



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO

Elementos de Cálculo Actuarial con R

TESINA

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN ACTUARIA

P r e s e n t a

C. César Rivera Loredó

Asesor: D. en E. Eduardo Rosas Rojas

Atizapán de Zaragoza, Edo. de Méx. Marzo 2018



Agradecimientos

A la memoria de mis padres, que en vida me brindaron su amor, paciencia, dedicación y esfuerzo para que yo pudiera lograr mis metas, por fomentar en mí, ideales y buenos principios. Y fueron mi inspiración para iniciar y concluir este sueño.

Al Dr. Eduardo Rosas Rosas agradezco por las asesorías que me dio para concluir mi trabajo de tesina.

A mis profesores les doy las gracias por sus conocimientos brindados durante mi etapa de estudiante.

Resumen

La presente tesina tiene como objetivo servir como manual teórico-práctico para la unidad de aprendizaje CÁLCULO ACTUARIAL. Se mostrará como los cálculos matemáticos actuariales para los riesgos contingentes de una vida se pueden realizar fácilmente gracias al uso del *software* estadístico *R Project* y el paquete *lifecontingencies*.

Se desarrollan los conceptos teóricos de acuerdo a las necesidades de los estudiantes de la licenciatura en actuaria para que adquieran las competencias y conocimiento de los temas que abarca la unidad de aprendizaje de cálculo actuarial. Para ello se propone la exposición de los diferentes tópicos actuariales con una serie de ejercicios en cada capítulo cuya solución se muestra de manera teórica con el uso de fórmulas actuariales y de manera práctica con la programación de las diferentes funciones del paquete *lifecontingencies*.

La tesina se organiza en capítulos de la siguiente manera: el capítulo uno se ocupa de proporcionar las bases técnicas de *R Project* y una breve exposición de las bases de matemáticas financieras; en el capítulo dos se mostrará cómo crear una tabla de mortalidad y los conceptos básicos de los elementos que componen dicha tabla, además se creará la tabla de valores conmutados; en el capítulo tres se discutirán las anualidades contingentes; mientras que en el capítulo cuatro se desarrolla el tema de seguros; y finalmente en el capítulo cinco se discuten las primas netas niveladas de los seguros.

De la página de la SOA se descarga una tabla de mortalidad para México, se utilizan los valores conmutados a una tasa de interés del 10 % solo para ejemplificar y desarrollar la teoría y la práctica de este manual, advirtiéndose que ésta no representa una situación social o económica real.

Abstract

The purpose of this thesis is to serve as a theoretical-practical manual for the learning unit CÁLCULO ACTUARIAL. It will be shown how the actuarial mathematical calculations for the contingent risks of a life can be easily realized thanks to the use of the *R Project* statistical *software* and the *lifecontingencies* package.

The theoretical concepts are developed according to the needs of the students of the actuarial degree so that they acquire the competences and knowledge of the topics covered by the learning unit cálculo actuarial. For this purpose, the exposure of the different actuarial topics is proposed with a series of exercises in each chapter whose solution is shown theoretically with the use of actuarial fórmulas and in a practical way with the programming of the different functions of the *lifecontingencies* package.

The thesis is organized in chapters as follows: chapter one deals with providing the technical bases of *R Project* and a brief exposition of the bases of financial mathematics; in chapter two it will be shown how to create a mortality table and the basic concepts of the elements that make up said table, in addition, the table of commuted values will be created; in chapter three the contingent annuities will be discussed; while in chapter four the subject of insurance is developed; and finally in chapter five the level premiums of insurance are discussed.

From the SOA page, a mortality table is downloaded for Mexico using the values exchanged at an interest rate of 10 % only to exemplify and develop the theory and practice of this manual, noting that this does not represent a real social or economic situation.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	1
1. Bases técnicas	5
1.1. R Project	5
1.1.1. Ventajas de R Project	6
1.1.2. Desventajas de R Project	7
1.1.3. Instalación de R	9
1.1.4. Obtener ayuda en R	10
1.1.5. Operaciones básicas	11
1.1.6. Vectores	13
1.1.7. Matrices	18
1.1.8. Data Frames	20
1.1.9. Importación de datos	23
1.1.10. Instalación de librerías	26
1.2. Librería lifecontingencies	26
1.3. Matemáticas Financieras	28
1.3.1. Conceptos básicos	28
1.3.2. Interés simple	30

1.3.3.	Interés compuesto	33
1.3.4.	Anualidades	37
2.	Tablas de mortalidad	47
2.1.	Definición	51
2.2.	Construcción de tablas de mortalidad	52
2.3.	Creación de tabla de mortalidad en R	53
2.4.	Elementos de una tabla de mortalidad	56
2.5.	Extensión de probabilidades	58
2.6.	Funciones de conmutación	62
3.	Anualidades	65
3.1.	Dotal puro	66
3.2.	Anualidades vitalicias	69
3.2.1.	Anualidades vitalicias anticipadas	70
3.2.2.	Anualidades vitalicias vencidas	71
3.2.3.	Anualidades vitalicias anticipadas diferidas m años	72
3.2.4.	Anualidades vitalicias vencidas diferidas m años	72
3.3.	Anualidades temporales	73
3.3.1.	Anualidades temporales anticipadas	73
3.3.2.	Anualidades temporales vencidas	74
3.3.3.	Anualidades temporales anticipadas diferidas m años	74
3.3.4.	Anualidades temporales vencidas diferidas m años	75
3.4.	Anualidades crecientes	84
4.	Seguros	87
4.1.	Seguros de vida entera	87
4.2.	Seguros vitalicios diferidos m años	89
4.3.	Seguros temporales	89
4.4.	Seguros diferidos temporales	91
4.5.	Seguro dotal mixto	95

4.6. Seguros crecientes	97
4.7. Seguros decrecientes	100
5. Primas Netas Niveladas	103
5.1. Seguros Vitalicios	105
5.2. Seguro Dotal Mixto	106
5.3. Seguros temporales	106
5.4. Anualidades	107
Conclusiones	112
Anexos	114
A. Tabla de mortalidad MEX 2000	115
B. Conmutados de MEX 2000 al 10 % de interés	119
C. Fórmulas de Cálculo Actuarial	123
Bibliografía	126
Bibliografía	126

Introducción

En el campo laboral un actuario es capaz de analizar y resolver problemas de carácter financiero, económico, demográfico, estadístico y de seguridad social, a través de modelos matemáticos, estadísticos y actuariales compaginados con el uso de las tecnologías de la información. Estos problemas se pueden resolver en un tiempo reducido gracias a los avances tecnológicos, y a la disponibilidad de diferentes bases de datos de libre acceso, que en conjunto con el uso de un *software* especializado proporcionan una solución a esta laboriosa tarea, y permita amalgamar los conocimientos teóricos con los prácticos. No obstante, la problemática existente en el plan de estudios de la licenciatura de Actuarial, impartida por diferentes espacios académicos de la Universidad Autónoma del Estado de México es que no cuenta con una unidad de aprendizaje enfocada en la enseñanza del manejo de algún *software* demandado en el campo laboral y con un enfoque bien definido en la ciencia actuarial.

En la actualidad el conocimiento sobre el uso de R, es muy demandado en los perfiles profesionales que requieren las empresas, siendo éste un *software* libre especializado en estadística, con gran capacidad gracias al uso de complementos adicionales, llamados librerías, que al ser instalados potencian las capacidades para desarrollar procedimientos especializados y que hacen de *R Project* un potente programa para el uso de diferentes ramas de la ciencia actuarial.

Por los argumentos esgrimidos anteriormente y dada su accesibilidad se podría presentar como solución el brindar a los alumnos las habilidades, capacidades y conocimientos sobre el manejo de R, desde sus estudios universitarios, para que aprendan y apliquen el uso de esta herramienta práctica para resolver los problemas actuariales que se aprenden y desarrollan en la licenciatura, con la creación de un manual para que los estudiantes

aprendan la parte teórica de la asignatura, y al mismo tiempo resolver problemas en el programa, es decir de manera práctica, los alumnos desarrollaran la capacidad de manejar el programa antes de egresar de la licenciatura.

El conocimiento del uso de esta herramienta en el análisis de datos se ha convertido en una de las herramientas más utilizadas en las empresas de seguros, con esto nace la idea de hacer un manual que relacione la asignatura Cálculo Actuarial y el *software* estadístico *R Project*.

El proyecto aportará conocimiento a los alumnos de la licenciatura de actuaría que cursan la unidad de aprendizaje de Cálculo Actuarial, en donde se cubrirá el temario que indica el programa de estudios impartido en el Centro Universitario, con la inclusión de ejercicios resueltos de manera teórica y de manera práctica utilizando el programa para verificar los resultados, así el alumno reafirmara sus conocimientos. Como actuarios no solo se deben entender los alcances de los diversos lenguajes de programación para automatizar los procesos, sino también se debe conocer la parte teórica para así identificar el método óptimo de solución.

Además, el documento podrá ser utilizado por cualquier alumno interesado en el aprendizaje de R, dado que el trabajo contará con una breve introducción al uso de este *software*, para que el estudiante interesado adquiriera la habilidad de generar, manipular y analizar datos, para desarrollar los procedimientos que den solución a las múltiples labores actuariales. Se debe señalar que es esencial la descarga de librerías que incrementen las funciones de R, y de esta manera ampliar la gama de unidades de aprendizaje para que los alumnos incursionen en ellas. En el caso del Cálculo Actuarial, la librería utilizada se llama *lifeContingencies*.

La tesina Elementos de Cálculo Actuarial con R, pretende apoyar a la unidad de aprendizaje de Cálculo Actuarial, mostrando que los cálculos matemáticos financieros y actuariales de una vida, se pueden realizar fácilmente con el uso del *software* estadístico R y el paquete *lifecontingencies*, además de la presentación de los conceptos teóricos de manera detallada.

Además de cumplir los siguientes objetivos específicos:

- Comprender y ejercitar los diferentes tipos de datos y objetos que utiliza el *software*,

a través de una introducción a R.

- Conocer y dominar la librería o paquete *lifecontingencies*.
- Presentar el uso de R para la realización de ejercicios de cálculo actuarial, tratando los temas de matemáticas financieras, tablas de mortalidad, seguros de vida, anualidades contingentes y las primas netas niveladas de los seguros de vida.
- Servir como material bibliográfico de manera teórica y práctica a la unidad de aprendizaje cálculo actuarial.
- Resolver problemas de cálculo actuarial para el caso específico de una tabla de mortalidad para la población mexicana.

Los capítulos que integran este trabajo son los siguientes:

El capítulo uno se divide en tres partes, en la primera parte se plantea como utilizar el *software* estadístico R, como instalar el *software*, y como navegar por el sistema R. Se introducen conceptos de diferentes tipos de objetos, manipular conjuntos de datos, se explica cómo ingresar e importar datos, y lo más importante aprender como cargar librerías. En la segunda parte se explica cuál es la función de la librería *lifecontingencies*, que utilizaremos para este proyecto, ya que es la librería para resolver problemas de cálculo actuarial. En la tercera parte se presenta un resumen de los elementos de matemáticas financieras como son: interés simple, valor presente, monto futuro, tasa de interés y plazo o tiempo. Se estudiarán las variables del interés compuesto y se abordarán los diversos tipos de anualidades ciertas utilizadas en el campo financiero, desde las simples ordinarias, anticipadas y diferidas, así como su valor actual o presente y el monto futuro.

En el capítulo dos se desarrollan los conceptos fundamentales de las probabilidades de muerte o de supervivencia y los elementos que componen una tabla de mortalidad, se explica cómo crear una tabla de mortalidad de vidas enteras y una breve introducción a los valores conmutados, esto de manera teórica y práctica en el *software* R.

En el capítulo tres se definen las anualidades contingentes, se abordarán los diversos tipos de anualidades contingentes que son pagos que dependen de la supervivencia de una persona y estas pueden ser vitalicias o temporales de manera diferida y vencida.

En el capítulo cuatro se abordan los seguros de vida, y los conceptos de operaciones de capital constante y variable. Ya que un seguro provee un pago por un monto específico cuando una persona muere, los modelos se han hecho bajo el supuesto de que el pago se hace al final del año en el que ocurre el fallecimiento, aunque en la práctica el pago se hace lo más pronto posible. Se desarrollan de manera teórica y práctica los principales tipos de seguros: vitalicio, temporal, dotal mixto, creciente y decreciente.

En el capítulo cinco se explica que son las primas netas niveladas. En los dos capítulos anteriores se estudió el valor presente actuarial de los pagos de anualidades y seguros. En este capítulo se combinan estos temas para determinar el monto de los pagos necesarios para comprar un seguro.

Finalmente, se esbozan las conclusiones del documento.

Capítulo 1

Bases técnicas

La presente tesina tiene como objetivo contribuir al conocimiento y difusión de herramientas de cómputo útiles en el estudio de variables aleatorias a través de técnicas estadísticas de *software* libre, como es el caso del lenguaje de programación orientado a objetos *R Project* (Team, 2012).

El objetivo de realizar este proyecto “*Elementos de Cálculo Actuarial con R*” es proporcionar a los alumnos interesados una herramienta para el análisis de datos con técnicas actuariales, utilizando el *software* libre *R Project*. R está disponible como *software* libre bajo los términos de *Free Software Foundation’s GNU General Public License* en forma de código fuente. Se puede compilar y ejecutarse bajo gran variedad de plataformas UNIX, Linux, Windows y MacOS.

El *Cálculo Actuarial* es una aplicación de las matemáticas que permite obtener valores que están relacionados con la realización de un evento, proporcionando los elementos necesarios para prever los desembolsos monetarios que produzca la realización de dicho evento, como son los generados por la muerte de personas o la destrucción de objetos (Arriaga y Sanchez, 2000).

1.1. R Project

R es un lenguaje y un ambiente para el manejo de datos, cálculos y gráficos en código libre. Dada estas características los desarrollos que se han realizado en R son abiertos

y están disponibles gratuitamente, por lo cual su uso se ha difundido ampliamente. R es difundido libremente por una gran diversidad de sitios espejo del CRAN (*The Comprehensive R Archive Network: red de servidores web en todo el mundo que almacenan versiones idénticas y actualizadas de código y documentación para R*). Además de ser gratuitos, los desarrollos en R se actualizan más rápido que cualquier otro de los costosos *softwares* comerciales que se encuentran en el mercado. Esto es así debido a que los usuarios hacen desarrollos, los documentan y los difunden en su red especializada de manera cotidiana (Quintana y Mendoza, 2016, p.23).

Antes de comenzar a programar es bueno conocer los aspectos básicos del *software* que se está utilizando como son: la forma de instalación; el ambiente; el funcionamiento de las herramientas de ayuda; y la sintaxis básica, necesaria para el desarrollo de cualquier proyecto. En la práctica la programación en R no es difícil solo hace falta acostumbrarse al ambiente y familiarizarse a la sintaxis, la cual trataremos en esta primera parte del presente capítulo.

1.1.1. Ventajas de R Project

- Es *software* libre y por tanto su costo es nulo.
- Es multiplataforma: existen versiones para Linux, Mac y Windows. Los procedimientos y análisis desarrollados en una plataforma son inmediatamente ejecutables en otra.
- Implementa una enorme cantidad de métodos estadísticos, desde los más clásicos a los más modernos. Los métodos se organizan en librerías cuyo número se encuentra en constante crecimiento.
- Capacidad para acceder a datos en múltiples formatos. Dispone de librerías para leer datos desde SPSS, SAS, Access, MySQL, Excel, etcétera. Asimismo permite también la generación de informes de resultados en diversos formatos.
- Enorme capacidad para manipular y modificar datos y funciones.
- Generación de gráficos de alta calidad.

- Existencia de una comunidad de usuarios muy activa, en la que participan estadísticos de renombre.
- Amplia disponibilidad de documentación, tanto en Internet como en libros publicados por editoriales de prestigio.
- Facilidad de integración con actividades de formación en técnicas y métodos estadísticos en todos los ámbitos del conocimiento. Su uso es cada vez más generalizado en las universidades, lo que implica que las nuevas generaciones de profesionales ya salen al mercado laboral con formación específica en el manejo de este programa.
- En particular, su uso en la docencia tiene la ventaja de que no es necesario que el estudiante adquiera licencias para su uso, por lo que cualquier alumno puede instalar R en su ordenador personal y desarrollar tareas, trabajos, etcétera utilizando este programa. Asimismo, una vez que el estudiante se gradúe y abandone la universidad, podrá seguir utilizando R en cualquier ámbito profesional o de desarrollo.
- Existencia de extensiones específicas para nuevas áreas como modelos gráficos o análisis de mercados financieros.
- Todos los algoritmos implementados en R pueden ser vistos e interpretados por cualquier usuario, por lo que éste puede saber exactamente qué es lo que hace el ordenador cuando ejecuta un comando.

1.1.2. Desventajas de R Project

- Hay empresas que por políticas no pueden instalar *software* libre en sus máquinas, cada una tiene su política, sus *softwares* de preferencia, sus necesidades, etcétera.
- Algunas de las instituciones del sector público y privado tienen un dilema: por una parte necesitan ahorrar recursos y por otra parte tienen que contar con soporte técnico por el que pagan fortunas. La idea del soporte es tener el apoyo y mantenimiento por si algo sale mal tanto en la aplicación del *software* como en la administración de los sistemas. Por eso pagan licencias costosas por SAS, STATA y otros paquetes.

- Una de las principales desventajas es que hasta hace poco el uso de R estaba limitado a entornos universitarios y de usuarios con gran conocimiento de la estadística y la programación. Junto a esto, su primera impresión entre los usuarios principiantes, es de dureza y poca amigabilidad, aunque esto queda superado con el uso.
- La forma de dar instrucciones al programa es escribiéndolas en la línea de comandos del programa. A principio puede ser un poco lento, pero en cuanto te familiarizas con el lenguaje, es muy rápido y simple. Suele señalarse como principal desventaja de R el hecho de que el paquete base no dispone de una interfaz amigable para el usuario; no existe un menú principal en el que el usuario pueda acceder mediante el ratón a submenús para la lectura de datos, la ejecución de procedimientos estadísticos o la generación de gráficos. Estas tareas se llevan a cabo mediante un lenguaje de comandos que puede resultar duro de aprender para el usuario común. No obstante se han desarrollado algunas interfaces que facilitan enormemente esta tarea, en particular la interfaz R-Commander y RStudio.
- No dispone de un sistema de bases de datos propio, aunque sí cuenta con un formato para el almacenamiento e intercambio de datos. En cualquier caso se han desarrollado paquetes para conectar y acceder a múltiples sistemas de bases de datos.
- Tiene algunas limitaciones en cuanto al uso de la memoria, que dificultan el análisis de bases de datos masivas. No obstante estas limitaciones han ido desapareciendo a medida que se han ido desarrollando ordenadores con mayor capacidad. En cualquier caso, salvo que el usuario deba acceder a millones de registros simultáneamente, es difícil que llegue a notar problemas con la memoria.
- En algunos casos las nuevas librerías que se incorporan a R pueden tener errores o fallos de implementación. Estos fallos, no obstante, suelen ser detectados por los usuarios, informado a los desarrolladores de las librerías y corregidos en tiempo récord. Debe señalarse, no obstante, que ningún programa incluso los comerciales está exento de fallos y el proceso de revisión y corrección de fallos en programas comerciales mediante parches o actualizaciones suele ser notablemente más lento.

- No hay nadie a quien reclamar si algo falla, ni hay un departamento de atención al cliente que nos diga qué podemos hacer si algo va mal, si algún procedimiento nos da un error, o simplemente si no sabemos qué sintaxis utilizar. Pero a cambio existe una comunidad de usuarios organizada en foros y dispuesta a colaborar desinteresadamente en la resolución de problemas.
- A todos los puntos anteriores podemos añadir el siguiente, que será considerado por unos una ventaja y por otros un inconveniente: Para hacer un buen uso de R hay que tener un buen conocimiento de los métodos estadísticos. En realidad esta afirmación es cierta no sólo para R, sino para cualquier paquete estadístico. Sin embargo en la práctica programas como SPSS, SAS o STATA permiten, a través de sus menús, que el usuario pueda aplicar casi cualquier procedimiento estadístico sea o no adecuado para sus datos o su problema sin apenas esfuerzo y obtenga páginas de resultados que muchas veces es incapaz de interpretar. R es bastante más comedido en sus salidas de resultados y, cuando se han de aplicar modelos de cierta complejidad, la mayoría de las veces el usuario se verá obligado a especificar exactamente qué es lo que quiere hacer, lo que implica buen nivel de conocimiento de los problemas abordados.

1.1.3. Instalación de R

Para realizar la instalación de R en Windows se debe ingresar al sitio web:

www.r-project.org.

Al ingresar al sitio, inmediatamente existe una liga para realizar la descarga de R, posteriormente situarse en los espejos, los cuales muestran opciones para descargar R de direcciones electrónicas de diferentes países. Se selecciona alguna de las opciones para México.

<https://cran.itam.mx/>

Instituto Tecnológico Autónomo de México

<http://cran.itam.mx/>

Instituto Tecnológico Autónomo de México

<http://www.est.colpos.mx/R-mirror/>

Colegio de Postgraduados, Texcoco

Cuando se ingresa en una opción aparece la liga de R para Windows y se ingresa al sistema base. En los subdirectorios aparece el sistema base y de este podemos descargar R.

La versión utilizada es la más reciente para Windows. Se guarda el archivo y enseguida se ejecuta. Esto iniciará el instalador de R. Se selecciona el idioma en el que se desee trabajar la instalación y comenzara la instalación de R.

1.1.4. Obtener ayuda en R

R permite obtener ayuda para conocer toda la información (qué hace, cuál es la sintaxis correcta, qué parámetros tiene, algunos ejemplos de uso, etcétera) sobre una función, objeto o librería.

Existen cinco funciones para obtener ayuda las cuales son:

1. *help.start()*

Utilizando esta función se encuentra un menú de recursos, entre los cuales existen manuales, referencias y demás material para comenzar a aprender R. Para usar *help.start()* escribe en la línea de comandos *help.start()*.

```
> help.start()
```

Como se observa al ejecutar este comando enlaza a un sitio web donde se puede encontrar directorios de manuales, referencias entre otra información referente al uso de R.

2. *help("nombre del objeto")* o *?nombre del objeto*

Esta función facilita obtener información acerca de las funciones de los paquetes ya instalados en R. Si se desea obtener información acerca de una función, por ejemplo de la función *plot()*, se debe escribir *help("plot")* o *?plot* en la línea de comandos.

```
> help("plot")
```

Como se puede observar se muestra una breve descripción de la función, de cómo usarla, así como sus argumentos, etcétera.

3. *example*("nombre de la función")

Para obtener ejemplos del uso de funciones, se utiliza la función *example()*. Por ejemplo, escribe *example*("array").

```
> example("array")
```

4. *library* (*help*= "nombre de la librería")

Otra manera de obtener información de ayuda sobre un paquete es usar la opción *help* para el comando *library()*, con lo cual tendrás información más completa. Un ejemplo es *library*(*help*="stats").

```
> library(help="stats")
```

5. *vignette*("nombre de la librería")

Algunos paquetes ya instalados en R incluyen viñetas dentro del ordenador. Una viñeta es un documento corto que describe cómo se usa un paquete. Se puede ver una viñeta usando la función *vignette()*. Escribe *vignette*("Sweave") en la línea de comandos.

```
> vignette("Sweave")
```

1.1.5. Operaciones básicas

La forma correcta de almacenar valores, es a través de una asignación la cual se realiza especificando el símbolo $\leftarrow$. Del lado izquierdo del símbolo se especifica el nombre de la variable y del lado derecho se introduce el valor u operación.

Se puede trabajar con una gran cantidad de operadores matemáticos que utiliza R y que permite realizar cálculos matemáticos, por mencionar algunos, se pueden observar en el Cuadro 1.1.

