.M.} = 6.14$ MeV $\lambda_{DB} = 2.14$ fm	$l = 1$	$r_0 = 0.200$	$\Theta = -16.21$
	$l = 2$	$r_0 = 0.335$	$\Theta = -46.37$
	$l = 3$	$r_0 = 0.470$	$\Theta = -70.21$
	$l = 4$	$r_0 = 0.608$	$\Theta = -111.65$
	$l = 5$	$r_0 = 0.749$	$\Theta = -147.16$
$E_{C.M.} = 7.43$ MeV $\lambda_{DB} = 2.65$ fm	$l = 1$	$r_0 = 0.200$	$\Theta = -11.60$
	$l = 2$	$r_0 = 0.334$	$\Theta = -39.50$
	$l = 3$	$r_0 = 0.470$	$\Theta = -59.37$
	$l = 4$	$r_0 = 0.607$	$\Theta = -84.29$
	$l = 5$	$r_0 = 0.748$	$\Theta = -124.66$
	$l = 6$	$r_0 = 0.893$	$\Theta = -161.84$
$E_{C.M.} = 7.71$ MeV $\lambda_{DB} = 1.95$ fm	$l = 1$	$r_0 = 0.199$	$\Theta = -9.57$
	$l = 2$	$r_0 = 0.332$	$\Theta = -35.82$
	$l = 3$	$r_0 = 0.467$	$\Theta = -63.42$
	$l = 4$	$r_0 = 0.604$	$\Theta = -78.54$
	$l = 5$	$r_0 = 0.744$	$\Theta = -112.34$

	$l = 6$	$r_0 = 0.887$	$\Theta = -154.48$
$E_{\text{C.M.}} = 8 \text{ MeV}$ $\lambda_{\text{DB}} = 2.55 \text{ fm}$	$l = 1$	$r_0 = 0.199$	$\Theta = -9.85$
	$l = 2$	$r_0 = 0.333$	$\Theta = -36.35$
	$l = 3$	$r_0 = 0.469$	$\Theta = -67.68$
	$l = 4$	$r_0 = 0.606$	$\Theta = -84.93$
	$l = 5$	$r_0 = 0.744$	$\Theta = -106.57$
	$l = 6$	$r_0 = 0.891$	$\Theta = -145.19$
$E_{\text{C.M.}} = 8.29 \text{ MeV}$ $\lambda_{\text{DB}} = 2.51 \text{ fm}$	$l = 1$	$r_0 = 0.200$	$\Theta = -9.54$
	$l = 2$	$r_0 = 0.334$	$\Theta = -35.84$
	$l = 3$	$r_0 = 0.470$	$\Theta = -53.93$
	$l = 4$	$r_0 = 0.607$	$\Theta = -84.02$
	$l = 5$	$r_0 = 0.748$	$\Theta = -111.44$
	$l = 6$	$r_0 = 0.892$	$\Theta = -139.66$
$E_{\text{C.M.}} = 9 \text{ MeV}$ $\lambda_{\text{DB}} = 1.80 \text{ fm}$	$l = 1$	$r_0 = 0.198$	$\Theta = -6.39$
	$l = 2$	$r_0 = 0.331$	$\Theta = -34.19$
	$l = 3$	$r_0 = 0.465$	$\Theta = -54.10$
	$l = 4$	$r_0 = 0.602$	$\Theta = -72.04$
	$l = 5$	$r_0 = 0.741$	$\Theta = -95.16$
	$l = 6$	$r_0 = 0.884$	$\Theta = -120.46$
	$l = 7$	$r_0 = 1.032$	$\Theta = -159.36$
$E_{\text{C.M.}} = 9.89 \text{ MeV}$ $\lambda_{\text{DB}} = 2.30 \text{ fm}$	$l = 1$	$r_0 = 0.199$	$\Theta = -5.83$
	$l = 2$	$r_0 = 0.332$	$\Theta = -29.30$
	$l = 3$	$r_0 = 0.463$	$\Theta = -45.30$
	$l = 4$	$r_0 = 0.604$	$\Theta = -69.62$
	$l = 5$	$r_0 = 0.744$	$\Theta = -86.17$
	$l = 6$	$r_0 = 0.888$	$\Theta = -120.53$
	$l = 7$	$r_0 = 1.036$	$\Theta = -150.60$
$E_{\text{C.M.}} = 10.86 \text{ MeV}$	$l = 1$	$r_0 = 0.198$	$\Theta = -4.11$
	$l = 2$	$r_0 = 0.332$	$\Theta = -26.31$

