

Universiada Autónoma del Estado de México
Facultad de Ciencias

Material de apoyo
para la UA de Topología General

Propiedades cercanas a la compacidad en $\mathcal{K}(X)$

Fernando Orozco Zitli

Conocer algunas propiedades cercanas a la compacidad en el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ como: α -acotación, α -hiperacotación, p -pseudocompacidad, p -fuertemente pseudocompacidad entre otras (donde X es un espacio topológico y $\mathcal{K}(X) = \{F \subset X : F \text{ es cerrado, no vacío y compacto en } X\}$ con la topología de Vietoris).

Habilidades desarrolladas en los estudiantes:

Abstracción, rigor matemático y análisis en el estudio de algunas propiedades cercanas a la compacidad en hiperespacio $\mathcal{K}(X)$.

Divulgar:

Divulgar los resultados sobre las propiedades α -acotación, α -hiperacotación, p -pseudocompacidad, p -fuertemente pseudocompacidad en el Hiperespacio $\mathcal{K}(X)$.

- Se requiere haber cursado la UA Topología de Conjuntos.
- No se muestran dibujos en las diapositivas, sin embargo se menciona cómo hacer dibujos para explicar algunos ejemplos.

- Espacios ω -hiperacotados.
- Espacios ω -acotados.
- Espacios inicialmente- α -compactos y α -compactos.
- Espacios pseudo- D -acotados para algún $D \subset \omega^*$.
- Espacios fuertemente- p -compactos para algún $p \in \omega^*$.
- Espacios p -pseudocompactos para algún $p \in \omega^*$.
- Espacios pseudocompactos.
- Algo de Teoría de conjuntos.

Introducción

En la literatura aparecen los conceptos de α -acotado e inicialmente- α -compacto los cuales se han estudiado por diferentes autores (ver [5] y [4]). En [1], se introduce el concepto de α -hiperacotado, es conocido que α -hiperacotado implica α -acotado y α -acotado implica inicialmente- α -compacto, las otras relaciones que hay entre estos conceptos son difíciles de estudiar, sin embargo en el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$, estos conceptos son equivalentes.

Topología de Vietoris

Sea X un espacio topológico. Definamos:

$$\mathcal{CL}(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Una topología para $\mathcal{CL}(X)$ es la Topología de Vietoris, la cual tiene como subbase a la siguiente familia

$$\{\langle U \rangle : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\langle U, X \rangle : U \text{ es abierto en } X\}$$

donde

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \{F \in \mathcal{CL}(X) : F \subset U\} \text{ y} \\ \langle U, X \rangle &= \{F \in \mathcal{CL}(X) : F \cap U \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Algunos resultados para $\mathcal{CL}(X)$

Sea X un espacio topológico. Se tiene lo siguiente.

- (1) Si X es T_0 , entonces $\mathcal{CL}(X)$ es T_0 .
- (2) Si X es T_1 , entonces $\mathcal{CL}(X)$ es T_1 .
- (3) X es regular si y solo si $\mathcal{CL}(X)$ es de Hausdorff.
- (4) X es normal si y solo si $\mathcal{CL}(X)$ es Tychonoff si y solo si $\mathcal{CL}(X)$ es regular.
- (5) Sea X un espacio Tychonoff. Entonces X es compacto si y solo si $\mathcal{CL}(X)$ es compacto.

Definición

Sean X un espacio topológico y α un cardinal infinito. Decimos que:

- 1 X es α -**acotado** si para cualquier $A \in [X]^{\leq \alpha}$ tiene cerradura compacta,
- 2 X es α -**hiperacotado** si para cada sucesión $\{K_\xi : \xi < \alpha\}$ de subconjuntos compactos de X , se tiene que $C_l X \left(\bigcup_{\xi < \alpha} K_\xi \right)$ es un subconjunto compacto de X .

Donde $[X]^{\leq \kappa} = \{A \subset X : |A| \leq \kappa\}$, $[X]^{< \kappa} = \{A \subset X : |A| < \kappa\}$ y $[X]^\kappa = \{A \subset X : |A| = \kappa\}$.

Definición

Sean X un espacio topológico y α un cardinal infinito.

- 1 X es **α -compacto** si X es igual a la unión de una cantidad α de subconjuntos compactos de X .
- 2 X es **inicialmente- α -compacto** si para cualquier $A \in [X]^{\leq \alpha}$ tiene un punto de acumulación completo o cada cubierta abierta de X de cardinalidad menor o igual a α tiene una subcubierta finita.

Proposición

Sea α un cardinal infinito.

