UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM ZUMPANGO

INGENIERO EN COMPUTACION

TEMA: “MÉTODO SIMPLEX”

ELABORÓ: M. EN C. LUIS ENRIQUE KU MOO

FECHA: MARZO DE 2016

UNIDAD DE APRENDIZAJE

“INVESTIGACION DE OPERACIONES”

UNIDAD DE COMPETENCIA II:

PROGRAMACIÓN LINEAL

Método simplex: forma estándar, forma canónica, solución factible básica inicial, variable que entra, variable que sale, operaciones elementales de renglones, prueba del cociente, tabla óptima.

INDICE

OBJETIVOS

General: Conocer y aplicar los métodos de solución de los modelos matemáticos de programación lineal

Particular: Conocer la Solución de modelos de programación lineal por el método simplex.

CONCEPTOS

Ingreso marginal. Es el incremento en el ingreso total resultante de agregar una unidad de actividad en la solución.

Costo Marginal. En un problema de maximización, el Costo Marginal es el incremento en el costo total resultante de agregar una unidad de actividad en la solución.

Costo de Oportunidad. Indica la diferencia entre el Ingreso Marginal y el Costo Marginal para cada actividad.

En una solución óptima, las actividades incluidas en el plan cumplen con la condición Ingreso Marginal = Costo Marginal, por lo que el Costo de oportunidad de las mismas es igual a 0.

ESTRUCTURA DE LA TABLA SIMPLEX

	C_j	C_1	C_2	0	0	0		Contribución por unidad
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)	Encabezados y variables
0	S_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b1	Coeficientes
0	S_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b2	
0	S_3	a_{31}	a32	0	0	1	b3	
	Z_j							Contribución que se pierde por unidad
	$C_j - Z_j$							Contribución neta por unidad

ESTRUCTURA DE LA TABLA SIMPLEX

Primer renglón C_j. Identifican los coeficientes de la función objetivo.

Encabezado y variables. Sirve para identificar los encabezados de los columnas y las variables de decisión.

Coeficientes. Se refiere a los coeficientes de las restricciones.

Variables básicas. Sirve para identificar las variables en la base.

La columna CB. Contiene los coeficientes que los variables básicas tienen en la función.

El renglón Z_j. Señala la cantidad a las que habría que renunciar para aumentar el valor de cada variable.

El renglón $C_j - Z_j$. Señala el mejoramiento neto en la función objetivo debido al aumento de una unidad en el valor de una variable.

EJEMPLO

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a:

$2x_1 + x_2 \leq 18$

$2x_1 + 3x_2 \leq 48$

$3x_1 + x_2 \leq 24$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

1. Convertir las desigualdades en igualdades: Se introduce una variable de holgura por cada una de las restricciones.

Signo:	Introducir
$\leq$	s_n

$2x_1 + x_2 + S_1 = 18$

$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 48$

$3x_1 + x_2 + S_3 = 24$

PASOS DEL MÉTODO SIMPLEX

2. Agregar la función objetivo y las variables de holgura del sistema anterior:

$Z = 3\ x_1 + 2\ x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

La función objetivo de preferencia siempre se deberá de colocar como la primer fila.

3. Escribir la tabla inicial simplex: En las columnas aparecerán todas las variables del problema y, en las filas, los coeficientes de las igualdades obtenidas, una fila para cada restricción y la primera fila los coeficientes de la función objetivo.

TABLA SIMPLEX INICIAL

	C_j	3	2	0	0	0		Contribución por unidad
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)	Encabezados y variables
0	S_1	2	1	1	0	0	18	Coeficientes
0	S_2	2	3	0	1	0	48	
0	S_3	3	1	0	0	1	24	
	Z_j	0	0	0	0	0		Contribución que se pierde por unidad
	$C_j - Z_j$	3	2	0	0	0		Contribución neta por unidad

PASOS DEL MÉTODO SIMPLEX

4. Encontrar la variable de decisión que entra en la base: Para escoger la variable de decisión que entra en la base, (flecha parte superior), observamos la ultima fila (C_j – Z_j), y escogemos la variable con el coeficiente más alto.

Si en la última fila (Cj – Zj) solo existiesen coeficientes negativos o ceros, significa que se ha alcanzado la solución óptima.