Cuadro 1.1: Operadores matemáticos

Operador matemático	Función	Operador matemático	Función
$\sqrt{x}$	sqrt(x)	seno(x)	sin(x)
e^x	exp(x)	coseno(x)	cos()
$x!$	factorial(x)	tangente(x)	tan(x)
logaritmo(x)	log(x)	arcoseno(x)	asin(x)
π	pi	arcocoseno(x)	acos(x)
$x!$	factorial(x)	arcotangente(x)	atan(x)
$\binom{x}{k}$	choose(x,k)	$ x $	abs()

Fuente: Elaboración propia

Asignar un valor a cierta cantidad de variables por ejemplo: a una variable w el valor 3, a la variable y el valor 7 y a la variable z el valor 90, a una variable $suma$ la adición de las variables anteriores y finalmente obtendremos la raíz cuadrada de la variable $suma$, guardándola en una variable con el nombre $raíz$.

A continuación se muestra el ejemplo en R:

```
> w <- 3 # Para evaluar la instrucción se debe presionar la tecla ENTER.
> w      # Para observar el valor de la variable nombra la variable.

[1] 3

> y <- 7
> y

[1] 7

> z <- 90
> z

[1] 90

> suma <- w + y + z
> suma

[1] 100
```

```
> raiz <- sqrt(suma)
> raiz

[1] 10
```

En la primera línea se observa el símbolo numeral (`#`), el cual permite comentar el código, para tomar notas de interés.

Aunque las variables utilizadas en esta tesina son variables denominadas *meta-sintácticas* lo que significa que son nombres de relleno, se recomienda asignarlas con nombres pertinentes.

En R también se pueden almacenar cadenas de caracteres como se muestra en el siguiente ejemplo:

```
> a <- "Cálculo"
> a

[1] "Cálculo"

> b <- "Actuarial"
> b

[1] "Actuarial"
```

Para obtener un listado o desplegado de las variables que han sido definidas en la sesión se debe de escribir el comando `ls()`.

```
> ls()

[1] "a"      "b"      "raiz" "suma" "w"      "y"      "z"
```

1.1.6. Vectores

Un vector es una secuencia ordenada de datos, los cuales han de ser del mismo tipo, es decir todos deben de ser números, caracteres, cadenas de caracteres, valores lógicos,

etcétera. Los tipos de datos que se pueden almacenar en un vector, se destacan los siguientes:

- *logical* (lógicos: TRUE, verdadero, o FALSE, falso)
- *integer* (números enteros)
- *numeric* (números reales)
- *character* (palabras)

Creación de un vector

La forma correcta de almacenar un conjunto de datos, es a través de una asignación utilizando el comando *c* (*combine*), donde dicha lista de números se almacenan bajo este nombre, y así mismo este se utiliza para referirse a los datos que almacena, la asignación se realiza especificando el símbolo `<-` (Matías, 2009, p.29).

Para generar un vector utilizamos la función *c* separando cada uno por medio de una coma (,) por ejemplo si se quisiera almacenar la secuencia 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dentro de un vector llamado *vector*.

```
> vector <- c(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
> vector

[1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

Si se desea crear un vector de letras, palabras o cadenas de caracteres llamadas *string*, se tiene que nombrar cada cadena de caracteres entre comillas de manera obligatoria.

```
> vectorletra <- c("a", "b", "c", "d", "e")
> vectorletra

[1] "a" "b" "c" "d" "e"

> vectorpalabra <- c("Cálculo", "Actuarial", "en", "R")
> vectorpalabra

[1] "Cálculo" "Actuarial" "en" "R"
```

Se puede facilitar la creación de vectores podemos utilizar $c(a:b)$ para datos de manera consecutiva, el comando $seq(a, b, by = p)$ de manera aritmética, donde a es el primer elemento, b es el último elemento y p es la diferencia de cada elemento. Para crear vectores de otro tipo se sugiere la ayuda de R.

```
> w <- c(0:10)
> w

[1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

> y <- seq(0, 100, by = 10)
> y

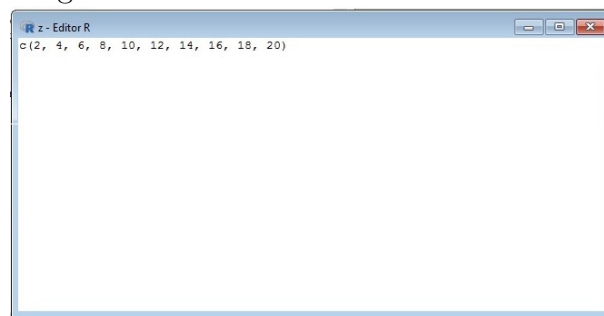
[1] 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
```

Un vector se puede modificar fácilmente usando el editor de datos que incorpora R. Para hacerlo, se aplica la función *fix* al vector que queremos editar. R abre el vector en una nueva ventana de edición. Mientras esta ventana esté abierta, será la ventana activa de R y no se podrá volver a la sesión de R hasta que se cierre. Los cambios que se realicen en el vector con el editor de datos se guardarán cuando se cierre esta ventana.

```
> z <- c(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)
> fix(z)
```

Aparecerá la ventana emergente de la figura 1.1, en la cual se podrá cambiar los valores.

Figura 1.1: Ventana del editor de vectores



Fuente: Elaboración propia

Para ejecutar los cambios y seguir trabajando en la consola de R, se tendrá que cerrar la ventana emergente de la figura 1.1 de manera obligatoria, para así guardar los cambios.

Operaciones con vectores

Se pueden realizar operaciones como suma, resta, producto de vectores, se utilizaran los vectores w e y para ejemplificar las operaciones.

```
> suma <- w + y
> suma

[1]  0  11  22  33  44  55  66  77  88  99 110

> resta <- w - y
> resta

[1]  0  -9 -18 -27 -36 -45 -54 -63 -72 -81 -90

> producto <- w * y
> producto

[1]  0  10  40  90 160 250 360 490 640 810 1000
```

El manejo de vectores con R tiene una propiedad muy útil: podemos aplicar una función a todos los elementos de un vector en un solo paso.

```
> w + 5

[1]  5  6  7  8  9 10 11 12 13 14 15

> w - 2

[1] -2 -1  0  1  2  3  4  5  6  7  8

> 10 * w

[1]  0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
```

```

> sqrt(w)

[1] 0.000000 1.000000 1.414214 1.732051 2.000000 2.236068 2.449490
[8] 2.645751 2.828427 3.000000 3.162278

> w ^ 2

[1] 0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

```

Entre otras funciones para aplicar a vectores, y de gran importancia son las relacionadas principalmente con la estadística. Por ejemplo:

- *max* y *min* calculan sus valores máximo y mínimo, respectivamente.
- *sum* calcula la suma de sus entradas.
- *prod* calcula el producto de sus entradas.
- *mean* calcula la media aritmética de sus entradas.
- *diff* calcula el vector formado por las diferencias sucesivas entre entradas del vector original.
- *sort* ordena los elementos del vector en el orden natural creciente del tipo de datos que lo forman: el orden numérico, el orden alfabético, etcétera. Si se requiere ordenar en forma decreciente, se puede incluir en su argumento el parámetro *decreasing=TRUE*.

```

> w

[1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

> max(w)

[1] 10

> min(w)

```

```

[1] 0

> sum(w)

[1] 55

> prod(w)

[1] 0

> mean(w)

[1] 5

> diff(w)

[1] 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

> sort(w)

[1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

> sort(w, decreasing = TRUE)

[1] 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

```

1.1.7. Matrices

Las matrices son un tipo de vector particular, es un vector con un atributo especial, llamado dimensión. La dimensión establece el número de renglones y el número de columnas que tendrá una matriz, se debe recordar que una matriz no es más que un arreglo de números en m renglones y n columnas.

Por ejemplo una matriz de 3 renglones y 3 columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Se dispone de dos maneras básicas de definir una matriz en R. En primer lugar, la instrucción:

matrix(vector, nrow = n, byrow = valorlógico)

Define una matriz de n filas (*rows*) formada por las entradas del vector. Si se captura *byrow = TRUE*, la matriz se construye por filas, mientras que con *byrow = FALSE* se construye por columnas; este último es el valor por defecto, por lo que no hace falta especificarlo. En vez de emplear *nrow*, se puede indicar el número de columnas con *ncol*. Veamos algunos ejemplos:

```
> matrix (1:6, nrow = 2)

      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6

> matrix (1:6, nrow = 3)

      [,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]    2    5
[3,]    3    6

> matrix (1:6, nrow = 2, byrow = TRUE)

      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6

> matrix (1:6, nrow = 3, byrow = TRUE)
```

	[,1]	[,2]
[1,]	1	2
[2,]	3	4
[3,]	5	6

Observe cómo muestra R las matrices: indica las filas con $[i,]$, donde i es el índice de la fila, y las columnas con $[,j]$, donde j es el índice de la columna. Otra posible manera de definir matrices es combinando filas o columnas. La instrucción:

$$\text{rbind}(\text{vector1}, \text{vector2}, \dots, \text{vectorN})$$

Construya la matriz de filas $\text{vector1}, \text{vector2}, \dots, \text{vectorN}$ que han de tener la misma longitud en este orden. Si en lugar de *rbind* se usa *cbind*, se obtiene la matriz cuyas columnas son los vectores a los que se aplica.

```
> rbind(c(1, 0, 2), c(2, 3, 6), c(1, 2, 0))
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	0	2
[2,]	2	3	6
[3,]	1	2	0

```
> cbind(c(1, 0, 2), c(2, 3, 6), c(1, 2, 0))
```

	[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	1	2	1
[2,]	0	3	2
[3,]	2	6	0

1.1.8. Data Frames

La manera más conveniente de guardar una tabla de datos en R es en forma de *data frame*. En concreto, un *data frame* es una tabla de doble entrada, formada por variables

en las columnas y observaciones de estas variables en las filas, de manera que cada fila contiene los valores de las variables para un mismo caso o individuo. En este sentido, un *data frame* tiene la apariencia de una matriz, pero con la diferencia de que cada columna de un *data frame* puede contener datos de un tipo diferente, siempre que todos los datos de una misma columna sean del mismo tipo, porque corresponden a observaciones de una misma propiedad: así, una columna puede estar formada por números, por palabras, por valores lógicos, etcétera. De esta manera, las columnas de un *data frame* son *vectores*, mientras que las filas son *listas*.

Creación de Data Frames

Para construir un *data frame* a partir de unos vectores, se usa la función *data.frame* aplicada a los vectores en el orden en el que queramos disponer las columnas de la tabla; de esta manera, las variables tomarán los nombres de los vectores. Estos nombres también se pueden especificar en el argumento de la función *data.frame*, entrando cada columna con una construcción de la forma:

$$\text{Nombre de la variable} = \text{Vector con el contenido de la variable}$$

Para ilustrar esta función con un ejemplo sencillo:

Una compañía de seguros desea crear una base de datos para la gestión de las pólizas de sus asegurados. Para ello, los datos de los que se dispone son los siguientes:

De cada póliza se guarda el número de póliza, el tipo (que puede ser Hogar o Auto), la fecha de creación de la póliza, y el conjunto de coberturas incluidas en la póliza (a elegir entre Incendio, Robo, Terceros y Responsabilidad Civil). Además, para cada póliza guardamos los datos de sus titulares, y sabemos que cada póliza tiene un único titular. De los titulares guardamos nombre, sexo, edad y estado de procedencia.

```
> Poliza <- c(1:9)
> Tipo <- c("Hogar", "Auto", "Auto", "Auto", "Hogar", "Hogar", "Auto",
+           "Auto", "Hogar")
> Fecha <- c("12/12/2016", "08/02/2014", "10/08/2012", "01/01/2015",
```

```

+           "21/11/2011", "18/01/2016", "12/04/2005", "29/03/2007",
+           "18/02/2009")
> Coberturas <- c("Incendio", "Robo", "Terceros", "Robo", "Robo",
+               "Incendio", "Terceros", "R. Civil", "Incendio")
> Nombre <- c("Carlos", "Nancy", "Pedro", "Cecilia", "Ricardo", "Sofia",
+             "Armando", "Vicente", "Fernando")
> Sexo <- c("M", "F", "M", "F", "M", "F", "M", "M", "M")
> Edad <- c(25, 35, 45, 47, 24, 43, 33, 31, 40)
> Estado <- c("Campeche", "Chiapas", "Ciudad de México", "Coahuila",
+             "Durango", "Guanajuato", "Guerrero", "Hidalgo", "Jalisco")
> dataframe= data.frame(Poliza, Tipo, Fecha, Coberturas, Nombre, Sexo,
+                       Edad)
> dataframe

```

	Poliza	Tipo	Fecha	Coberturas	Nombre	Sexo	Edad
1	1	Hogar	12/12/2016	Incendio	Carlos	M	25
2	2	Auto	08/02/2014	Robo	Nancy	F	35
3	3	Auto	10/08/2012	Terceros	Pedro	M	45
4	4	Auto	01/01/2015	Robo	Cecilia	F	47
5	5	Hogar	21/11/2011	Robo	Ricardo	M	24
6	6	Hogar	18/01/2016	Incendio	Sofia	F	43
7	7	Auto	12/04/2005	Terceros	Armando	M	33
8	8	Auto	29/03/2007	R. Civil	Vicente	M	31
9	9	Hogar	18/02/2009	Incendio	Fernando	M	40

Para guardar una copia de seguridad (*un backup*) en *dataframebk* para poder recuperar su estado original si se necesita.

```
> dataframebk = dataframe
```

Es muy prudente y recomendable que se guarden siempre copias de seguridad de los *data frames* que se generan si se van a manipular, porque hay cambios en un *data frame*

que son irreversibles.

Otra manera de crear un *data frame* con R es usando el editor de datos que ya se ha utilizado en la creación de vectores. Se recordara que, para abrir un objeto de datos con este editor, se le aplica la función *fix*. R abre entonces el objeto en una nueva ventana de edición. Los cambios que realicemos en un objeto con el editor de datos se guardarán cuando cerremos esta ventana.

Para crear un *data frame* con el editor de datos, lo primero que hay que hacer es crear un *data frame* con la primera fila, y luego abrirlo con el editor para ir añadiendo filas (y columnas, si se desea).

```
> dataframe2 <- data.frame(Poliza = c(1), Tipo = c("Auto"),
+                           Coberturas = c("Robo"))
> fix(dataframe2)
```

Aparecerá la ventana emergente de la figura 1.2, en la cual podrás cambiar los valores.

Figura 1.2: Ventana del editor de data frames

	Poliza	Tipo	Coberturas	var4	var5	var6	var7
1	1	Auto	Robo				
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							

Fuente: Elaboración propia

1.1.9. Importación de datos

A continuación se explicará brevemente la manera de importar datos que tienen diferentes formatos a R. En R se utiliza el directorio de trabajo para leer y escribir archivos.

Para saber cuál es este directorio se puede utilizar el comando:

```
> getwd()
```

Para cambiar el directorio de trabajo, se utiliza la función:

```
> setwd()
```

Es necesario proporcionar la dirección (*path*) completa del archivo si este no se encuentra en el directorio de trabajo.

La función *read.table* crea un marco de datos (*data frame*) y constituye la manera más usual de leer datos en forma tabular. Si tenemos un archivo de nombre *archivo.dat*:

```
> misdatos <- read.table("archivo.dat")
```

Existen varias opciones con valores por defecto (aquellos usados por R si son omitidos por el usuario) que se detallan en el Cuadro 1.2 con los atributos de comandos para importar datos desde diferentes extensiones:

```
read.table(file, header = FALSE, sep = " ", quote = "\"", dec = ".", row.names,
col.names, as.is = FALSE, na.strings = "NA", colClasses = NA, nrows = -1, skip = 0,
check.names = TRUE, fill = !blank.lines.skip, strip.white = FALSE, blank.lines.skip =
TRUE, comment.char = " ")
```

Las variantes de *read.table* son útiles ya que vienen con diferentes opciones por defecto:

```
read.csv(file, header = TRUE, sep = ",", quote="\"", dec=".", fill = TRUE, ...)
```

```
read.csv2(file, header = TRUE, sep = ",", quote="\"", dec=".", fill = TRUE, ...)
```

```
read.delim(file, header = TRUE, sep = "\t", quote="\"", dec=".", fill = TRUE, ...)
```

```
read.delim2(file, header = TRUE, sep = "\t", quote="\"", dec=".", fill = TRUE, ...)
```

```
read.xls(file, sheet=1)
```

Cuadro 1.2: Atributos de comando read.table()

file	El nombre del archivo (entre “” o como una variable de tipo carácter), posiblemente con su dirección si se encuentra en un directorio diferente al de trabajo (el símbolo \ no es permitido y debe reemplazarse con /, inclusive en Windows), o una dirección remota al archivo tipo URL (http://...)
header	Una variable lógica (FALSE(falso) o TRUE(verdadero)) indicando si el archivo contiene el nombre de las variables en la primera fila o linea
sep	El separador de campo usado en el archivo; por ejemplo sep=“\ t” si es una tabulacion
quote	Los caracteres usados para citar las variables en modo carácter
dec	El carácter usado para representar el punto decimal
row.names	Un vector con los nombres de las lineas de tipo carácter o numérico (por defecto:1, 2, 3, ...)
col.names	Un vector con los nombres de las variables (por defecto: V1, V2, V3, ...)
as.is	Controla la conversión de variables tipo carácter a factores (si es FALSE) o las mantiene como caracteres (TRUE); as.is puede ser un vector lógico o numérico que especifique las variables que se deben mantener como caracteres
na.strings	El valor con el que se codifican datos ausentes (convertido a NA)
colClasses	Un vector de caracteres que proporciona clases para las columnas
nrows	El número máximo de lineas a leer (se ignoran valores negativos)
skip	El número de lineas ignoradas antes de leer los datos
check.names	Si es TRUE, chequea que el nombre de las variables sea valido para R
fill	Si es TRUE y todas las filas no tienen el mismo número de variables, agrega “blancos”
strip.white	(condicional a sep) Si es TRUE, borra espacios extra antes y después de variables tipo carácter
blank.lines.skip	Si es TRUE, ignora lineas en “blanco”
comment.char	Un carácter que define comentarios en el archivo de datos; lineas que comienzan con este carácter son ignoradas en la lectura (para desactivar este argumento utiliza comment.char = “ ”)

Fuente: Extraída de (Paradis, 2003, p.11)

1.1.10. Instalación de librerías

R es un lenguaje que permite la implementación de paquetes adicionales que le dan una capacidad de gestión de datos más amplia y permiten la implementación de nuevas funciones que harán de R un programa que se adapte a las necesidades.

El procedimiento para instalar un paquete depende del sistema operativo usado y de la manera como se instaló R: ya sea desde el código fuente o por medio de archivos binarios pre-compilados. Existen varias funciones para manejar paquetes tales como:

```
installed.packages()
CRAN.packages()
download.packages()
```

Para verificar la versión de paquetes ya instalados en el sistema y actualizarlos a la versión más recientes utilizamos la siguiente función:

```
update.packages()
```

1.2. Librería lifecontingencies

En la actualidad el conocimiento sobre el uso de R, es muy demandado en los perfiles profesionales que requieren las empresas, siendo este un *software* libre especializado en estadística, con gran capacidad gracias al uso de complementos adicionales, llamadas *librerías*, que al ser instaladas potencian las capacidades para desarrollar procedimientos especializados y que hacen de *R Project* un potente programa para el uso de diferentes ramas de la ciencia actuarial.

Como ya se menciono es esencial la descarga de librerías que incrementen las funciones de R, en el caso de Cálculo Actuarial, la librería utilizada se llama *lifeContingencies* (Spedicato, 2013).

Gracias a lo investigado por Giorgio Spedicato creador de la librería *lifecontingencies*, y presentado en el *paper* “*The lifecontingencies package: Performing financial and actuarial mathematics calculations in R*” (Spedicato, 2013, p.1-2), encontramos lo siguiente:

El entorno de programación estadística en R se ha convertido en el principal *software* de referencia para académicos, incluso en los negocios, R ahora se considera una alternativa válida a los paquetes estadísticos comerciales más importantes como por ejemplo:

- SAS (SAS Institute Inc., 2011)
- MATLAB (The MathWorks, Inc., 2011)
- SPSS (IBM Corp, 2012)

Algunos paquetes para aplicaciones actuariales se han desarrollado dentro de R. Sin embargo, la mayoría de ellos se centran principalmente en seguros de no vida, los principales son:

- *actuar* (Dutang, Goulet, y Pigeon, 2008): este paquete representa el lado computacional de la metodología actuarial clásica sobre la distribución de pérdidas.
- *ChainLadder* (Gesmann y Zhang, 2011): proporciona funciones que son capaces de estimar reservas de pérdidas para el seguro de no vida y de modelos lineales generalizados (GLM), ampliamente utilizados en las decisiones para la tasa del seguro, por funciones agrupadas dentro de la base de distribuciones de R.

El trabajo actuarial sobre seguros de vida se ocupa principalmente de datos demográficos y financieros.

El CRAN enumera varios paquetes especializados para el análisis financiero entre los que encontramos *YieldCurve* (Guirrieri, 2010) y *termstrc* (Ferstl y Hayden, 2010) los cuales son capaces de realizar modelos financieros con tasas de interés. Entre los pocos paquetes que manejan datos demográficos, están *demography* (Hyndman, Booth, Tickle, y Maindonald, 2011) y *LifeTables* (Riffe, 2011) pueden utilizarse para gestionar las proyecciones demográficas.

Por otra parte, muchos paquetes de *softwares* comerciales adaptados específicamente para el análisis de los seguros de vida ya están disponibles son: *MoSes* (Towers Watson, 2011) y *Prophet* (SunGard, 2012) son actualmente los principales paquetes de *software* actuarial para el modelado de los seguros de vida.

El paquete *lifecontingencies* aparece como el primer paquete de R, para realizar cálculos de matemáticas contingentes de vida. Apunta a representar al compañero computacional para resolver conceptos teóricos expuestos en libros de texto como el clásico *Bowers* (Bowers, Jones, Gerber, Nesbitt, y Hickman, 1997), para la evaluación de matemáticas actuariales y *Broverman* (Broverman, 2008) para las matemáticas financieras.

Este proyecto constituye una fuente de los principios fundamentales relacionados a eventualidades de las que depende la vida de una persona.

El uso de la librería *lifecontingencies* en esta tesina, se utilizara para temas planteados con contingencias relacionadas a una sola persona, sin embargo, el alumno ya con una idea más clara y con conocimientos sobre esta librería, podrá abordar las funciones para resolver problemas de contingencias para el caso de N personas los cuales se abordan en la asignatura Cálculo Actuarial Avanzado.

1.3. Matemáticas Financieras

La práctica del cálculo actuarial implica el conocimiento y la aplicación de elementos estadísticos, relacionados con la probabilidad y las matemáticas financieras (Spedicato y cols., 2017).

En este apartado se plantean los conceptos fundamentales de las matemáticas financieras básicas, con el objetivo de recordar y trabajar con capitales utilizando las leyes financieras clásicas de valoración a corto y largo plazo. Posteriormente, se explica un concepto básico en el área, como lo es el *valor presente actuarial*, que supone una valoración aleatoria de series de pagos teniendo en cuenta el valor del dinero en cada periodo diferente. Estos pagos pueden ser tanto temporales (durante un periodo determinado) o vitalicios (como en el caso de las pensiones por jubilación).

1.3.1. Conceptos básicos

El interés es una magnitud, generalmente expuesta como un porcentaje (comúnmente designada tasa) que paga un prestatario por el uso del dinero que toma de un prestamista. En el caso más conocido intereses por un crédito), el interés será el porcentaje de dinero

que obtendría el prestamista como beneficio por el uso temporal de su bien durante una cantidad determinada de tiempo generalmente un año. La cuestión del interés económico tiene un origen muy lejano: en la Edad Media, por ejemplo, la Iglesia consideraba al interés como un pecado de usura, basado en cobrar una moratoria por el tiempo que transcurrió cuando el tiempo era propiedad única de Dios. El Renacimiento trajo la idea del arrendamiento del dinero como cualquier otro bien, ya que el costo del paso de tiempo empezó a ser entendido como un costo de oportunidad. En la época moderna, la economía clásica introdujo los primeros estudios acerca del tipo de interés. Adam Smith fue el primer exponente de la escuela que creía que el dinero, como mercancía, estaba sujeto a la oferta y la demanda, las que, en el punto de equilibrio, consensuaría una tasa de interés.

