



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO**



FACULTAD DE ECONOMÍA

***“POTENCIA DE LA PRUEBA ESTADÍSTICA DE NORMALIDAD
JARQUE-BERA FRENTE A LAS PRUEBAS DE ANDERSON-DARLING,
JARQUE-BERA ROBUSTA, CHI-CUADRADA, CHEN-SHAPIRO Y
SHAPIRO-WILK.”***

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARIA

PRESENTAN:

**MARIANA CARMONA ARCE
HANNE CARRIÓN ROSALES**

ASESOR:

DR. EN C. MIGUEL ÁNGEL DÍAZ CARREÑO

REVISORES:

**M. EN E. JUVENAL ROJAS MERCED
M. EN E. ELÍAS EDUARDO GUTIÉRREZ ALVA**

TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO

SEPTIEMBRE 2015

DEDICATORIA

A la memoria de mi abuelo Salvador Rosales y a mi adorada Bobe. Gracias por todo el amor y apoyo incondicional que me brindaron, sin ustedes no hubiera sido posible este trabajo. ¡Los llevo siempre en mi corazón!

A mi mamá, que gracias a tú enorme esfuerzo en seguir adelante, la gran paciencia que me brindaste en todo momento y tú amor incondicional, me han permitido culminar una etapa muy importante en mi vida. Este logro también es tuyo. ¡Gracias por todo!

A mi hermana Daphne, tu tenacidad y lucha insaciable han hecho que seas mi gran modelo a seguir. Gracias por ser la fuerza que necesito en los momentos difíciles estando siempre a mi lado y depositar tú entera confianza en cada reto que se me presenta. Estoy inmensamente agradecida de tenerte en mi vida, ¡Esto es para ti!

A mi cuñado Dante, por ser parte fundamental en mi vida, impulsándome en cada uno de los pasos que recorrí para alcanzar este logro tan importante. Te agradezco que hayas creído en mí en todo momento y por siempre haberme dado buenos consejos. Me complace poder compartir el cúmulo de todo este esfuerzo contigo.

A mi hermano David con mucho cariño, gracias por darme palabras de aliento para culminar este trabajo, y por recorrer juntos el camino hacia la madurez, ¡Te quiero!. A mis sobrinos Isabella, Andrés e Iker porque llenan de alegría cada día de mi vida, los amo con todo mi corazón.

Con un cariño especial a mi amiga Mariana, que comparte conmigo este proyecto, además de sueños, metas y memorias.

A mi familia y amigos, que me incentivaron, motivaron y brindaron su apoyo incondicional, gracias por caminar a mi lado y darme la fuerza necesaria para culminar este logro. Los quiero mucho.

Hanne Carrión Rosales

DEDICATORIA

Agradezco a mis padres, Irma y Juan Fabián, por el apoyo que recibí en todo momento a través de los valores que me han inculcado y por haberme dado la oportunidad de tener una buena educación en el transcurso de mi vida.

Te agradezco Alejandra por hacerme fuerte y persistir ante las adversidades en el camino de mi carrera.

A mi hija, Viviana, te agradezco por ser mi fuente de inspiración diaria, por ser el impulso más grande y constante que he tenido en mi crecimiento y formación profesional; por ser paciente y comprensiva en todo momento, sobretodo amorosa cuando lo necesito. Todo este esfuerzo es dedicado a ti hija, te amo.

Quiero agradecer al doctor, Miguel Ángel, por su paciencia frente a mis inconsistencias y por ser quien creyó en mi para realizar este trabajo.

Hanne, a ti te agradezco por todo el apoyo, impulso, motivación, paciencia y cariño que ha sido pieza fundamental desde el comienzo de mi formación, tu compañía y aliento constantes siempre me fortalecieron y me dieron el impulso que necesitaba para continuar. Te agradezco por confiar y creer en mí siempre y por elegirme para formar parte de este proyecto.

Agradezco a mi familia Carmona, por heredarme esa fortaleza de carácter. Agradezco también a mi familia Arce, por hacerme creer en mis capacidades.

Te agradezco Dios, por iluminar mi camino a lo largo de la carrera y mantener mis energías para continuar.

Mariana Carmona Arce

AGRADECIMIENTOS

En primera instancia, a la Universidad Autónoma del Estado de México, por habernos brindado la oportunidad de estudiar y abrirnos las puertas del conocimiento para cumplir nuestro gran sueño y haber tenido la posibilidad de superarnos profesionalmente.

De igual manera con nuestro asesor, el Doctor Miguel Ángel Díaz Carreño, por su paciencia, dedicación, motivación, criterio y aliento, cuya experiencia y educación fueron un gran impulso durante estos años.

A nuestros revisores, M. en E. Juvenal Rojas y M. en E. Elías Gutiérrez, por brindarnos sus observaciones y correcciones que nos permitieron enriquecer este trabajo.

Finalmente, a nuestros profesores, les agradecemos por compartir sus enseñanzas, conocimientos y consejos que hicieron posibles nuestra formación.

Hanne y Mariana

ÍNDICE GENERAL

Página

INTRODUCCIÓN	1
1. REVISIÓN DE LITERATURA	5
1.1. POTENCIA DE LAS PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE	5
1.2. RELEVANCIA DE LAS PRUEBAS DE NORMALIDAD	12
2. METODOLOGÍA ESTADÍSTICA.....	22
2.1. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD	22
2.1.1. NORMAL	22
2.1.2. BETA	29
2.1.3. UNIFORME	32
2.1.4. PARETO.....	34
2.1.5. CAUCHY	36
2.1.6. LAPLACE	38
2.1.7. TRIANGULAR	39
2.1.8. GAMMA.....	42
2.1.9. T STUDENT	45
2.1.10. EXPONENCIAL.....	47
2.1.11. CHI-CUADRADA.....	50
2.1.12. LOGNORMAL	52
2.1.13. LOGÍSTICA	54
2.1.14. WEIBULL.....	56
2.1.15. RAYLEIGH	58
2.1.16. RICE.....	60
2.1.17. CARDIOID.....	64
2.2. ESTADÍSTICA INFERENCIAL	66
2.2.1. CONCEPTOS BÁSICOS.....	67
2.2.1.1. HIPÓTESIS ESTADÍSTICA	67
2.2.1.1.1. HIPÓTESIS NULA.....	67
2.2.1.1.2. HIPÓTESIS ALTERNATIVA.....	67
2.2.1.2. PRUEBA DE HIPÓTESIS.....	68
2.2.1.3. ERROR TIPO I.....	69
2.2.1.4. ERROR TIPO II.....	69
2.2.1.5. NIVEL DE CONFIANZA.....	70
2.2.1.6. POTENCIA ESTADÍSTICA.....	70
2.2.1.7. ESTADÍSTICO DE PRUEBA	72
2.2.1.8. REGIÓN DE ACEPTACIÓN	72
2.2.1.9. REGIÓN DE RECHAZO.....	73
2.2.1.10. P- VALOR.....	74
2.3. PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE	75
2.3.1. JARQUE BERA	77
2.3.2. JARQUE BERA ROBUSTA.....	80
2.3.3. SHAPIRO WILK	84
2.3.4. CHEN SHAPIRO	87
2.3.5. PEARSON.....	92
2.3.6. ANDERSON DARLING	94

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE POTENCIA ESTADÍSTICA	98
3.1. INTRODUCCIÓN	98
3.2. TASA EMPÍRICA DEL ERROR TIPO I.....	105
3.3. COMPARATIVO DE POTENCIA	108
3.3.1. PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA	108
3.3.1.1. DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS MESOCÚRTICAS	110
3.3.1.2. DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS	112
3.3.1.3. DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS PLATICÚRTICAS	113
3.3.1.4. DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS	114
3.3.1.5. DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICA PLATICÚRTICA	115
3.3.2. RANGO DE POTENCIA ESTADÍSTICA	116
CONCLUSIÓN	120
BIBLIOGRAFÍA	124
ANEXOS	133
ANEXO 1. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE SHAPIRO WILK EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.	134
ANEXO 2. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE JARQUE-BERA ROBUSTA EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.	140
ANEXO 3. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE PEARSON EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.	146
ANEXO 4. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE JARQUE-BERA EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.	152
ANEXO 5. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE CHEN-SHAPIRO EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.	158
ANEXO 6. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE ANDERSON-DARLING EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.	164
ANEXO 7. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA LA CLASIFICACIÓN DE DISTRIBUCIONES ALTERNATIVAS, CON NIVELES DE SIGNIFICANCIA DEL 1% Y 10%.....	170
ANEXO 8. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS MESOCÚRTICAS.....	179
ANEXO 9. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS.	188
ANEXO 10. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS PLATICÚRTICAS.	200
ANEXO 11. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS.....	215
ANEXO 12. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICAS PLATICÚRTICAS.....	242

ÍNDICE DE TABLAS

	Página
Tabla 1. Contraste de Hipótesis conforme la toma de decisión sobre la Hipótesis Nula.....	71
Tabla 2. Ventajas y desventajas de las Pruebas No Paramétricas.....	75
Tabla 3. Clasificación de las distribuciones alternativas de acuerdo con sus niveles de Asimetría y Curtosis.....	98
Tabla 4. Representación de la matriz en el contraste de hipótesis para cada distribución y tamaños de muestra.....	102
Tabla 5. Representación de la matriz con el valor promedio de la potencia estadística con cada distribución para todos los tamaños de muestra empleados en el estudio.	103
Tabla 6. Tasa Empírica del Error Tipo I para distintos niveles de significancia.	106
Tabla 7. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad ($\alpha = 0.05$).....	109
Tabla 8. Rango de Potencia basado en los Tipos de Distribuciones Alternativas.....	117
Tabla 9. Rango de Potencia basado en distribuciones Simétricas y Asimétricas.	118
Tabla 10. Rango de Potencia basado en el Tamaño de Muestra.....	119
Tabla 11. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad ($\alpha = 0.01$).....	171
Tabla 12. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad ($\alpha = 0.10$).....	175
Tabla 13. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Weibull</i> (4, 5).....	179
Tabla 14. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Rice</i> (2, 4).....	182
Tabla 15. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Logística</i> (9, 3).	185
Tabla 16. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (4).	188
Tabla 17. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Laplace</i> (0, 1).....	191
Tabla 18. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (1).	194
Tabla 19. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Cauchy</i> (0, 0.5).....	197
Tabla 20. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (3, 15).	200
Tabla 21. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (0, 20).	203
Tabla 22. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (2, 2)	206
Tabla 23. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Triangular</i> (0, 1, 0.5).	209
Tabla 24. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Cardioid</i> (3, 0.3).....	212
Tabla 25. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Chi – cuadrada</i> (7).....	215
Tabla 26. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (1, 6).....	218
Tabla 27. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Pareto</i> (0.5, 4).....	221
Tabla 28. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Exponencial</i> (1).....	224
Tabla 29. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Lognormal</i> (0, 1).	227
Tabla 30. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Gamma</i> (2, 9).....	230
Tabla 31. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Gamma</i> (6.5, 2.8).	233
Tabla 32. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Rayleigh</i> (0.5).	236
Tabla 33. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Weibull</i> (1, 2).....	239
Tabla 34. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución <i>Triangular</i> (0, 1, 0.9).....	242