$\lambda_{\text{DB}} = 2.19 \text{ fm}$	$l = 3$	$r_0 = 0.466$	$\Theta = -40.94$
	$l = 4$	$r_0 = 0.603$	$\Theta = -63.55$
	$l = 5$	$r_0 = 0.742$	$\Theta = -83.09$
	$l = 6$	$r_0 = 0.886$	$\Theta = -102.37$
	$l = 7$	$r_0 = 1.037$	$\Theta = -133.22$
	$l = 8$	$r_0 = 1.188$	$\Theta = -166.87$
$E_{\text{C.M.}} = 11.43 \text{ MeV}$ $\lambda_{\text{DB}} = 2.14 \text{ fm}$	$l = 1$	$r_0 = 0.199$	$\Theta = -4.24$
	$l = 2$	$r_0 = 0.332$	$\Theta = -26.17$
	$l = 3$	$r_0 = 0.468$	$\Theta = -50.58$
	$l = 4$	$r_0 = 0.605$	$\Theta = -58.02$
	$l = 5$	$r_0 = 0.745$	$\Theta = -83.30$
	$l = 6$	$r_0 = 0.889$	$\Theta = -101.40$
	$l = 7$	$r_0 = 1.038$	$\Theta = -133.96$
	$l = 8$	$r_0 = 1.193$	$\Theta = -159.98$
$E_{\text{C.M.}} = 12 \text{ MeV}$ $\lambda_{\text{DB}} = 2.08 \text{ fm}$	$l = 1$	$r_0 = 0.199$	$\Theta = -3.29$
	$l = 2$	$r_0 = 0.332$	$\Theta = -24.90$
	$l = 3$	$r_0 = 0.467$	$\Theta = -47.15$
	$l = 4$	$r_0 = 0.604$	$\Theta = -55.18$
	$l = 5$	$r_0 = 0.744$	$\Theta = -74.05$
	$l = 6$	$r_0 = 0.887$	$\Theta = -103.03$
	$l = 7$	$r_0 = 1.036$	$\Theta = -119.06$
	$l = 8$	$r_0 = 1.190$	$\Theta = -152.53$

