Unidad de Aprendizaje MECÁNICA

M. En C. Ag. ABILIO MARÍN TELLO

Unidad de Competencia I
Centros de gravedad de áreas

Unidad de Competencia I
Centros de gravedad

En la fotografía se muestra la construcción de un tramo de viaducto Skyway, el cual cruza la bahía que se encuentra ente san Francisco y Oakland. En esta Unidad de Competencia se introducirá el concepto de *centroide de un área.*

1.1. INTRODUCCIÓN

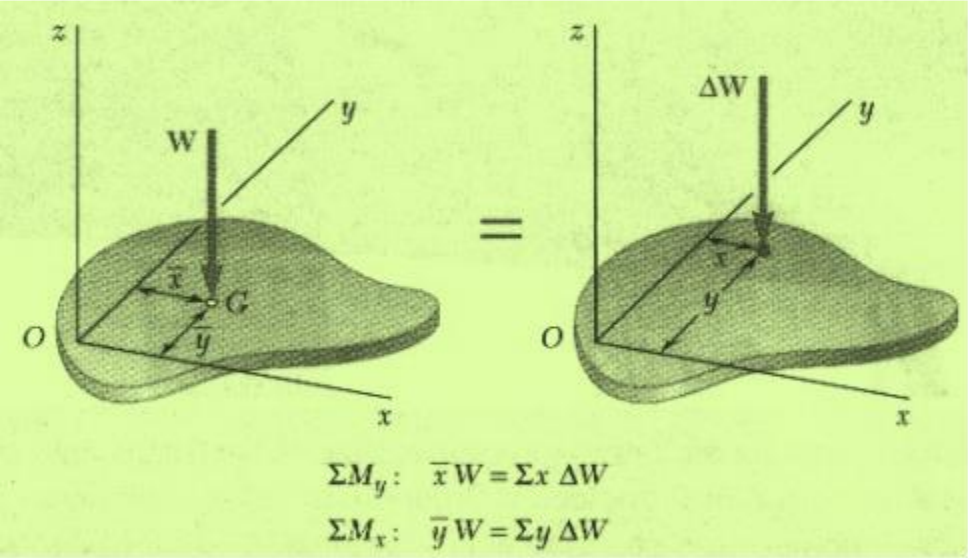
Se ha supuesto que la atracción ejercida por la tierra sobre un cuerpo rígido puede representarse por una sola fuerza ***W***, esta fuerza, denominada fuerza de gravedad o peso del cuerpo, la cual se aplica en el *centro de gravedad* del cuerpo

1.1. INTRODUCCIÓN

La acción de la tierra sobre un cuerpo rígido debe representarse por un gran número de pequeñas fuerzas distribuidas sobre todo el cuerpo, sin embargo, la totalidad de dichas fuerzas pequeñas se remplaza por una sola fuerza equivalente $\underline{W}$ aplicada en su centro de gravedad.

1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL

Considerar una placa horizontal (figura 1.1). La placa puede dividirse en **n** elementos pequeños. Las coordenadas del primer elementos pequeños.



1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL

Las coordenadas del primer elemento se representan con x_1 y y_1, las del segundo elemento se representan por x_2 y y_2, etc. Las fuerzas ejercidas por la tierra sobre los elementos de la placa serán representadas, respectivamente,

1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL

con

W_1, W_2,…., Wn. La magnitud W de esta fuerza se obtiene a partir de la suma d las magnitudes de los pesos de los elementos:

Fz: $W = W_1 + W_2 + ... + Wn$

1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL

Para obtener las coordenadas x y y del punto G, donde debe aplicarse la resultante **W**, se escribe que los momentos **W con respecto a los ejes** y *y* x son iguales a la suma de los momentos correspondientes de los pesos elementales, esto es

My: $xW = x_1 W_1 + x_2 W_2 + \dots + xn\ Wn$

Mx: $yW = y_1 W_1 + y_2 W_2 + \dots + yn\ Wn$

1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL

Si se incrementa el número de elementos en los cuales se ha dividido la placa y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento se obtienen, en el límite, las siguientes expresiones:

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\, dW \qquad \bar{y}W = \int y\, dW$$