La discusión más interesante en la actualidad respecto de la tasa de interés es la que la entiende como un recurso de los Estados para influir sobre la economía: los Bancos Centrales de los países establecen una tasa de interés, con la que le darán préstamos a otros bancos. Esta tasa responde a la política macroeconómica de un país, entendiendo que una tasa alta incentiva al ahorro y una tasa baja incentiva el consumo. También influyen otros factores, como la inflación, la producción y el desempleo.

El *interés* es el precio que tiene el dinero por pedirlo prestado y se interpreta como el precio que tiene por el riesgo a que sea devuelto (Amel, 2014, p.17).

El *interés* es la cantidad que debe pagar una persona por el uso del dinero tomado en préstamo (A. C. Martínez, 2011, p.16).

En una operación matemática financiera intervienen básicamente los siguientes elementos fundamentales (A. C. Martínez, 2011, p.16-17):

- *Intereses* es el dinero que se pagará por el uso del dinero ajeno. En el caso de créditos se paga; en el caso de inversión nos pagan.
- *Tasa de interés* es la razón de los intereses devengados entre el capital en un lapso. Se expresa en tanto por uno o en tanto por ciento.
- *Tiempo* es el número de unidades de tiempo que transcurren entre la fecha inicial y final en una operación financiera. Se conoce también como plazo.

- *Capital* es una cantidad de dinero localizada en una fecha o punto inicial de una operación financiera, igual se le puede llamar principal, valor actual, valor presente, es el valor del dinero en este momento.
- *Monto* es el valor del dinero en el futuro, es el capital más los intereses generados, igual se le puede llamar capital futuro o valor acumulado.

1.3.2. Interés simple

El *interés simple* es aquel que se calcula sobre un capital inicial que permanece invariable en el tiempo; los intereses se manejan por separado y se retiran de la operación financiera. En consecuencia, el interés que se obtiene en cada intervalo unitario de tiempo es siempre el mismo.

La fórmula para calcular el interés simple sobre el capital principal es:

$$I = Kit$$

Donde:

- I : Es el monto de intereses generados en un determinado periodo y es la diferencia entre el monto y capital.
- K : Representa el capital inicial, en este momento, llamado también principal o actual.
- i : Es la tasa de interés y representa el costo o rendimiento de un capital, ya sea producto de un préstamo o de una cantidad que se invierte.
- t : Es el lapso (años, meses, días, etcétera.) que permanece prestado o invertido un capital.

Para aplicar las fórmulas y resolver los problemas, los datos de tiempo (t) y la tasa de interés (i) deben referirse en una misma unidad de tiempo.

- Si la tasa es anual y el tiempo son 5 años; $t = 5$
- Si la tasa es anual y el tiempo son 7 meses; $t = \frac{7}{12}$
- Si la tasa es mensual y el tiempo son 2 años; $t = (12)(2) = 24$

- Si la tasa es trimestral y el tiempo son 5 años; $t = (2)(5) = 20$
- Si la tasa es anual y el tiempo son 5 cuatrimestres; $t = \frac{5}{3}$

Es decir siempre se convierten las unidades de tiempo a las unidades a que hace referencia la tasa de interés.

Para calcular el monto (M) del interés simple se tiene que sumar el capital principal mas los intereses. La fórmula para calcular el monto del capital principal mas su tasa de interés simple para t periodos es la siguiente:

$$M = K + I$$

$$M = K + Kit$$

$$M = K(1 + it)$$

Ejemplos:

Nota: En todo problema es muy importante que realices tus propios cálculos para que compruebes cómo se llegó a los resultados. La práctica para dar la solución de ejercicios en R de aquí en adelante se recomienda instalar la librería *lifecontingencies* en caso de requerir algunas funciones.

```
> install.packages("lifecontingencies")
> library(lifecontingencies)
```

Basta con instalar una sola vez la librería, para tenerla almacenada en el sistema. Para llamar la librería tendrás que cargarla cada vez que inicies R en caso de ser necesario su uso.

1. Se requiere conocer el monto de \$2770.00 colocados a las tasa 0.14%, después de transcurrido un mes y medio.

Como la tasa es diaria, las unidades de t serán días. Si consideramos que un mes hay 30 días, y en medio mes, evidentemente, 15 días, entonces $t = 30 + 15$ y el monto

será:

$$M = 2770[1+(0.0014)(30+15)] = 2770[1+(0.0014)(45)] = 2770[1+0.063] = \$2944.51$$

```
> M <- 2770 * (1 + (0.0014) * (30 + 15))
> M

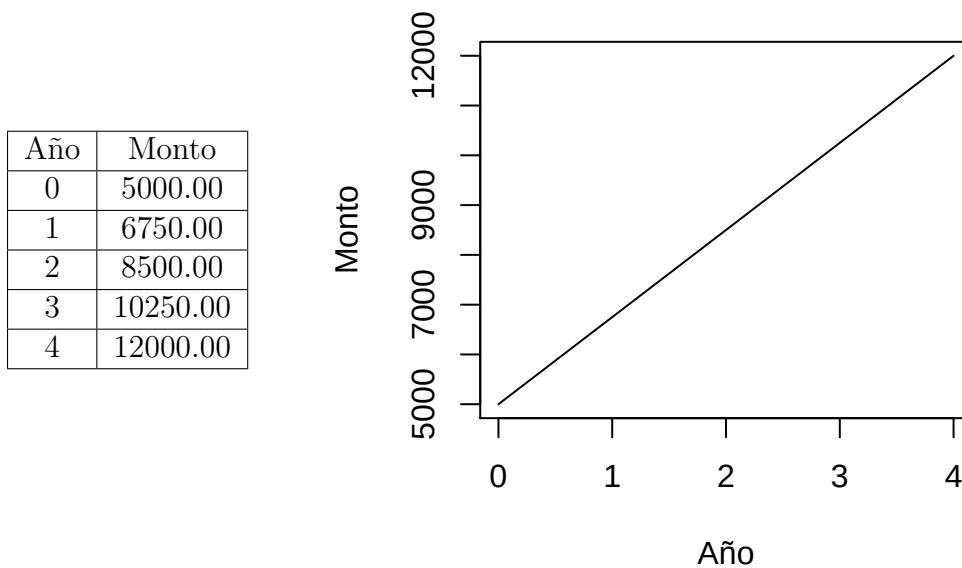
[1] 2944.51
```

2. Un capital de \$5000.00 que se invierte a una tasa interés del 35 % anual, obtener los montos anuales durante cuatro años.

```
> monto <- 5000 * c((1 + (0.35) * (1)), (1 + (0.35) * (2)),
+                  (1 + (0.35) * (3)), (1 + (0.35) * (4)))
> monto

[1] 6750 8500 10250 12000
```

Figura 1.3: Monto de interés simple



Es interesante ver el proceso de acumulación de dinero bajo el esquema de interés simple toma la forma gráfica de una recta, es decir, que se comporta de manera lineal como lo muestra la figura 1.3.

1.3.3. Interés compuesto

El *interés compuesto* consiste en calcular el interés periódicamente y convertirlo en principal. La noción que se debe tener del interés compuesto es que conforme pasan los periodos, el interés se convierte en principal, significa que el interés se suma al capital y a partir de entonces se le trata como parte del capital principal (Amel, 2014, p.20).

El interés compuesto se aplica varias veces durante la inversión, una vez al final de cada periodo de pago. En cada periodo de pago sucesivo, el principal incluye el interés del periodo del pago anterior, es decir, al final de cada periodo, los intereses devengados durante ese periodo se agregan al principal para que el interés gane intereses durante el próximo periodo. A esto le llamamos capitalización del interés, y en general a este tipo de interés se le llama interés compuesto.

La fórmula para calcular el monto de interés compuesto sobre el capital principal es:

$$M = K (1 + i)^t$$

Donde:

M : Es el monto generado en un determinado periodo y es la diferencia entre el monto y capital.

K : Representa el capital inicial, en este momento, llamado también principal o actual.

i : Tasa de interés efectiva por periodo

t : Representa los periodos de capitalización.

La fórmula anterior es la *fundamental de interés compuesto*. El proceso para calcular M a partir de K se llama *acumulación*, y el factor $(1 + i)^t$ es el *factor de acumulación*, o el *valor de acumulación* de \$1.

El valor acumulado de M del principal a la tasa $\frac{j}{m}$ durante t años es

$$M = K (1 + i)^t = K \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt} = K \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m\right]^t$$

El valor acumulado con composición continua se obtiene permitiendo que $m \rightarrow \infty$

$$M = K \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m\right]^t = K \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m\right]^t$$

Ahora, en cualquier texto de cálculo se encuentra la ecuación

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

Donde $e = 2.718\dots$ es la base de los logaritmos naturales. Así, se transforma en

$$M = K [e^j]^t = K e^{jt}$$

Los actuarios usan δ en vez de j y se llama fuerza de interés obteniendo

$$M = K e^{\delta t}$$

Otra manera de obtener la ecuación del interés compuesto de manera instantánea es resolviendo la siguiente ecuación diferencial, a partir de la fuerza de interés.

$$\frac{dM}{dt} = \delta t M$$

$$\frac{dM}{M} = \delta dt$$

$$\int \frac{dM}{M} = \delta \int dt$$

$$\ln M = \delta t + c$$

$$e^{\ln M} = e^{\delta t + c}$$

$$M = K e^{\delta t}$$

Se puede relacionar las ecuaciones de interés compuesto con la siguiente igualdad.

$$M = K(1+i)^t = K\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt} = Ke^{\delta t}$$

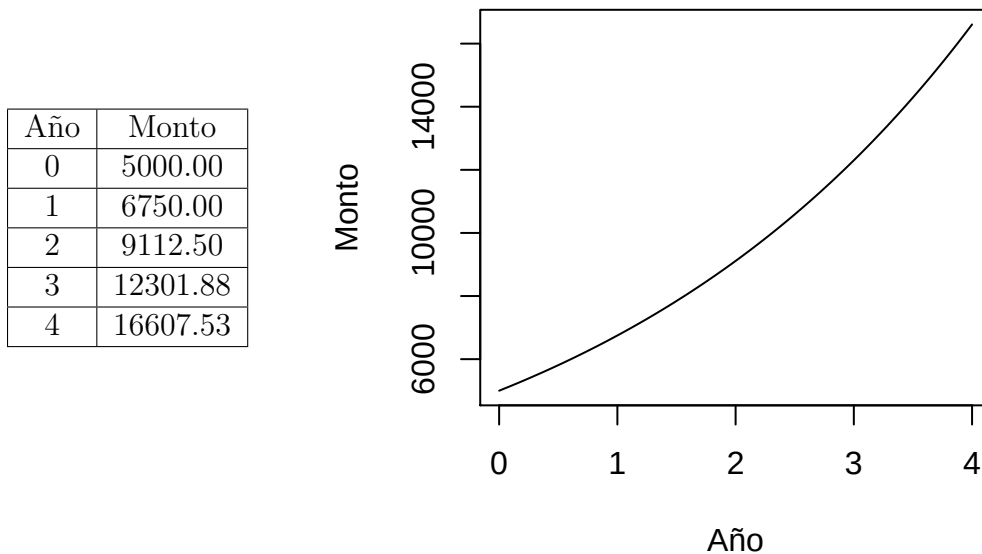
Ejemplos:

3. Un capital de \$5000.00 que se invierte a una tasa interés de 35 % anual, obtener los montos durante 4 años.

```
> monto <- 5000 * c((1 + (0.35)) ^ (1), (1 + (0.35)) ^ (2),
+                  (1 + (0.35)) ^ (3), (1 + (0.35)) ^ (4))
> monto

[1] 6750.00 9112.50 12301.88 16607.53
```

Figura 1.4: Monto de interés compuesto



Es interesante ver el proceso de acumulación de dinero bajo el esquema de interés compuesto toma la forma gráfica de una curva, es decir, que se comporta de manera no lineal como lo muestra la figura 1.4.

4. Se invierte \$1000.00 a una tasa del 6%. Calcule el saldo después de 10 años si el interés se capitaliza: anual, trimestralmente, mensual, diariamente y continuamente.

```
> anual <- 1000 * (1 + 0.06) ^ 10
> anual

[1] 1790.848

> trimestralmente <- 1000 * (1 + 0.06 / 4) ^ (4 * 10)
> trimestralmente

[1] 1814.018

> mensual <- 1000 * (1 + 0.06 / 12) ^ (12 * 10)
> mensual

[1] 1819.397

> diariamente <- 1000 * (1 + 0.06 / 360) ^ (360 * 10)
> diariamente

[1] 1822.028

> continuamente <- 1000 * exp(0.06 * 10)
> continuamente

[1] 1822.119
```

La siguiente tabla muestra los montos para varios periodos de conversión, cuando la tasa es del 6%.

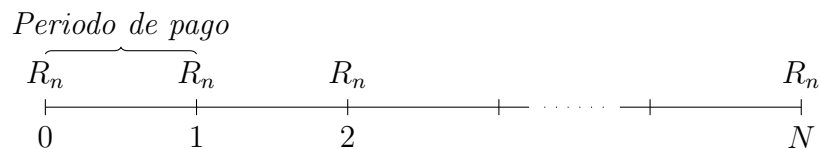
El monto mayor obtenido fue a través de interés compuesto de manera continua.

Periodo	Monto
Anual	1790.848
Trimestralmente	1814.018
Mensual	1819.397
Diariamente	1822.028
Continuamente	1822.119

1.3.4. Anualidades

Las anualidades representan el grupo más importante de aplicaciones de las matemáticas financieras, ya que la gran mayoría de las operaciones de crédito, tanto comerciales como puramente financieras, se pactan estableciendo una serie de pagos periódicos que habrán de realizarse durante su vigencia. El estudio de las diferentes clases de anualidades, la descripción de su funcionamiento, el desarrollo de modelos o fórmulas para calcular su valor presente y su monto, y la correcta utilización de las mismas, es el objetivo de este tema.

Una *anualidad* es una serie de pagos iguales realizados en intervalos de tiempo regulares durante un tiempo determinado (Aguirre, 2012, p.281). A los intervalos de tiempo iguales entre pago y pago se les llama periodo de pago y al periodo de tiempo específico durante el cual se realizan los pagos se le conoce como plazo o término de la anualidad.



El término de anualidad no se refiere específicamente a periodos anuales. En matemáticas financieras el termino anualidad tiene un significado mucho más general. Los pagos podrían ser semanales, quincenales, mensuales, trimestrales, semestrales, etcétera.

Tipos de anualidades

Los factores que intervienen en las anualidades y su forma de pago hacen que se puedan clasificar de diferente forma, sin embargo, eso no significa que sean mutuamente excluyentes. Las anualidades se pueden clasificar bajo cuatro criterios importantes; tiempo, intereses, pago e iniciación.

Clasificación de las anualidades con respecto al:

1. Tiempo

Anualidad cierta

Es cuando sus fechas son fijas, se conocen tanto la fecha de inicio como la fecha final del periodo del pago y del plazo.

Anualidad contingente

La fecha de inicio o la fecha final del pago o ambas no son fijas, dependen de algún suceso el cual no se sabe cuándo va ocurrir.

2. Intereses

Anualidad simple

Es cuando el periodo de pago coincide con la capitalización de la tasa de interés.

Anualidad general

Al contrario de la anualidad simple, el periodo de pago no coincide con el periodo de la capitalización de la tasa de interés. Por ejemplo, si una renta se paga semestralmente y la tasa de interés se capitaliza bimestralmente.

3. Pago

Anualidad inmediata

Es cuando el pago o cobro se hace al momento de formalizar el trato o en el siguiente periodo de pago.

Anualidad diferida

Es cuando el pago o cobro se hace en más de un plazo posterior a la formalización del trato.

4. Iniciación

Vencidas

También se le conocen como ordinarias y son aquellas en las que el pago se hace al final de cada periodo.

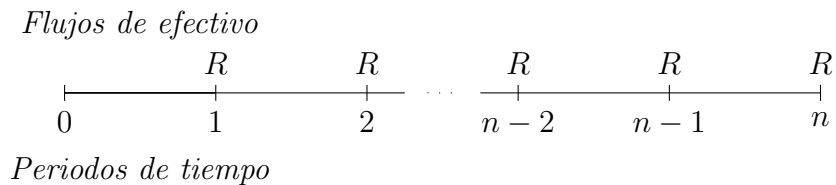
Anticipadas

Son aquellas en las que el pago se hace al inicio de cada periodo.

Anualidades vencidas

Una *anualidad vencida* es una serie de pagos iguales realizados al final de cada periodo de pago, un ejemplo de ellas es cuando hacemos el pago mensual de alguna tarjeta de crédito o el pago mensual de una cuenta de ahorro.

A continuación se muestra el diagrama de tiempo de dichas anualidades.

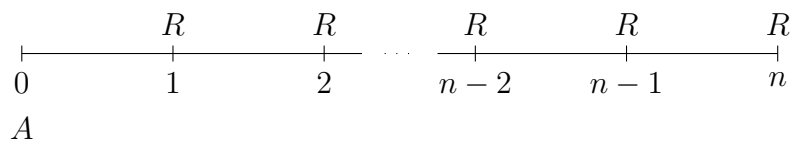


El número cero representa el momento actual o el tiempo presente. El número uno representa el final del primer periodo y coincide con el inicio del segundo periodo. El número dos representa el final del segundo periodo y el inicio del tercer periodo y así sucesivamente. La letra R representa la anualidad y los intereses que se pagan son intereses compuestos por lo tanto son capitalizables. A la suma de los pagos mensuales junto con su interés acumulado al término de la anualidad, se le conoce como monto de la anualidad.

Valor presente de una anualidad vencida

A continuación se deduce la fórmula general para el cálculo del valor presente de una anualidad vencida.

Se supone una anualidad vencida donde R es el pago de la anualidad al final de cada periodo de pago en un plazo de n periodos



La fecha focal se localiza en el momento actual, y la letra A representa el valor actual de la anualidad. La expresión es la siguiente:

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-(n-2)} + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n}$$

haciendo $(1+i)^{-1} = v$

$$A = Rv + Rv^2 + \cdots + Rv^{n-2} + Rv^{n-1} + Rv^n$$

$$A = R(v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n)$$

Suma de progresión geoméricamente decreciente.

$$A = R \frac{v(1-v^n)}{1-v}$$

El denominador es igual a:

$$1-v = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} = i \frac{1}{1+i} = iv$$

$$A = R \frac{v(1-v^n)}{iv}$$

$$A = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

El factor que acompaña a R se representa por el símbolo $a_{\overline{n}|i}$ (a sub ene i), con lo que se obtiene la fórmula del valor actual de la renta temporal inmediata pos-pagada.

$$A = Ra_{\overline{n}|i}$$

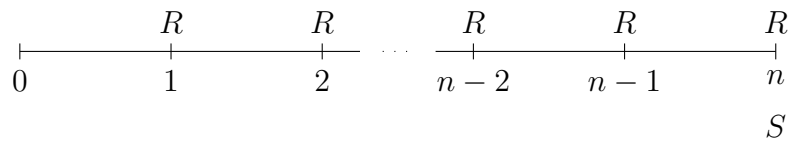
El símbolo $a_{\overline{n}|i}$ que toma el nombre de *factor de actualización* de renta cumple la misión de traer en el tiempo el valor nominal de todos y cada uno de los pagos constantes R quitando los intereses incluidos, utilizando individualmente para cada uno el factor de actualización compuesta v^n , estableciéndose que la sumatoria de estos factores conduce a formar el mencionado símbolo.

Valor futuro de una anualidad vencida

El valor futuro de una anualidad es cuando la fecha focal se localiza al final de último periodo y es la suma de los pagos periódicos junto con su interés compuesto acumulado.

A continuación se deduce la fórmula general para calcular el valor futuro de una anualidad vencida.

Se supone una anualidad vencida donde A es el pago de la anualidad al final de cada periodo de pago en un plazo de n periodos. La letra i representa la tasa de interés compuesta por periodo.



La fecha focal coincide con el final del último periodo. La expresión es la siguiente:

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i)^2 + R(1+i)^1 + R$$

haciendo $(1+i) = r$

$$S = R(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r^2 + r + 1)$$

Suma de progresión geométrica.

$$S = R \frac{r^n - 1}{r - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{1+i - 1}$$

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

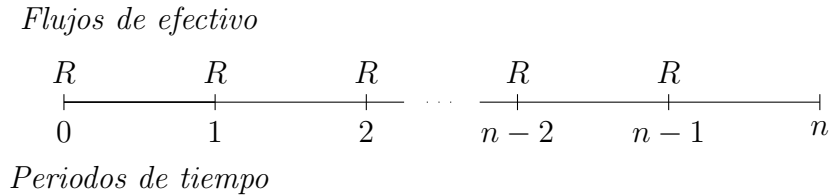
El factor que acompaña a R es representado por el símbolo $S_{\overline{n}|i}$ (ese sub ene i), con lo que se obtiene la fórmula del monto de la renta temporal inmediata de pago vencido

$$S = RS_{\overline{n}|i}$$

Anualidades anticipadas

En las anualidades anticipadas se hacen los pagos al inicio de cada periodo. Una anualidad anticipada es una serie de pagos iguales realizados al inicio del periodo de pago.

A continuación se muestra el diagrama de flujo de dichas anualidades.

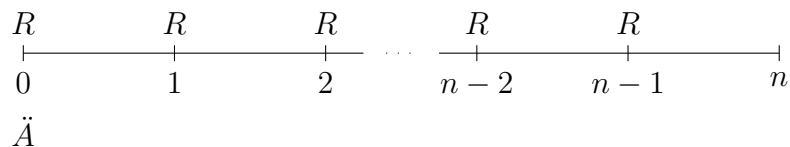


El número cero representa el tiempo presente y coincide con el primer pago de la anualidad. El número uno representa el final del primer periodo y coincide con el deposito del segundo periodo y así sucesivamente. El término de la anualidad concluye un periodo después de haber hecho el último pago, puesto que el último pago fue depositado al inicio del periodo, por lo tanto gana intereses por un periodo.

Valor presente de una anualidad anticipada

El valor presente de una anualidad, es cuando la fecha focal se localiza en el momento actual. Es aquella cantidad de dinero en el momento actual que junto con sus intereses compuestos acumulados, durante el plazo de la anualidad, dará un monto equivalente al monto de la anualidad esperado. Desde otro punto de vista, es la cantidad de dinero en el tiempo presente que tenemos que invertir para hacer cierto número de retiros esperados en el futuro.

Para desarrollar la fórmula del valor presente de una anualidad anticipada, se expone el siguiente diagrama de tiempo.

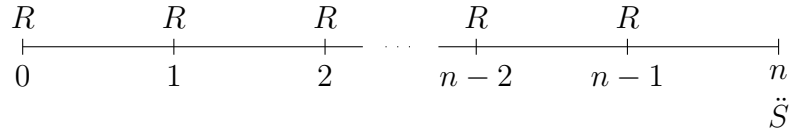


Si la fecha focal se localiza al inicio del primer periodo de pago, entonces:

$$\ddot{A} = Ra_{\overline{n-1}|i} + R$$

Valor futuro de una anualidad anticipada

Para deducir la fórmula del valor futuro de una anualidad anticipada, se expone el siguiente diagrama de tiempo.