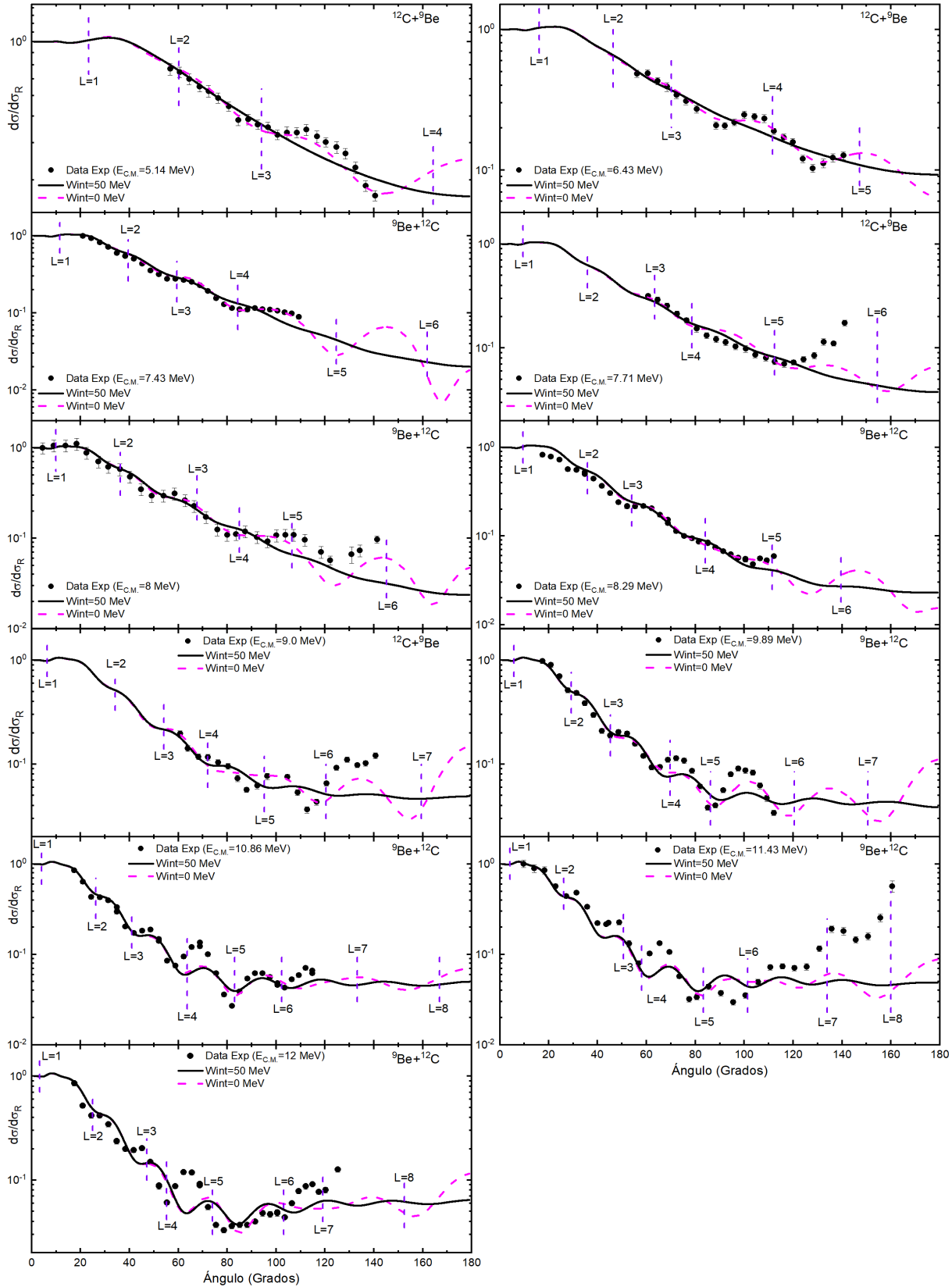


Figura 6.30: Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica para el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{12}\text{C}$ y su reacción inversa a diferentes energías. Líneas punteadas verticales indican el ángulo de deflexión de la onda parcial l de la onda total incidente. Para esta gráfica se ha utilizado la notación $L = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ en lugar de $l = i$; $i = 1, 2, 3, \dots$ simplemente por practicidad.

Capítulo 7

Conclusiones

Se estudiaron los efectos del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} en el cálculo de la Distribución Angular de Dispersión Elástica, así como la Sección Eficaz de Fusión usando la formulación del Modelo Óptico Extendido sobre sistemas Débilmente Ligados. Esto se llevó a cabo mediante la optimización de parámetros de profundidad y geométricos usando FRESCO-SFRESCO.

Los parámetros obtenidos de la optimización logran reproducir los datos experimentales de Dispersión Elástica, Sección Eficaz de Fusión y además satisfacen la Relación de Dispersión, la cual ofrece información valiosa sobre el comportamiento del sistema en función de la energía disponible para llevar a cabo la Reacción Nuclear. En el sistema ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ se observó que la presencia de los mecanismos de ruptura del Núcleo Proyectoil juegan un papel importante en una vecindad cercana a la Barrera de Coulomb. Sin embargo, el sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ no reproduce estos efectos, validando la información al incluir una energía adicional al conjunto de datos experimentales de Dispersión Elástica que ya había utilizado So (2010).

La búsqueda de una sistemática que permita determinar definitivamente la inclusión o no del potencial W_{int} en la formulación del Modelo Óptico Extendido no ha sido posible con el número limitado de sistemas (y energías) que han sido analizados. La construcción de una sistemática de este tipo requiere de un número significativo de sistemas que estén compuestos por un núcleo Débilmente Ligado y un núcleo de masa A_i que sea ligero, medio y pesado, así como de energías que se extiendan tanto por encima como por debajo de la

Barrera de Coulomb correspondiente. Sin embargo, sí se lograron observar dependencias tanto de la masa A_i como de la energía $E_{C.M.}$.