Variable que sale. Para encontrar la variable de holgura que tiene que salir de la base, (flecha verde costado) se divide cada término de la última columna (Lados derechos) por el término correspondiente de la columna pivote, siempre que estos últimos sean mayores que cero.

TABLA SIMPLEX INICIAL

	Cj	3	2	0	0	0		
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)	Operación
0	S_1	2	1	1	0	0	18	18/2 = 9
0	S_2	2	3	0	1	0	48	48/2 = 24
0	S_3	3	1	0	0	1	24	24/3 = 8
	Zj	0	0	0	0	0	0	
	Cj - Zj	3	2	0	0	0		

Indica que la variable de decisión X_1 entra y la variable de holgura S_3 sale.

PASOS DEL MÉTODO SIMPLEX

5. Encontrar los coeficientes para la nueva tabla simplex. Los nuevos coeficientes de la fila pivote se debe convertir en 1. A continuación mediante la reducción gaussiana hacemos ceros los restantes términos de la columna pivote, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de las otras filas.

0	S_1	2	1	1	0	0	18
0	S_2	2	3	0	1	0	48
0	S_3	3	1	0	0	1	24

Dividir entre 3 toda la hilera del elemento pivote

3/3 1/3 0 0 1/3 24/3

Para hacer ceros = Hilera del elemento pivote * (-elemento de intersección en el renglón antiguo) + Elementos de la hilera a reemplazar

TABLA I

	Cj	3	2	0	0	0		Operación
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)	
0	S_1	0	1/3	1	0	-2/3	2	$f(S_1) - 2\ f(X_1)$
0	S_2	0	7/3	0	1	-2/3	32	$f(S_2) - 2\ f(X_1)$
3	X_1	1	1/3	0	0	1/3	8	$(1/3)\ X_1$
	Zj	3	1	0	0	1	24	
	Cj - Zj	0	1	0	0	-1		

Como en los elementos de la última fila hay un numero positivo 1 (renglón verde), significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. (Repetimos desde el paso 4)

TABLA I

4. Encontrar la variable de decisión que entra y la Variable que sale en la base.

	Cj	3	2	0	0	0		Operación
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)	
0	S_1	0	1/3	1	0	-2/3	2	2/(1/3) = 6
0	S_2	0	7/3	0	1	-2/3	32	32/(7/3) = 13.71
3	X_1	1	1/3	0	0	1/3	8	8/(1/3) = 24
	Zj	3	1	0	0	1	24	
	Cj - Zj	0	1	0	0	-1		

PASOS DEL MÉTODO SIMPLEX

5. Encontrar los coeficientes para la nueva tabla simplex

S_1	0	1/3	1	0	-2/3	2
S_2	0	7/3	0	1	-2/3	32
X_1	1	1/3	0	0	1/3	8

Multiplicar por 3 toda la hilera del elemento pivote

0 1 3 0 -2 6

Para hacer ceros = Multiplicarla hilera pivote por -7/3 y -1/3 respectivamente y sumar a la hilera a reemplazar

S_1	0	1	3	0	-2	6
S_2	0	0	-7	1	4	18
X_1	1	0	-1	0	1	6

TABLA II

	Cj	3	2	0	0	0		Operación
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)	
2	X_2	0	1	3	0	-2	6	$3X_2$
0	S_2	0	0	-7	1	4	18	$f(S_2) – (7/3)\ f(X_2)$
3	X_1	1	0	-1	0	1	6	$f(X_1) – (1/3)\ f(X_2)$
	Zj	3	2	3	0	-1	30	
	Cj - Zj	0	0	-3	0	1		

Como en los elementos de la última fila hay un numero positivo 1 (renglón verde), significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. (Repetimos desde el paso 4)

ESTRUCTURA DE LA TABLA SIMPLEX

4. Encontrar la variable de decisión que entra y la Variable que sale en la base.

	Cj	3	2	0	0	0		Operación
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)	
2	$\mathbf{X_2}$	**0**	**1**	**3**	**0**	**-2**	**6**	No se toma por ser negativo
0	$\mathbf{S_2}$	**0**	**0**	**-7**	**1**	**4**	**18**	18/4 = 9/2
3	$\mathbf{X_1}$	**1**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**6**	6/1 = 6
	Zj	3	2	3	0	-1	30	
	Cj - Zj	0	0	-3	0	1		