ÍNDICE DE FIGURAS

Página

Figura 1. Histograma del estadístico JB para diferentes tamaños de muestra junto con la f.d.p. de una distribución χ_2^2	7
Figura 2. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Normales con diferentes valores con respecto a su media (μ), con igual desviación estándar ($s = 1$).....	23
Figura 3. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Normales con diferentes valores con respecto a su desviación estándar (s), con igual media ($\mu = 0$).....	24
Figura 4. Comparación de distribuciones Normales con diferentes valores con respecto a su desviación estándar (s), y su media (μ).....	25
Figura 5. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Beta con distintos parámetros de forma (λ) y escala (β).....	30
Figura 6. Comparación de una distribución Beta(2, 2) contra una distribución Normal.....	31
Figura 7. Comparación de una distribución Beta(1, 6) contra una distribución Normal.....	31
Figura 8. Función de densidad de una distribución Uniforme(3, 15)	32
Figura 9. Comparación de una distribución Uniforme(3, 15) contra una distribución Normal.....	33
Figura 10. Comparación de una distribución Uniforme(0, 20) contra una distribución Normal.....	33
Figura 11. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Pareto con distintos parámetros de forma (β) y de localización (θ).....	34
Figura 12. Comparación de una distribución Pareto(0.5, 4) contra una distribución Normal.....	35
Figura 13. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Cauchy con distintos parámetros de localización (a) y forma (b).....	36
Figura 14. Comparación de una distribución Cauchy(0, 0.5) contra una distribución Normal.....	37
Figura 15. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Laplace con distintos parámetros de localización (λ) y escala (β).....	38
Figura 16. Comparación de una distribución Laplace(0, 1) contra una distribución Normal.....	39
Figura 17. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Triangulares con distintos parámetros (a , b y c).....	40
Figura 18. Comparación de una distribución Triangular(0, 1, 0.5) contra una distribución Normal.....	41
Figura 19. Comparación de una distribución Triangular(0, 1, 0.9) contra una distribución Normal.....	42
Figura 20. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Gamma con distintos parámetros de forma (λ) y escala (β).....	43
Figura 21. Comparación de una distribución Gamma(6.5, 2.8) contra una distribución Normal.....	44
Figura 22. Comparación de una distribución Gamma(2, 9) contra una distribución Normal.....	44
Figura 23. Comparación de funciones de densidad de distribuciones t Student con distintos grados de libertad (gl).....	46
Figura 24. Comparación de una distribución t – Student(1) contra una distribución Normal.....	47
Figura 25. Comparación de una distribución t – Student(4) contra una distribución Normal.....	47
Figura 26. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Exponenciales con distintos valores del parámetro de forma (λ).....	49
Figura 27. Comparación de una distribución Exponencial(1) contra una distribución Normal.....	49
Figura 28. Clasificación de la Prueba Chi-Cuadrada.....	50
Figura 29. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Chi cuadrada con distintos grados de libertad (gl).....	51
Figura 30. Comparación de una distribución Chi cuadrada(2) contra una distribución Normal.....	52
Figura 31. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Lognormal con distintos parámetros (μ y σ).....	53
Figura 32. Comparación de una distribución Lognormal(0, 1) contra una distribución Normal.....	54
Figura 33. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Logísticas con distintos parámetros de localización (λ) y escala (β).....	55
Figura 34. Comparación de una distribución Logística(9, 3) contra una distribución Normal.....	56
Figura 35. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Weibull con distintos parámetros de escala (b) y forma (a).....	57
Figura 36. Comparación de una distribución Weibull(5, 4) contra una distribución Normal.....	58

Figura 37. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Rayleigh con diferentes valores del parámetro de escala (s).	59
Figura 38. Comparación de una distribución <i>Rayleigh</i> (0.5) contra una distribución Normal.	60
Figura 39. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Rice con diferentes valores en los parámetros $\sigma(s)$ y v	63
Figura 40. Comparación de la distribución <i>Rice</i> (2,4) contra una distribución Normal.	63
Figura 41. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Cardioid con diferentes valores en los parámetros (μ y ρ).	65
Figura 42. Comparación de la distribución <i>Cardioid</i> (3,0.3) contra la distribución Normal.	65
Figura 43. Clasificación de la Inferencia Estadística.	66
Figura 44. Contraste de hipótesis unilateral con dos niveles de significancia: a) 5% ($\alpha = 0.05$) y b) 10% ($\alpha = 0.10$) para comparar la potencia estadística.	70
Figura 45. Comparativo de la relación entre los errores Tipo I y Tipo II (incisos a y c); así como la Potencia Estadística y el Nivel de Significancia (incisos b y d), mediante un contraste de hipótesis unilateral con 5% de significancia ($\alpha = 0.05$) y dos tamaños de muestra ($n = 200, 20$).	72
Figura 46. Región de aceptación y rechazo con sus respectivos Valores Críticos (VC).	73
Figura 47. Criterio de decisión sobre la Hipótesis Nula mediante el uso del p valor: a) Rechazar la hipótesis nula ($\alpha \geq p \text{ valor}$) y b) No Rechazar la hipótesis nula ($\alpha < p \text{ valor}$).	74
Figura 48. Contraste de Normalidad del Estadístico Jarque Bera (JB).	79
Figura 49. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Jarque-Bera (JB).	80
Figura 50. Contraste de Normalidad del Estadístico Jarque-Bera Robusta (RJB).	83
Figura 51. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Jarque-Bera Robusta (RJB).	84
Figura 52. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Shapiro-Wilk (SW).	87
Figura 53. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Chen-Shapiro (QH).	91
Figura 54. Contraste de Normalidad del Estadístico Pearson (P).	93
Figura 55. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Pearson (P).	94
Figura 56. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Anderson-Darling (AD).	97
Figura 57. Diagrama de Flujo para el Proceso de la Simulación Montecarlo para las pruebas de bondad de ajuste.	100
Figura 58. Organigrama para el Proceso de Simulación de la Prueba Anderson y Darling (AD).	101
Figura 59. Aplicación del código que se empleó en R Project para emplear las funciones de cada prueba de bondad de Ajuste, en el proceso de simulación.	104
Figura 60. Tasa Empírica del Error Tipo I con un nivel de significancia del 10% ($\alpha = 0.10$).	107
Figura 61. Tasa Empírica del Error Tipo I con un nivel de significancia del 5% ($\alpha = 0.05$).	107
Figura 62. Tasa Empírica del Error Tipo I con un nivel de significancia del 1% ($\alpha = 0.01$).	108
Figura 63. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas mesocúrticas ($\alpha = 0.05$).	111
Figura 64. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.05$).	112
Figura 65. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas platicúrticas ($\alpha = 0.05$).	113
Figura 66. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.05$).	115
Figura 67. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas platicúrticas ($\alpha = 0.05$).	116
Figura 68. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas mesocúrticas ($\alpha = 0.01$).	172
Figura 69. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.01$).	172
Figura 70. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas platicúrticas ($\alpha = 0.01$).	173
Figura 71. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.01$).	173
Figura 72. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas platicúrticas ($\alpha = 0.01$).	174

Figura 73. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas mesocúrticas ($\alpha = 0.10$).....	176
Figura 74. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.10$).....	176
Figura 75. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas platicúrticas ($\alpha = 0.10$).....	177
Figura 76. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.10$).....	177
Figura 77. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas platicúrticas ($\alpha = 0.10$).....	178
Figura 78. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Weibull</i> (4, 5) ($\alpha = 0.10$).....	180
Figura 79. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Weibull</i> (4, 5) ($\alpha = 0.05$).....	180
Figura 80. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Weibull</i> (4, 5) ($\alpha = 0.10$).....	181
Figura 81. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Rice</i> (2, 4) ($\alpha = 0.10$).....	183
Figura 82. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Rice</i> (2, 4) ($\alpha = 0.05$).....	183
Figura 83. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Rice</i> (2, 4) ($\alpha = 0.10$).....	184
Figura 84. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Logística</i> (9, 3) ($\alpha = 0.10$).....	186
Figura 85. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Logística</i> (9, 3) ($\alpha = 0.05$).....	186
Figura 86. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Logística</i> (9, 3) ($\alpha = 0.10$).....	187
Figura 87. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (4) $\alpha = 0.10$	189
Figura 88. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (4) ($\alpha = 0.05$).....	189
Figura 89. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (4) ($\alpha = 0.10$).....	190
Figura 90. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Laplace</i> (0, 1) ($\alpha = 0.01$).....	192
Figura 91. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Laplace</i> (0, 1) ($\alpha = 0.05$).....	192
Figura 92. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Laplace</i> (0, 1) ($\alpha = 0.10$).....	193
Figura 93. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (1) ($\alpha = 0.01$).....	195
Figura 94. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (1) ($\alpha = 0.05$).....	195
Figura 95. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>t – Student</i> (1) ($\alpha = 0.10$).....	196
Figura 96. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Cauchy</i> (0, 0.5) ($\alpha = 0.01$).....	198
Figura 97. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Cauchy</i> (0, 0.5) ($\alpha = 0.05$).....	198
Figura 98. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Cauchy</i> (0, 0.5) ($\alpha = 0.10$).....	199
Figura 99. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (3, 15) ($\alpha = 0.01$).....	201