- 1 La propiedad de ser α -hiperacotado es una propiedad hereditaria para subespacios cerrados.
- 2 Sea X el producto topológico de la familia de espacios topológicos $\{X_s : s \in S\}$. Entonces X es α -hiperacotado si y solo si cada X_s es α -hiperacotado.
- 3 Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y perfecta entre espacios topológicos. Si X es α -hiperacotado, entonces Y es α -hiperacotado.

Proposición

Sean X un espacio y κ un cardinal infinito. Entonces:

- 1 Para cada $\{K_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{CL}(X)$, la sucesión $(Cl_X(\bigcup_{\eta < \alpha} K_\eta))_{\alpha < \kappa}$ converge a $Cl_X(\bigcup_{\alpha < \kappa} K_\alpha)$ en $\mathcal{CL}(X)$.
- 2 Sea \mathcal{F} un subespacio compacto de $\mathcal{K}(X)$, entonces $A = \bigcup \mathcal{F}$ es un subespacio compacto de X y $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}(A)$.

Definición

Sea (Z, \leq) un COPO. Decimos que Z es ω -dirigido si para cualquier subconjunto numerable A de Z , existe $x \in Z$ tal que para cada $a \in A$, se tiene que $a \leq x$ para todo $a \in A$.

Proposición

Sea X un espacio topológico. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones.

- X es ω -hiperacotado.
- $(\mathcal{K}(X), \preceq)$ es ω -dirigido.

Teorema

Sea X un espacio Hausdorff. Los siguientes enunciados son equivalentes.

- 1 X es ω -hiperacotado.
- 2 $\mathcal{K}(X)$ es numerablemente compacto.
- 3 $\mathcal{K}(X)$ es ω -acotado.
- 4 $\mathcal{K}(X)$ es ω -hiperacotado.

Teorema

Sean X un espacio topológico y α un cardinal infinito. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- 1 X es α -hiperacotado.
- 2 $\mathcal{K}(X)$ es α -acotado.
- 3 $\mathcal{K}(X)$ es inicialmente- α -compacto.
- 4 $\mathcal{K}(X)$ es α -hiperacotado.

Ejemplos

Ejemplo 1

El espacio $[0, \omega_1)$ es ω -hiperacotado y no compacto.

Ejemplo 2

Sea $X = [0, \kappa^+)^{\lambda}$, donde λ es un cardinal infinito. Entonces X es κ -acotado pero no es inicialmente- κ^+ -acotado.

Proposición

Sea X un espacio con un subconjunto denso α -compacto. Entonces X es α -hiperacotado si y solo si es compacto.

Pseudocompacidad en $\mathcal{K}(X)$

Definición

Sean X un espacio topológico y $p \in D \subset \omega^*$. Decimos que:

- 1 X es **p -pseudocompacto** si para cualquier suseción $(U_n)_{n \in \omega}$ de abiertos no vacíos de X , se tiene que $L(p, (U_n)_{n \in \omega}) \neq \emptyset$.
- 2 X es **fuertemente- p -pseudocompacto** si para cualquier suseción $(U_n)_{n \in \omega}$ de abiertos no vacíos de X , existe una suseción $(x_n)_{n \in \omega}$ y un $z \in X$ tales que $x_n \in U_n$ y $z = p\text{-lim } x_n$.
- 3 X es **pseudo- D -acotado** si para cualquier suseción $(U_n)_{n \in \omega}$ de abiertos no vacíos de X , existe una suseción $(x_n)_{n \in \omega}$ tal que $x_n \in U_n$ y para cualquier $p \in D$ existe un $z_p \in X$ tal que $z_p = p\text{-lim } x_n$.
- 4 X es **pseudo- ω -acotado** si para cualquier familia $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos no vacíos de X , existe un $K \subset X$ compacto tal que $U_n \cap K \neq \emptyset$.

Observación

Se tienen la siguientes relaciones:

pseudo- ω -acotación \rightarrow pseudo- D -acotación \rightarrow

fuertemente- p -pseudocompacidad \rightarrow p -pseudocompacidad.

Pseudocompacidad en $\mathcal{K}(X)$

Teorema

Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes.

- 1 X es pseudo- ω -acotado.
- 2 $\mathcal{K}(X)$ es pseudo- ω -acotado.
- 3 $\mathcal{K}(X)$ es pseudo- D -acotado para algún $D \subset \omega^*$.
- 4 $\mathcal{K}(X)$ es fuertemente- p -compacto para algún $p \in \omega^*$.
- 5 $\mathcal{K}(X)$ es p -pseudocompacto para algún $p \in \omega^*$.
- 6 $\mathcal{K}(X)$ es pseudocompacto.