El monto final del valor futuro de la anualidad anticipada se expresa de la siguiente manera:

$$\ddot{S} = RS_{\overline{n}|i}(1+i)$$

Función *annuity*

En R la función *annuity* calcula el valor presente de una anualidad.

```
annuity(i, n, m = 0, k = 1, type = "immediate")
```

Cuadro 1.3: Argumentos de la función *annuity*

i	Interés efectivo expresado en forma decimal.
n	Períodos de pago. Si $n = \textit{infinito}$ entonces la anualidad devuelve el valor de una perpetuidad.
m	Periodo de diferimiento, cuyo valor predeterminado es cero.
k	Frecuencia anual de pagos.
type	Una cadena, ya sea, “ <i>immediate</i> ” o “ <i>due</i> ”. Si los pagos se realizan al final de cada período de n períodos, tenemos una “ <i>annuity-immediate</i> ”. De lo contrario, si los pagos se realizan al comienzo de cada período, tenemos una “ <i>annuity-due</i> ”.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, pp. 8-9)

Función *accumulatedValue*

En R la función *accumulatedValue* calcula el valor futuro de una anualidad.

```
accumulatedValue(i, n, m = 0, k, type = "immediate")
```

Cuadro 1.4: Argumentos de la función accumulatedValue

i	Interés efectivo expresado en forma decimal.
n	Períodos de pago. Si $n = \textit{infinito}$ entonces la anualidad devuelve el valor de una perpetuidad.
m	Periodo de diferimiento, cuyo valor predeterminado es cero.
k	Frecuencia anual de pagos.
type	Una cadena, ya sea, “ <i>immediate</i> ” o “ <i>due</i> ”. Si los pagos se realizan al final de cada período de n períodos, tenemos una “annuity-immediate”. De lo contrario, si los pagos se realizan al comienzo de cada período, tenemos una “annuity-due”.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 5)

Ejemplos:

5. Calcular el valor presente de cuatro pagos anuales de \$500.00, el primero de ellos se efectúa un año después de este momento y la tasa es del 8 % anual efectiva.

$$A = Ra_{\overline{n}|i} = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$A = 500a_{\overline{4}|0.08} = 500 \frac{1 - (1 + 0.08)^{-4}}{0.08} = 1656.063$$

```
> 500 * annuity(i = 0.08, n = 4, type = "immediate")
```

```
[1] 1656.063
```

6. Calcular el valor presente de una anualidad de una cantidad de \$100 pagaderos al año durante 5 años a una tasa de interés del 9 %.

$$A = Ra_{\overline{n}|i} = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$A = 100a_{\overline{5}|0.09} = 100 \frac{1 - (1 + 0.09)^{-5}}{0.09} = 388.9651$$

```
> 100 * annuity(i = 0.09, n = 5, type = "immediate")
[1] 388.9651
```

7. ¿Qué cantidad debe invertir hoy en la tasa de interés del 15 % anual compuesto de manera que se desea retirar \$8000 al comienzo de cada año, durante los próximos 5 años?

$$\ddot{A} = Ra_{\overline{n-1}|i} + R = R \frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + R$$

$$\ddot{A} = 8000a_{\overline{4}|0.15} + 8000 = 8000 \frac{1 - (1 + 0.15)^{-4}}{0.15} + 8000 = 30839.83$$

```
> 8000 * annuity(i = 0.15, n = 5, type = "due")
[1] 30839.83
```

8. ¿Qué cantidad se acumulara si depositamos \$1200 al comienzo de cada año durante los próximos 10 años? Asumir un interés del 5 % anual.

$$\ddot{S} = RS_{\overline{n}|i} (1 + i) = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i} (1 + i)$$

$$\ddot{S} = 1200S_{\overline{10}|0.05} (1 + 0.05) = 1200 \frac{(1 + 0.05)^{10} - 1}{0.05} (1 + 0.05) = 15848.14$$

```
> 1200 * accumulatedValue(i = 0.05, n = 10, type = "due")
[1] 15848.14
```

9. Un hombre quiere ahorrar \$180000 para pagar por la educación de su hijo dentro de 12 años. Un fondo de educación obliga a los inversionistas a depositar cuotas iguales al final de cada año. Si el tipo de interés garantizado es del 5 %, ¿Cuánto necesita ahorrar cada año con el fin de cumplir su objetivo?

$$S = RS_{\overline{n}|i} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

$$R = \frac{180000}{\frac{(1+0.05)^{12} - 1}{0.05}} = 11308.57$$

```
> 180000 / accumulatedValue(i = 0.05, n = 12, type = "immediate")
[1] 11308.57
```

10. Una persona solicita un crédito para rehabilitar las recamaras y baños de su casa. El banco se lo autoriza y otorga cuatro meses de plazo para empezar a pagar su crédito en forma vencida, es decir que deberá hacer su primer pago al final del quinto mes. El crédito se deberá amortizar pagando 24 mensualidades de \$4240. ¿Cuál será el valor de crédito?

```
> 4240 * annuity(i = 0.015, n = 24, m = 4, type = "immediate")
[1] 80018.69
```

Capítulo 2

Tablas de mortalidad

En las *tablas de mortalidad* aparecen los valores l_x para un valor de x entero, ésta función perfectamente puede definirse para cualquier x real y positivo. En tal caso l_x se denomina función de supervivencia.

Existen ciertas hipótesis sobre el comportamiento de la función l_x , debido a que no se cuenta con una expresión analítica que reproduzca sus valores asentados en una tabla de mortalidad, no solo para edades enteras sino para fraccionadas y de manera exacta. Ya que en los grupos de personas se observa que la mortalidad es alta en el periodo infantil, disminuye en la niñez y en la adolescencia para incrementarse otra vez en la madurez y aumenta todavía en la vejez, ya que depende de muchos factores, como por ejemplo su edad, sexo, estado de salud, factores genéticos, ambientales, etcétera.

Han sido varias las investigaciones que se han realizado sobre este aspecto y algunas son utilizadas para graduar tablas de mortalidad que después son utilizadas. Las leyes más conocidas son las siguientes:

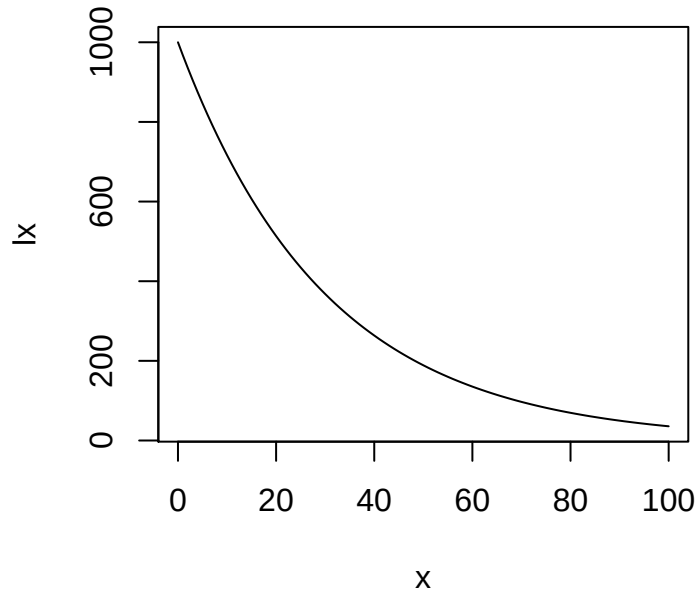
Ley exponencial

La fuerza de mortalidad debe aumentar con la edad, lo que implica la imposibilidad de ajustar una ley exponencial a una población real, salvo quizás en periodos de tiempo muy cortos. Sin embargo, por la simplicidad de la ley exponencial y la facilidad de los cálculos, así como su importancia histórica es importante nombrarla.

$$l_x = e^{-\mu x}$$

Su comportamiento se muestra en la figura 2.1.

Figura 2.1: Ley exponencial



Fuente: Elaboración propia

Ley de De Moivre

Uno de los primeros intentos para describir l_x se debe a Abraham De Moivre que representa a la función por medio de una línea recta:

$$l_x = k(w - x)$$

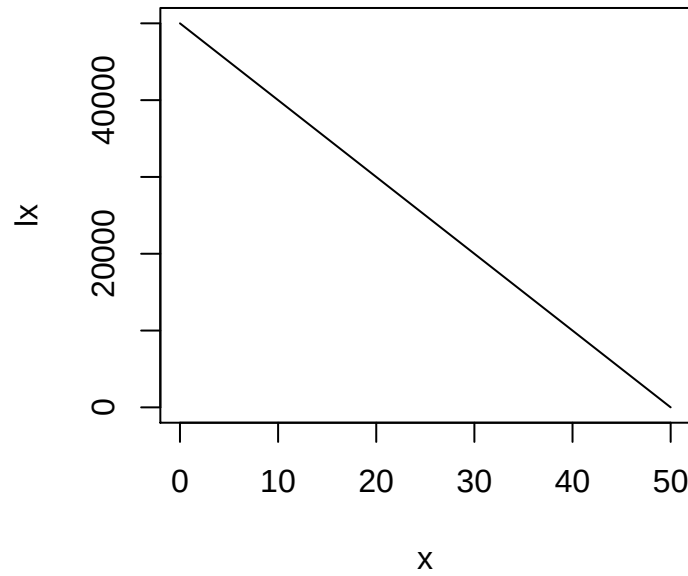
La ley de De Moivre supone que el número de muertos es el mismo para todos los años, es decir, las muertes que ocurren en cada año está dado por k .

Por ejemplo, si tomamos $k=1000$ y $w=50$

$$l_x = 1000(50 - x)$$

Su comportamiento se muestra en la figura 2.2.

Figura 2.2: Ley de De Moivre



Fuente: Elaboración propia

Ley de Gompertz

Benjamín Gompertz sostiene que el ser humano, al nacer tiene un cierto poder de resistencia a la muerte y conforme avanza su edad, este poder tiende a ir disminuyendo hasta que el sujeto pierde la vida. Otra causa de la muerte que es el azar, que es un factor que no depende de la resistencia que se tenga al fallecimiento.

Su función de supervivencia es:

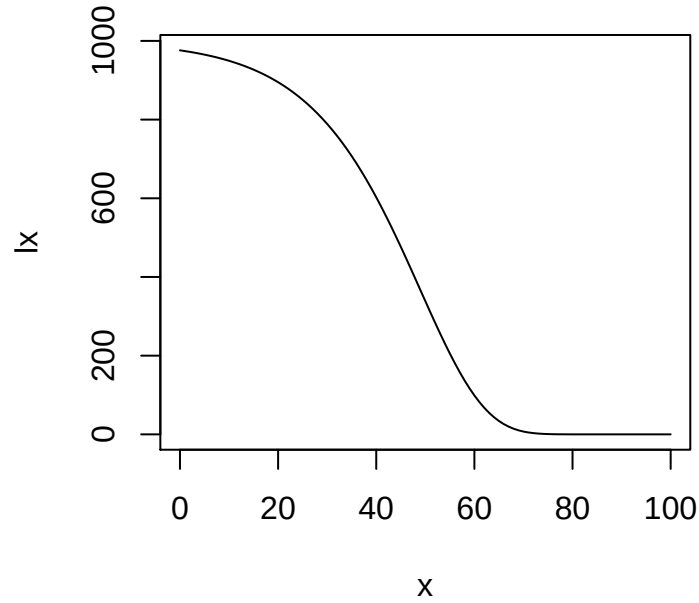
$$l_x = g^{c^x - 1}$$

donde

$$g = e^{-\frac{B}{\ln c}}$$

Su comportamiento se muestra en la figura 2.3.

Figura 2.3: Ley de Gompertz



Fuente: Elaboración propia

Ley de Makeham

Makeham mas tarde, al estudiar la ley de Gompertz, observa que al aumentar x en progresión aritmética, la función de supervivencia decrece en progresión geométrica, entonces añade simplemente una constante arbitraria a la ecuación propuesta por Gompertz. Su función de supervivencia es:

$$l_x = s^x g^{c^x - 1}$$

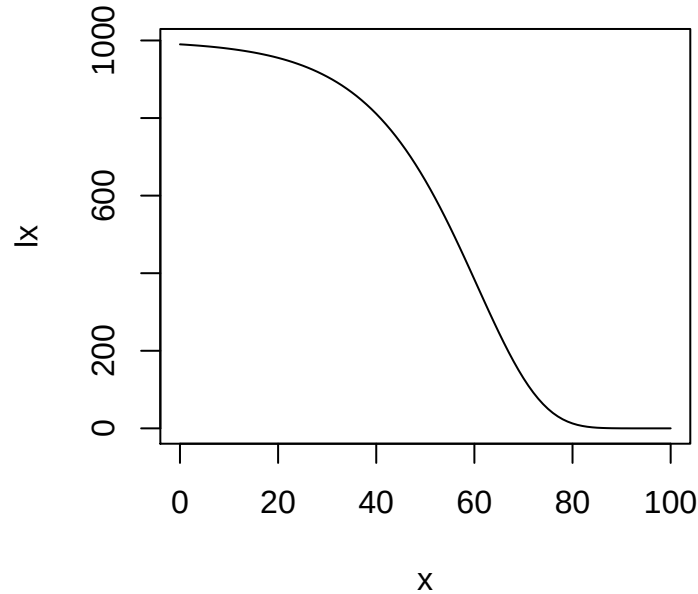
donde

$$g = e^{-\frac{B}{\ln c}}$$

$$s = e^{-A}$$

Su comportamiento se muestra en la figura 2.4.

Figura 2.4: Ley de Makeham



Fuente: Elaboración propia

2.1. Definición

El trabajo del actuario en el campo del seguro de vida, tiene como objetivo principal estimar el patrón de mortalidad de un grupo de individuos. Un elemento básico para lograr esto se conoce como una *tabla de mortalidad* (conocido también como *tabla de vida*). Se denomina tabla de mortalidad a un registro estadístico de sobrevivientes de una determinada colectividad social, representada por una sucesión numérica de personas que a una edad x de años enteros, se encuentran con vida. Esta tabla es, por consiguiente, una serie cronológica que expresa la reducción progresiva de un grupo inicial de individuos de la misma edad por efecto de los fallecimientos, de ahí que, con mas propiedad, debería llamarse *tabla de sobrevivientes* (Palacios, 1996).

2.2. Construcción de tablas de mortalidad

En la práctica, casi todas las tablas de mortalidad se construyen estimando en primer lugar la columna de probabilidades de mortalidad qx , y calculando posteriormente las demás columnas a partir de ésta, siguiendo procedimientos matemáticos (Gil, Heras, y Vilar, 1999). Como es natural, las probabilidades qx , de que los individuos de edad x mueran en el transcurso de un año se estiman a partir de las frecuencias relativas de los mismos sucesos, es necesario por tanto, considerar para cada edad x un gran número de individuos a esa edad, y contabilizar cuántos de ellos mueren en el transcurso de un año. Obtener estos valores es un problema estadístico que no se discutirá a detalle. Se realiza básicamente realizando un estudio en el que se observa cuánto tiempo vivirán las personas de diferentes edades.

Los datos necesarios se pueden obtener de los censos y de las estadísticas de defunciones del registro civil. Existen gran cantidad de tablas de mortalidad de diferentes países, donde se nos brindan tablas con las columnas x y qx , podemos encontrar varias tablas de mortalidad en la siguiente página de Internet de la Society Of Actuaries (SOA) <https://www.soa.org/member/>.

Para este proyecto se elige una tabla de mortalidad perteneciente a México, únicamente con fines de estudio, para que el interesado en este documento se familiarice con los aspectos sociales y actuariales del país, como pudo haber sido otra de diferente realidad social y aseguradora. La tabla seleccionada es:

Nombre de la tabla:	MEX 2000 - Hombres
Proveedor:	Grupo TTcnica, S.A.
Contenido:	Mortalidad de vidas aseguradas
Edad Mínima:	0
Edad Máxima:	100

Como se observa, la tabla contiene los elementos que representan las variables requeridas, para facilitar el manejo de la base de datos, se recomienda descargar en formato Excel o CSV.

Aunque se puede manipular la base de datos tal y como se descarga, para facilitar

el manejo de datos, se crea una nueva hoja de cálculo donde copiaremos las columnas Row\Column y 1, y las pegaremos en la posición de la celda A1, después sustituiremos el nombre Row\Column por x y 1 por qx. Obteniendo el cuadro 2.1 :

Cuadro 2.1: x y qx

x	q_x
0	0.011327
1	0.0006
2	0.00054
...	...
98	0.454816
99	0.495379
100	1

Fuente: Elaboración propia con datos de
<http://mort.soa.org/ViewTable.aspx?&TableIdentity=15006>

Se recomienda guardar en una carpeta de trabajo en formato CSV delimitado por comas, con nombre MEX2000 para una manipulación más fácil de la base de datos en R.

2.3. Creación de tabla de mortalidad en R

Se importara nuestra base de datos a R.

```
> MEX2000 <- read.csv(file = "MEX2000.csv", header = TRUE)
> head(MEX2000)

  x      qx
1 0 0.011327
2 1 0.000600
3 2 0.000540
4 3 0.000490
5 4 0.000460
6 5 0.000430

> attach(MEX2000)
```

A partir de este punto se utilizan las funciones de conveniencia para facilitar el manejo del cálculo actuarial, se podrá consultar la viñeta (Spedicato y cols., 2017) para aclarar dudas.

Función *probs2lifetable*

En R la función *probs2lifetable* crea una tabla de mortalidad, dadas las probabilidades de supervivencia o muerte.

```
probs2lifetable(probs, radix = 10000, type = "px", name = "ungiven")
```

Cuadro 2.2: Argumentos de la función *probs2lifetable*

probs	Un vector con la probabilidad de supervivencia o una probabilidad de muerte de cada año. Con una probabilidad entre 0 y 1, se puede ingresar probabilidades de muerte o supervivencia.
radix	Radix de la tabla de mortalidad.
type	Valor de carácter “px” o “qx” que indica cómo deben interpretarse las probabilidades que se ingresan. px= probabilidad de supervivencia y qx= probabilidad de muerte.
name	Nombre que llevara la tabla de mortalidad.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, pp. 51-52)

Se creara la tabla de mortalidad que se utilizara para los desarrollos teóricos de este proyecto con la función *probs2lifetable*.

```
> MEX2000 <- probs2lifetable(probs = qx, radix = 100000, type = "qx",
+                             name = "Tabla de Mortalidad MEX 2000")
```

Véase la tabla en el Anexo A.

Función *lifetable*

En ocasiones no se cuenta con las probabilidades de vida o muerte de una persona, sino que tenemos la edad x y el número de los individuos que viven al comenzar el año l_x , tendremos que utilizar el comando *lifetable* que nos permita crear una tabla de mortalidad.

```
new("lifetable", x, lx, name = "ungiven")
```

Cuadro 2.3: Argumentos de la función lifetable

x	Un vector de clase numérico, con la secuencia del radix $0, 1, 2, \dots, w$.
lx	Un vector de clase numérico, que representa el número de vidas al principio de la edad x con una secuencia decreciente.
name	Nombre que llevara la tabla.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 42)

Para ejemplificar el uso de este comando suponemos que tenemos los siguientes datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l_x	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100	0

```
> Tabla <- new("lifetable", x = seq(0, 10, 1),
+             lx = seq(from = 1000, to = 0, by = -100),
+             name = "Tabla de vida")
> Tabla
```

Life table Tabla de vida

	x	lx	px	ex
1	0	1000	0.9000000	4.5
2	1	900	0.8888889	4.0
3	2	800	0.8750000	3.5
4	3	700	0.8571429	3.0
5	4	600	0.8333333	2.5
6	5	500	0.8000000	2.0
7	6	400	0.7500000	1.5
8	7	300	0.6666667	1.0
9	8	200	0.5000000	0.5

2.4. Elementos de una tabla de mortalidad

Las tablas de vida consisten en una secuencia decreciente de l_x , $x = 0, 1, 2, \dots, w$ que representa el número de sujetos vivos al inicio de la edad x , y w (omega) siendo la edad terminal. El número de sujetos en el tiempo 0 (l_0) es el *radix* de la tabla (Charpentier, 2014). Sea l_0 un número arbitrario, usualmente se toma como una cifra redonda, tal como ejemplo 100000. Esto es un grupo de l_0 de vidas recién nacidas y se desea predecir cuántos de estos individuos seguirán vivos en cualquier momento en el futuro. Por supuesto, no se puede esperar calcular exactamente esto, pero se puede esperar llegar a una estimación cercana si se tienen estadísticas suficientemente buenas. Con los elementos básicos que permiten calcular las probabilidades de muerte y supervivencia en una población homogénea, a partir de las cuales se llevan a cabo los cálculos actuariales. Una tabla de mortalidad típica puede tener la estructura del cuadro 2.4.

Cuadro 2.4: Tabla: MEX 2000 - Hombres

x	l_x	d_x	q_x	p_x	e_x
0	100000	1132.7	0.011327	0.988673	74.26833156
1	98867.3	59.32038	0.0006	0.9994	74.11920682
2	98807.97962	53.35630899	0.00054	0.99946	73.16370504
...	...	...	...	...	...
98	621.3879415	282.617178	0.454816	0.545184	0.820295
99	338.7707635	167.819922	0.495379	0.504621	0.504621
100	170.9508414	170.9508414	1	0	.

Fuente: Elaboración propia

Como se aprecia en el encabezado del cuadro 2.4, se observa que se utiliza una notación especial para denotar cada una de las columnas:

Columna x

Representa la edad alcanzada por los sobrevivientes, comienza a la edad cero (0), recién nacidos o que no han cumplido un año de edad, y termina en una edad extrema de la tabla, llamada edad w (omega). Hay tablas de mortalidad que comienzan por una edad predeterminada, como 15 o 20 años, no necesariamente desde cero; cualquiera de estas en todo caso es la edad inicial de la tabla.

Columna l_x

Indica el número de sobrevivientes a cada edad x (l viene del ingles *life*, *live* o *living* y x es la edad alcanzada).

Columna d_x

Es el número de personas que fallecen a la edad x y se representan por la diferencia entre el número de sobrevivientes a las edades consecutivas x y $x+1$, es decir, $d_x = l_x - l_{x+1}$ o el número de individuos de x años cumplidos que fallecen antes de alcanzar el $(x+1)$ aniversario ($d = \text{dead, death}$). Se entiende que los d_x son fallecidos entre (x) y $(x+1)$, es decir, en curso o a lo largo del año.

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Columna q_x

Es la probabilidad que tiene una persona de edad x de fallecer dentro del año, es decir, de no alcanzar la edad siguiente $x+1$.

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}$$

Columna p_x

Es la probabilidad que tiene una persona de edad x de vivir un año mas, es decir, de alcanzar la edad siguiente $x+1$. Se representa por:

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Columna e_x

Finalmente, la ultima columna representa la esperanza de vida a las distintas edades. Como se observa en el cuadro 2.4 y en otras tablas de mortalidad que conforme la edad aumenta, el número de personas con vida disminuye hasta llegar a una edad en la que este número es cero, es decir que a esta edad ya no hay personas con vida, no implica que en la población real no existan personas con vida con edad mayor a w ; pero para efectos teóricos es necesario considerar una edad limite.