PASOS DEL MÉTODO SIMPLEX

5. Encontrar los coeficientes para la nueva tabla simplex

X_2	0	1	3	0	-2	6
S_2	0	0	-7	1	4	18
X_1	1	0	-1	0	1	6

Dividir entre 4 toda la hilera del elemento pivote

0 0 -7/4 1/4 1 18/4

Para hacer ceros = Multiplicarla hilera pivote por 2 y -1 respectivamente y sumar a la hilera a reemplazar

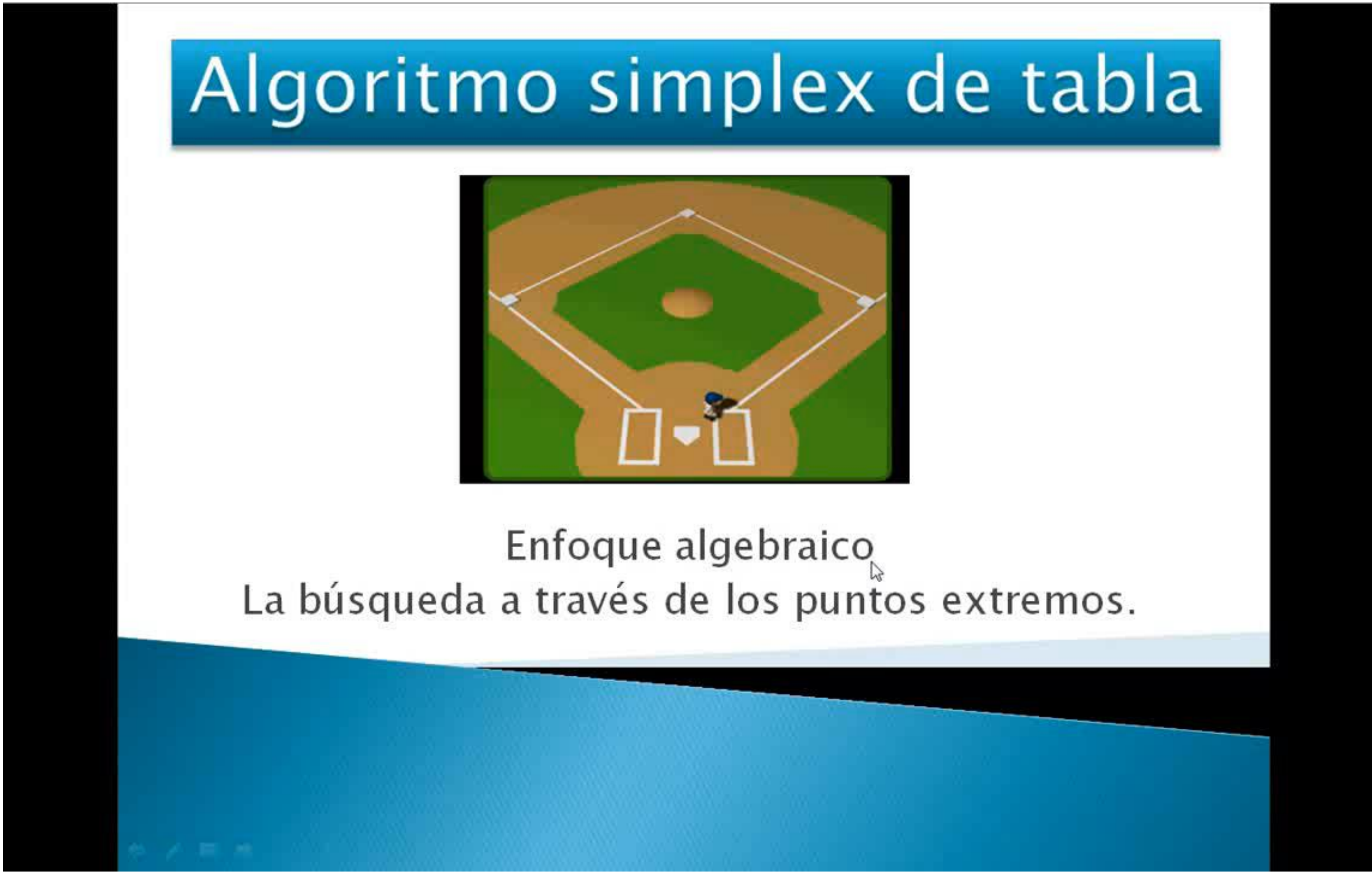
S_1	0	1	-1/2	2/4	0	15
S_2	0	0	-7/4	1/4	1	9/2
X_1	1	0	3/4	-1/4	0	3/2