Figura 100. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (3,15) ($\alpha = 0.05$).....	201
Figura 101. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (3,15) ($\alpha = 0.10$).....	202
Figura 102. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (0,20) ($\alpha = 0.01$).....	204
Figura 103. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (0,20) ($\alpha = 0.05$).....	204
Figura 104. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Uniforme</i> (0,20) ($\alpha = 0.10$).....	205
Figura 105. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (2,2) ($\alpha = 0.01$).....	207
Figura 106. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (2,2) ($\alpha = 0.05$).....	207
Figura 107. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (2,2) ($\alpha = 0.10$).....	208
Figura 108. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Triangular</i> (0,1,0.5) ($\alpha = 0.01$).....	210
Figura 109. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Triangular</i> (0,1,0.5) ($\alpha = 0.05$).....	210
Figura 110. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Triangular</i> (0,1,0.5) ($\alpha = 0.10$).....	211
Figura 111. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Cardioid</i> (3,0.3) ($\alpha = 0.01$).....	213
Figura 112. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Cardioid</i> (3,0.3) ($\alpha = 0.05$).....	213
Figura 113. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Cardioid</i> (3,0.3) ($\alpha = 0.10$).....	214
Figura 114. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Chi – cuadrada</i> (7) ($\alpha = 0.01$).....	216
Figura 115. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Chi – cuadrada</i> (7) ($\alpha = 0.05$).....	216
Figura 116. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Chi – cuadrada</i> (7) ($\alpha = 0.10$).....	217
Figura 117. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (1,6) ($\alpha = 0.01$).....	219
Figura 118. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (1,6) ($\alpha = 0.05$).....	219
Figura 119. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Beta</i> (1,6) ($\alpha = 0.10$).....	220
Figura 120. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Pareto</i> (0.5,4) ($\alpha = 0.01$).....	222
Figura 121. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Pareto</i> (0.5,4) ($\alpha = 0.05$).....	222
Figura 122. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Pareto</i> (0.5,4) ($\alpha = 0.10$).....	223
Figura 123. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Exponencial</i> (1) ($\alpha = 0.01$).....	225
Figura 124. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Exponencial</i> (1) ($\alpha = 0.05$).....	225
Figura 125. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Exponencial</i> (1) ($\alpha = 0.10$).....	226
Figura 126. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución <i>Lognormal</i> (0,1) ($\alpha = 0.01$).....	228

Figura 127. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Lognormal(0, 1) ($\alpha = 0.05$).....	228
Figura 128. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Lognormal(0, 1) ($\alpha = 0.10$).....	229
Figura 129. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Gamma(2, 9) ($\alpha = 0.01$).....	231
Figura 130. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Gamma(2, 9) ($\alpha = 0.05$).....	231
Figura 131. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Gamma(2, 9) ($\alpha = 0.10$).....	232
Figura 132. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Gamma(6.5, 2.8) ($\alpha = 0.01$).....	234
Figura 133. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Gamma(6.5, 2.8) ($\alpha = 0.05$).....	234
Figura 134. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Gamma(6.5, 2.8) ($\alpha = 0.10$).....	235
Figura 135. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Rayleigh(0.5) ($\alpha = 0.01$).....	237
Figura 136. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Rayleigh(0.5) ($\alpha = 0.05$).....	237
Figura 137. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Rayleigh(0.5) ($\alpha = 0.10$).....	238
Figura 138. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Weibull(1, 2) ($\alpha = 0.01$).....	240
Figura 139. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Weibull(1, 2) ($\alpha = 0.05$).....	240
Figura 140. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Weibull(1, 2) ($\alpha = 0.10$).....	241
Figura 141. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Triangular(0, 1, 0.9) ($\alpha = 0.01$).....	243
Figura 142. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Triangular(0, 1, 0.9) ($\alpha = 0.05$).....	243
Figura 143. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución Triangular(0, 1, 0.9) ($\alpha = 0.10$).....	244

INTRODUCCIÓN

La distribución normal, también llamada distribución Gaussiana, es una de las distribuciones teóricas mayormente estudiadas y utilizadas en la práctica, su importancia radica fundamentalmente en la frecuencia con la que distintas variables asociadas a fenómenos naturales y cotidianos siguen aproximadamente esta distribución (Pértegas y Fernández, 2001). En algunas áreas de estudio tales como: Economía, Finanzas, Ingeniería, Salud, Psicología, Ciencias Ambientales, Física, Astronomía, entre otras, se desarrollan estudios mediante la inferencia estadística, donde se plantea como supuesto importante la validación de normalidad.

La violación del supuesto de normalidad puede tener una influencia sustancial en los resultados de las clásicas pruebas paramétricas, en particular sobre los valores del error Tipo I, Tipo II y la Potencia estadística de la prueba (Erceg-Hurn y Mirosevich, 2008).

Dada la importancia de la distribución normal en diversas aplicaciones, es necesario validar la suposición de que los datos experimentales se ajusten a este modelo probabilístico. Para ello se aplican las pruebas de bondad de ajuste, que tienen por objetivo determinar si los datos se ajustan o se pueden modelar con una determinada función de distribución, como puede ser la distribución normal, por lo que también se les conoce con el nombre de pruebas de normalidad.

Se tiene conocimiento acerca de que los estudios sobre pruebas de normalidad comenzaron a principios de 1900 con la prueba Chi-Cuadrada propuesta por Pearson (1900). Después se efectuaron extensas variedades de pruebas de bondad de ajuste, que difieren de acuerdo a la característica de la distribución normal en que se basen, como son: sus valores de asimetría y curtosis, su distribución o función característica, la relación lineal existente entre una variable distribuida normalmente y la distribución normal estándar, entre otras (Seier, 2002).

En los últimos años han surgido una amplia gama de pruebas de bondad de ajuste, empleadas en distintos estudios de investigación que han demostrado tener una mayor potencia estadística en la comprobación de normalidad, esto dependiendo del tamaño de muestra, la naturaleza de la distribución (simétricas, asimétricas y contaminadas), la complejidad de la prueba estadística y su disponibilidad en el software.

La prueba de bondad de ajuste de Jarque-Bera es comúnmente empleada en los estudios de Economía y Finanzas debido a la sencillez de su estadístico de prueba y su fácil aplicación en el software (Eviews, Matlab, S-Plus, SAS, SPSS, entre otros). Ha sido un punto sustancial en esta investigación realizar un comparativo con esta prueba, debido a que en diversos estudios se aplica un proceso de simulación para evaluar su potencia frente a otras pruebas con el fin de medir su desempeño, mostrando en algunas investigaciones conforme a sus resultados, que la prueba Jarque-Bera posee la menor potencia de las pruebas estudiadas (Yazici y Yolacan, 2007; Brys et al., 2004; Dong y Kyung, 2002; Dong y Giles, 2004; Hain, 2010); mientras que para distribuciones simétricas y de cola larga¹, es la prueba que posee mayor potencia (Frain, 2006; Oztuna et al., 2006; Thadewald y Büning, 2007; Alizadeh y Arghamia, 2011; LaBrecque, 1997).

En general, esta investigación brinda una mejor herramienta para el análisis y validación de los supuestos de normalidad; informa la importancia de los estudios de pruebas de bondad de ajuste, asimismo su aplicación en distintas áreas de investigación. Mediante la simulación estadística, permite proporcionar una comparación para evaluar la potencia estadística en cada una de las pruebas de bondad de ajuste con respecto a diferentes tamaños de muestra, y niveles de significancia, además de determinar la Tasa Empírica del Error Tipo I.

En este sentido la hipótesis de esta investigación considera que: “La prueba de bondad de ajuste de normalidad de Jarque-Bera, en términos promedio, presenta una menor potencia frente a pruebas como la de Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-

¹ También llamadas distribuciones leptocúrticas debido a su alto grado de apuntamiento ($g_2 > 3$).

Cuadrada, Chen-Shapiro y Shapiro-Wilk". Lo anterior considerando diferentes distribuciones alternativas, tamaños de muestra y niveles de significancia.

Por su parte, el objetivo general de esta tesis consiste en realizar una comparación de la potencia estadística de las pruebas de bondad de ajuste: Jarque-Bera, Anderson-Darling, Jarque-Bera Robusta, Chi-Cuadrada, Chen-Shapiro y Shapiro-Wilk, mediante la aplicación de un estudio de simulación, utilizando una amplia gama de distribuciones, distintos tamaños de muestra, así como niveles de significancia, con el fin de comprobar que la prueba de bondad de ajuste Jarque-Bera tiene la menor potencia entre dichas pruebas.

Adicionalmente los objetivos específicos son: i) Realizar una revisión de literatura en torno a las pruebas de bondad de ajuste para validar normalidad, además discutir acerca de la relevancia del cumplimiento del supuesto de normalidad en la aplicación de distintos métodos estadísticos; ii) Describir las pruebas de bondad de ajuste a emplear en el estudio, así como, los parámetros de las distribuciones alternativas a utilizar en la simulación; iii) Aplicar una simulación en el software estadístico R-Project, para comparar la potencia estadística de las distintas pruebas de normalidad y así estimar la potencia de cada prueba con diferentes distribuciones alternativas, niveles de significancia y tamaños de muestra. Además, iv) realizar una simulación con la distribución normal para estimar la Tasa Empírica del Error Tipo I.

Esta tesis está integrada de tres capítulos, en el primero se describe algunos estudios de investigación realizados sobre la potencia estadística en pruebas de bondad de ajuste para comprobar normalidad, mostrando los resultados y conclusiones de las mismas. Asimismo, se incluyen investigaciones donde se ha aplicado el supuesto de normalidad en el análisis estadístico para múltiples áreas de investigación, con el fin de enfatizar la importancia de la validación de este supuesto y dar a conocer las pruebas comúnmente aplicadas.

En el segundo capítulo se presentan diversas definiciones relativas a la inferencia estadística para la aplicación de pruebas de hipótesis. Se exponen las propiedades de

las distribuciones que se aplicaron en el análisis de simulación, describiendo sus parámetros en relación con la distribución Normal. Además, se describen los estadísticos de las pruebas de bondad de ajuste, así como, su aplicación en el software R-Project.

Finalmente, en el tercer capítulo se exponen los resultados del estudio de simulación de la potencia estadística para las pruebas de bondad de ajuste, con el apoyo de tablas y gráficas, mostrando las pruebas de bondad de ajuste que tuvieron mayor potencia de acuerdo a las clasificaciones estudiadas, así como las de menor potencia, mediante el empleo del promedio de la potencia estadística y el rango de la misma.

1. REVISIÓN DE LITERATURA

1.1. POTENCIA DE LAS PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE.

La estadística inferencial es una herramienta ampliamente utilizada en la investigación científica, cuyo objetivo es hacer deducciones sobre ciertas características de una población basada en la información contenida en la muestra. Esta puede dividirse en dos áreas; la estimación de parámetros (puntual e intervalos de confianza) y las pruebas de hipótesis.

Esta investigación está enfocada en las pruebas de bondad de ajuste que son un caso particular de las pruebas de hipótesis; su singularidad reside en que las pruebas de hipótesis tradicionales tienen el supuesto que tanto en la hipótesis nula como en la hipótesis alternativa es conocida la forma de la función de densidad; mientras que para el caso de las pruebas de bondad de ajuste se conoce la función de densidad para la hipótesis nula, pero en la hipótesis alternativa se desconoce, y por ello, el conjunto de posibilidades puede ser muy amplio. Estas pruebas de bondad son usadas para determinar qué tan bien una muestra concuerda, o es consistente, con la distribución sobre la cual será basada la inferencia, dicho de otro modo, es un procedimiento para decidir si se rechaza o no la hipótesis nula.