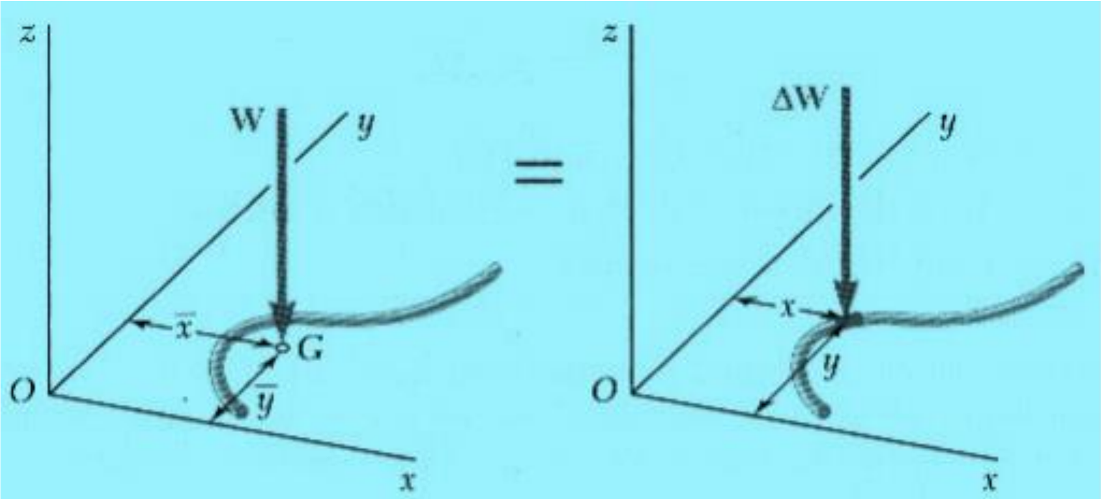
1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL

Estas ecuaciones definen el peso **W** y las coordenadas *x* y *y* del centro de gravedad G de una placa plana. Se pueden derivar las mismas ecuaciones para un alambre que se encuentra en el plano *xy*.

1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL

Estas ecuaciones definen el peso **W** y las coordenadas x y y del centro de gravedad **G** de una placa plana. Se pueden derivar las mismas ecuaciones para un alambre que se encuentra en el plano xy (figura 1.2). Se observa que usualmente el centro de gravedad **G** de un alambre no está localizado sobre este último.

1.2. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIOANAL



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}\,W = \Sigma x\,\Delta W$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}\,W = \Sigma y\,\Delta W$$

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

En el caso de una placa plana homogénea de espesor uniforme, la magnitud delta W del peso de un elemento de la placa puede expresarse como

$$\Delta \boldsymbol{W} = \boldsymbol{\gamma t} \Delta \boldsymbol{A}$$

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

$\boldsymbol{\gamma}$ = peso especifico (peso por unidad de volumen) del material

t = espesor de la placa

$\Delta \boldsymbol{A}$ = área del elemento

En forma similar, se puede expresar la magnitud W del peso de toda la placa

$$W = \gamma t A$$

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

Si se emplean las unidades de uso común en Estados Unidos, se debe expresar el peso especifico γ en lb/ft^3, el espesor t en pies y las áreas ΔA y $\boldsymbol{A}$ en pies cuadrados. Si se usan las unidades del SI, se debe expresar a γ en N/m^3, a t en metros y a las áreas ΔA y $\boldsymbol{A}$ en metros cuadrados; entonces, los pesos ΔW y W estarán expresados en newtons.

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

Si se sustituye a $\Delta\boldsymbol{W}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{W}$ en las ecuaciones (5.1) y se divide a todos los términos en γt, se obtiene

$$\Sigma M_y: \quad xA = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \cdots + x_n\Delta A_n$$

$$\Sigma M_x: \quad yA = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \cdots + y_n\Delta A_n$$

Si se incrementa el numero de elementos en los cuales se divide el área $\boldsymbol{A}$ y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento, se obtiene en el limite

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA$$

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

Estas ecuaciones definen las coordenadas x y y del centro de gravedad de una placa homogénea. El punto cuyas coordenadas son x y y también se conoce como el *centroide C del área A* de la placa