Para los dos sistemas más pesados, ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ ($Z_1Z_2=60$) y ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ ($Z_1Z_2=56$), aparecen oscilaciones pronunciadas en los cálculos correspondientes a $W_{\text{int}}=0$, sobre todo para las energías más altas (véanse Figuras 6.11 y 6.4, respectivamente). Dado que tales oscilaciones no están presentes en los datos, se concluye que para estos sistemas es importante incluir un potencial interno W_{int} con profundidad considerable, de 40 o 50 MeV, como se hizo en las Referencias [Aguilera,2021] y [So,2010], respectivamente.

Por otra parte, en el caso de los dos sistemas más ligeros, con valores de Z_1Z_2 iguales a 28 (${}^{14}\text{N}+{}^9\text{Be}$) y 24 (${}^{12}\text{C}+{}^9\text{Be}$), los datos de hecho presentan algunas oscilaciones que pueden ser reproducidas por cálculos realizados con valores pequeños de W_{int} . El primer sistema requiere $W_{\text{int}}=4$ (Fig. 6.17) mientras que el último de hecho requiere $W_{\text{int}}=0$ (Figura 6.25). El análisis semiclásico del Capítulo 6 muestra que las oscilaciones observadas pueden de hecho ser correlacionadas con reflexiones de ondas parciales particulares (Figuras 6.21 y 6.30, respectivamente).

En resumen, la dependencia energética del potencial de absorción de muy corto alcance, se manifestó reproduciendo oscilaciones en la Distribución Angular de Dispersión Elástica principalmente a ángulos intermedios y grandes, que se intensifican conforme la energía aumenta sobre la Barrera de Coulomb del sistema en cuestión. De igual manera, se observó una dependencia en función de la masa A_i , de tal manera que el potencial de absorción de muy corto alcance necesitó una profundidad de $W_{\text{int}} = 50$ MeV cuando $A_i = 64$ y 28, $W_{\text{int}} = 4$ MeV cuando $A_i = 14$ y $W_{\text{int}} = 0$ MeV cuando $A_i = 12$. Se puede especular que para sistemas ligeros la absorción interna es débil, llevando a reflexiones de ondas parciales que persisten hasta muy bajas distancias de interacción y que entonces producen oscilaciones físicas en las respectivas distribuciones angulares de dispersión elástica. Convendría estudiar otros sistemas ligeros para corroborar esta hipótesis. El efecto del potencial W_{int} sobre la Sección Eficaz de Fusión no ha sido significativa, mostrando apenas variaciones cuando dicho potencial ve modificada su profundidad.

El estudio del sistema ${}^9\text{Be}+{}^{28}\text{Si}$ realizado por So (2010) ha permitido realizar comparaciones entre el uso del potencial *double folding* y SPP como modelos del potencial V_{bare} ,

bajo la restricción de usar los mismos parámetros geométricos para los respectivos potenciales de polarización en ambas investigaciones. Ambos potenciales ofrecen descripciones de la interacción nucleón-nucleón bastante realistas, incluso cuando las profundidades de estos son diferentes, principalmente a cortas distancias. Sin embargo, estos no comparten el mismo conjunto de parámetros de profundidad de los potenciales de polarización que satisfacen las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica, las Secciones Eficaces de Fusión y la Relación de dispersión.