En la investigación teórica y práctica, de acuerdo a las revisiones de Mardia (1980), D'Agostino y Stephens (1986) y Baringhaus et al. (1989), se reportan que existen cerca de 40 diferentes pruebas de bondad de ajuste. Diversas pruebas como Shapiro y Wilk (1965), Shapiro y Francia (1972), Chen y Shapiro (1995), Jarque y Bera (1980, 1987), Geary (1947), Bowman y Shenton (1975), Weisberg y Bingham (1975), D'Agostino y Pearson (1973), Pearson (1900), Anscombe y Glynn (1983), Royston (1992), Park (1999), Rahman y Govindarajulu (1997), son empleadas únicamente para verificar que la muestra proviene de una distribución normal tomando en cuenta ciertas características de ésta, como son: los momentos centrales (asimetría y curtosis), la relación lineal existente entre una variable distribuida normalmente y la distribución normal estándar, entre otras (Seier, 2002). Asimismo, existen pruebas de bondad de

ajuste propuestas por Kolmogorov y Smirnov (1933, 1948), Anderson y Darling (1954), Kuiper (1960), Lilliefors (1967), D'Agostino y Stephens (1986), Cramer-Von Mises (1928,1931), Arshad et al. (2003), que toman en cuenta la función característica o de distribución para comprobar que los datos provienen de cierta función de distribución, no necesariamente de una distribución normal.

Debido a la variedad de pruebas de bondad de ajuste, se han elaborado estudios comparativos tomando en cuenta la potencia² estadística, con el propósito de utilizar la prueba que mejor se adecue a las características que presenta la muestra. El interés de la potencia de una prueba estadística estriba en que los análisis estadísticos paramétricos tradicionales están diseñados para “controlar” el Error tipo I³ obviándose habitualmente el Error tipo II⁴, por lo que el cálculo de la potencia se puede entender como una medida de confianza en el análisis estadístico. Por consiguiente, si se disminuye el Error tipo II estaremos aumentando la potencia de la prueba estadística, sin embargo, los Errores tipo I y tipo II están estrechamente relacionados, por lo que una disminución en la probabilidad de uno, por lo general, tiene como resultado un aumento en la probabilidad del otro, la única forma de disminuir ambos errores a la vez es aumentar el tamaño de muestra (Gujarati, 2006).

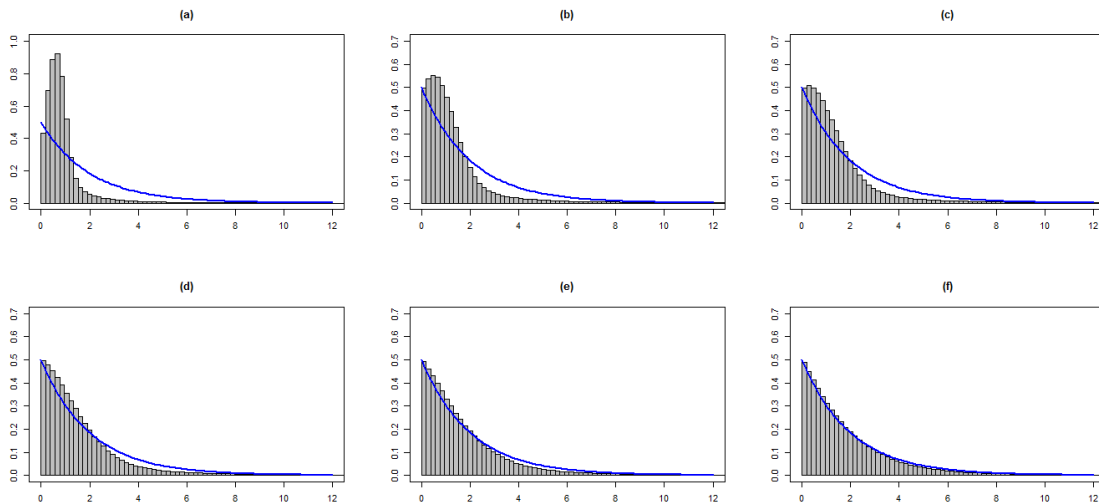
Una de las pruebas más utilizadas para comprobar normalidad en los datos, es la prueba propuesta por Jarque y Bera (1980, 1987), que ha ganado gran aceptación entre los especialistas en econometría. La estadística de prueba Jarque y Bera es una función que toma la característica de las medidas de asimetría (g_1) y curtosis (g_2). La principal desventaja de esta prueba, es la lenta convergencia de su estadístico de prueba para su distribución límite [$\chi^2_{(2)}$], como se puede apreciar en la Figura 1. Por lo tanto, las decisiones de pruebas de normalidad basadas en la función cuantil de la distribución chi-cuadrada pueden conducir a graves errores (Bowman y Shenton, 1975; Dong y Kyung, 2002).

² La potencia de una prueba estadística se entiende como la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es falsa, es decir: $1 - \beta = P[\text{Rechazar } H_0 | H_1]$.

³ Error tipo I también denominado nivel de significancia o tipo alfa (α), es la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es verdadera, es decir: $\alpha = P[\text{Rechazar } H_0 | H_0]$.

⁴ Error tipo II o error tipo β , es la probabilidad de no rechazar H_0 cuando esta es falsa, es decir: $\beta = P[\text{No Rechazar } H_0 | H_1]$.

Figura 1. Histograma del estadístico **JB** para diferentes tamaños de muestra junto con la f.d.p. de una distribución χ^2_2 .



Nota: Se generaron $m = 1,000,000$ muestras aleatorias independientes de una distribución normal estándar para cada tamaño de muestra, calculando su respectivo estadístico. Los tamaños de muestra son: (a) $n = 10$, (b) $n = 30$, (c) $n = 50$, (d) $n = 100$, (e) $n = 200$ y (f) $n = 500$.

Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Un aspecto importante de la descripción de una variable aleatoria es la forma de su distribución, que indica la frecuencia de los valores de los distintos rangos de la variable, por lo general la mayoría de las pruebas estadísticas se basan en el supuesto de normalidad, siendo crucial para la fiabilidad de los resultados. Existen diversos programas estadísticos que contienen paquetes con distintas pruebas de normalidad, sin embargo, es importante evaluar la mejor prueba que se adecue a las condiciones en que se encuentre la muestra. Por esta razón, Derya et al. (2006) realizaron una investigación para cuatro diferentes pruebas de normalidad (Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk, D'Agostino-Pearson y Jarque-Bera) donde llegaron a la conclusión que la prueba con mayor potencia fue la de Shapiro-Wilk, mientras que las pruebas con una potencia débil fueron la de Kolmogorov-Smirnov y la Jarque-Bera.

Seier (2002) estudio la potencia de las pruebas de bondad de ajuste Chen-Shapiro, Zhang (1999), D'Agostino et al. (1990), Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Royston, D'Agostino (1971), y Shapiro-Wilk, con el uso de 50,000 muestras Monte Carlo

para distintos tamaños de muestra ($n = 20, 50, 100$), con distribuciones asimétricas, simétricas, contaminadas y normales. Realizaron las conclusiones de este comparativo de acuerdo a las características que presentan las distribuciones, las pruebas Shapiro-Wilk y Chen-Shapiro mostraron una alta potencia en la mayoría de los casos, mientras que las pruebas D'Agostino (1971) y Kolmogorov-Smirnov tuvieron la menor potencia.

Coin y Corradtti (2006) hicieron una comparación de potencias de pruebas de normalidad, en el cual su objetivo de estudio es determinar la prueba con mayor potencia (Kolmogorov (1933), Anderson-Darling (1954), D'Agostino y Pearson (1973), Jarque-Bera (1987), Neyman (1937), Shapiro-Wilk (1965) y D'Agostino (1971)), en la hipótesis de normalidad para múltiples distribuciones alternativas. Sus conclusiones muestran que todas las pruebas consideradas se comportan bien frente a distribuciones asimétricas, en este caso no hay diferencias en la potencia estimada. Sin embargo, teniendo en cuenta las distribuciones simétricas hay enormes diferencias, donde la prueba Shapiro-Wilk es en general superior a las pruebas analizadas, seguida de la prueba Anderson-Darling; mientras que, la prueba de Jarque-Bera es la que presenta menor potencia y el estadístico de Neyman aunque se comporta adecuadamente, no es la mejor prueba teniendo en cuenta su alto tiempo de cómputo, por lo que no sugieren utilizarla.

Desmoulins-Lebeault (2004) realizó una comparación de pruebas de bondad de ajuste (Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Shapiro-Francia, Weisberg-Bingham y Jarque-Bera) donde las clasificó de acuerdo a la característica de su estadístico de prueba en tres categorías: función de distribución empírica, técnica de regresión y momentos. En sus resultados muestra que las pruebas Shapiro-Wilk y Anderson-Darling presentan una potencia mayor, mientras que la prueba de Jarque-Bera tiene una potencia débil.

Nornadiah y Yap (2010) compararon algunas pruebas de normalidad (Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors y Anderson-Darling), donde realizaron una comparación de potencia a través de una simulación Monte Carlo generando distribuciones alternativas simétricas y asimétricas para diferentes tamaños de muestra. La potencia de cada prueba se obtuvo mediante la comparación de las estadísticas de prueba con

sus respectivos valores críticos. Los resultados concluyeron que la prueba de Shapiro-Wilk es la prueba de normalidad con mayor potencia, apoyando las conclusiones de Gan y Koehler (1990), Mendes y Pala (2003) y Kesking (2006).

Bonett y Seier (2002) estudiaron una prueba conjunta de curtosis con una alta potencia uniforme a través de una amplia gama de distribuciones simétricas no normales frente a diversas pruebas (Anscombe y Glynn (1983); Geary (1936) y Shapiro-Wilk). Llegan a la conclusión de que la prueba Shapiro-Wilk es una de las pruebas más utilizadas y con mayor potencia, aunque destacan que cuando esta prueba rechaza la hipótesis nula de normalidad, no proporciona alguna información con respecto a la forma de la distribución. D'Agostino et al. (1990) argumentan convincentemente que las pruebas basadas en medidas de asimetría y curtosis son especialmente útiles en la evaluación de la forma de una distribución no normal. Por lo que en este estudio recomiendan utilizar una prueba conjunta de curtosis, junto con la prueba estándar de asimetría para comprobar normalidad.