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

En el caso de un alambre homogéneo de sección transversal uniforme, la magnitud $\Delta \boldsymbol{W}$ del peso de un elemento de alambre puede expresarse como

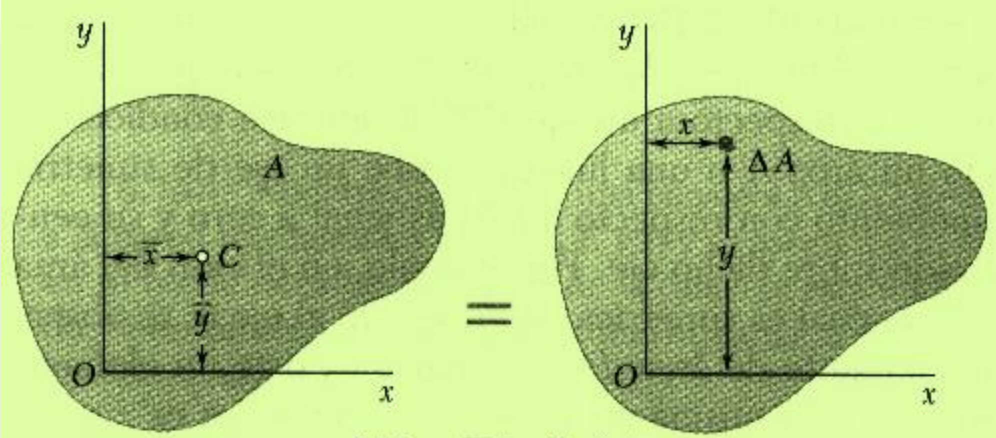
$$\Delta W = \gamma a \Delta L$$

donde γ = peso especifico del material

a = área de la sección transversal del alambre

$\Delta L = \text{longitud del elemento.}$

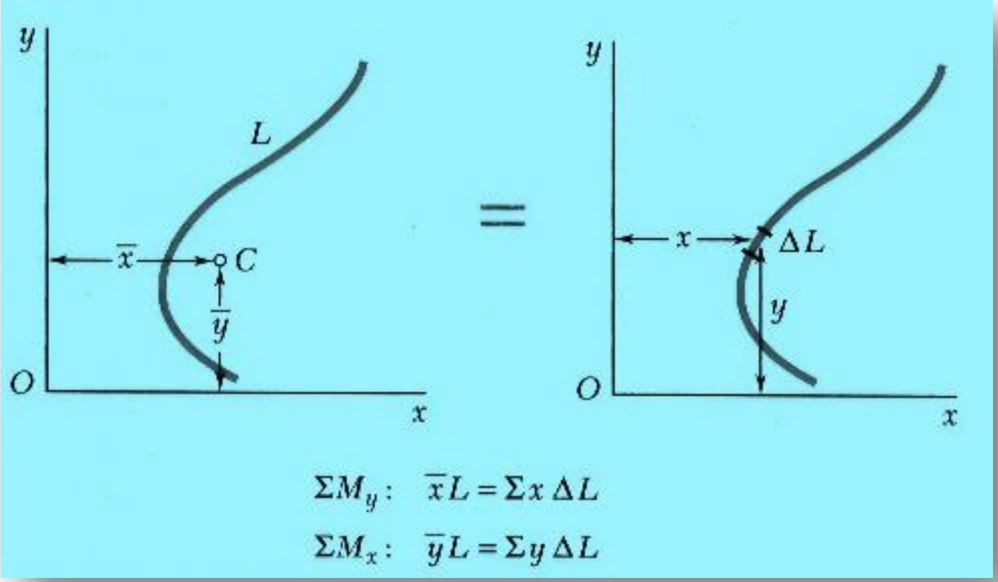
1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS



$$\Sigma M_y: \quad \overline{x}\,A = \Sigma x\,\Delta A$$

$$\Sigma M_x: \quad \overline{y}\,A = \Sigma y\,\Delta A$$

1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS



1.3. CENTROIDE DE ÁREAS Y LÍNEAS

El centro de gravedad de un alambre coincide con el *centroide C de la línea L* que define la forma del alambre (figura 5.4). Las coordenadas x y y del centroide de la línea L se obtiene a partir de las ecuaciones

$$\bar{x}L = \int x\, dL \qquad \bar{y}L = \int y\, dL$$

1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

La $\int x\, dA$ se conoce como el *primer momento del área A con respecto al eje y* y se representa con Q_y. En forma similar, la $\int y\, dA$ define el *primer momento de A con respecto al eje x* y se representa con Q_x. Así se escribe

$$Q_y = \int x\, dA \qquad Q_x = \int y\, dA$$

1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

Los primeros momentos del área *A* pueden ser expresados como los productos del área con las coordenadas de su centroide