Finalmente, la aproximación semiclásica realizada principalmente sobre los dos sistemas más ligeros (es decir, $^{14}\text{N}+^9\text{Be}$ y $^9\text{Be}+^{12}\text{C}$) nos proporciona información valiosa sobre cuales son los efectos del potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} sobre las ondas parciales de la onda total incidente. Ondas parciales con número cuántico de momento angular $l < l_c$ que experimentan un potencial efectivo U_{eff} menor que la energía $E_{\text{C.M.}}$ están principalmente dominadas por un potencial efectivo atractivo que proporciona puntos de retorno muy pequeños. Estos son menores que la distancia de separación de los Núcleos Proyecto y Blanco cuando están en contacto superficial (ver Tabla 6.2 y 6.1). Es decir, estas ondas parciales logran transmitirse al interior del Núcleo Blanco y posteriormente son dispersadas. Las oscilaciones mostradas en las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica se deben principalmente a la dispersión de estas ondas parciales, ya que logran interactuar con el potencial de absorción de muy corto alcance W_{int} . Para estas ondas parciales $l < l_c$, aquellas con menor momento angular sufren ángulos de dispersión pequeños, con tiempos de tránsito a través del Núcleo Blanco menores. Estas dos cantidades aumentan a medida que nos acercamos al valor crítico l_c . Por otro lado, ondas parciales de mayor momento angular $l > l_c$ no tienen un efecto significativo en las Distribuciones Angulares de Dispersión Elástica, ya que estas tienen puntos de retorno mucho más grandes, sin diferencias aparentes en sus coeficientes de reflexión para diferentes valores del potencial de absorción de muy corto alcance.

Referencias

- Aguilera, E. F., and Torabi, F. (2020). Angular zone of influence for fusion and direct reactions on elastic scattering of ${}^6\text{Li}$ with ${}^{58}\text{Ni}$, ${}^{59}\text{Co}$, ${}^{64}\text{Ni}$, and ${}^{64}\text{Zn}$. *Journal of Physics. Conference Series*, 1610(1), 012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1610/1/012001>
- Aguilera, E. F., Torabi, F., and Morales-Rivera, J. C. (2021). Simultaneous analysis of elastic scattering and fusion in $\text{He}^6+\text{Zn}^{64}$: A transition in direct reaction mechanisms, striking threshold anomalies, and halo effects. *Physical Review. C*, 104(5). <https://doi.org/10.1103/physrevc.104.054612>
- Barker, P. H., Huber, A., Knoth, H., Matter, U., Gobbi, A., and Marmier, P. (1970). One-neutron transfer reactions with beryllium, carbon and oxygen nuclei. *Nuclear Physics. A*, 155(2), 401–416. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(70\)90903-6](https://doi.org/10.1016/0375-9474(70)90903-6)
- Bertulani, C. A., and Danielewicz, P. (2019). *Introduction to nuclear reactions*. CRC Press.
- Bock, R., Duhm, H. H., Grosse-Schulte, M., and Rüdell, R. (1965). N^{14} -induzierte transfer-reaktionen in Be^9 von 20 bis 30 MeV. *Nuclear Physics*, 70(3), 481–496. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(65\)90449-9](https://doi.org/10.1016/0029-5582(65)90449-9)
- Chamon, L. C., Carlson, B. V., Gasques, L. R., Pereira, D., De Conti, C., Alvarez, M. A. G., Hussein, M. S., Cândido Ribeiro, M. A., Rossi, E. S., and Silva, C. P. (2002). Toward a global description of the nucleus-nucleus interaction. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 66(1). <https://doi.org/10.1103/physrevc.66.014610>