Chaichatschwal y Budsaba (2007) realizaron una comparación de pruebas de bondad de ajuste basadas en la razón de verosimilitud (Z_a , Z_c y Z_k) contra diversas pruebas (Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Shapiro-Francia), siendo el propósito de su investigación comparar la potencia en distintos escenarios, con el fin de que el investigador use la estadística más apropiada con la prueba que posea mayor potencia. Concluyeron que las pruebas de verosimilitud tienen una potencia alta frente a la prueba de Anderson-Darling y la prueba de Shapiro-Francia tiene una potencia mayor que la prueba de Shapiro-Wilk para un tamaño de muestra menor a cincuenta ($n < 50$), ya que para tamaños de muestra mayores su potencia es similar.

Yew-Haur (1998) realiza una comparación con un enfoque para contrastar la prueba de normalidad sugerido por Terrell (1995) que proporciona una estimación de la densidad no paramétrica utilizando la información de Fisher. Concluyó que para distribuciones simétricas leptocúrticas⁵ ($S = 0, K > 3$), la prueba de Fisher tiene una potencia mayor y

⁵ Distribución leptocúrtica (apuntamiento positivo): presenta un elevado grado de concentración alrededor de los valores centrales de la variable. Se le conocen también con el nombre de cola larga o pesada.

posee una potencia débil para distribuciones asimétricas platicúrticas⁶ ($S \neq 0, K < 3$). También menciona que la prueba Shapiro-Wilk tiene una potencia alta para tamaños de muestra superiores a cincuenta ($n \geq 50$) y para muestras pequeñas la prueba Shapiro-Francia tiene una mejor potencia ($n < 50$).

Dong y Giles (2004) realizaron un estudio de potencia con pruebas comúnmente utilizadas para comprobar normalidad (Jarque-Bera, D'Agostino (1971), Pearson (1900)) incluyendo además una prueba de razón de verosimilitud empírica (ERL), mediante una simulación Monte Carlo con distintos niveles de significancia ($\alpha = 0.01; 0.02; 0.05; 0.10$), para una amplia gama de tamaños de muestras ($30 \leq n \leq 10,000$), y una variedad de distribuciones (simétricas, asimétricas, con colas pesadas). Concluyeron que las pruebas con mayor potencia fueron: ERL, Jarque-Bera y D'Agostino; por el contrario, la prueba con menor potencia para los casos analizados fue la prueba Pearson.

Dag et al. (2007) realizaron una nota de advertencia sobre el uso de la prueba de Kolmogorov-Smirnov para comprobar normalidad. En ésta investigación se demuestra que ésta prueba por lo general conduce a errores sistemáticos y drásticos, haciendo una comparación de potencia utilizando ocho pruebas de normalidad (Jarque-Bera; Shapiro-Wilk; Anderson-Darling; Cramer-von Mises; Pearson; Shapiro-Francia; Shapiro-Wilk y Lilliefors). En los resultados muestran que las pruebas Jarque-Bera y Shapiro-Wilk son buenas alternativas a la prueba Kolmogorov-Smirnov.

En otro estudio realizado por Dong y Kyung (2002), menciona que la prueba de Jarque-Bera tiene una potencia débil frente a distribuciones platicúrticas (cola corta o ancha). Sin embargo, en el estudio de potencia Yazici y Yolacan (2007), informan que la prueba Jarque-Bera tiene una potencia alta para la distribución Beta ($p = 2, q = 2$), la cual de acuerdo a su nivel de curtosis es una distribución platicúrtica.

⁶ Distribución platicúrtica (apuntamiento negativo): indica que en las colas hay más casos acumulados en la variable, es decir, presentan una menor concentración de valores alrededor de la media. Se les conoce como distribuciones de cola corta o ancha.

Para la hipótesis de normalidad Thadewald y Büning (2007), investigan la potencia de varias pruebas de bondad de ajuste, la prueba bien conocida Jarque-Bera y las pruebas de Kuiper, Shapiro-Wilk, y Cramer Von Mises. Sus resultados muestran, que la prueba Jarque-Bera tiene una lenta aproximación de los valores críticos para la distribución Chi-cuadrado, no obstante, tiene una potencia superior a las pruebas estudiadas para distribuciones simétricas platicúrticas y su potencia es pobre para distribuciones asimétricas platicúrticas, sobre todo si la forma es bimodal⁷, para este caso se recomienda la prueba Cramer Von Mises o la prueba Shapiro-Wilk.

Hain (2010) realizó una simulación basado en 1'000,000 muestras Monte Carlo, para comparar la potencia de diversas pruebas de normalidad (Shapiro-Wilk, Shapiro-Francia, Weisberg-Bingham, Filliben, extensión de Rahman-Govindarajulu (1997), extensión de Royston, Jarque-Bera y Jarque-Bera ajustada), para una amplia gama de tamaños de muestra ($n = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 50, 100, 200$ y 500). Concluyó que para las distribuciones simétricas platicúrticas las pruebas con mayor potencia son la Jarque-Bera ajustada, Jarque-Bera y Filliben; mientras que las que presentan una potencia menor son las pruebas de Shapiro-Wilk, Shapiro-Francia, la extensión de Rahman y Govindarajulu. Para el caso de distribuciones simétricas leptocúrticas las pruebas con mayor potencia son Shapiro-Wilk y Shapiro-Francia; mientras las que presentan una potencia débil son las pruebas Jarque-Bera ajustada y Jarque-Bera. Por último, para las distribuciones asimétricas la prueba con mejor potencia es la de Shapiro-Wilk; mientras que las que tuvieron una potencia débil fueron la Jarque-Bera ajustada y Jarque-Bera.

Stephens (1974) presento un estudio comparativo de varias pruebas de normalidad (Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises, Kuiper, Watson y Anderson-Darling) para cuatro casos diferentes (1. $F(X)$ normal, σ^2 conocida y μ estimada; 2. $F(X)$ normal, μ conocida y σ^2 estimada; 3. $F(X)$ normal, μ y σ^2 estimada; 4. Prueba de exponencialidad). Las comparaciones dependen de los resultados de la Simulación Monte Carlo y también hacen interpretaciones para D'Agostino y Shapiro-Wilk.

⁷ Una distribución bimodal tiene dos puntos máximos. Esto hace que la media y la mediana no sean de utilidad, puesto que sus valores estarán en algún lugar entre los dos puntos máximos y distorsionarán enormemente la descripción de la distribución. La moda pasa a ser la única medida útil de tendencia central. Sin embargo, una distribución bimodal es poco común y en general podemos decir que consta de dos distribuciones que se pueden analizar en forma independiente.

Dufour et al. (1998) compara diferentes pruebas de normalidad (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Shapiro-Wilk, Jarque-Bera y D'Agostino) para residuos de un modelo de regresión lineal. Llegaron a la conclusión de que las pruebas de normalidad asintótica son de hecho muy poco fiables; por el contrario Huang y Bolch (1974) y White y MacDonald (1980) también estudiaron pruebas de normalidad de los residuos y llegaron a la conclusión de que el cálculo de pruebas de normalidad de los residuales no las valida.

Esteban et al. (2001) propone tres nuevas pruebas de normalidad sobre la base de versiones modificadas del estimador de entropía de Vasicek. Evalúan valores críticos de las estadísticas de prueba correspondientes, así como de la prueba estadística Vasicek, para diversos tamaños de muestra ($5 \leq n \leq 50$) y una significancia del $\alpha = 0.05$ utilizando una simulación Monte Carlo. Llegan a la conclusión de que la potencia de las pruebas cambia conforme varíen los tamaños de muestra.

Tanweer-UI-Islam (2008) en lo referente a la evaluación de la potencia de las pruebas de normalidad para asegurar la validación de los estadísticos t , aplicó la evaluación de la significancia en un Modelo de Regresión. Para este propósito, exploraron 40 distribuciones para encontrar la distribución más perjudicial a los estadísticos t . Como resultado se obtuvo que el estadístico de Anderson-Darling es la mejor opción de entre las cinco pruebas de normalidad estudiadas (Jarque-Bera, Shapiro-Francia, D'Agostino-Pearson, Anderson-Darling y Lilliefors).

1.2. RELEVANCIA DE LAS PRUEBAS DE NORMALIDAD

Han sido realizados estudios cuyas bases están sustentadas en la comprobación del supuesto de normalidad, ya sea que los datos provengan de series económicas, estadísticas, observaciones médicas, rendimientos, etcétera. En donde son utilizadas para tal efecto, las pruebas de bondad de ajuste, entre las más conocidas se encuentran las pruebas: Jarque-Bera, Pearson, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Chi-Cuadrada, y Kolmogorov-Smirnov. Gran variedad de autores han desarrollado amplias investigaciones en distintas áreas del conocimiento, apoyándose de estas herramientas

que den garantía que los resultados presentados son confiables validando los supuestos estadísticos.

En el área de la Economía, Díaz y Vergara (2008) realizaron un estudio sobre la tasa de inflación en México relativa al periodo comprendido de 2000 a 2007, donde se describen los principales estadísticos de la inflación en México; asimismo, se realizaron pruebas de bondad de ajuste (Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk y Jarque-Bera) a los datos mensuales de la tasa de inflación y se establecieron intervalos de confianza con el objeto de mostrar qué valores de la inflación tienen mayor probabilidad de ser observados en el largo plazo.

De manera similar con respecto a la misma variable económica, Galán (2008) hizo una evaluación empírica del régimen de Saldos (“Cortos o Largos”) que realizó el Banco de México como medida de reducción del crecimiento de la inflación relativa al periodo comprendido de 1995 a 2004. Fue realizada una estimación econométrica por el método de Taylor, y a partir de éste se evaluó el impulso-respuesta de la estabilidad de la inflación. En este estudio se aplicó la prueba Jarque-Bera para comprobar normalidad de los errores, en la cual muestra claramente la falta de normalidad en los errores, y la presencia de autocorrelación.

A nivel internacional, se han desarrollado otros estudios como el elaborado por Aquino y Sanabria (2007), quienes presentan las principales características de un modelo econométrico a pequeña escala para el Salvador, realizando dos modelos para analizar el comportamiento de los principales indicadores de la economía salvadoreña. Para ambos modelos, los residuos cumplen el criterio de normalidad aplicando la prueba de bondad de Jarque-Bera.

Asimismo, Andrei y Bugudui (2011) realizaron un modelo econométrico de series de tiempo de la variable macroeconómica del PIB de Estados Unidos; dado que ésta no es una serie de tiempo estacionaria, existen diferentes pruebas estadísticas para convertirlas en una que sí lo es, y a partir de la última serie se pueden realizar pronósticos y obtener los parámetros de distintos modelos. En este estudio, la

distribución de la serie de los residuales con el estadístico de Jarque-Bera, sugiere que siguen una distribución normal en términos de su asimetría y curtosis.