TABLA FINAL

	Cj	3	2	0	0	0	
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solución (LD)
2	X_2	0	1	-1/2	2/4	0	15
0	S_3	0	0	-7/4	1/4	1	4
3	X_1	1	0	3/4	-1/4	0	3/2
	Z	3	2	5/4	1/4	0	34.5=69/2
	Cj - Zj	0	0	-5/4	-1/4	0	

Como en los elementos de la última fila NO hay un numero positivo, significa que hemos llegado a la solución óptima.

Video de algoritmo simplex



MÉTODO SIMPLEX: RESUMEN

1. Identificar la variable que sale y entra. Columna pivote y cocientes.
2. Dividir el renglón que sale entre el elemento pivote.
3. Multiplicar el renglón reemplazante por el elemento del renglón que se actualiza y restar al que se actualiza.
4. Calcular los nuevos renglones Z_j y $(C_j – Z_j)$
5. Verificar si se tiene la solución óptima. Si no se tiene volver al paso 1.

Variables Holgura y Artificial

- Por cada restricción de tipo (≥) al lado izquierdo de la restricción se le resta una variable S llamada Holgura y se suma otra variable A llamada artificial.

- Por cada restricción de tipo (=) se suma una variable A, al lado izquierdo de la restricción.

Siempre que se incorpore una variable de holgura, o artificial a una restricción, habrá que agregarlas en las demás restricciones y en la función objetivo.

Ejemplo de Simplex: minimización

Resolver el siguiente problema:

Minimizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeto a:

$x_1 + x_2 \geq 10$

$2x_1 + 4x_2 \geq 24$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

PASOS

1. Se introduce una variable de Holgura por cada una de las restricciones, este caso S_1, S_2 y Las variables artificiales A_1 y A_2, para convertirlas en igualdades y formar el sistema de ecuaciones estándar.

- $x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 10$
- $2x_1 + 4x_2 - S_2 + A_2 = 24$

En una solución óptima, las variables artificiales no pueden ser variables básicas. La razón para que estas se excluyan en la solución óptima es que estas absorben la negatividad de la variable de holgura. También representan por cuantas unidades no se ha cumplido con la restricción.

PASOS

2. Agregar la función objetivo y las variables de holgura del sistema anterior:

$5\ x_1 + 6\ x_2 + 0E_1 + 0E_2 + MA_1 + MA_2$

La función objetivo de preferencia siempre se deberá de colocar como la primer fila.

3. Escribir la tabla inicial simplex: En las columnas aparecerán todas las variables del problema y, en las filas los coeficientes de las igualdades obtenidas, una fila para cada restricción y la primera fila los coeficientes de la función objetivo:

TABLA I

	Cj	5	6	0	0	M	M		
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	Solución (LD)	Operación (cociente)
M	A_1	1	1	-1	0	1	0	10	10
M	A_2	2	4	0	-1	0	1	24	6
	Zj	3M	5M	-M	-M	M	M	0	
	Cj - Zj	5-3M	6-5M	M	M	0	0		

La variable que entra es el más negativo. Para seleccionar el mejor cambio, asignamos un valor extremadamente alto a M en comparación con los coeficientes de X_1 y X_2. La variable X_2 entrará a la base.

Variable que sale. Se buscan los cocientes para cada renglón y se escoge el positivo más pequeño entre estos.