2.5. Extensión de probabilidades

Los conceptos probabilísticos mencionados en los puntos anteriores están basados en intervalos de un año, pero el cálculo de probabilidades de supervivencia y muerte con base a los valores observados en una tabla de mortalidad para edades enteras, se pueden extender a periodos que consideren mas de un año (Arriaga y Sanchez, 2000). Así tenemos que: dado que l_x es el número de personas que están con vida en edad x y que l_{x+n} es el número de personas que están con vida en edad $x + n$. Entonces la diferencia $l_x - l_{x+n}$ representa el número de personas que fallecen entre las edades x y $x + n$.

$$d_{x+n} = l_x - l_{x+n}$$

La probabilidad de que x sobreviva n años más, es decir que llegue con vida a la edad $x + n$ es:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

A su vez, la probabilidad de que x muera en el transcurso de los siguientes n años se denota por:

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

Funciones *dxt*, *pxt* y *qxt*

Estas funciones evalúan el número de sobrevivientes y las probabilidades de vida o muerte entre la edad x y $x + t$.

```
dxt(object, x, t)
pxt(object, x, t)
qxt(object, x, t)
```

Cuadro 2.5: Argumentos de las funciones dxt, pxt y qxt

object	Nombre del objeto (tabla de mortalidad).
x	Edad x de la persona.
t	Años hasta el cual se evaluará la edad.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 52)

Ejemplos:

1. Encuentra el número de sobrevivientes a las edades 1, 5, 10 y 50 años.

```
> MEX2000@lx[MEX2000@x == 1]

[1] 98867.3

> MEX2000@lx[MEX2000@x == 5]

[1] 98660.83

> MEX2000@lx[MEX2000@x == 10]

[1] 98462.68

> MEX2000@lx[MEX2000@x == 50]

[1] 93694.86
```

2. Calcula el número de muertes que ocurren entre las edades 53 y 58 años.

$$d_{53+5} = l_{53} - l_{53+5} = l_{53} - l_{58} = 92589.6729 - 89497.2202 = 3092.453$$

```
> MEX2000@lx[MEX2000@x == 53] - MEX2000@lx[MEX2000@x == 58]

[1] 3092.453
```

o mas conveniente utilizar las función *dxt*

```
> dxt(MEX2000, x = 53, t = 5)

[1] 3092.453
```

3. Evalúa la probabilidad de que un asegurado de 65 años muera antes de alcanzar los 85 años.

$${}_{20}q_{65} = \frac{l_{65} - l_{65+20}}{l_{65}} = \frac{l_{65} - l_{85}}{l_{65}} = \frac{80097.5949 - 27549.9301}{80097.5949} = 0.6560455$$

```
> qxt(MEX2000, x = 65, t = 20)

[1] 0.6560455
```

4. Evalúa la probabilidad de que un asegurado de 25 años de edad sobreviva hasta los 65 años.

$${}_{40}p_{25} = \frac{l_{25+40}}{l_{25}} = \frac{l_{65}}{l_{25}} = \frac{80097.5949}{97541.7450} = 0.8211622$$

```
> pxt(MEX2000, x = 25, t = 40)

[1] 0.8211622
```

5. ¿Que probabilidad tiene una persona de 20 años de triplicar su edad?

$${}_{40}p_{20} = \frac{I_{20+40}}{I_{20}} = \frac{I_{60}}{I_{20}} = \frac{87460.7158}{97918.4439} = 0.8931996$$

```
> pxt(object = MEX2000, x = 20, t = 40)
```

```
[1] 0.8931996
```

6. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de 20 años sobreviva a la edad de 50 años?

$${}_{30}p_{20} = \frac{I_{20+30}}{I_{20}} = \frac{I_{50}}{I_{20}} = \frac{93694.8609}{97918.4439} = 0.9568663$$

```
> pxt(object = MEX2000, x = 20, t = 30)
```

```
[1] 0.9568663
```

7. Calcula la probabilidad de que una persona de 71 años fallezca en el transcurso de los siguientes 5 años.

$${}_5q_{71} = \frac{l_{71} - l_{71+5}}{l_{71}} = \frac{l_{71} - l_{76}}{l_{71}} = \frac{68694.1202 - 56779.7363}{68694.1202} = 0.1734411$$

```
> qxt(object = MEX2000, x = 71, t = 5)
```

```
[1] 0.1734411
```

8. Sea un asegurado con 20 años de edad. Calcular la probabilidad de que dicha persona sobreviva un año más.

$${}_1p_{20} = \frac{I_{20+1}}{I_{20}} = \frac{I_{21}}{I_{20}} = \frac{97844.3197}{97918.4439} = 0.999243$$

```
> pxt(object = MEX2000, x = 20, t = 1)
```

```
[1] 0.999243
```

9. Sea un asegurado con 20 años de edad. Calcular la probabilidad de que dicha persona fallezca en el transcurso del siguiente año.

$${}_1q_{20} = \frac{l_{20} - l_{20+1}}{l_{20}} = \frac{l_{20} - l_{21}}{l_{20}} = \frac{97918.4439 - 97844.3197}{97918.4439} = 0.000757$$

```
> qxt(object = MEX2000, x = 20, t = 1)
```

```
[1] 0.000757
```

10. Calcula el número de muertes que ocurren a la edad de 50 años.

$$d_{50} = l_{50} - l_{51} = 93694.8609 - 93371.5200 = 323.341$$

```
> dxt(object = MEX2000, x = 50, t = 1)
```

```
[1] 323.341
```

2.6. Funciones de conmutación

Por último, en este capítulo se mencionaran las funciones o símbolos de conmutación que son artificios matemáticos que facilitan enormemente los cálculos y que veremos su uso cuando sea oportuno en capítulos posteriores. Aunque su empleo en la actualidad es escaso debido a la facilidad con lo que los ordenadores realizan los cálculos, es conveniente mencionarlas ya que permiten realizar con mayor facilidad los desarrollos teóricos.

Al combinar las tablas de mortalidad con el elemento básico financiero que es la tasa de interés (interés técnico)

$$v^n = \frac{1}{1+i} = (1+i)^{-n}$$

se generan las tablas de mortalidad con valores de conmutación que los actuarios utilizan con la finalidad de simplificar las operaciones de cálculo de los seguros de vida siendo los valores de conmutación más conocidos los siguientes:

Valor de conmutación C_x

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

Valor de conmutación D_x

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

Valor de conmutación M_x

$$M_x = \sum_{t=0}^w C_{x+t}$$

Valor de conmutación R_x

$$R_x = \sum_{t=0}^w M_{x+t}$$

Valor de conmutación N_x

$$N_x = \sum_{t=0}^w D_{x+t}$$

Para generar nuestra tabla de valores conmutados, se tendría que desarrollar las fórmulas anteriores hasta llenar nuestra tabla para cada persona a edad x , ahora se verá que con R obtendremos nuestra tabla muy fácilmente. Nuestros valores de conmutación los realizaremos con una tasa de interés del 10 % anual, siendo este solo un valor de referencia y no corresponde a una realidad del país, es decir, el valor del interés técnico para este proyecto solo es con fines de estudio.

Función *actuarialtable*

En R la función *actuarialtable* nos permite crear la tabla de valores conmutados.

```
new("actuarialtable", x, lx, interest)
```

Cuadro 2.6: Argumentos de la función *actuarialtable*

x	Un vector de clase numérico, con la secuencia del radix $0, 1, 2, \dots, w$.
lx	Un vector de clase numérico, que representa el número de vidas al principio de la edad x con una secuencia decreciente.
interest	Tasa del interés técnico.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 6)

Para nuestros vectores x y l_x los mandaremos llamar de nuestra tabla *MEX2000* y ejecutaremos la función *actuarialtable* para generar nuestra tabla que se utilizara para los desarrollos teóricos de este proyecto.

```
conmutadosMEX2000 <- new("actuarialtable", x = MEX2000@x,
                          lx = MEX2000@lx, interest = 0.10)
```

Véase la tabla en el Anexo B.

Capítulo 3

Anualidades

Se define una *anualidad* o *renta* como una sucesión de pagos periódicos realizados a intervalos de igual duración considerando una fecha de inicio y un posible fin de vigencia.

Según el número de pagos las anualidades se dividen en:

- *Anualidades ciertas*, que se mencionan en el capítulo 1, se definen como aquellas en donde el número de pagos quedan establecidos.
- *Anualidades contingentes*, son aquellas cuyo pago dependerá de la sobrevivencia del individuo.

Las *anualidades contingentes* se caracterizan principalmente porque teóricamente está determinado el número máximo de pagos que se pueden hacer, pero no se tiene la certeza de efectuarlos todos. Este tipo de anualidades son estudiadas en la unidad de aprendizaje de Cálculo Actuarial y se analizan en este capítulo.

Se pueden clasificar como anualidades vitalicias, que se pueden definir como un conjunto de capitales con vencimientos determinados cuya exigencia es que una persona determinada se encuentra con vida. Pueden ser temporales cuando su duración se encuentra limitada a un determinado periodo de tiempo.

También se distinguen entre anualidades inmediatas, cuando el primer capital vence en el primer periodo y anualidades diferidas cuando el primer vencimiento se produce transcurridos uno o varios periodos.

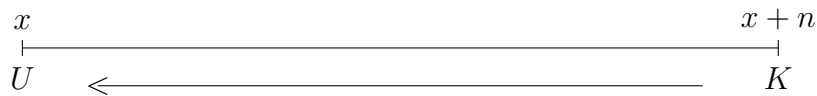
Las anualidades contingentes están representadas por una serie de pagos que se efectúan sujetos a algún evento fortuito.

Para este proyecto y para el curso de Cálculo Actuarial las anualidades contingentes hacen referencia a la vida de una persona asegurada o el tiempo de supervivencia del pensionista. Ejemplos de ellas son las siguientes:

- La serie de pagos que recibe un pensionista hasta su fallecimiento, momento en que cesa el beneficio.
- El pago de la prima de un seguro ordinario de vida se efectúa hasta que ocurre la muerte del asegurado, momento en el que la compañía aseguradora paga al beneficiario el importe de la suma asegurada.

3.1. Dotal puro

Un capital K cuyo pago es un evento aleatorio, porque está condicionado a que la persona de edad x cumpla $x + n$ años para recibirlo; por lo tanto, el precio justo de esta eventualidad, que viene a ser un seguro para el caso de vida, está dado por la esperanza matemática o deposito que el individuo en cuestión debe efectuar hoy para recibirlo si se encuentra con vida a la edad $x + n$.



La prima única U está dada por el valor descontado Kv^n por la probabilidad de supervivencia:

$$U = Kv^n \cdot {}_n p_x = K(1+i)^{-n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Se supone que tenemos un capital de \$1.00 tenemos que:

$${}_n E_x = {}_n p_x \cdot v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot (1+i)^{-n}$$

que toma el nombre de *factor de actualización demográfico-financiero* o *dotal puro*, que naturalmente es menor que el factor de actualización financiera pura v^n , precisamente por el riesgo de que al fallecer antes no recibirá el capital esperado, con lo que se ratifica que la prima de seguro es una entrega a fondo perdido.

Si multiplicamos la ecuación anterior por $\frac{v^x}{v^x}$, tenemos que:

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{l_{x+n}v^{x+n}}{l_x v^x}$$

Ahora introduciremos el símbolo de conmutación D_x :

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

que se denomina como el *número de sobrevivientes descontados a una determinada tasa de interés anual por un tiempo equivalente a su edad*. Por lo que tenemos:

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}v^{x+n}}{l_x v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Como ya se definió en el capítulo 2 los valores conmutados tiene como objetivo reducir las expresiones que se obtengan para las fórmulas de Cálculo Actuarial, así como simplificar los cálculos, dichos valores ya se obtuvieron y se encuentran en el Anexo B.

Función *Exn*

En R la función *Exn* evalúa un dotal puro.

```
Exn(actuarialtable, x, n, i)
```

Cuadro 3.1: Argumentos de la función *Exn*

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial.
x	Edad del asegurado.
n	Duración del dotal puro.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 30)

Ejemplos

1. Si una persona de 35 años desea recibir \$100000.00 al cumplir 50 años de edad, ¿Cuánto debe depositar hoy al 10 % de interés anual?.

$${}_{15}E_{35} = \frac{l_{35+15}}{l_{35}} \cdot (1 + 0.10)^{-15} = \frac{l_{50}}{l_{35}} \cdot (1.10)^{-15} = \frac{93694.860922}{96689.854255} \cdot (1.10)^{-15} = 0.2319768$$

```
> (MEX2000@lx[MEX2000@x == 50]
+ / MEX2000@lx[MEX2000@x == 35]) * (1.10) ^ -15

[1] 0.2319768
```

Con valores conmutados.

$${}_{15}E_{35} = \frac{D_{35+15}}{D_{35}} = \frac{D_{50}}{D_{35}} = \frac{798.1445}{3440.6217} = 0.2319768$$

Solución en R:

Utilizando la función *Exn*:

Para calcular en R un dotal puro para un asegurado se utiliza el comando *Exn*, en este caso a una edad de 35 años, se asigna 35 al atributo o variable *x*, suponiendo que viva 15 años después el cual se asigna 15 a la variable *n*, ocupando la tabla de mortalidad a la variable *i* se le debe asignar la tasa de interés que en este caso es del 10 %, si se utiliza la tabla actuarial la variable *i* no se escribe como argumento del comando, dado que la tasa de interés ya está aplicada en la tabla actuarial.

Con la tabla de mortalidad MEX2000.

```
> Exn(MEX2000, x = 35, n = 15, i = 0.10)

[1] 0.2319768
```

Con la tabla actuarial conmutadosMEX2000.

```
> Exn(conmutadosMEX2000, x = 35, n = 15)

[1] 0.2319768
```

Por lo tanto, para recibir \$100000.00, una persona de 35 años tendrá que pagar en el momento de comprar un dotal puro la cantidad de

$$(100000) (0.2319768) = 23197.68$$

2. Una persona de 20 años desea contratar un dotal puro, para que en caso de que sobreviva al final de los próximos 30 años reciba \$1000000.00. Si se considera un interés del 12% y la tabla de mortalidad es MEX2000.

```
> Exn(MEX2000, x = 20, n = 30, i = 0.12)

[1] 0.03193821
```

Por lo tanto, para recibir \$1000000.00, una persona de 20 años tendrá que pagar en el momento de comprar un dotal puro la cantidad de

$$(1000000) (0.03193821) = 31938.21$$

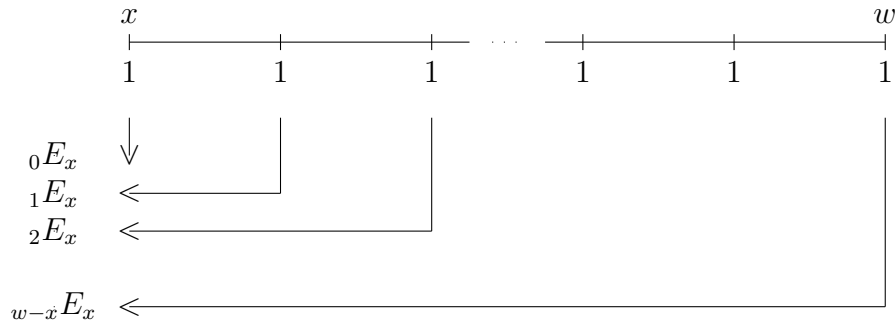
3.2. Anualidades vitalicias

Las anualidades vitalicias son una sucesión de pagos o cobros anuales que efectúa una persona de edad actual x , solo y únicamente si se encuentran con vida para realizarlos. El termino vitalicio, en este caso, no necesariamente se refiere a que dicha persona tendrá la anualidad hasta su muerte, sino mientras viva, que no es exactamente igual que hasta su

muerte, porque puede ser efectivamente hasta el último aniversario de su vida, lo importante es que la anualidad tiene que ser percibida o pagada en vida. Estas a su vez pueden ser anticipadas o vencidas, según sea al comienzo o al final del año.

3.2.1. Anualidades vitalicias anticipadas

Los pagos se efectúan al inicio de cada año, entonces, tenemos que $\ddot{a}_x$ representa el valor presente de una anualidad con rentas unitarias, es decir, rentas de \$1.00 pagaderas al inicio de cada año que una persona de edad x este con vida.



$$\ddot{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_{w-x}E_x$$

$$\ddot{a}_x = \frac{D_{x+0}}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+w-x}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_w}{D_x}$$

Ahora introduciremos el símbolo de conmutación N_x :

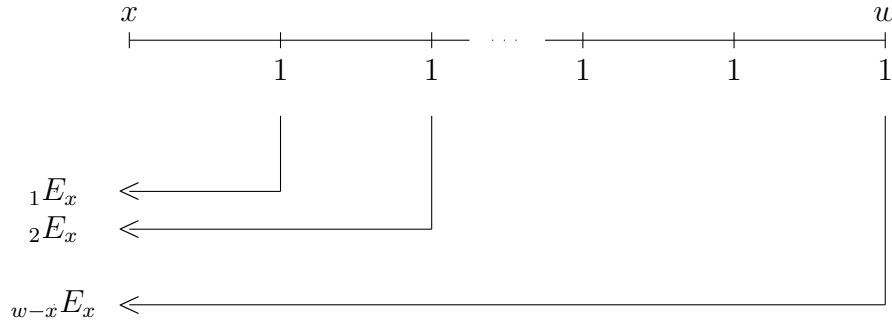
$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_w$$

con lo que se obtiene la fórmula de anualidad contingente anticipada expresada de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

3.2.2. Anualidades vitalicias vencidas

Los pagos se efectúan al final de cada año, entonces, tenemos que a_x representa el valor presente de una anualidad con rentas unitarias, es decir, rentas de \$1.00 pagaderas al final de cada año que una persona de edad x este con vida.



$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \cdots + {}_{w-x}E_x$$

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+w-x}}{D_x}$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_w}{D_x}$$

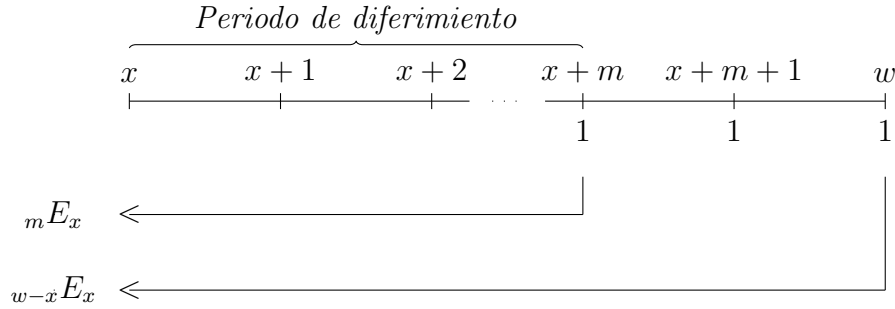
con lo que al utilizar el símbolo de conmutación N_x se obtiene la fórmula de anualidad contingente vencida expresada de la siguiente manera:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Como se observa en los gráficos se considera que a la edad extrema w el individuo estará teóricamente vivo, tenga una anualidad anticipada o vencida, y es la última edad en que la pagara o la percibirá. En la anualidades vitalicias anticipadas y vencidas tendrán la diferencia de un pago, para ejemplificar, se tiene a una persona de 25 años de edad, fallece a los 50 años, si se considera una anualidad vitalicia vencida, el número de pagos será de 25, mientras que en la anticipada serán 26, ya que el primer pago sería a edad 25 y en la vencida sería a edad 26.

3.2.3. Anualidades vitalicias anticipadas diferidas m años

Son los pagos de una renta unitaria al inicio de cada año, para una edad x , en forma vitalicia, siendo el primer pago en edad $x + m$, donde m es el periodo de diferimiento.



A la edad $x + m$ es valor actual es:

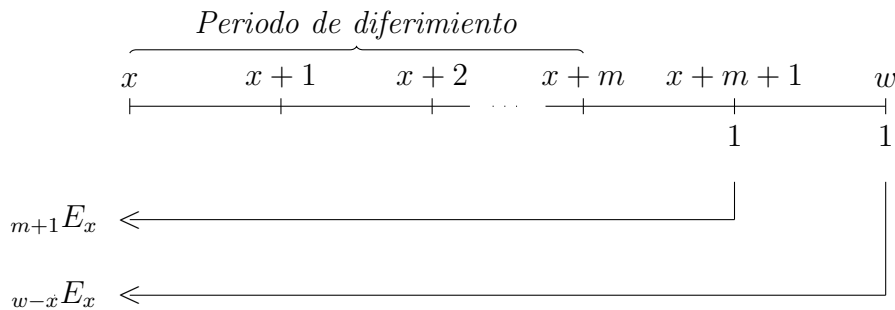
$$\ddot{a}_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}$$

Si actualizamos este valor por m años con el factor ${}_mE_x$ se obtendrá el valor actual buscado, que es lo mismo que seguir el procedimiento de actualizar cada cuota y sumar luego todos los valores actuales individuales.

$${}_m|\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x+m} \cdot {}_mE_x = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

3.2.4. Anualidades vitalicias vencidas diferidas m años

Son los pagos de una renta unitaria al final de cada año, para una edad x , en forma vitalicia, siendo el primer pago en edad $x + m + 1$.



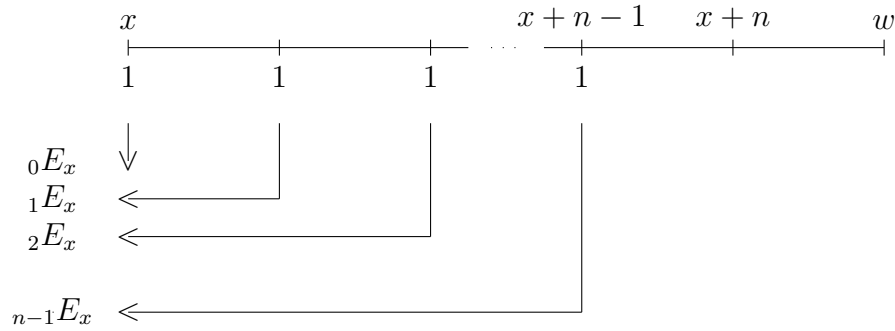
$${}_m|a_x = a_{x+m} \cdot {}_mE_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

3.3. Anualidades temporales

Una serie de pagos de una renta unitaria, sujetos a la supervivencia de una persona de edad x , pagaderas en cada uno de los siguientes n años, es conocida como una *anualidad temporal* n años.

3.3.1. Anualidades temporales anticipadas

Si los pagos de una renta unitaria, sujetos a la supervivencia de una persona de edad x , se pagan al inicio de cada uno de los siguientes $n - 1$ años, es conocida como una anualidad anticipada temporal n años.



$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_{n-1}E_x$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+0}}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x}$$

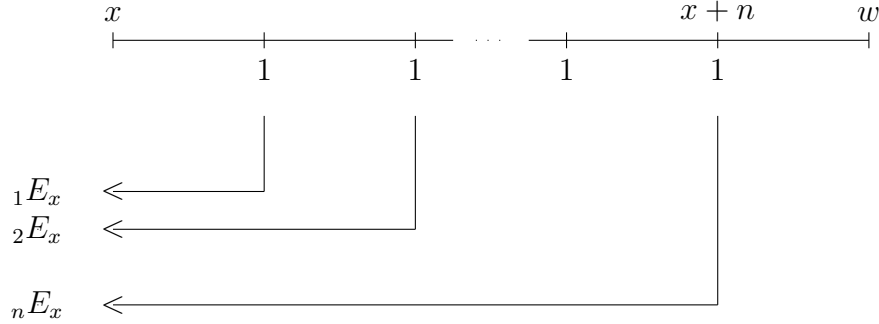
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x}$$

La fórmula de anualidad temporal anticipada expresada de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

3.3.2. Anualidades temporales vencidas

Si los pagos de una renta unitaria, sujetos a la supervivencia de una persona de edad x , se pagan al final de cada uno de los siguientes n años, es conocida como una anualidad vencida temporal n años.



$$a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \cdots + {}_nE_x$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

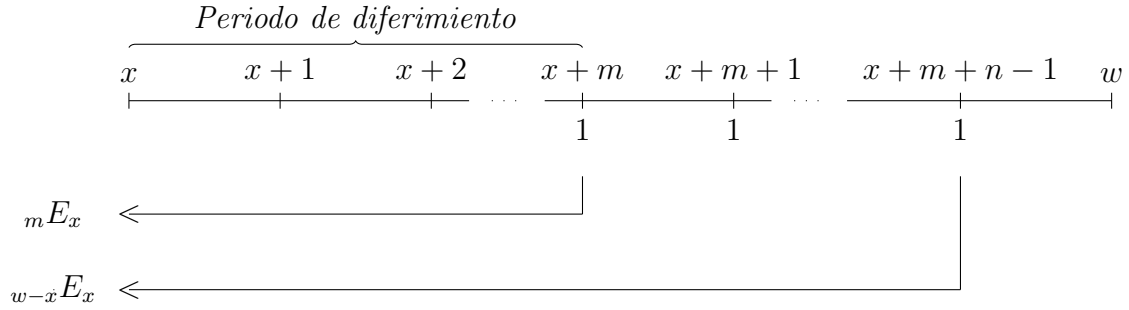
$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Como se observa en los gráficos las anualidades temporales tanto anticipadas y vencidas, el número de pagos es el mismo.