En el trabajo realizado por Christopoulos y Tsionas (2004) combinaron datos de corte transversal y de series temporales para examinar la relación entre el desarrollo financiero y el crecimiento en diez países en vías de desarrollo. Estudios previos han utilizado datos de series, ya sea de corte transversal o de tiempo, pero ambos enfoques tienen inconvenientes. Aplicaron la prueba de Jarque-Bera para comprobar que el componente del error o perturbación aleatoria, tiene una distribución normal. Concluyeron en su modelo que la evidencia empírica muestra que no hay causalidad a corto plazo entre desarrollo financiero y la producción, por lo que el efecto es necesariamente a largo plazo en la naturaleza y una implicación importante es que las políticas destinadas a mejorar los mercados financieros tendrán un efecto retardado en el crecimiento, pero éste será significativo.

Con lo relativo a la Administración de Riesgos Financieros, González y Gimeno (2006) elaboraron un artículo sobre la evaluación de procedimientos para medir el valor en riesgo (VaR), haciendo una comparación entre las metodologías de simulación histórica, GARCH y valores extremos, todos respecto de la distribución estadística de los rendimientos de un conjunto de carteras del mercado. El supuesto de normalidad en este estudio es de vital importancia debido a que facilita la estimación de los modelos econométricos, y la construcción de estadísticos, al tiempo que se puede describir el comportamiento del activo a través del vector de medias y la matriz de varianzas-covarianzas. Además, teniendo en cuenta que la suma de normales es otra distribución normal, cualquier cartera construida con activos financieros también tendrá una distribución normal y son numerosos los modelos teóricos que asumen esta hipótesis en su planteamiento, como lo es el modelo de valoración de Black-Sholes (Black, 1989).

Sin embargo, las observaciones empíricas de las distribuciones de los rendimientos contradicen sistemáticamente la hipótesis de normalidad. Como se puede apreciar en algunos trabajos de Mandelbort (1963) y Fama (1965), quienes señalan las

características típicas de estas variables, que se pueden resumir en las siguientes: en primer lugar, los movimientos bruscos suelen ser más pronunciados en el caso de las caídas de precios que en las subidas (asimetría a la izquierda); además se comprueba que la volatilidad de los activos no es constante, sino que suceden momentos de fuertes cambios en los precios seguidos de otros estables, lo que conlleva a la existencia de más valores extremos en la distribución (colas anchas); y por último, en torno al valor medio se produce mayor concentración de probabilidades, es decir, la distribución es más apuntada y estrecha (alta curtosis).

Dadas estas características presentes en rendimientos financieros de distinta procedencia, es evidente que el cálculo de las probabilidades a partir de sus distribuciones no es directo, lo que ha llevado a la aparición de distintas metodologías para el cálculo del VaR. González y Gimeno (2006) realizaron una aproximación que se basa en los valores extremos, donde se estudian las reacciones anómalas del mercado, para explicar las características atípicas de las distribuciones de los rendimientos financieros, comprobando así, que al separar los rendimientos extremos de los que serían pertenecientes a un comportamiento estable del mercado, estos últimos tienen una distribución que se aproxima a una distribución normal estándar. Para comprobarlo, utilizaron las pruebas de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov y Jarque-Bera, donde después de realizar un ajuste en la muestra, se acepta que los rendimientos financieros siguen una distribución normal. Al mismo tiempo, a través del porcentaje de observaciones eliminadas, los valores extremos se comportan con una distribución Pareto.

Además, en los riesgos que involucran a los mercados financieros tenemos que, de acuerdo con Groenewold y Fraser (2001), los datos financieros no son independientes e idénticamente distribuidos con una normal, aunque las pruebas estándar de modelos de valuación de activos se basan en este supuesto; su estudio consiste en medir la sensibilidad de las pruebas de normalidad para dichos modelos. En el caso de los excedentes de rentabilidad, hay evidencia clara de asimetría y exceso de curtosis para todos los sectores, y la prueba de Jarque-Bera tuvo valores muy grandes de la

estadística de prueba, por lo que existe fuerte evidencia de la falta de normalidad en los excedentes de rentabilidad.

Por su parte, Bhar et al. (2004) consideraron en su trabajo la medida de la prima de riesgo en los mercados financieros desde una nueva perspectiva para utilizar la volatilidad de las opciones sobre la cartera de mercado. El método de cálculo de la prima de riesgo se propone a partir de una ecuación diferencial estocástica, donde posteriormente se realiza una estimación. En el proceso de investigación se aplicó la estadística de Kolmogorov-Smirnov para comprobar la normalidad de los residuales, en la cual, los resultados respaldan el supuesto de normalidad. En general, concluyeron que el enfoque de utilizar la metodología de filtrado para inferir la prima de riesgo del precio de los derivados es viable.

En otra rama del manejo de riesgos, Otero et al. (2012) evaluaron la adecuación de los modelos de conmutación de Markov para el diseño de modelos internos de exposición al riesgo de renta variable a aseguradoras. La comparación de modelos a través de diferentes criterios estadísticos y backtesting mostró la superioridad de los modelos de conmutación de Markov; además se compararon los requerimientos de capital resultantes de la aplicación de estos modelos con los propuestos por Solvencia II; los resultados mostraron que los fondos necesarios para tomar el riesgo de renta variable dependen de la especificación utilizada; asimismo, el capital obtenido por las especificaciones de conmutación de Markov excede las del modelo estándar. La prueba de normalidad se realizó utilizando el estadístico Jarque-Bera (1980, 1987), en la cual los modelos no tienen en cuenta la existencia de regímenes que no superen la prueba de normalidad con un 99% de confianza. Sin embargo, todos los modelos de conmutación pasan la prueba de Jarque Bera.

Aunque algunos actuarios han desarrollado diversos tipos de modelos estocásticos de investigación para la inflación, rendimientos bursátiles, y tasas de interés. En la práctica existen dos usados comúnmente: modelos autorregresivos de series de tiempo con errores distribuidos normalmente, y modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional (ARCH). Sherris (1997) examinó si la inflación Australiana y la tasa de

interés son consistentes con las series de tiempo autorregresivas y con los supuestos de los modelos ARCH, empleando la prueba ARCH de Engle (1982), la prueba de Jarque-Bera, la prueba de sesgo y la prueba de exceso de curtosis, obteniéndose en su estudio, que los modelos ARCH no son los más satisfactorios para modelar dichas variables económicas, y que estos modelos alternativos requieren una investigación más amplia.

Para la conformación de una matriz de capital bajo las sugerencias emitidas por Basilea, deben ser consideradas las pérdidas históricas (incluidas frecuencia y severidad), que han sido registradas dentro de una organización respecto del riesgo operacional al que se encuentra expuesto, a este riesgo es asociada una distribución de pérdidas; en su estudio, Franco y Murillo (2008) muestran una aplicación del modelo de la Distribución de Pérdidas en el riesgo operativo; asimismo, aplicaron las pruebas de bondad de ajuste Chi-Cuadrada, Anderson-Darling y Kolmogorov-Smirnov, para identificar la distribución que mejor se ajusta a los datos históricos; finalmente, se concluyó que la distribución de pérdida no corresponde a ningún modelo aleatorio predeterminado y que el riesgo operacional puede ser mejor analizado a través de una Simulación Montecarlo.

Sánchez et al. (2004), analizaron las distribuciones de probabilidad más adecuadas para representar la siniestralidad total en los seguros de vida. En las cuales se puede buscar la función exacta mediante la convolución directa, o como alternativa se usan distribuciones aproximadas a la normal (teorema de Lindeberg-Feller). Se destaca la utilidad, en este caso, del teorema de Lindeberg-Feller que supone una generalización del teorema central del límite que hace referencia al comportamiento de la distribución de la suma de un número elevado de variables aleatorias que individualmente ejercen un efecto infinitesimal sobre el comportamiento de la suma. Esto se consigue si ningún seguro de muerte tiene una cuantía unida a una probabilidad conjuntamente destacable que lleve a una variabilidad significativa respecto del conjunto de la cartera analizada. Se apoya en un reparto del riesgo muy amplio. De tal forma, que un mayor reparto de riesgos permite una mejor aproximación a la distribución normal para toda la cartera de pólizas.

Para la estimación de Prima Pura mediante modelos de regresión, Harrington (1986) utilizó un modelo clásico de regresión lineal por mínimos cuadrados ordinarios, en el cual se aplica el supuesto de que la distribución del error ε_i sigue una distribución Normal centrada y con varianza constante $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Llegando a la conclusión de que la hipótesis de la normalidad puede ser más apropiada para los modelos de corte transversal de las primas puras de seguros de automóviles.

En el trabajo presentado por Vargas (2003), se realiza un fundamento para el desarrollo de productos de daños, con el objetivo de brindar los elementos técnicos necesarios para efectuar el cálculo de tarifas. Para evitar posibles desvíos a las primas puras, adiciona un recargo técnico de seguridad. En este estudio, las primas de riesgo equivalen al promedio de siniestros, aunque los siniestros son eventos de “éxito” o “fracaso” (distribución binomial), se aplica la distribución normal con el fundamento del Teorema del Limite Central, el cual establece que cuando el tamaño de muestra se incrementa, la distribución de muestreo de la media se aproxima a una distribución normal, independientemente de la forma de la distribución que fue tomada la muestra.

Otra aplicación en el marco de Solvencia II, es realizada por Durán y Otero (2010), mediante el análisis financiero dinámico para el desarrollo de modelos internos. La selección de sus modelos está fundamentada exclusivamente en criterios basados en los valores de la función de verosimilitud. Bajo estos modelos los datos atípicos suelen ser considerados como outliers, pero desde el punto de vista de la gestión del riesgo, tienen un significado crucial ya que determinan en gran medida las máximas pérdidas a las que está expuesta la compañía. Por tanto, se debe evaluar en qué medida los residuos superan el test de normalidad, especialmente en la cola izquierda de la distribución. En caso de que los residuos no sean normales, el ajuste proporcionado por el modelo no es el adecuado. El análisis de normalidad lo realizaron a través de la prueba de bondad de ajuste Jarque-Bera, donde de acuerdo a los resultados obtenidos se acepta la hipótesis de normalidad. Así mismo, mencionan que la distribución Normal o Gaussiana es la distribución más importante en estadística. En el campo financiero, es la distribución frecuentemente empleada para modelar la rentabilidad de los activos; sin embargo, en el ámbito actuarial no suele ajustarse bien al comportamiento empírico

de las cuantías de los siniestros; por el contrario, sí suele proporcionar un buen ajuste a los costos medios de estos.