Definición

Sea X un espacio topológico. Decimos que X es α -pseudocompacto si $f(X)$ es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^α para cualquier función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$.

Teorema

Sea α un cardinal infinito y X un espacio tal que $\mathcal{K}(X)$ es normal. Entonces $\mathcal{K}(X)$ es α -pseudocompacto si y solo si X es α -hiperacotado.

Teorema

Sean α un cardinal infinito. Consideremos a X un espacio tal que $\mathcal{K}(X)$ es normal y C^* -encajado en $\mathcal{CL}(X)$. Entonces X es α -acotado si y solo si X es α -hiperacotado.

Teorema

Sea X un espacio tal que $\mathcal{K}(X)$ esta C^* -encajado en $\mathcal{CL}(X)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- 1 X es compacto.
- 2 $\mathcal{K}(X)$ compacto.
- 3 $\mathcal{K}(X)$ σ -compacto.
- 4 $\mathcal{K}(X)$ Lindelof.
- 5 $\mathcal{K}(X)$ Paracompacto.

Corolario

Sea X un espacio metrizable. Entonces $\mathcal{K}(X)$ es C^* -encajado en $\mathcal{CL}(X)$ si y solo si X es compacto.

Corolario

Sea X un espacio discreto infinito. Entonces $\mathcal{K}(X)$ no es C^* -encajado en $\mathcal{CL}(X)$

Corolario

Sea η un cardinal tal que $cf(\eta) = \omega$. Entonces $\mathcal{K}([0, \eta))$ no es C^* -encajado en $\mathcal{CL}([0, \eta))$.

Algo de Teoría de conjuntos

Sean A un conjunto y $R \subset A \times A$, decimos que R es una relación

- 1 **reflexiva**, si para cada $a \in A$, $(a, a) \in R$,
- 2 **transitiva**, si $(a, b), (b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$,
- 3 **antisimétrica**, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$.

Decimos que R es un **orden parcial** en A si cumple 1, 4 y 5.

Decimos que R es un **orden total**, si para cada $a, b \in A$, se tiene que $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

Decimos que R es un **buen orden**, si para cada $B \subset A$ no vacío, existe $b_0 \in B$ tal que $(b_0, b) \in R$ para cada $b \in B$.

Algo de Teoría de conjuntos

Sea A un conjunto, decimos que A es **transitivo** si para cada $x \in A$, se tiene que $x \subset A$.

Los conjuntos $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ son ejemplos de conjuntos transitivos.

Con las definiciones anteriores ya podemos introducir el concepto de ordinal.

Sea α un conjunto, decimos que α es un **ordinal** si α es un *COBO* y α es un conjunto transitivo.

Es usual en la teoría de conjuntos definir a ω de la siguiente manera.

Consideremos

$0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, etc.

Algo de Teoría de conjuntos





Definimos un orden en $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$ como: $n \leq m$ si y solo si $n \in m$. Es fácil probar que $\{0, 1, \dots, n, \dots\}$ es un ordinal, el cual lo denotaremos por ω .

Es conocido que ω es el primer ordinal infinito numerable.






Otro ejemplo importante de ordinal es ω_1 , este ordinal es el primer ordinal no numerable.

Sea α un ordinal. Decimos que α es **cardinal** si es el mínimo ordinal tal que para cada ordinal $\theta < \alpha$, no existe un biyección entre θ y α .
 ω y ω_1 son cardinales.

Bibliografía

-  J. Angoa, Y. F. Ortiz-Castillo and A. Tamaríz-Mascarúa, *Compact-like properties in hyperspaces*, Nombre de la revista, abreviado, (65) 3 (2013), 306-318.
-  W. W. Comfort and S. Negrepontis, *The theory of ultrafilters*, Springer-Verlag, Berlin (1974).
-  R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.
-  S. García-Ferreira, H. Ohta, α -pseudocompact spaces and their subspaces, Math. Japon. 5 Japon. 52 (2000), 71-77.

Bibliografía

-  F. Hern'andez, *Teoría de Conjuntos. Una introducción*, Aportaciones Matemáticas, 2003.
-  N. Hindman y D. Strauss, *Algebra in the Stone-Cech Compactification*, de Gruyter Expositions in Mathematics, 27, Walter de Gruyter and Co., Berlin (1998).
-  N. Kemoto, J. Terasawa, *Strong zero-dimensionality of hyperspaces*, Topol. Appl. 157 (2010), 2376-2382.
-  D. Milovancevi'c, *A property between compact and strongly countably compact*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 38(52)(1985), 193-201.
-  R.M. Stephenson, Jr., *Initially-compact and related spaces*, *Handbook of Set-theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, (1984), 603-632.