3.3.3. Anualidades temporales anticipadas diferidas m años

Una anualidad cuyo primer pago vence en edad $x + m$ y el ultimo vence en edad $x + m + n - 1$, siempre y cuando la persona de edad x este con vida al vencimiento de cada pago, recibe el nombre de anualidad anticipada, diferida m años, temporal n años, en edad x .

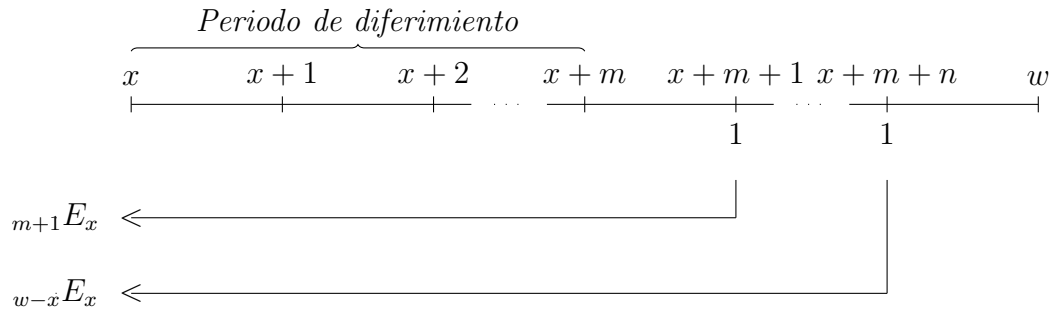


A la edad $x + m$ es valor actual es:

$${}_{m|n}\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} \cdot {}_mE_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

3.3.4. Anualidades temporales vencidas diferidas m años

Una anualidad cuyo primer pago vence en edad $x + m + 1$ y el ultimo vence en edad $x + m + n$, siempre y cuando la persona de edad x este con vida al vencimiento de cada pago, recibe el nombre de anualidad vencida, diferida m años, temporal n años, en edad x .



$${}_{m|n}a_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

Función axn

En R la función axn calcula el valor actuarial de las anualidades, dada una tabla de mortalidad o tabla actuarial.

```
axn(actuarialtable, x, n, i, m, k = 1)
```

Cuadro 3.2: Argumentos de la función axn

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial.
x	Edad del asegurado.
n	Número de años de la temporalidad de la anualidad, si la anualidad está destinada a ser pagada hasta muerte n se omite.
m	Periodo de diferimiento.
k	Número de pagos fraccionarios por período.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 11)

Ejemplos

En cada uno de los problemas, se utilizara la tabla de conmutadosMEX2000, por lo tanto no se mencionara la tasa de interés porque la tabla de conmutados ya se ha elaborado considerando una tasa de interés anual del 10 %.

Anualidades vitalicias anticipadas

- Una persona de 30 años de edad está obligada a pagar \$1000.00 al comienzo de cada año durante toda su vida, ¿Qué cantidad pagaría?

$$\ddot{a}_{30} = \frac{N_{30}}{D_{30}} = \frac{59494.7999}{5569.2515} = 10.68273$$

$$U = 1000 * 10.68273 = 10682.73$$

```
> 1000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 30)
```

```
[1] 10682.73
```

- Encontrar la cantidad que pagaría hoy una persona de una anualidad de \$25000.00 vitalicia, anticipada para una persona de 60 años de edad.

$$\ddot{a}_{60} = \frac{N_{60}}{D_{60}} = \frac{2461.4248}{287.2446} = 8.569089$$

$$U = 25000 * 8.569089 = 214227.2$$

```
> 25000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 60)
```

```
[1] 214227.2
```

Anualidades vitalicias vencidas

5. Encontrar la cantidad que pagaría hoy una persona de una anualidad de \$50000.00 vitalicia, vencida para una persona de 45 años de edad.

$$a_{45} = \frac{N_{45+1}}{D_{45}} = \frac{N_{46}}{D_{45}} = \frac{11866.4855}{1304.7071} = 9.095133$$

$$U = 50000 * 9.095133 = 454756.7$$

Para una anualidad vencida, se establece que el pago esta diferido 1 año ($m = 1$), para la solución del problema en R.

```
> 50000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 45, m = 1)
```

```
[1] 454756.7
```

6. Un asegurado de 50 años de edad. Acude a su compañía de seguros para solicitar una anualidad que podría percibir si deposita un importe de \$1000000.00 el día de hoy, siendo esta una anualidad vitalicia vencida. Determinar el monto de la anualidad constante que cobrara el asegurado hasta el momento de su muerte.

$$a_{50} = \frac{N_{50+1}}{D_{50}} = \frac{N_{51}}{D_{50}} = \frac{6959.8925}{798.1445} = 8.720091$$

$$R = \frac{1000000}{8.720091} = 114677.7$$

```
> 1000000 / axn(conmutadosMEX2000, x = 50, m = 1)

[1] 114677.7
```

Anualidades vitalicias anticipadas diferidas m años

7. Determinar el valor presente actuarial de un seguro que garantiza a un asegurado de 35 años el cobro de una anualidad vitalicia de \$50000.00 al principio de cada año que sobreviva. Después de que haya logrado sobrevivir a la edad de jubilación de 65 años.

$${}_{30|}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{35+30}}{D_{35}} = \frac{N_{65}}{D_{35}} = \frac{1297.4145}{3440.6217} = 0.3770872$$

$$U = 50000 * 0.3770872 = 18854.36$$

```
> 50000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 35, m = 30)

[1] 18854.36
```

8. Cual es el valor actual actuarial de un seguro que garantiza a un asegurado de 18 años el cobro de una anualidad vitalicia de \$480000.00 al principio de cada año que sobreviva. Después de que haya logrado sobrevivir a la edad de jubilación de 65 años.

$${}_{47|}\ddot{a}_{18} = \frac{N_{18+47}}{D_{18}} = \frac{N_{65}}{D_{18}} = \frac{1297.4145}{17638.1340} = 0.07355736$$

$$U = 480000 * 0.07355736 = 35307.53$$

```
> 480000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 18, m = 47)

[1] 35307.53
```

Anualidades vitalicias vencidas diferidas m años

9. Determinar el valor presente actuarial de un seguro que garantiza a un asegurado de 35 años el cobro de una anualidad vitalicia de \$50000.00 al principio de cada año que sobreviva. Después de que haya logrado sobrevivir a la edad de jubilación de 65 años.

$${}_{30|}a_{35} = \frac{N_{35+30+1}}{D_{35}} = \frac{N_{66}}{D_{35}} = \frac{1134.0736}{3440.6217} = 0.329613$$

$$U = 50000 * 0.329613 = 16480.65$$

```
> 50000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 35, m = 30 + 1)

[1] 16480.65
```

10. Cual es el valor actual actuarial de un seguro que garantiza a un asegurado de 18 años el cobro de una anualidad vitalicia de \$480000.00 al principio de cada año que sobreviva. Después de que haya logrado sobrevivir a la edad de jubilación de 65 años.

$${}_{47|}a_{18} = \frac{N_{18+47+1}}{D_{18}} = \frac{N_{66}}{D_{18}} = \frac{1134.0736}{17638.1340} = 0.06429669$$

$$U = 480000 * 0.06429669 = 30862.41$$

```
> 480000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 18, m = 47 + 1)

[1] 30862.41
```

Anualidades temporales anticipadas

11. Una persona de 65 años de edad va a recibir 25 pagos anuales de \$120000.00, con pagos al principio de cada año, por concepto de una pensión, ¿Cuál es el valor presente de la pensión?

$$\ddot{a}_{65:\overline{25}|} = \frac{N_{65} - N_{65+25}}{D_{65}} = \frac{N_{65} - N_{90}}{D_{65}} = \frac{1297.4145 - 6.8819}{163.3409} = 7.900854$$

$$U = 120000 * 7.900854 = 948102.5$$

```
> 120000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 65, n = 25)

[1] 948102.5
```

12. Una persona de 25 años de edad compra una anualidad anticipada, temporal 15 años y valuada en \$95000.00, encontrar la renta anual que recibirá si sobrevive al vencimiento de los pagos.

$$\ddot{a}_{25:\overline{15}|} = \frac{N_{25} - N_{25+15}}{D_{25}} = \frac{N_{25} - N_{40}}{D_{25}} = \frac{96985.8549 - 21994.1477}{9002.7127} = 8.329901$$

$$R = \frac{95000}{8.329901} = 11404.7$$

```
> 95000 / axn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 15)

[1] 11404.7
```

Anualidades temporales vencidas

13. Calcular el valor presente de una anualidad contratada por una persona de 35 años, cuya renta anual es de \$10000.00, si sobrevive al final de cada uno de los siguientes 8 años.

$$a_{35:\overline{8}|} = \frac{N_{35+1} - N_{35+8+1}}{D_{35}} = \frac{N_{36} - N_{44}}{D_{35}} = \frac{32870.8578 - 14609.7986}{3440.6217} = 5.307488$$

$$U = 10000 * 5.307488 = 53074.88$$

```
> 10000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 35, n = 8, m = 1)

[1] 53074.88
```

14. Una compañía va a jubilar a un empleado que ahora tienen 65 años de edad, otorgándole rentas anuales vencidas de \$120000.00 durante 25 años, si el jubilado sobrevive al vencimiento de cada pago, ¿Qué cantidad debe constituirse para que la compañía afronte sus obligaciones?

$$a_{65:\overline{25}|} = \frac{N_{65+1} - N_{65+25+1}}{D_{65}} = \frac{N_{66} - N_{91}}{D_{65}} = \frac{1134.0736 - 4.6520}{163.3409} = 6.914506$$

$$U = 120000 * 6.914506 = 829740.7$$

```
> 120000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 65, n = 25, m = 1)

[1] 829740.7
```

Anualidades temporales anticipadas diferidas m años

15. Una persona de 24 años de edad compra una anualidad anticipada, diferida 18 años, temporal 12 años, en \$90000.00, encontrar la renta anual que recibirá si sobrevive al vencimiento de los pagos.

$${}_{18|12}\ddot{a}_{24} = \frac{N_{24+18} - N_{24+18+12}}{D_{24}} = \frac{N_{42} - N_{54}}{D_{24}} = \frac{17944.1958 - 4989.4196}{9910.3275} = 1.3072$$

$$R = \frac{90000}{1.3072} = 68849.47$$

```
> 90000 / axn(conmutadosMEX2000, x = 24, n = 12, m = 18)

[1] 68849.47
```

16. ¿Qué cantidad debe depositar hoy una persona de 18 años si desea recibir mientras viva, una renta anual de \$200000.00 comenzando la primera a la edad de 50 años, temporal 20 años?

$${}_{32|20}\ddot{a}_{18} = \frac{N_{18+32} - N_{18+32+20}}{D_{18}} = \frac{N_{50} - N_{70}}{D_{18}} = \frac{7758.0370 - 644.1772}{17638.1340} = 0.4033227$$

$$U = 200000 * 0.4033227 = 80664.54$$

```
> 200000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 18, n = 20, m = 32)

[1] 80664.54
```

Anualidades temporales vencidas diferidas m años

17. Una persona de 30 años de edad compra una anualidad anticipada, diferida 15 años, temporal 15 años, en \$75000.00, encontrar la renta anual que recibirá si sobrevive al vencimiento de los pagos.

$${}_{15|15}a_{30} = \frac{N_{30+15+1} - N_{30+15+15+1}}{D_{30}} = \frac{N_{46} - N_{61}}{D_{30}} = \frac{11866.4855 - 2174.1802}{5569.2515}$$

$${}_{15|15}a_{30} = 1.740325$$

$$R = \frac{75000}{1.740325} = 43095.41$$

```
> 75000 / axn(conmutadosMEX2000, x = 30, n = 15, m = 15 + 1)

[1] 43095.41
```

18. Determinar el valor actual actuarial de un seguro de rentas que garantiza a un asegurado de 35 años de edad el cobro de una renta temporal 15 años de \$600000.00 al final de cada año que sobreviva, después de que haya logrado sobrevivir a la edad de jubilación de 65 años.

$${}_{30|15}a_{35} = \frac{N_{35+30+1} - N_{35+30+15+1}}{D_{35}} = \frac{N_{66} - N_{81}}{D_{35}} = \frac{1134.0736 - 90.7867}{3440.6217} = 0.303226$$

$$U = 600000 * 0.3032263 = 181935.8$$

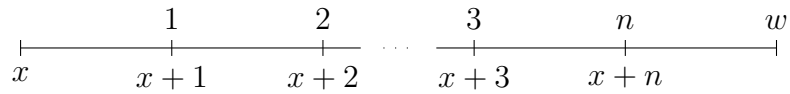
```
> 600000 * axn(conmutadosMEX2000, x = 35, n = 15, m = 30 + 1)

[1] 181935.8
```

3.4. Anualidades crecientes

Este tipo de anualidades cuyas rentas anuales no son de la misma cantidad, estas van creciendo conforme se avanza en los pagos, solo se verán la anualidades crecientes vitalicias, no se analizarán todos los posibles casos de variabilidad en el monto de los beneficios, pues en este tipo de anualidades se pueden establecer planes muy extravagantes como se desee, pero se plantearán las herramientas necesarias para evaluar cualquier tipo de beneficio pagadero anualmente.

Considere un grupo de l_x personas con vida x , que crean en este momento un fondo monetario, aportando cada uno de ellos la cantidad denotada por $(Ia)_x$ que invertido a una tasa de interés i , sea suficiente para pagar \$1.00 a las personas que sobreviven a edad $x + 1$, \$2.00 a los que sobreviven a edad $x + 2$, \$3.00 a los que lleguen a $x + 3$ y así sucesivamente hasta que ninguna personas quede con vida.



Entonces ese fondo deberá tener la cantidad suficiente para pagar l_{x+1} pesos al final del primer año, $(2l_{x+2})$ pesos la final del segundo y así sucesivamente, por lo que la aportación inicial $(Ia)_x$ queda determina por:

$$(Ia)_x = \frac{D_{x+1} + 2D_{x+2} + 3D_{x+3} + \cdots + tD_{x+t}}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^w tD_{x+t}$$

Ahora,

$$\sum_{t=1}^w tD_{x+t} = \begin{array}{cccccc} D_{x+1} & + & D_{x+2} & + & D_{x+3} & + & \cdots & + & D_{x+t} \\ & & D_{x+2} & + & D_{x+3} & + & \cdots & + & D_{x+t} \\ & & & & D_{x+3} & + & \cdots & + & D_{x+t} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & D_{x+t} \end{array}$$

$$\sum_{t=1}^w tD_{x+t} = N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdots + N_{x+t}$$

$$\sum_{t=1}^w tD_{x+t} = \sum_{t=1}^w N_{x+t}$$

Se define el valor conmutado S_x como

$$S_x = \sum_{t=1}^w N_{x+t}$$

Entonces tenemos que:

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

Como no tenemos valores conmutados S_x , solo se limitara a resolver el siguiente ejemplo en R, utilizando la siguiente función.

Función *Iaxn*

En R la función *Iaxn* calcula el valor actuarial de las anualidades crecientes.

```
Iaxn(actuarialtable, x, n, i, m = 0)
```

Cuadro 3.3: Argumentos de la función `Iaxn`

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial.
x	Edad del asegurado.
n	Número de años de la temporalidad de la anualidad, si la anualidad está destinada a ser pagada hasta muerte n se omite.
m	Periodo de diferimiento.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 37)

Ejemplo:

19. Se tiene una persona de 30 años de edad que desea adquirir una anualidad que le suministre el pago de \$10000.00 si sobrevive a edad 31, \$20000.00 si sobrevive a edad 32, \$30000.00 si sobrevive a edad 33 y así sucesivamente hasta su muerte. ¿Cuál sería la cantidad que esta persona debe pagar a los 30 años de edad?

```
> 10000 * Iaxn(conmutadosMEX2000, x = 30, m = 1)
[1] 987627.5
```

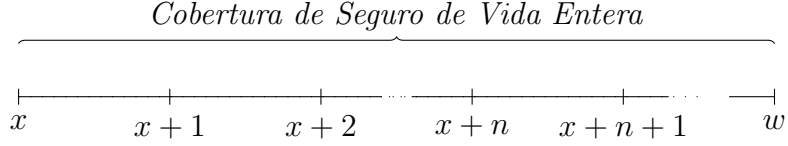
Capítulo 4

Seguros

Los seguros para el caso de fallecimiento de una persona, impropiaamente llamados seguros de vida, son contratos mediante los cuales el asegurador se compromete a pagar a la persona o personas expresamente designadas como beneficiario o beneficiarios la suma asegurada pactada en caso de que ocurra el evento cubierto, es decir por motivo de la muerte del asegurado (M. L. Martínez, 2005, p.28). En la práctica, este dinero será pagado en el momento de la muerte, por conveniencia matemática asumimos que se pagará al final del año de la muerte. Por ejemplo, si el asegurado compra una póliza en enero y muere un mes más tarde, nuestra suposición significa que el beneficio por muerte se pagará hasta el 31 de diciembre.

4.1. Seguros de vida entera

Los seguros de vida entera, tienen una vigencia para cubrir al asegurado desde una fecha determinada hasta que fallezca. El fallecimiento puede ocurrir a los $x, x + 1, x + 2, \dots, w$ años de edad, es decir, bajo diferentes alternativas mutuamente excluyentes. En cada año hay un número d_x fallecidos, por tanto la prima única será la suma de las esperanzas matemáticas o primas anuales para cada alternativa. El capital asegurado se pagara al final del año de fallecimiento.



Un seguro otorga una suma asegurada de \$1.00 pagadera al final del año en que ocurra la muerte del asegurado, si el fallecimiento se suscita en cualquiera de los siguientes n años a partir de la fecha de emisión del seguro hasta una edad w . Su valor presente, o la prima neta única, que el asegurado debe pagar al momento de emitirse la póliza, denotado por A_x .

Actualizando el capital unitario por cada alternativa de muerte se tiene:

$$A_x = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 + \dots + \frac{d_w}{l_x} \cdot v^{w+1-x}$$

Multiplicando y dividiendo cada termino por v^x

$$A_x = \frac{d_x}{l_x} \cdot v \cdot \frac{v^x}{v^x} + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 \cdot \frac{v^x}{v^x} + \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 \cdot \frac{v^x}{v^x} + \dots + \frac{d_w}{l_x} \cdot v^{w+1-x} \cdot \frac{v^x}{v^x}$$

$$A_x = \frac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + d_{x+2} v^{x+3} + \dots + d_w v^{w+1}}{l_x v^x}$$

Introducimos un nuevo símbolo de conmutación C_x

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

que se conoce como *el número de fallecidos a la edad x , descontados por un plazo equivalente a su edad más un año*, con lo que puede escribirse:

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_w}{D_x}$$

Ahora por simplicidad de cálculo se introduce otro símbolo de conmutación M_x

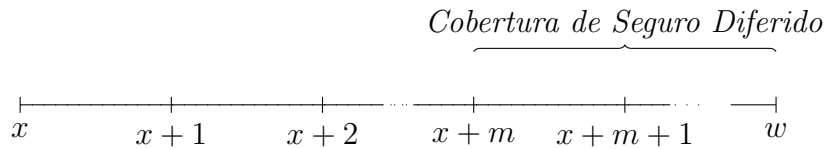
$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_w$$

con lo cual la fórmula del valor actual de un seguro de vida entera inmediato, se convierte en:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

4.2. Seguros vitalicios diferidos m años

El beneficio que otorga este tipo de seguros es el pago de la suma asegurada al final del año en el que ocurra la muerte de una persona, que ahora tiene edad x , siempre y cuando esta suceda después de cumplida la edad $x + m$, pagando al asegurado, a cambio de una prima neta única denotada por ${}_m|A_x$.



A la edad $x + m$ la prima única sería:

$$A_{x+m} = \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}}$$

Si se actualiza por m años con el factor:

$${}_mE_x = \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

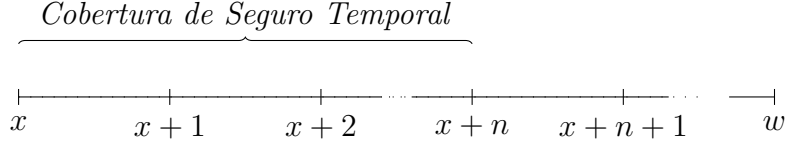
habremos hallado la prima única del seguro diferido:

$${}_m|A_x = \frac{M_{x+m}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

4.3. Seguros temporales

Un seguro que otorga una suma asegurada de \$1.00 pagadera al final del año en el que ocurra la muerte del asegurado, si el fallecimiento se suscita en cualquiera de los siguientes

n años a partir de la fecha de emisión del seguro a una edad x , es conocido como seguro temporal por n años, a edad x , pagaderos al final del año. Su valor presente, o la prima neta única, que el asegurado debe pagar al momento de emitirse la póliza, es denotado por $A_{x:\overline{n}|}^1$.



Como en el caso de un seguro vitalicio diferido, el fallecimiento puede ocurrir a la edad $x, x+1, x+2, \dots, x+n-1$, sin llegar a alcanzar la edad $x+n$. Si el capital unitario se paga al final del año de fallecimiento, cada alternativa supone el pago de una esperanza matemática o prima anual, cuya suma será la prima única buscada:

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{d_x}{l_x} \cdot v + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 + \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 + \dots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n$$

Multiplicando y dividiendo cada termino por v^x

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{d_x}{l_x} \cdot v \cdot \frac{v^x}{v^x} + \frac{d_{x+1}}{l_x} \cdot v^2 \cdot \frac{v^x}{v^x} + \frac{d_{x+2}}{l_x} \cdot v^3 \cdot \frac{v^x}{v^x} + \dots + \frac{d_{x+n-1}}{l_x} \cdot v^n \cdot \frac{v^x}{v^x}$$

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + d_{x+2} v^{x+3} + \dots + d_{x+n-1} v^{x+n}}{l_x v^x}$$

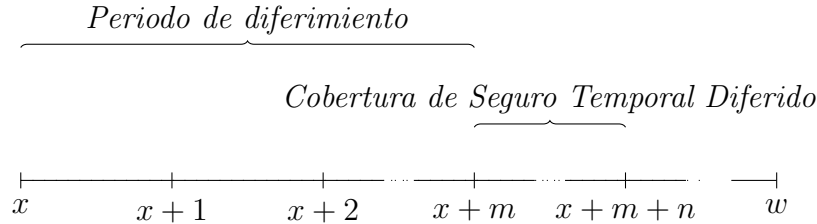
$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

El numerador agrupa a todas las C_x desde x hasta w menos la C_{x+n} desde $x+n$ hasta w , entonces sale una diferencia:

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

4.4. Seguros diferidos temporales

En el caso de que la suma asegurada se pague solamente si la muerte ocurre entre las edades $x + m$ y $x + m + n$, el seguro se conoce como seguro diferido m años, temporal a n años emitido a una edad x .