La teoría del valor extremo en el mercado de las aseguradoras, Velasco (2009) menciona el uso del VaR en la gestión de riesgo, que ha sido bastante discutido, ya que sus modelos convencionales no representan realmente lo que ocurre en la realidad, por ejemplo: las caídas bursátiles no presentan una distribución normal en la vida real. Entre otras cosas, significa que no son tan efectivos donde debería ser más importante: en los valores extremos. Llegó a la conclusión de que los datos no presentan una distribución normal, debido a una alta curtosis, por lo que aplicaron la metodología EVT (Teoría del valor extremo).

Amador y Nava (2004), realizaron un estudio de las bases técnicas para la suficiencia de reservas matemáticas aplicando una simulación de los siniestros ocurridos no reportados, con el histórico por póliza vigente de una empresa aseguradora. Aplicaron la prueba Anderson-Darling para comprobar normalidad, donde en primera instancia el modelo no se ajusta a una distribución normal, por lo que aplicaron una conversión en los datos para que resulten manejables [$y = \ln(1 + x)$]. Una vez aplicado la conversión anterior, la prueba de normalidad Anderson-Darling acepta la hipótesis nula, es decir, que los datos se ajustan a una distribución normal. Conociendo la distribución de los datos, se crean números aleatorios de una distribución normal, y una vez calculado los números de siniestros simulados de acuerdo a la conversión, se obtienen los datos que cumplan la inversa de dicha conversión [$f^{-1}(x) = e^x - 1$], obteniendo así los números de siniestros simulados para la aplicación del cálculo de la reserva matemática.

Para conocer el comportamiento de ciertos fenómenos bajo diferentes escenarios, los estudios de simulación son de gran utilidad; en el campo estadístico son muy comunes los estudios de robustez generalmente para conocer el comportamiento de cierto estimador. Salazar y Baena (2009) realizaron un estudio de simulación con el objetivo de analizar el comportamiento de las estimaciones de los parámetros de las funciones de densidad en un modelo de Markov de tres estados en presencia de datos longitudinales. En el proceso de investigación, se aplicó la prueba Shapiro-Wilk para

comprobar el supuesto de normalidad en los residuales, donde los resultados muestran que no se rechaza la hipótesis nula, por lo que los datos siguen una distribución normal.

Como contribución a la generalidad en la aplicación de los modelos estadísticos de regresión, Guerra et al. (2003) proponen 14 criterios que se deben tener en cuenta para la selección de éstos. Dentro de estos criterios, se encuentra el análisis de residuos, donde se debe de probar normalidad, empleando diversas pruebas de bondad de ajuste, como lo son: Shapiro-Wilk y Kolmogorov-Smirnov.

Por otro lado, González y Nieto (2008) realizan un estudio en el análisis de serie temporales, vía modelos estadísticos, en el cual el proceso de identificación del modelo se realiza una estimación de los parámetros y la verificación de los supuestos del ruido del proceso (no autocorrelación, homocedasticidad y normalidad), utilizando en este ultimo los residuales del modelo. La verificación del modelo ajustado es una parte esencial en el análisis, ya que es un modelo de decisión, por lo cual es necesario contar con pruebas de hipótesis potentes. La prueba que aplicaron para comprobar normalidad, es la Jarque-Bera, justificando que esta prueba tiene propiedades óptimas de potencia asintótica. En sus conclusiones, de acuerdo al análisis de simulación realizado, en presencia de datos faltantes en una serie de cualquier longitud, se recomienda el uso de la técnica bootstrapping con el propósito de hallar los cuantiles empíricos de la estadística, y a un nivel de significancia escogido compararlo con el valor calculado de la estadística de Jarque-Bera, encontrando así un criterio de decisión más confiable.

En general, las pruebas de bondad de ajuste han sido una herramienta muy importante para identificar la distribución a la cual pertenecen las observaciones de la muestra, siendo la distribución normal la principal distribución teórica estudiada y utilizada en la práctica, debido a que es una suposición subyacente para la mayoría de los procedimientos estadísticos paramétricos, como lo son: las pruebas t , el análisis de regresión lineal, el análisis discriminante y el análisis de varianza (ANOVA). Siendo que la validación de este supuesto es el fundamento que da coherencia a cualquier análisis

estadístico paramétrico, garantizando así que no se aplicará el uso de estimadores ineficientes, declaraciones inválidas de inferencia y conclusiones inexactas.

De acuerdo con lo que ha sido mostrado hasta ahora, existe una gran cantidad de estudios, investigaciones y análisis en donde se expone una comparación detallada de la potencia de las pruebas de bondad de ajuste, en su mayoría para comprobar normalidad. Estos estudios han sido de sumo interés en los últimos años; reflejo de ello es el desarrollo de nuevas pruebas de bondad, así como ajustes a pruebas ya existentes, con el fin de aplicar la que mejor se adecue al tamaño de la muestra, la naturaleza de la distribución (simétricas, asimétricas y contaminadas), la complejidad de la prueba estadística y su disponibilidad en el software. Aunado a esto, la evolución de cómputo ha sido visible en el avance de paquetes estadísticos que han permitido realizar estudios de simulación con una mayor capacidad, obteniendo una perspectiva más exacta de los resultados. Por lo que emerge la necesidad de repetir estos estudios comparativos de potencia estadística entre las pruebas de bondad de ajuste con mayor aplicación.

2. METODOLOGÍA ESTADÍSTICA

2.1. DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD

En este estudio se aplicaron diversas distribuciones alternativas utilizando distintos parámetros, con la finalidad de tener casos extremos que difieran de una distribución normal, así como características similares, para emplearlas como hipótesis alternativas (H_1), en el estudio de la potencia estadística de las pruebas de bondad de ajuste. A continuación se analizan brevemente estas distribuciones.

2.1.1. NORMAL

La distribución normal fue reconocida por primera vez por el francés Abraham de Moivre (1667-1754). Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) elaboró desarrollos más profundos y formuló la ecuación de la curva; de ahí también que se le conozca comúnmente como la “Campana de Gauss”. La distribución de una variable aleatoria (v.a.) normal está completamente determinada por dos parámetros, su media y su desviación estándar, denotadas generalmente por μ y σ .

Sea X una v.a. que sigue una distribución Normal, denotada por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\sigma, \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} I_{(-\infty, \infty)}(x) \quad \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$$

La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de esta distribución están definidos, respectivamente por:

$$E(x) = \mu \quad \text{Var}(x) = \sigma^2 \quad g_1 = 0 \quad g_2 = 3$$

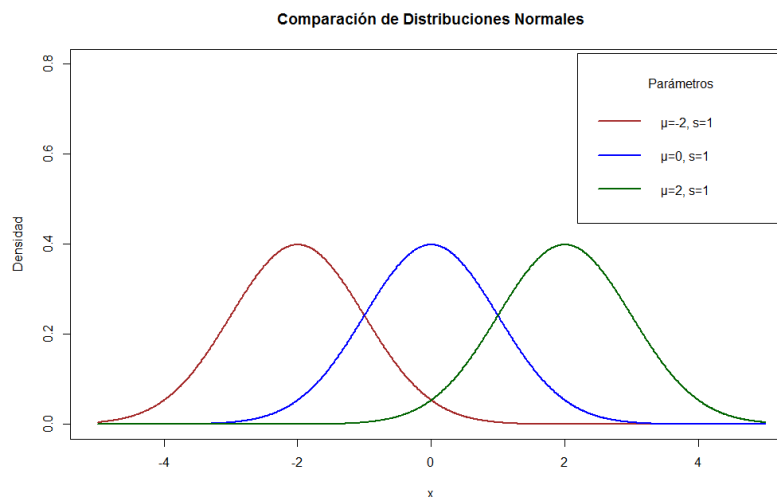
La distribución normal posee ciertas propiedades importantes que conviene destacar:

- a) Tiene una única moda, que coincide con su media y su mediana (lo que por definición la hace ser una distribución simétrica).
- b) La curva normal es asintótica al eje de las abscisas. Por ello cualquier valor entre $(-\infty, \infty)$ es teóricamente posible.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

- c) Es simétrica con respecto a su media μ . Es decir, que existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor (ver Figura 2).

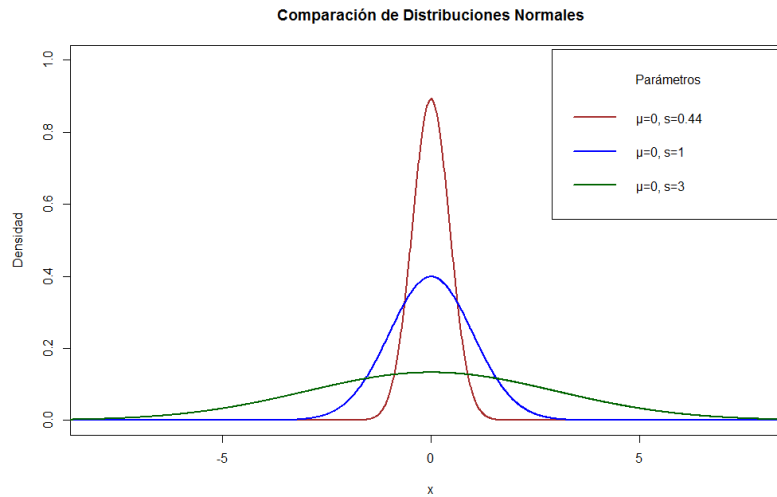
Figura 2. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Normales con diferentes valores con respecto a su media (μ), con igual desviación estándar ($s = 1$).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

- d) La distancia entre la línea trazada en la media (μ) y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica o estándar (σ). Cuanto mayor sea σ , más aplanada será la curva de la densidad (ver Figura 3).

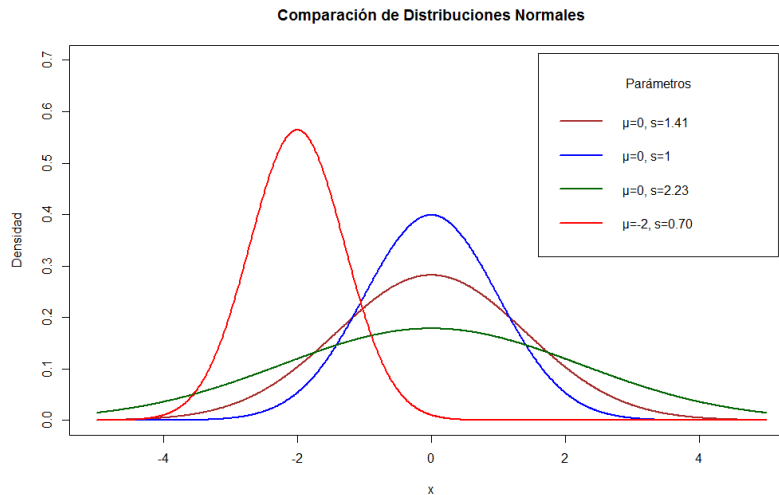
Figura 3. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Normales con diferentes valores con respecto a su desviación estándar (s), con igual media ($\mu = 0$).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

- e) La forma de la campana de Gauss depende de los parámetros μ y σ . La media indica la posición de la campana, de modo que para diferentes valores de μ la gráfica es desplazada a lo largo del eje de las abscisas. Por otra parte, la desviación estándar determina el grado de apuntamiento de la curva, cuanto mayor sea el valor de σ , más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más aplanada; un valor pequeño de este parámetro indica, por lo tanto, una gran probabilidad de obtener datos cercanos al valor medio de la distribución (ver Figura 4).