-
- Cheung, H. C., High, M. D., and Čujec, B. (1978). Fusion and neutron transfer cross sections for $9\text{Be} + 12\text{C}$ at sub-Coulomb energies. *Nuclear Physics. A*, 296(2), 333–348. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(78\)90077-5](https://doi.org/10.1016/0375-9474(78)90077-5)
 - Di Pietro, A., Figuera, P., Amorini, F., Angulo, C., Cardella, G., Cherubini, S., Davinson, T., Leanza, D., Lu, J., Mahmud, H., Milin, M., Musumarra, A., Ninane, A., Papa, M., Pellegriti, M. G., Raabe, R., Rizzo, F., Ruiz, C., Shotter, A. C., ... Weissman, L. (2004). Reactions induced by the halo nucleus He6 at energies around the Coulomb barrier. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 69(4). <https://doi.org/10.1103/physrevc.69.044613>
 - Fernández-García, J. P., Di Pietro, A., Figuera, P., Gómez-Camacho, J., Lattuada, M., Lei, J., Moro, A. M., Rodríguez-Gallardo, M., and Scuderi, V. (2019). Breakup mechanisms in the $\text{He6} + \text{Zn64}$ reaction at near-barrier energies. *Physical Review. C*, 99(5). <https://doi.org/10.1103/physrevc.99.054605>
 - Fresco. (n.d.). Org.uk. Retrieved September 17, 2024, from <https://www.fresco.org.uk/>
 - Glendenning, N. K. (2004). *Direct Nuclear Reactions*. World Scientific Publishing.
 - Gomez-Rivera, S., and Belyaeva, T. L. (2023). Analysis of $\alpha + 16\text{O}$ elastic scattering in the semi-microscopical dispersive optical model. *Journal of Physics. Conference Series*, 2619(1), 012008. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2619/1/012008>
 - Guimarães, V., Cardozo, E. N., Lubian, J., Assunção, M., Pires, K. C. C., Canto, L. F., Mukeru, B., Kaur, G., and Aguilera, E. F. (2021). Role of cluster configurations in the elastic scattering of light projectiles on ^{58}Ni and ^{64}Zn targets: a phenomenological analysis: A tribute to Mahir S. Hussein. *The European Physical Journal A*, 57(3). <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-021-00403-0>
 - Hugi, M., Lang, J., Müller, R., Ungricht, E., Bodek, K., Jarczyk, L., Kamys, B., Magiera, A., Strzałkowski, A., and Willim, G. (1981). Fusion and direct reactions for strongly and weakly bound projectiles. *Nuclear Physics. A*, 368(1), 173–188. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(81\)90739-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(81)90739-9)

-
- Jarczyk, L., Kamys, B., Magiera, A., Sromicki, J., Strzałkowski, A., Willim, G., Wróbel, Z., Balzer, D., Bodek, K., Hugi, M., Lang, J., Müller, R., and Ungricht, E. (1981). Energy dependence of fusion and reaction cross sections in the $9\text{Be} + 12\text{C}$ system. *Nuclear Physics. A*, 369(1), 191–204. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(81\)90015-4](https://doi.org/10.1016/0375-9474(81)90015-4)
 - Jarczyk, L., Okołowicz, J., Strzałkowski, A., Bodek, K., Hugi, M., Lang, L., Müller, R., and Ungricht, E. (1979). Large angle elastic scattering of 9Be ions on carbon isotopes. *Nuclear Physics. A*, 316(1–2), 139–145. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(79\)90676-6](https://doi.org/10.1016/0375-9474(79)90676-6)
 - Lilley, J. (2013). *Nuclear physics: Principles and applications* (1st ed.). John Wiley and Sons.
 - Mahaux, C., Ngô, H., and Satchler, G. R. (1986). Causality and the threshold anomaly of the nucleus-nucleus potential. *Nuclear Physics. A*, 449(2), 354–394. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(86\)90009-6](https://doi.org/10.1016/0375-9474(86)90009-6)
 - Mateja, J. F., Garman, J., Fields, D. E., Kozub, R. L., Frawley, A. D., and Dennis, L. C. (1984). Fusion cross sections for four heavy-ion entrance channels leading to the ^{23}Na compound nucleus. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 30(1), 134–142. <https://doi.org/10.1103/physrevc.30.134>
 - Nagarajan, M. A., Mahaux, C. C., and Satchler, G. R. (1985). Dispersion relation and the low-energy behavior of the heavy-ion optical potential. *Physical Review Letters*, 54(11), 1136–1138. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.54.1136>
 - NNDC. (n.d.). Bnl.gov. Retrieved September 17, 2024, from <https://www.nndc.bnl.gov/>
 - NUCLEAR REACTIONS VIDEO project. (n.d.). Jlnr.Ru. Retrieved September 17, 2024, from <http://nrv.jlnr.ru/nrv/>
 - Oliveira, R. A. N., Carlin, N., Neto, R. L., de Moura, M. M., Munhoz, M. G., del Santo, M. G., Souza, F. A., Szanto, E. M., Szanto de Toledo, A., and Suaide, A. A. P. (2011). Study of $9\text{Be}+12\text{C}$ elastic scattering at energies near the Coulomb barrier. *Nuclear Physics. A*, 856(1), 46–54. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2011.02.005>