TABLA I

	Cj	5	6	0	0	M	M		
CB	Variables básicas	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	Solución (LD)	Operación (cociente)
M	A_1	1	1	-1	0	1	0	10	10
M	X_2	2	4	0	-1	0	1	24	6
	Zj	3M	5M	-M	-M	M	M	0	
	Cj - Zj	5-3M	6-5M	M	M	0	0		

Para X_2

(1/4)	2	4	0	-1	0	1	24
=	1/2	1	0	-1/4	0	1/4	6

Para A_1

	1	1	-1	0	1	0	10	
+	1/2	1	0	-1/4	0	1/4	6	(-1)
	1/2	0	-1	1/4	1	-1/4	4	

TABLA II

	Cj	5	6	0	0	M	M		
CB	V.B.	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	(LD)	Operación (cociente)
M	A_1	1/2	0	-1	1/4	1	-1/4	4	8
6	X_2	1/2	1	0	-1/4	0	1/4	6	12
	Zj	3 +1/2M	6	-M	-3/2 +1/4M	0	3/2 -1/4M	36+4M	
	Cj - Zj	2 -1/2M	0	M	3/2 -1/4M	0	-3/2 +5/4M		

La variable que sale. El cociente positivo más pequeño es de A_1.

La variable X_1 entra a la base es el más negativo.

TABLA II

	Cj	5	6	0	0	M	M		
CB	Var. básicas	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	Solución (LD)	Operación (cociente)
M	A_1	1/2	0	-1	1/4	1	-1/4	4	8
6	X_2	1/2	1	0	-1/4	0	1/4	6	12
	Zj	3 +1/2M	6	-M	-3/2 +1/4M	0	3/2- 1/4M	36+4M	
	Cj - Zj	2 -1/2M	0	M	3/2 -1/4M	0	3/2 +5/4M		

Para X_1

(2)	1/2	0	-1	1/4	1	-1/4	4
=	1	0	-2	1/2	2	-1/2	8

Para X_2

	1/2	1	0	-1/4	0	1/4	6
(-1/2)	1	0	-2	1/2	2	-1/2	8
	0	1	1	-1/2	-1	1/2	2

TABLA III: TABLA FINAL

	Cj	5	6	0	0	M	M		
CB	Var. Bás.	X_1	X_2	E_1	E_2	A_1	A_2	(LD)	cociente
5	X_1	1	0	-2	1/2	2	-1/2	8	
6	X_2	0	1	1	-1/2	-1	1/2	2	
	Zj	5	6	-4	-1/2	4	1/2	52	
	Cj - Zj	0	0	4	1/2	-4+M	-1/2+M		

- En la última fila (Cj – Zj) solo existen coeficientes positivos y ceros, significa que se ha alcanzado la solución óptima.

EJERCICIO

Minimizar $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

Sujeto a:

$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 70$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 50$

$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 90$

$10x_1 + 8x_2 + 3x_3 \geq 100$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

BIBLIOGRAFIA

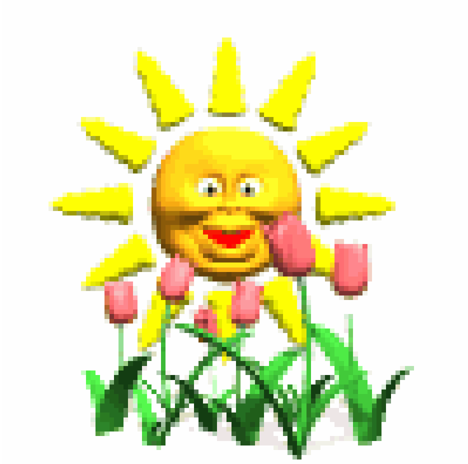
1.- Bronson. **“INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”.** Edit. McGraw-Hill.

2. - Hillier, Frederick y otros. **“INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”** 7ª Ed**.** Edit. McGraw-Hill.

3. Mckeown, D. **“MODELOS CUANTITATIVOS PARA LA ADMINISTRACIÓN”** Iberoamericana.

4.- Taha, Handy. “**INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”** 7ª Ed. Edit. Pearson Educación.

5.- Winston Wayne L. “**INVESTIGACION DE OPERACIONES. APLICACIONES Y ALGORITMOS**”. *4ª ed.* Edit. Mc Graw-Hill



FIN DE LA PRESENTACION