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A$$

Con estas ecuaciones se concluye que

1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

Las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de dicha área entre el área misma. Los primeros momentos de un área también son útiles en la mecánica de materiales para determinar los esfuerzos de corte en vigas sujetas a cargas transversales.

1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

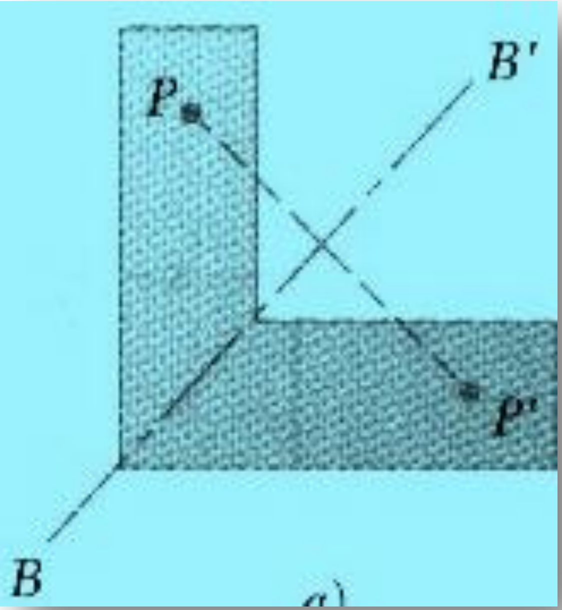
A partir de estas ecuaciones se observa que si el centroide de un área está localizado sobre un eje coordenado, entonces el primer momento del área con respecto a ese eje es igual a cero. De manera inversa, si el primer momento de un área con respecto a un eje coordenado es igual a cero, entonces el centroide del área esta localizado sobre ese eje.

1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

Se pueden utilizar relaciones similares a partir de las ecuaciones (5.5) y (5.6) para definir los primeros momentos de una línea con respecto a los ejes coordenados y para expresar dichos momentos como los productos de la longitud L de la línea y las coordenada $\underline{x}$ y $\underline{y}$ de su centroide.

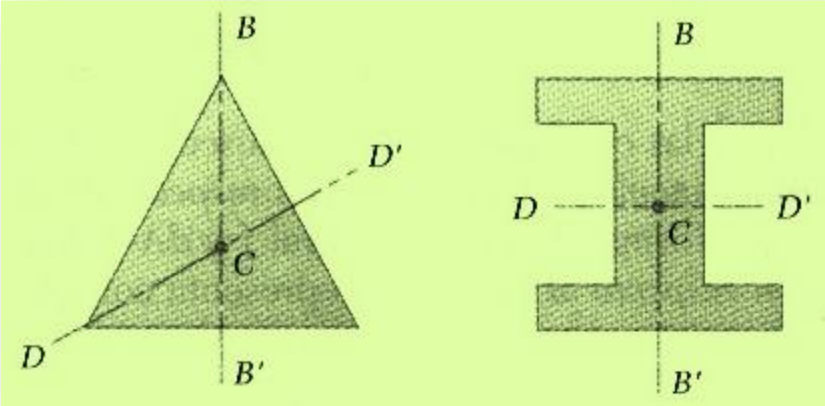
1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

Se dice que un área A es *simétrica con respecto a un eje BB´* si para todo punto P del área existe un punto P' y dicha línea está dividida en dos partes iguales por el eje en cuestión.



1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

Si un área o una línea posse dos ejes de simetría, su centroide *C* debe estar localizado en la intersección de esos dos ejes.



1.4. PRIMEROS MOMENTO DE ÁREAS Y LÍNEAS

Esta propiedad permite determinar de inmediato el centroide de áreas como círculos , elipses cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros u otras figuras geométricas