-
- OriginLab - origin and OriginPro - data analysis and graphing software. (n.d.). Originlab.com. Retrieved October 8, 2024, from <https://www.originlab.com/>
 - Satchler, G. R. (1990). *Introduction to nuclear reactions* (2nd ed.). Palgrave Macmillan.
 - Scuderi, V., Di Pietro, A., Figuera, P., Fisichella, M., Amorini, F., Angulo, C., Cardella, G., Casarejos, E., Lattuada, M., Milin, M., Musumarra, A., Papa, M., Pellegriti, M. G., Raabe, R., Rizzo, F., Skukan, N., Torresi, D., and Zadro, M. (2011). Fusion and direct reactions for the system ${}^6\text{He}+{}^{64}\text{Zn}$ at and below the Coulomb barrier. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 84(6). <https://doi.org/10.1103/physrevc.84.064604>
 - So, W. Y., Udagawa, T., Kim, K. S., Hong, S. W., and Kim, B. T. (2010). Characteristics of the polarization part of the optical potential for a weakly bound projectile, ${}^9\text{Be}$. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 81(4). <https://doi.org/10.1103/physrevc.81.047604>
 - Suzuki, Y., Yabana, K., Lovas, R. G., and Varga, K. (2020). *Structure and reactions of light exotic nuclei*. CRC Press.
 - Thompson, I. J. (1988). Coupled reaction channels calculations in nuclear physics. *Computer Physics Reports*, 7(4), 167–212. [https://doi.org/10.1016/0167-7977\(88\)90005-6](https://doi.org/10.1016/0167-7977(88)90005-6)
 - Torabi, F., Aguilera, E. F., and Carlson, B. V. (2024). Threshold anomalies in ${}^9\text{Be} + {}^{12}\text{C}$. *Nuclear Physics. A*, 1041(122793), 122793. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2023.122793>
 - Torabi, F., Aguilera, E. F., Ghodsi, O. N., and Gómez-Camacho, A. (2020). Systematic study of elastic scattering and fusion induced by weakly bound ${}^6\text{Li}$ on medium mass targets. Threshold anomalies. *Nuclear Physics. A*, 994(121661), 121661. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2019.121661>
 - Udagawa, T., Kim, B. T., and Tamura, T. (1985). Direct reaction description of sub-

and above-barrier fusion of heavy ions. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 32(1), 124–135. <https://doi.org/10.1103/physrevc.32.124>

- Udagawa, T., and Tamura, T. (1984). Heavy-ion subbarrier fusion in terms of the direct reaction technique. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 29(5), 1922–1924. <https://doi.org/10.1103/physrevc.29.1922>
- Ungricht, E., Balzer, D., Hugi, M., Lang, J., Müller, R., Jarczyk, L., Kamys, B., and Strzalkowski, A. (1979). Elastic scattering of ^9Be on light target nuclei. *Nuclear Physics. A*, 313(3), 376–384. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(79\)90507-4](https://doi.org/10.1016/0375-9474(79)90507-4)
- Zettili, N. (2009). *Quantum Mechanics: Concepts and Applications* (2nd ed.). Wiley-Blackwell.
- Zisman, M. S., Cramer, J. G., Goldberg, D. A., Watson, J. W., and DeVries, R. M. (1980). Dominance of strong absorption in $\text{Be}^9 + \text{Si}^{28}$ elastic scattering. *Physical Review C: Nuclear Physics*, 21(6), 2398–2416. <https://doi.org/10.1103/physrevc.21.2398>

Apéndice A: Transformación entre Sistemas de Referencia.

La siguiente discusión se refiere a sistemas no relativistas, los cuales son de principal interés en el presente trabajo. El sistema de Referencia de Laboratorio (Lab) considera dos objetos (en este caso los Núcleos Proyectoil y Blanco, de masa m_p y m_t respectivamente.) Este sistema considera al Núcleo Proyectoil con velocidad \vec{v}_p moviéndose hacia el Núcleo Blanco, el cual se encuentra en reposo; es decir, su velocidad $\vec{v}_t = 0$. En este punto se pueden definir los momentos lineales de cada núcleo mediante:

$$\vec{p}_p = m_p \vec{v}_p; \quad \vec{p}_t = m_t \vec{v}_t = 0 \quad (1)$$

Por lo cual, el momento lineal total será:

$$\vec{p} = \vec{p}_p + \vec{p}_t = \vec{p}_p \quad (2)$$

El vector que ubica al Centro de Masa en este sistema de referencia es expresado mediante un promedio pesado respecto a las masas de cada uno de los núcleos mediante:

$$\vec{R} = \frac{m_p \vec{r}_p + m_t \vec{r}_t}{m_p + m_t} \quad (3)$$

donde \vec{r}_p y \vec{r}_t son los vectores posición de los Núcleos Proyectoil y Blanco, los cuales se relacionan con sus respectivas velocidades mediante $d\vec{r}_p/dt = \dot{\vec{r}}_p = \vec{v}_p$ y $d\vec{r}_t/dt = \dot{\vec{r}}_t = \vec{v}_t$. La velocidad del Centro de Masa sería entonces $dR/dt = \dot{R} = V_{CM}$

$$V_{CM} = \dot{R} = \frac{m_p \vec{v}_p + m_t \vec{v}_t}{m_p + m_t} = \frac{m_p \vec{v}_p}{m_p + m_t} \quad (4)$$

Por otro lado, en el sistema de referencia del Centro de Masa, el vector \vec{R} se encuentra fijo en el origen de coordenadas o fuera de él. Por este motivo se deben redefinir las magnitudes de los momentos lineales. En este sistema de referencia, los Núcleos Proyectil y Blanco se dirigen simultáneamente hacia la ubicación del Centro de Masas, es decir, tanto \vec{p}_t^{CM} y \vec{p}_p^{CM} son diferentes de cero.

Los vectores posición de los Núcleos Proyectil y Blanco en el sistema de Centro de Masas se relacionan con los vectores posición en el sistema de Laboratorio mediante:

$$\vec{r}_p = \vec{R} + \vec{r}_p^{CM}; \quad \vec{r}_t = \vec{R} + \vec{r}_t^{CM} \quad (5)$$

donde los superíndices CM indican que los vectores implicados son medidos en el sistema de Centro de Masa. Las velocidades en este sistema se obtienen mediante:

$$\vec{v}_p = V_{CM} + \vec{v}_p^{CM}; \quad \vec{v}_t = V_{CM} + \vec{v}_t^{CM} \quad (6)$$

El momento lineal total implica entonces que $m_p \vec{v}_p^{CM} + m_t \vec{v}_t^{CM} = 0$ debido a $\dot{R} = 0$.

Se pueden obtener las velocidades iniciales (antes de la reacción) y finales (después de la reacción) mediante la conservación de momento en ambos sistemas de referencia.

Las magnitudes del movimiento relativo entre los dos núcleos (vector de posición r_α y momento lineal p_α) es útil para poder describir cuál es la energía disponible por el sistema para realizar la reacción nuclear. Por lo tanto, el momento lineal relativo es calculado en el sistema de referencia de Centro de Masa \vec{p}_α^{CM} mediante los momentos lineales del sistema de Laboratorio \vec{p}_p y \vec{p}_t mediante:

$$\vec{p}_\alpha^{CM} = \frac{m_t \vec{p}_p - m_p \vec{p}_t}{m_t + m_p} \quad (7)$$

donde la magnitud del vector \vec{p}_t es igual a cero.

La energía cinética en el sistema de Laboratorio solo es expresada mediante la magnitud $|\vec{p}_p|$ mediante:

$$E = \frac{|\vec{p}_p|^2}{2m_p} \quad (8)$$

Sin embargo, en el sistema de referencia de Centro de Masa, la energía cinética es expresada mediante el momento lineal relativo \vec{p}_α^{CM} de la siguiente manera:

$$E^{CM} = \frac{|\vec{p}_\alpha^{CM}|^2}{2\mu} \quad (9)$$

donde μ es la masa reducida, expresada mediante:

$$\mu = \frac{m_p m_t}{m_p + m_t} \quad (10)$$

Relacionando las ecuaciones (8) y (9) se obtiene la relación entre las energías cinéticas en los distintos sistemas de referencia:

$$E^{CM} = \frac{m_t}{m_p + m_t} E. \quad (11)$$