Hallando la prima única a la edad $x + m$ y luego actualizando por m años, se tiene la prima única a la edad x :

$${}_m|A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Función A_{xn}

En R la función A_{xn} evalúa n años de seguro de vida.

```
Axn(actuarialtable, x, n, i, m, k = 1)
```

Cuadro 4.1: Argumentos de la función A_{xn}

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial.
x	Edad del asegurado.
n	Número de años de la temporalidad de la anualidad, si la anualidad está destinada a ser pagada hasta muerte n se omite.
m	Periodo de diferimiento.
k	Número de pagos fraccionarios por período.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 10)

Ejemplos:

Seguros de vida entera

1. Sea un asegurado con una edad de 28 años. Calcular la prima neta única de un seguro que garantiza al beneficiario de la póliza un capital asegurado de \$120000.00 al final del año en el que fallezca el asegurado.

$$A_{28} = \frac{M_{28}}{D_{28}} = \frac{169.8638}{6749.4475} = 0.025167$$

$$P.N.U = 120000 * 0.025167 = 3020.047$$

```
> 120000 * Axn(commutadosMEX2000, x = 28)

[1] 3020.047
```

2. ¿Qué prima neta única pagara hoy una persona de 45 años por un capital de \$5000000.00 para el caso de muerte?

$$A_{45} = \frac{M_{45}}{D_{45}} = \frac{107.3260}{1304.7071} = 0.0822606$$

$$P.N.U = 5000000 * 0.0822606 = 411303$$

```
> 5000000 * Axn(commutadosMEX2000, x = 45)

[1] 411303
```

Seguros vitalicios diferidos m años

3. Sea un asegurado de 40 años de edad. Calcular la prima neta única de un seguro que garantiza al asegurado de la póliza un capital asegurado de \$600000.00 si muere

dentro de un periodo de 20 años. La prima a abonar por el asegurado es única, abonada al inicio del contrato del seguro.

$${}_{20|}A_{40} = \frac{M_{40+20}}{D_{40}} = \frac{M_{60}}{D_{40}} = \frac{63.4787}{2123.1150} = 0.02989887$$

$$P.N.U = 600000 * 0.02989887 = 17939.32$$

```
> 600000 * Axn(conmutadosMEX2000, x = 40, m = 20)
```

```
[1] 17939.32
```

4. Calcular la prima neta única de un seguro de \$200000.00 pagadero al final del año de fallecimiento del asegurado de 60 años de edad, si la muerte tiene lugar pasados siete años del inicio de la operación.

$${}_7|A_{60} = \frac{M_{60+7}}{D_{60}} = \frac{M_{67}}{D_{60}} = \frac{39.1087}{287.2446} = 0.1361511$$

$$P.N.U = 200000 * 0.1361511 = 27230.23$$

```
> 200000 * Axn(conmutadosMEX2000, x = 60, m = 7)
```

```
[1] 27230.23
```

Seguros temporales

5. Una persona de 25 años adquiere un seguro temporal a 30 años. ¿Cuál será la prima neta única que pague el asegurado?

$$A_{25:\overline{30}|}^1 = \frac{M_{25} - M_{25+30}}{D_{25}} = \frac{M_{25} - M_{55}}{D_{25}} = \frac{185.8168 - 79.5454}{9002.7127} = 0.01180438$$

$$P.N.U = 0.01180438$$

```
> Axn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 30)
```

```
[1] 0.01180438
```

6. Una persona de 30 años adquiere un seguro temporal a 35 años. ¿Cuál será la prima neta única que pagara el asegurado por un seguro de \$1200000.00?

$$A_{30:\overline{35}|}^1 = \frac{M_{30} - M_{30+35}}{D_{30}} = \frac{M_{30} - M_{65}}{D_{30}} = \frac{160.6333 - 45.3941}{5569.2515} = 0.02069204$$

$$P.N.U = 1200000 * 0.02069204 = 24830.45$$

```
> 1200000 * Axn(conmutadosMEX2000, x = 30, n = 35)
```

```
[1] 24830.45
```

Seguros diferidos temporales

7. Una persona de 20 años adquiere un seguro temporal a 30 años y diferido 10 años. ¿Cuál será la prima neta única que pagara el asegurado por un seguro de \$1000000.00?

$${}_{10|}A_{20:\overline{30}|}^1 = \frac{M_{20+10} - M_{20+10+30}}{D_{20}} = \frac{M_{30} - M_{60}}{D_{20}} = \frac{160.6333 - 63.4787}{14554.9528} = 0.006675018$$

$$P.N.U = 1000000 * 0.006675018 = 6675.018$$

```
> 1000000 * Axn(conmutadosMEX2000, x = 20, n = 30, m = 10)

[1] 6675.018
```

8. Una persona de 18 años adquiere un seguro temporal a 37 años y diferido 5 años. ¿Cuál será la prima neta única que pagara el asegurado por un seguro de \$2400000.00?

$${}_5|A_{18:\overline{37}|}^1 = \frac{M_{18+5} - M_{18+5+37}}{D_{18}} = \frac{M_{23} - M_{60}}{D_{18}} = \frac{200.0601 - 63.4787}{17638.1340} = 0.007743529$$

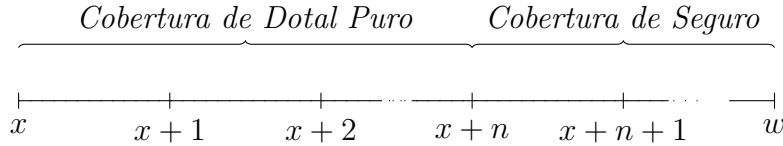
$$P.N.U = 2400000 * 0.007743529 = 18584.47$$

```
> 2400000 * Axn(conmutadosMEX2000, x = 18, n = 37, m = 5)

[1] 18584.47
```

4.5. Seguro dotal mixto

El *Seguro Dotal Mixto* es la combinación de un dotal puro con seguro temporal a n años. Es decir, si una persona de edad x compra un seguro de este tipo, le pagaran la suma asegurada si muere en el transcurso de n años; en caso de que no fallezca en ese intervalo de tiempo en ese momento le pagarán la cantidad estipulada. En otras palabras, el seguro dotal mixto es equivalente a comprar por una parte, un seguro temporal a n años, pagando una prima $A_{x:\overline{n}|}^1$ y comprar al mismo tiempo un dotal puro a n años, pagando la prima ${}_nE_x$ (algunos autores utilizan $A_{x:\overline{n}|}^1$ para denotar la prima de un dotal puro), por lo que el asegurado habrá pagado en total $A_{x:\overline{n}|}$. Siendo este denotado por $A_{x:\overline{n}|}$ como la prima neta única de un seguro dotal mixto.



$$A_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x + A_{x:\overline{n}|}^1 = A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}|} + A_{x:\overline{n}|}^1$$

En valores conmutados

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

Función *AExn*

En R la función *AExn* evalúa el seguro dotal mixto de n años.

```
AExn(actuarialtable, x, n, i, m, k = 1)
```

Cuadro 4.2: Argumentos de la función *AExn*

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial.
x	Edad del asegurado.
n	Número de años de la temporalidad de la anualidad, si la anualidad está destinada a ser pagada hasta muerte n se omite.
m	Periodo de diferimiento.
k	Número de pagos fraccionarios por período.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 7)

Ejemplos:

- Calcular la prima neta única o valor actual actuarial de un seguro que garantiza el abono de un capital de \$150000.00 al vencimiento de la póliza, que tendrá lugar dentro de 20 años, si el asegurado, que tiene una edad de 35 años sobrevive en esa fecha. Si fallece antes, la compañía abonara al beneficiario de la póliza y al final del año de fallecimiento del asegurado un capital de \$500000.00.

$$A_{35:\overline{20}|} = \frac{M_{35} - M_{35+20} + D_{35+20}}{D_{35}} = \frac{M_{35} - M_{55} + D_{55}}{D_{35}}$$

$$A_{35:\overline{20}|} = \frac{139.5781 - 79.5454 + 484.4043}{3440.6217} = 0.158238$$

$$P.N.U = 150000 * 0.158238 = 23735.7$$

```
> 150000 * AExn(conmutadosMEX2000, x = 35, n = 20)

[1] 23735.7
```

10. Una persona de 50 años paga \$500000.00 por concepto de un seguro dotal mixto a 15 años, encontrar la suma asegurada contratada en la póliza.

$$A_{50:\overline{15}|} = \frac{M_{50} - M_{50+15} + D_{50+15}}{D_{50}} = \frac{M_{50} - M_{65} + D_{65}}{D_{50}}$$

$$A_{50:\overline{15}|} = \frac{92.8684 - 45.3941 + 163.3409}{798.1445} = 0.2641316$$

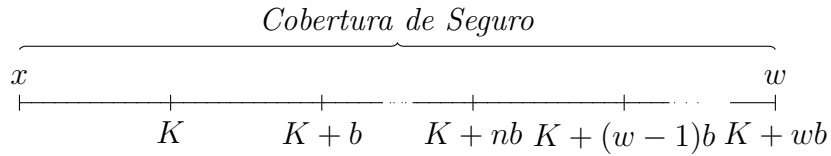
$$P.N.U = 500000 * 0.2641316 = 132065.8$$

```
> 500000 * AExn(conmutadosMEX2000, x = 50, n = 15)

[1] 132065.8
```

4.6. Seguros crecientes

La prima neta única de un seguro emitido a edad x que paga un \$1.00 de suma asegurada si la muerte ocurre en el primer año, \$2.00 si ocurre en el segundo año, \$3.00 si sucede en el tercer año y así sucesivamente y se denota por $(IA)_x$.



$$(IA)_x = \frac{C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \cdots + (w-x)C_{w-1}}{D_x}$$

$$(IA)_x = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^w (t+1) C_{x+t}$$

Ahora,

$$\sum_{t=1}^w (t+1) C_{x+t} = \begin{array}{cccccc} C_x & + & C_{x+1} & + & C_{x+2} & + & \cdots & + & C_{w-1} \\ & & C_{x+1} & + & C_{x+2} & + & \cdots & + & C_{w-1} \\ & & & & C_{x+2} & + & \cdots & + & C_{w-1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & C_{w-1} \end{array}$$

$$\sum_{t=1}^w (t+1) C_{x+t} = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots + M_{w-1}$$

$$\sum_{t=1}^w (t+1) C_{x+t} = \sum_{t=0}^w M_{x+t}$$

Se define el valor conmutado R_x como

$$R_x = \sum_{t=0}^w M_{x+t}$$

Entonces tenemos que:

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

Función $IAxn$

En R la función $IAxn$ calcula el valor actuarial de los seguros crecientes.

```
IAxn(actuarialtable, x, n, i, m, k = 1)
```

Cuadro 4.3: Argumentos de la función IA_{xn}

actuarialtable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial.
x	Edad del asegurado.
n	Número de años de la temporalidad de la anualidad, si la anualidad está destinada a ser pagada hasta muerte n se omite.
m	Periodo de diferimiento.
k	Número de pagos fraccionarios por período.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 35)

Ejemplos:

11. Evaluar el valor de un seguro de vida creciente para un adulto de 25 años.

$$(IA)_{25} = \frac{R_{25}}{D_{25}} = \frac{4958.0787}{9002.7127} = 0.5506364$$

```
> IAxn(conmutadosMEX2000, x = 25)
```

```
[1] 0.5506364
```

12. Una persona que ahora tiene 38 años de edad, desea comprar un seguro a una prima neta única, que le pague a sus beneficiarios \$1000000.00 si la muerte ocurre en el primer año, \$1250000.00 si ocurre al segundo, \$1500000.00 si es en el tercero y así sucesivamente, para amortiguar el alza en el costo de la vida. Calcular la prima que debe pagar esta persona.

$$1000000 * A_{38} + 250000 * (IA)_{38} = 1000000 * \frac{M_{38}}{D_{38}} + 250000 * \frac{R_{39}}{D_{39}}$$

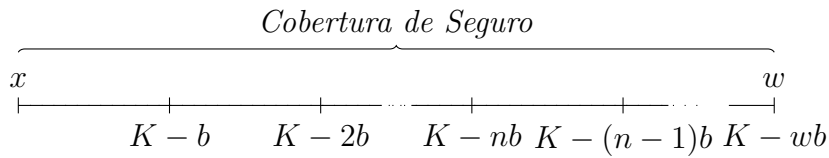
$$= 1000000 * \frac{129.9615}{2576.2677} + 250000 * \frac{2784.7501}{2338.9537} = 348020$$

```
> 1000000 * Axn(conmutadosMEX2000, x = 38) +
+ 250000 * IAxn(conmutadosMEX2000, x = 39)

[1] 348020
```

4.7. Seguros decrecientes

El plan más conocido de este tipo de seguros es aquel que inicia con una suma asegurada de n unidades si la muerte ocurre en el primer año, para disminuir a $n - 1$ si el fallecimiento es en el transcurso del segundo año, $n - 2$ en el tercero y así sucesivamente, hasta que la suma asegurada es unitaria en el caso de que la muerte suceda en el transcurso del $n - \text{ésimo}$ año.



Su valor presente está denotado por $(DA)_{x:\overline{n}|}^1$ y está dada por la ecuación:

$$\begin{aligned}
 (DA)_{x:\overline{n}|}^1 &= \frac{1}{D_x} [(nC_x + (n-1)C_{x+1} + (n-2)C_{x+2} + \dots + 2C_{x+n-2} + C_{x+n-1})] \\
 &= \frac{1}{D_x} [(n)(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_{x+n-1}) - (C_{x+1} + 2C_{x+2} + \dots + (n-1)C_{x+n-1})]
 \end{aligned}$$

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{1}{D_x} [(n)(M_x - M_{x+n}) - (R_{x+1} - R_{x+n+1} - nM_{x+n})]$$

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{1}{D_x} [nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})]$$

Función $DAxn$

En R la función $DAxn$ calcula el valor actuarial de los seguros decrecientes.

```
DAn(actuariatable, x, n, i, m, k = 1)
```

Cuadro 4.4: Argumentos de la función DAn

actuariatable	Una tabla de mortalidad o tabla actuarial.
x	Edad del asegurado.
n	Número de años de la temporalidad de la anualidad, si la anualidad está destinada a ser pagada hasta muerte n se omite.
m	Periodo de diferimiento.
k	Número de pagos fraccionarios por período.
i	Tasa de interés para el caso de una tabla de mortalidad o sin interés si es una tabla actuarial.

Fuente: Elaboración propia con base en (Spedicato y cols., 2017, p. 16)

Ejemplos:

13. Evaluar el valor de un seguro de vida decreciente 10 años para una persona de 25 años de edad.

$$\begin{aligned}
 (DA)_{25:\overline{10}|}^1 &= \frac{1}{D_{25}} [10 * M_{25} - (R_{25+1} - R_{25+10+1})] = \frac{1}{D_{25}} [10 * M_{25} - (R_{26} - R_{36})] \\
 &= \frac{1}{9002.7127} [10 * 185.8168 - (4772.2619 - 3183.7133)] = 0.02994871
 \end{aligned}$$

```
> DAn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 10)
```

```
[1] 0.02994871
```

14. Evaluar el valor de un seguro de vida decreciente 15 años para una persona de 35 años de edad.

$$(DA)_{35:\overline{15}|}^1 = \frac{1}{D_{35}} [15 * M_{35} - (R_{35+1} - R_{35+15+1})] = \frac{1}{D_{35}} [15 * M_{35} - (R_{36} - R_{51})]$$

$$= \frac{1}{3440.6217} [15 * 139.5781 - (3183.7133 - 1473.0831)] = 0.1113292$$

```
> DAxn(conmutadosMEX2000, x = 35, n = 15)
```

```
[1] 0.1113292
```

Capítulo 5

Primas Netas Niveladas

Es común comprar un seguro por medio de una serie de pagos periódicos de primas. La prima inicial se paga en general al inicio del contrato, estando el pago de las primas futuras sujetos a la sobrevivencia del asegurado. El monto de la prima para un seguro dado, debe estar determinado bajo el principio de que el valor presente del conjunto de primas debe ser igual al valor presente de la obligación del asegurador al inicio del seguro.

$$\text{Obligación de la compañía} = \text{Obligación del asegurado}$$

Por ejemplo, en un seguro ordinario de vida se tiene que:

$$\text{Obligación de la compañía} = A_x$$

$$\text{Obligación del asegurado} = P\ddot{a}_x$$

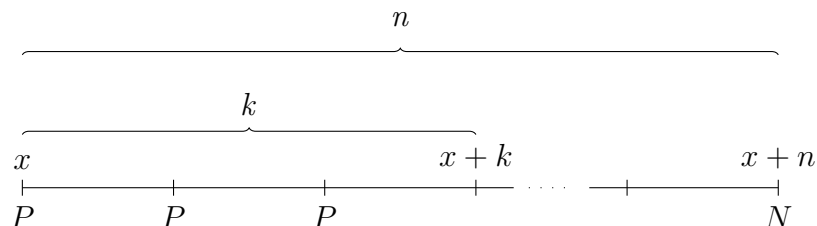
La prima cobrada por una compañía de seguros por una póliza de seguro tiene dos propósitos. En primer lugar, debe proporcionar los fondos necesarios para pago de los beneficios y en segundo lugar, cubrir los gastos de funcionamiento de la aseguradora. Si ignoramos los gastos y derivamos una prima basada en los beneficios solamente, se llama prima neta o de riesgo. Si los gastos son también incluidos en el cálculo, obtenemos la prima bruta o de oficina.

Es importante señalar que la prima neta está determinada exclusivamente por la mortalidad y el interés, y es el tipo de primas que se van a estudiar en este capítulo. Dado que, los gastos se pueden cambiar más fácilmente: el personal puede ser despedido, el espacio

de oficina reducido, los gastos reasignados a otros productos de seguros, etcétera y estos no los podemos valorar en el curso de cálculo actuarial.

Se va a estudiar el caso en el que el asegurado paga regularmente las primas durante un período determinado de tiempo, hay que tener en cuenta que los pagos de prima se detendrán si el titular de la póliza muere.

En términos generales, observe el siguiente gráfico.



Se observa que una persona de edad x está asegurada n años contra el riesgo de muerte y se compromete a pagar primas adelantadas anuales P durante k años. Se tiene que *el valor actual de la prima es igual al valor actual del seguro*.

$$P\ddot{a}_{x:\overline{k}|} = A_{x:\overline{n}|}^1$$

La prima neta anual pagadera durante k años será:

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

El valor P que paga anualmente el asegurado toma el nombre de prima neta nivelada, por ser constante todos los años. De la expresión anterior podemos deducir diversas fórmulas especiales, para diferentes casos de seguro. Deben notarse dos aspectos bastante importantes:

- La prima neta nivelada asociada a cualquier beneficio es el cociente que resulta de dividir, la prima neta única de dicho beneficio entre el valor presente de una anualidad anticipada.
- Es posible encontrar primas netas niveladas para beneficios que no necesariamente involucran mortalidad.

En los siguientes subcapítulos se menciona los posibles casos que se pueden presentar.

5.1. Seguros Vitalicios

Se considera el caso de un seguro de vida entera, emitido a edad x , en el que el asegurado se compromete a pagar una prima P_x al principio de cada año que este con vida. El valor presente del pago de estas primas es $P_x \ddot{a}_x$ y de acuerdo a la equivalencia actuarial se tiene que:

$$P_x \ddot{a}_x = A_x$$

Entonces:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

O en valores conmutados obtenemos que:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_x}}$$

$$P_x = \frac{M_x}{N_x}$$

El número de primas a pagar no necesariamente debe coincidir con la temporalidad de los beneficios, sino que puede ser menor. Así se puede comprar un seguro vitalicio, con el pago de primas durante k años, la cantidad a pagar al principio de cada año se denotara por ${}_kP_x$.

$${}_kP_x \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = A_x$$

$${}_kP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}}$$

En valores conmutados obtenemos que:

$${}_kP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+k}}$$

5.2. Seguro Dotal Mixto

La prima neta nivelada para un seguro dotal mixto, en edad x , a n años está dado por:

$$P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}$$

y, en valores conmutados

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Las fórmulas anteriores indican que las primas se pagaran en forma anticipada durante n años. Si se estipula que las primas se pagaran durante k años ($k < n$), entonces.

$${}_kP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}}$$

$${}_kP_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

5.3. Seguros temporales

El valor presente de los beneficios futuros, para el asegurado, está dado por $A_{x:\overline{n}|}^1$, que debe igualarse al valor presente de los pagos que va a realizar en forma contingente, pues si llegase a fallecer antes de realizar la totalidad estipulada de pagos, se consideran canceladas las obligaciones faltantes del asegurado. Por ejemplo, si el asegurado se compromete a pagar n primas anuales, en forma anticipada, entonces el valor de cada prima está determinada por.

$$P_{x:\overline{n}|}^1 \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1$$

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Sin embargo, el número de primas a pagar no necesariamente debe coincidir con la temporalidad de los beneficios, sino que puede ser menor. Así, para comprar un seguro en edad x , temporal a n años con el pago de primas durante k años ($k < n$), la cantidad a pagar al principio de cada año se denotara por

$${}_kP_{x:\overline{n}|}^1 \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = A_{x:\overline{n}|}^1$$

$${}_kP_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}} = \frac{\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+k}}{D_x}}$$

$${}_kP_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

5.4. Anualidades

Para los beneficios de anualidades, la notación empleada sufre modificaciones para evitar posibles confusiones con las primas netas niveladas correspondientes a los beneficios por muerte. Así,

$$P({}_m|_n\ddot{a}_x) = \frac{{}_m|_n\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}$$

Denota la prima neta nivelada que será necesario pagar en forma anticipada a edad x , y contingente durante m años para comprar una anualidad, cuyos pagos son durante n años, siendo el primer pago en edad $x + m$.

$$P({}_m|_n\ddot{a}_x) = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Ejemplos

1. Sea un asegurado de 45 años de edad. Se desea calcular el valor de la prima neta nivelada que garantice al beneficiario de la póliza un capital asegurado de \$1000000.00 al final de año en el que fallezca el asegurado.

$$P_{45} = \frac{M_{45}}{N_{45}} = \frac{107.3260}{13171.1926} = 0.0081$$

La prima neta nivelada es:

$$1000000 * 0.0081 = 8148.54$$

```
> 1000000 * (Axn(conmutadosMEX2000, x = 45)
+           / axn(conmutadosMEX2000, x = 45))

[1] 8148.54
```

2. Una persona de 30 años de edad toma un seguro en el que se estipula que en caso de fallecer antes de cumplir 60 años, se pagaran \$250000.00 a sus beneficiarios. Encontrar la prima neta nivelada pagadera durante 25 años.

$${}_{25}P_{30:\overline{30}|}^1 = \frac{A_{30:\overline{30}|}^1}{\ddot{a}_{30:\overline{25}|}} = \frac{M_{30} - M_{30+30}}{N_{30} - N_{30+25}} = \frac{M_{30} - M_{60}}{N_{30} - N_{55}}$$

$${}_{25}P_{30:\overline{30}|}^1 = \frac{160.6333 - 63.4787}{59494.7999 - 4453.4486} = 0.0018$$

La prima neta nivelada es:

$$250000 * 0.0018 = 441.28$$

```
> 250000 * (Axn(conmutadosMEX2000, x = 30, n = 30)
+           / axn(conmutadosMEX2000, x = 30, n = 25))

[1] 441.2799
```

3. Calcular la prima neta nivelada para una póliza de \$1000000.00 emitida a una edad de 25 años para los siguientes planes.

a) Temporal 25 años.

$$P_{25:\overline{25}|}^1 = \frac{A_{25:\overline{25}|}^1}{\ddot{a}_{25:\overline{25}|}} = \frac{M_{25} - M_{25+25}}{N_{25} - N_{25+25}} = \frac{M_{25} - M_{50}}{N_{25} - N_{50}}$$

$$P_{25:\overline{25}|}^1 = \frac{185.8168 - 92.8684}{96985.8549 - 7758.0370} = 0.00104$$

La prima neta nivelada es:

$$1000000 * 0.00104 = 1041.698$$

```
> 1000000 * (Axn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 25)
+           / axn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 25))

[1] 1041.698
```

b) Dotal mixto a edad 50 años.

$$P_{25:\overline{25}|} = \frac{A_{25:\overline{25}|}}{\ddot{a}_{25:\overline{25}|}} = \frac{M_{25} - M_{25+25} + D_{25+25}}{N_{25} - N_{25+25}} = \frac{M_{25} - M_{50} + D_{50}}{N_{25} - N_{50}}$$

$$P_{25:\overline{25}|} = \frac{185.8168 - 92.8684 + 798.1445}{96985.8549 - 7758.0370} = 0.009986$$

La prima neta nivelada es:

$$1000000 * 0.009986 = 9986.716$$

```
> 1000000 * (AExn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 25)
+           / axn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 25))
[1] 9986.716
```

c) Dotal mixto a edad 50 años, considerando el pago de 10 primas.

$${}_{10}P_{25:\overline{25}|} = \frac{A_{25:\overline{25}|}}{\ddot{a}_{25:\overline{10}|}} = \frac{M_{25} - M_{25+25} + D_{25+25}}{N_{25} - N_{25+10}} = \frac{M_{25} - M_{50} + D_{50}}{N_{25} - N_{35}}$$

$${}_{10}P_{25:\overline{25}|} = \frac{185.8168 - 92.8684 + 798.1445}{96985.8549 - 36311.4795} = 0.014686$$

La prima neta nivelada es:

$$250000 * 0.014686 = 14686.48$$

```
> 1000000 * (AExn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 25)
+           / axn(conmutadosMEX2000, x = 25, n = 10))
[1] 14686.48
```

4. Una empresa debe pensionar a sus empleados cuando estos cumplan 65 años de edad. Estima que un empleado, que ahora tiene 30 años de edad, será pensionado con \$500000.00 anuales. Para pagar el valor de la pensión vitalicia, la empresa debe hacer pagos iguales a un fondo que opera al 10 %; el primero inmediato y el último a cumplir el empleado 65 años de edad. Hallar el valor de las aportaciones anuales.

$${}_{35}P_{(35|\ddot{a}_{30})} = \frac{{}_{35|\ddot{a}_{30}}}{\ddot{a}_{30:\overline{35}|}} = \frac{N_{30+35}}{N_{30} - N_{30+35}} = \frac{N_{65}}{N_{30} - N_{65}}$$

$${}_{35}P({}_{35}|\ddot{a}_{30}) = \frac{1297.4145}{59494.7999 - 1297.4145} = 0.02229$$

La prima neta nivelada es:

$$500000 * 0.02229 = 11146.67$$

```
> 500000 * (axn(conmutadosMEX2000, x = 30, m = 35)
+          / axn(conmutadosMEX2000, x = 30, n = 35))

[1] 11146.67
```

Conclusiones

En la presente tesina se exponen los temas propuestos en el programa de estudios por competencias CÁLCULO ACTUARIAL de una manera teórica y se proponen ejercicios para resolver de manera práctica. También se explican los procedimientos para la solución de ejercicios mediante el uso del *software* estadístico *R Project*, los cuales se pueden realizar de manera sencilla, ya que las instrucciones no son complicadas.

Durante el proceso de investigación y elaboración de este proyecto se descubrió que no existen muchas fuentes bibliográficas para cubrir los temas de Cálculo Actuarial.

En la elaboración de esta tesina se encontró que es importante para cualquier actuario conocer y dominar los diferentes *softwares* comerciales y de libre acceso, así como de sus diferentes paqueterías con el fin de facilitar los diferentes procesos de la profesión actuarial. Por esta razón es importante tener un material para el aprendizaje de *R Project* en español, comprensible y sencillo, que sin abundar en terminología brinde el soporte necesario para el desarrollo de investigaciones así como para el uso en el campo escolar y laboral.

Dado que R tiene múltiples aplicaciones que se incrementan con las contribuciones de usuarios de todo el mundo, quienes aportan nuevas funciones que podrían resolver las diferentes problemáticas del ámbito actuarial, por ejemplo: estadística, econometría, series de tiempo, finanzas, demografía, etcétera. Se podría concluir que con la implementación de las diferentes librerías existentes se podría utilizar R para cada una de las unidades de aprendizaje que conforman el plan de estudios de la licenciatura en actuaria. Como para la asignatura de Cálculo Actuarial, utilizaremos la librería *lifecontingencies*, que es capaz de realizar cálculos matemáticos financieros y actuariales, con la cual es posible resolver problemas de anualidades ciertas, anualidades contingentes y seguros de vida con el *software* R. Con la ayuda de ejemplos aplicados, se muestra cómo el paquete *lifecontingencies* puede

ser una herramienta útil para ejecutar cálculos rutinarios para la matemática actuarial de contingencias de vida.

Se espera que el alumno adquiera interés en estas aplicaciones pues el objetivo de este material es un acercamiento a los usos comunes y sencillos del paquete y con ello se incorpore el uso de este *software* a la práctica diaria. De esta manera, estará mucho mejor preparado cuando se enfrente al mundo laboral. Además de que apoya la formación profesional de cada estudiante sin importar a que área de acentuación se enfocaque.

Es importante mencionar, que al aprender a manejar el *software* R también se aprende a manejar STATA, SAS y PYTHON ya que su sintaxis es muy similar, y el manejo de estos programas se ha popularizado en la ciencia de datos y el análisis estadístico, y de la misma manera el uso y conocimiento de estos programas aparecen como requisito en la mayoría de las ofertas laborales para actuarios.

Anexos

Anexo A

Tabla de mortalidad MEX 2000

x	l_x	p_x	e_x
0	100000.000000	0.988673	74.268332
1	98867.300000	0.999400	74.119207
2	98807.979620	0.999460	73.163705
3	98754.623311	0.999510	72.203235
4	98706.233546	0.999540	71.238632
5	98660.828678	0.999570	70.271417
6	98618.404522	0.999590	69.301646
7	98577.970976	0.999600	68.330072
8	98538.539788	0.999610	67.357415
9	98500.109757	0.999620	66.383694
10	98462.679715	0.999630	65.408930
11	98426.248524	0.999630	64.433140
12	98389.830812	0.999650	63.456989
13	98355.394371	0.999574	62.479207
14	98313.494973	0.999482	61.505834
15	98262.568583	0.999402	60.537711
16	98203.807567	0.999332	59.573934
17	98138.207423	0.999270	58.613756
18	98066.566532	0.999246	57.656575

ANEXO A. TABLA DE MORTALIDAD MEX 2000

x	l_x	p_x	e_x
19	97992.624341	0.999243	56.700081
20	97918.443924	0.999243	55.743036
21	97844.319662	0.999228	54.785265
22	97768.783847	0.999180	53.827592
23	97688.613444	0.999237	52.871767
24	97614.077032	0.999259	51.912139
25	97541.745001	0.999266	50.950634
26	97470.149360	0.999280	49.988059
27	97399.970853	0.999320	49.024077
28	97333.738873	0.999236	48.057436
29	97259.375896	0.999185	47.094180
30	97180.109505	0.999136	46.132593
31	97096.145890	0.999061	45.172486
32	97004.972609	0.998930	44.214943
33	96901.177289	0.998916	43.262303
34	96796.136412	0.998902	42.309251
35	96689.854255	0.998888	41.355757
36	96582.335137	0.998874	40.401796
37	96473.583427	0.998860	39.447340
38	96363.603542	0.998673	38.492361
39	96235.729040	0.998492	37.543508
40	96090.605561	0.998307	36.600209
41	95927.924166	0.998107	35.662279
42	95746.332605	0.997880	34.729915
43	95543.350380	0.997745	33.803699
44	95327.900125	0.997617	32.880099
45	95100.733739	0.997457	31.958639
46	94858.892573	0.997225	31.040117
47	94595.659146	0.996880	30.126493

ANEXO A. TABLA DE MORTALIDAD MEX 2000

x	l_x	p_x	e_x
48	94300.520690	0.996822	29.220782
49	94000.833635	0.996745	28.313942
50	93694.860922	0.996549	27.406405
51	93371.519956	0.996135	26.501312
52	93010.639032	0.995474	25.604137
53	92589.672880	0.994910	24.720548
54	92118.391445	0.994167	23.847019
55	91581.064867	0.993299	22.986935
56	90967.380152	0.992362	22.142010
57	90272.571302	0.991411	21.312432
58	89497.220187	0.989494	20.497070
59	88556.962392	0.987621	19.714699
60	87460.715754	0.985795	18.961806
61	86218.336287	0.984020	18.235040
62	84840.567273	0.982300	17.531168
63	83338.889233	0.981154	16.847061
64	81768.284526	0.979568	16.170659
65	80097.594937	0.978045	15.507949
66	78339.052240	0.977086	14.856069
67	76543.991197	0.975331	14.204465
68	74655.727478	0.973980	13.563737
69	72713.185449	0.972663	12.926094
70	70725.425098	0.971279	12.289386
71	68694.120164	0.969732	11.652787
72	66614.886535	0.967923	11.016503
73	64478.080820	0.962898	10.381590
74	62085.815065	0.958295	9.781609
75	59496.526148	0.954337	9.207305
76	56779.736274	0.949887	8.647855

ANEXO A. TABLA DE MORTALIDAD MEX 2000

x	l_x	p_x	e_x
77	53934.333350	0.944883	8.104088
78	50961.634699	0.939263	7.576816
79	47866.377892	0.932953	7.066767
80	44657.080854	0.925875	6.574623
81	41346.874735	0.917944	6.100984
82	37954.115582	0.909066	5.646357
83	34502.796036	0.899139	5.211163
84	31022.809525	0.888054	4.795726
85	27549.930090	0.875696	4.400264
86	24125.363580	0.861941	4.024876
87	20794.640009	0.846661	3.669549
88	17606.010705	0.829733	3.334142
89	14608.288080	0.810997	3.018331
90	11847.277808	0.790349	2.721754
91	9363.484168	0.767653	2.443737
92	7187.906712	0.742796	2.183387
93	5339.148354	0.715680	1.939417
94	3821.121694	0.686236	1.709894
95	2622.191267	0.654426	1.491700
96	1716.030142	0.620259	1.279402
97	1064.383140	0.583801	1.062690
98	621.387941	0.545184	0.820295
99	338.770763	0.504621	0.504621

Anexo B

Conmutados de MEX 2000 al 10 % de interés

x	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
0	100000.0000	100000.0000	1082162.9085	1029.7273	1621.5538	14674.8537
1	98867.3000	89879.3636	982162.9085	49.0251	591.8265	13053.2999
2	98807.9796	81659.4873	892283.5449	40.0874	542.8014	12461.4734
3	98754.6233	74195.8102	810624.0576	33.0509	502.7140	11918.6720
4	98706.2335	67417.6856	736428.2475	28.1929	469.6631	11415.9580
5	98660.8287	61260.6123	669010.5618	23.9473	441.4703	10946.2949
6	98618.4045	55667.5184	607749.9495	20.7488	417.5230	10504.8246
7	98577.9710	50586.0861	552082.4312	18.3949	396.7742	10087.3016
8	98538.5398	45968.9560	501496.3451	16.2981	378.3792	9690.5275
9	98500.1098	41773.6620	455527.3890	14.4309	362.0811	9312.1482
10	98462.6797	37961.6254	413753.7271	12.7689	347.6502	8950.0671
11	98426.2485	34497.7997	375792.1016	11.6038	334.8813	8602.4169
12	98389.8308	31350.0322	341294.3020	9.9750	323.2775	8267.5355
13	98355.3944	28490.0543	309944.2697	11.0334	313.3025	7944.2580
14	98313.4950	25889.0159	281454.2154	12.1914	302.2691	7630.9555
15	98262.5686	23523.2777	255565.1995	12.7881	290.0777	7328.6864
16	98203.8076	21372.0098	232041.9218	12.9786	277.2896	7038.6087

ANEXO B. CONMUTADOS DE MEX 2000 AL 10% DE INTERÉS

x	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
17	98138.2074	19416.1212	210669.9121	12.8852	264.3110	6761.3191
18	98066.5665	17638.1340	191253.7909	12.0901	251.4257	6497.0081
19	97992.6243	16022.5771	173615.6569	11.0264	239.3356	6245.5824
20	97918.4439	14554.9528	157593.0798	10.0165	228.3091	6006.2468
21	97844.3197	13221.7588	143038.1270	9.2793	218.2927	5777.9377
22	97768.7838	12010.5014	129816.3683	8.9533	209.0134	5559.6450
23	97688.6134	10909.6844	117805.8668	7.5674	200.0601	5350.6316
24	97614.0770	9910.3275	106896.1824	6.6760	192.4928	5150.5715
25	97541.7450	9002.7127	96985.8549	6.0073	185.8168	4958.0787
26	97470.1494	8178.2770	87983.1422	5.3531	179.8096	4772.2619
27	97399.9709	7429.4442	79804.8651	4.5927	174.4565	4592.4523
28	97333.7389	6749.4475	72375.4209	4.6878	169.8638	4417.9958
29	97259.3759	6131.1735	65625.9734	4.5426	165.1760	4248.1321
30	97180.1095	5569.2515	59494.7999	4.3744	160.6333	4082.9561
31	97096.1459	5058.5815	53925.5484	4.3182	156.2589	3922.3228
32	97004.9726	4594.3923	48866.9669	4.4691	151.9407	3766.0639
33	96901.1773	4172.2512	44272.5746	4.1116	147.4716	3614.1231
34	96796.1364	3788.8440	40100.3235	3.7820	143.3601	3466.6515
35	96689.8543	3440.6217	36311.4795	3.4782	139.5781	3323.2914
36	96582.3351	3124.3598	32870.8578	3.1982	136.1000	3183.7133
37	96473.5834	2837.1288	29746.4980	2.9403	132.9018	3047.6133
38	96363.6035	2576.2677	26909.3691	3.1079	129.9615	2914.7116
39	96235.7290	2338.9537	24333.1014	3.2065	126.8535	2784.7501
40	96090.6056	2123.1150	21994.1477	3.2677	123.6471	2657.8966
41	95927.9242	1926.8369	19871.0327	3.3159	120.3794	2534.2495
42	95746.3326	1748.3540	17944.1958	3.3696	117.0635	2413.8701
43	95543.3504	1586.0432	16195.8418	3.2514	113.6939	2296.8067
44	95327.9001	1438.6060	14609.7986	3.1165	110.4425	2183.1128
45	95100.7337	1304.7071	13171.1926	3.0162	107.3260	2072.6702

ANEXO B. CONMUTADOS DE MEX 2000 AL 10% DE INTERÉS

x	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
46	94858.8926	1183.0811	11866.4855	2.9846	104.3097	1965.3442
47	94595.6591	1072.5437	10683.4043	3.0421	101.3251	1861.0345
48	94300.5207	971.9976	9610.8606	2.8082	98.2830	1759.7094
49	94000.8336	880.8260	8638.8630	2.6064	95.4748	1661.4263
50	93694.8609	798.1445	7758.0370	2.5040	92.8684	1565.9515
51	93371.5200	723.0819	6959.8925	2.5406	90.3644	1473.0831
52	93010.6390	654.8065	6236.8106	2.6942	87.8237	1382.7187
53	92589.6729	592.5844	5582.0041	2.7420	85.1295	1294.8950
54	92118.3914	535.9711	4989.4196	2.8421	82.3875	1209.7654
55	91581.0649	484.4043	4453.4486	2.9509	79.5454	1127.3780
56	90967.3802	437.4167	3969.0442	3.0373	76.5945	1047.8326
57	90272.5713	394.6142	3531.6276	3.0812	73.5572	971.2382
58	89497.2202	355.6590	3137.0133	3.3969	70.4760	897.6810
59	88556.9624	319.9295	2781.3543	3.6004	67.0791	827.2050
60	87460.7158	287.2446	2461.4248	3.7094	63.4787	760.1259
61	86218.3363	257.4221	2174.1802	3.7396	59.7694	696.6472
62	84840.5673	230.2805	1916.7581	3.7054	56.0297	636.8778
63	83338.8892	205.6404	1686.4776	3.5232	52.3243	580.8481
64	81768.2845	183.4227	1480.8372	3.4070	48.8011	528.5238
65	80097.5949	163.3409	1297.4145	3.2601	45.3941	479.7227
66	78339.0522	145.2316	1134.0736	3.0253	42.1340	434.3285
67	76543.9912	129.0034	988.8420	2.8931	39.1087	392.1945
68	74655.7275	114.3828	859.8386	2.7057	36.2156	353.0859
69	72713.1854	101.2786	745.4559	2.5170	33.5099	316.8703
70	70725.4251	89.5545	644.1772	2.3383	30.9930	283.3603
71	68694.1202	79.0749	554.6227	2.1759	28.6547	252.3673
72	66614.8865	69.7105	475.5477	2.0328	26.4789	223.7126
73	64478.0808	61.3403	405.8373	2.0690	24.4460	197.2338
74	62085.8151	53.6950	344.4969	2.0358	22.3771	172.7878

ANEXO B. CONMUTADOS DE MEX 2000 AL 10% DE INTERÉS

x	l_x	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
75	59496.5261	46.7778	290.8020	1.9418	20.3413	150.4107
76	56779.7363	40.5835	244.0241	1.8489	18.3995	130.0694
77	53934.3334	35.0452	203.4406	1.7560	16.5506	111.6699
78	50961.6347	30.1033	168.3954	1.6622	14.7946	95.1193
79	47866.3779	25.7045	138.2921	1.5667	13.1324	80.3247
80	44657.0809	21.8010	112.5877	1.4691	11.5657	67.1922
81	41346.8747	18.3500	90.7867	1.3688	10.0966	55.6265
82	37954.1156	15.3129	72.4368	1.2659	8.7278	45.5299
83	34502.7960	12.6550	57.1238	1.1604	7.4619	36.8021
84	31022.8095	10.3442	44.4688	1.0527	6.3015	29.3402
85	27549.9301	8.3511	34.1247	0.9437	5.2488	23.0387
86	24125.3636	6.6482	25.7736	0.8344	4.3051	17.7898
87	20794.6400	5.2094	19.1254	0.7262	3.4707	13.4847
88	17606.0107	4.0096	13.9160	0.6206	2.7445	10.0140
89	14608.2881	3.0245	9.9064	0.5197	2.1239	7.2695
90	11847.2778	2.2299	6.8819	0.4250	1.6042	5.1456
91	9363.4842	1.6021	4.6520	0.3384	1.1792	3.5413
92	7187.9067	1.1181	3.0499	0.2614	0.8408	2.3621
93	5339.1484	0.7550	1.9318	0.1951	0.5794	1.5213
94	3821.1217	0.4912	1.1768	0.1401	0.3842	0.9419
95	2622.1913	0.3064	0.6856	0.0963	0.2441	0.5576
96	1716.0301	0.1823	0.3791	0.0629	0.1479	0.3135
97	1064.3831	0.1028	0.1968	0.0389	0.0849	0.1657
98	621.3879	0.0546	0.0940	0.0226	0.0460	0.0807
99	338.7708	0.0270	0.0394	0.0122	0.0235	0.0347
100	170.9508	0.0124	0.0124	0.0113	0.0113	0.0113

Anexo C

Fórmulas de Cálculo Actuarial

- Tablas de mortalidad

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$d_{x+n} = l_x - l_{x+n}$$

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1}$$

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

$$M_x = \sum_{t=0}^w C_{x+t}$$

$$R_x = \sum_{t=0}^w M_{x+t}$$

$$N_x = \sum_{t=0}^w D_{x+t}$$

■ Anualidades

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot (1+i)^{-n}$$

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}v^{x+n}}{l_xv^x}$$

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x+m} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}}$$

$${}_m|\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

$${}_m|a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$a_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_m|_n\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$${}_m|_na_x = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

■ Seguros

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$${}_m|A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

ANEXO C. FÓRMULAS DE CÁLCULO ACTUARIAL

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$${}_m|A_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = {}_nE_x + A_{x:\overline{n}|}^1 = A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}} + A_{x:\overline{n}|}^1$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$

$$(DA)_{x:\overline{n}|}^1 = \frac{1}{D_x} [nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})]$$

Bibliografía

- Aguirre, H. M. V. (2012). *Matemáticas financieras*. CENGAGE LEARNING.
- Amel, J. A. L. (2014). *Administración de un portafolio de deuda con duración y convexidad*. Instituto Politécnico Nacional.
- Arriaga, M., y Sanchez, J. A. (2000). *Elementos de cálculo actuarial*. UNAM.
- Bowers, N. L., Jones, D. A., Gerber, H. U., Nesbitt, C. J., y Hickman, J. C. (1997). *Actuarial mathematics, 2nd edition*. Society of Actuaries.
- Broverman, S. (2008). *Mathematics of investment and credit*. ACTEX Publications.
- Charpentier, A. (2014). *Computational actuarial science*. Cambridge University Press.
- Dutang, C., Goulet, V., y Pigeon, M. (2008). actuar: An r package for actuarial science. *Journal of Statistical Software*, 25(7), 38. Descargado de <http://www.jstatsoft.org/v25/i07>
- Ferstl, R., y Hayden, J. (2010). Zero-coupon yield curve estimation with the package termstrc. *Journal of Statistical Software*, 36(1), 1–34. Descargado de <http://www.jstatsoft.org/v36/i01/>
- Gesmann, M., y Zhang, Y. (2011). Chainladder: Mack, bootstrap, munich and multivariate-chain-ladder methods [Manual de software informático]. (R package version 0.1.4-3.4)
- Gil, J. A., Heras, A., y Vilar, J. L. (1999). *Matemática de los seguros de vida*. MAPFRE.
- Guirrerri, S. (2010). *Simulating the term structure of interest rates with arbitrary marginals* (Tesis Doctoral, University of Palermo - Department of Statistics and Mathematics "S. Vianelli", Palermo). Descargado de <http://www.guirrerri.host22.com>
- Hyndman, R. J., Booth, H., Tickle, L., y Maindonald, J. (2011). demography: Forecasting mortality, fertility, migration and population data [Manual de software informático]. Descargado de <http://CRAN.R-project.org/package=demography> (R package version 1.09-1)
- IBM Corp. (2012). *Spss, release 21.0 advanced statistical procedures companion*. Armonk, NY: IBM Corp.
- Martínez, A. C. (2011). *Matemáticas financieras*. Descarga-

- do de http://fcasua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/2012/contaduria/1/mate_financieras.pdf
- Martínez, M. L. (2005). *Cálculo actuarial de la reserva de riesgos en curso para el seguro de vida tradicional de acuerdo a la legislación mexicana*. UNAM.
- Matías, S. A. (2009). *Introducción al software estadístico r*. México: Ediciones ACATLAN.
- Palacios, H. E. (1996). *Introduccion al cálculo actuarial*. MAPFRE S.A.
- Paradis, E. (2003). R para principiantes [Manual de software informático]. France. Descargado de http://cran.r-project.org/doc/contrib/rdebuts_es.pdf
- Quintana, L., y Mendoza, M. A. (2016). *Econometría aplicada utilizando r*. México: UNAM.
- Riffe, T. (2011). Lifetable: Lifetable, a package with a small set of useful lifetable functions. [Manual de software informático]. Descargado de <http://sites.google.com/site/timriffepersonal/r-code/lifeable> (R package version 1.0.1)
- SAS Institute Inc. (2011). The sas system, version 9.3 [Manual de software informático]. Cary, NC. Descargado de <http://www.sas.com/>
- Spedicato, G. A. (2013). The lifecontingencies package: Performing financial and actuarial mathematics calculations in r. *Journal of Statistical Software*, 55(10), 1–36. Descargado de <http://www.jstatsoft.org/v55/i10/>
- Spedicato, G. A., Kainhofer, R., Owens, K. J., Dutang, C., Schirmacher, E., y Clemente, G. P. (2017). Financial and actuarial mathematics for life contingencies. *Journal of Statistical Software*(10), 1–68. Descargado de <https://cran.r-project.org/web/packages/lifecontingencies/lifecontingencies.pdf>
- SunGard. (2012). iworks prophet [Manual de software informático]. Descargado de <http://www.prophet-web.com/>
- Team, R. D. C. (2012). R: A language and environment for statistical computing [Manual de software informático]. Vienna, Austria. Descargado de <http://www.R-project.org/> (ISBN 3-900051-07-0)
- The MathWorks, Inc. (2011). Matlab – The language of technical computing, ver-

sion r2011b [Manual de software informático]. Natick, Massachusetts. Descargado de <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

Towers Watson. (2011). Moses: Risk and financial modelling software for life insurers [Manual de software informático]. Descargado de <http://www.towerswatson.com/en/Services/Tools/moSes/>