Figura 4. Comparación de distribuciones Normales con diferentes valores con respecto a su desviación estándar (s), y su media (μ).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Por lo tanto, no existe una única distribución normal, sino una familia de distribuciones con una forma común, diferenciadas por los valores de su media y varianza. De entre todas ellas, la más utilizada es la distribución normal estándar, que corresponde a una distribución normal con media 0 y varianza 1. Así, la expresión que define su densidad se puede obtener de cualquier distribución normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, efectuando la siguiente transformación:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Obteniendo así la densidad de una distribución normal estándar, denotada como $Z \sim N(0, 1)$:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < \infty$$

De esta manera un valor Z mide la distancia entre un valor especificado de X y la media aritmética, en las unidades de la desviación estándar. Al determinar el valor de Z usando la transformación, es posible encontrar el área de probabilidad bajo cualquier

curva normal haciendo referencia a la distribución normal estándar en las tablas correspondientes.

Un teorema de gran importancia en Estadística, especialmente para la parte de Inferencia Estadística, es el Teorema Central del Limite o Teorema del Limite Central que, en condiciones muy generales, explica por qué la distribución normal aparece con tanta frecuencia en fenómenos biológicos, físicos, astronómicos, químicos, económicos, etc., al establecer que: la suma de un gran número de variables aleatorias tiende a seguir de manera asintótica una distribución normal. Es decir, garantiza una distribución normal cuando n es suficientemente grande.

El Teorema del Límite Central, estudiado por varios matemáticos destacados, fue establecido por primera vez en 1738, por Abraham De Moivre, bajo condiciones muy restringidas. A principios del siglo XIX Laplace formuló de manera más general; pero no fue hasta 1901 cuando el eminente probabilista A. M. Liapounov (1857-1918) lo estableció finalmente en condiciones muy generales y proporcionó una demostración completa y rigurosa.

El nombre de "Teorema Central", fue acuñado por George Polya en 1920, para subrayar que de todos los teoremas de distribuciones límites, éste es justamente el más importante. A continuación se enuncia el Teorema y se realiza su demostración.

Teorema del Límite Central. Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución no especificada, con media μ y varianza σ^2 conocidos y finitos. Entonces \bar{x} tiene una distribución con media μ y varianza σ^2/n , que tiende a una distribución normal conforme $n \rightarrow \infty$. En otras palabras la v.a. $Y = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ tiende a una distribución normal estándar.

Demostración:

Sean

$$Y = \frac{(\bar{x} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Dado que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} &= \frac{1}{n} \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = \frac{1}{n} \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} \left[n \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \mu \right] = \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} [n\bar{x} - n\mu] = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Luego

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n z_i$$

Obtenemos la función generadora de Y , denotada por:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E \left[\exp \left(t * \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n z_i \right) \right] = E \left[\exp \left(t * \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n}{\sqrt{n}} \right) \right] \\ M_Y(t) &= E \left[\prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{tz_i}{\sqrt{n}} \right) \right] \end{aligned}$$

Debido a que las z_i son independientes para toda $i = 1, 2, 3, \dots, n$, entonces:

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^n E \left[\exp \left(\frac{tz_i}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

Como las funciones generadoras de momento de las variables aleatorias z_i están idénticamente distribuidas, se aplica lo siguiente:

$$M_Y(t) = \left[M_z \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right]^n = E \left[\exp \left(\frac{tz_i}{\sqrt{n}} \right) \right]^n$$

Dado que las z_i son variables independientes, al expandir $\exp \left(\frac{tz_i}{\sqrt{n}} \right)$ en una serie de Taylor se tiene:

$$M_Y(t) = E \left[\exp \left(\frac{tz_i}{\sqrt{n}} \right) \right]^n = \left[E \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} z_1 + \frac{t^2}{2n} z_2^2 + \frac{t^3}{6n^{2/3}} z_3^3 + \frac{t^4}{24n^2} z_4^4 + \dots \right) \right]^n$$

$$M_Y(t) = \left\{ 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} E(z_1) + \frac{t^2}{2n} E(z_2^2) + \frac{t^3}{6n^{3/2}} E(z_3^3) + \frac{t^4}{24n^2} E(z_4^4) + \dots \right\}^n$$

Recordemos que z_i por ser una v.a. normal estándar se tiene $E(z_i) = 0$ y $Var(z_i) = E(z_i^2) - [E(z_i)]^2 = 1$, por lo que $E(z_i^2) = 1$, luego:

$$M_Y(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{6n^{3/2}} E(z_3^3) + \frac{t^4}{24n^2} E(z_4^4) + \dots \right]^n$$

Aplicamos el logaritmo en ambas expresiones:

$$\ln[M_Y(t)] = \ln \left\{ \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{6n^{3/2}} E(z_3^3) + \frac{t^4}{24n^2} E(z_4^4) + \dots \right]^n \right\}$$

$$\ln[M_Y(t)] = n * \ln \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{6n^{3/2}} E(z_3^3) + \frac{t^4}{24n^2} E(z_4^4) + \dots \right]$$

El desarrollo de $\ln(1 + u)$ de una serie estándar es:

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots$$

Entonces sustituyendo $u = \frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{6n^{3/2}} E(z_3^3) + \frac{t^4}{24n^2} E(z_4^4) + \dots$, se tiene:

$$\ln[M_Y(t)] = n \left\{ \left[\frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{6n^{3/2}} E(z_3^3) + \frac{t^4}{24n^2} E(z_4^4) + \dots \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2n} + \frac{t^3}{6n^{3/2}} E(z_3^3) + \frac{t^4}{24n^2} E(z_4^4) + \dots \right]^2 + \dots \right\}$$

Al multiplicar por n , se observa que el primer término, $(t^2/2)$, no depende de n . Por lo tanto, si aplicamos el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la serie, se observa que todos los demás términos contienen una n con un exponente positivo en el denominador, causando que tiendan a cero. Así al aplicar el límite, se obtiene la función generadora de momentos de una distribución normal estándar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\ln[M_Y(t)]\} = \frac{t^2}{2}$$

$$\ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} [M_Y(t)] \right\} = \frac{t^2}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [M_Y(t)] = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Por el Teorema de Unicidad⁸, se concluye que la v.a. Y tiene una función de distribución que converge a la función de distribución normal estándar ($Y \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$) cuando $n \rightarrow \infty$.

2.1.2. BETA

La distribución Beta es adecuada para v.a. continuas que toman valores en el intervalo $(0, 1)$, lo que la hace muy apropiada para modelar proporciones.

Sea X una v.a. que sigue una distribución Beta, denotada por $X \sim \text{Beta}(\lambda, \beta)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\lambda, \beta) = \frac{\Gamma(\lambda+\beta)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\beta)} x^{\lambda-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x) \quad \lambda, \beta > 0$$

La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis definidas para ésta distribución son las siguientes:

$$E(x) = \frac{\lambda}{(\lambda+\beta)} \quad \text{Var}(x) = \frac{\lambda\beta}{(\lambda+\beta)^2(\lambda+\beta+1)}$$

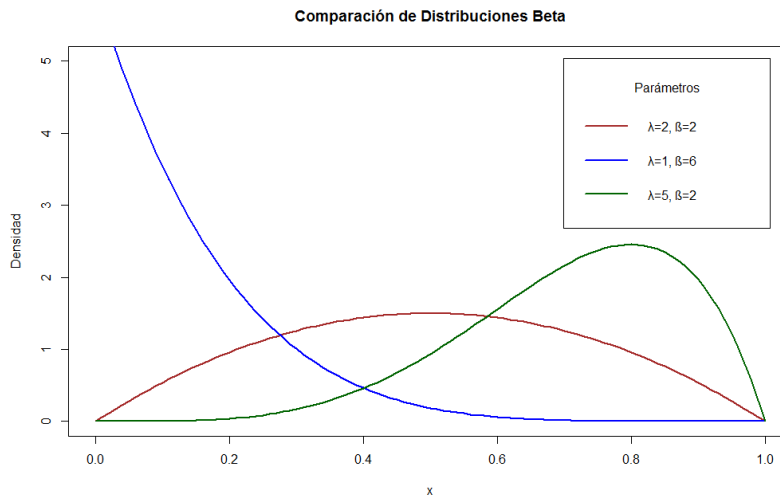
⁸ Teorema de Unicidad: Si existe la función generadora de momentos de una v.a., esta es única. Además la función generadora de momentos determina a la función de densidad o probabilidad de la v.a.

$$g_1 = \frac{2(\beta-\lambda)\sqrt{\lambda+\beta+1}}{\sqrt{\lambda+\beta}(\lambda+\beta+2)(\lambda+\beta+3)} \quad g_2 = \frac{3(\lambda+\beta+1)[2(\lambda+\beta)^2+\lambda\beta(\lambda+\beta-6)]}{(\lambda+\beta)(\lambda+\beta+2)(\lambda+\beta+3)}$$

La forma de esta distribución está descrita por los parámetros de forma (λ) y escala (β), los cuales de acuerdo a su comportamiento ofrecen las siguientes características a la distribución (ver Figura 5):

- Cuando $\lambda = \beta$, la distribución Beta es simétrica; mientras λ y β sean más grandes, la distribución se vuelve más puntiaguda y la varianza decrece.
- Cuando $\lambda \neq \beta$, la distribución es asimétrica con un nivel de sesgo creciente en tanto la diferencia entre λ y β sea mayor. Sí $\beta > \lambda$, la distribución tiene asimetría positiva; en caso contrario, tiene asimetría negativa.
- Cuando $\lambda = \beta = 1$, la distribución se vuelve una Distribución Uniforme y la función de densidad toma el valor constante de uno en el intervalo cerrado $[0, 1]$ para la v.a. X .

Figura 5. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Beta con distintos parámetros de forma (λ) y escala (β).

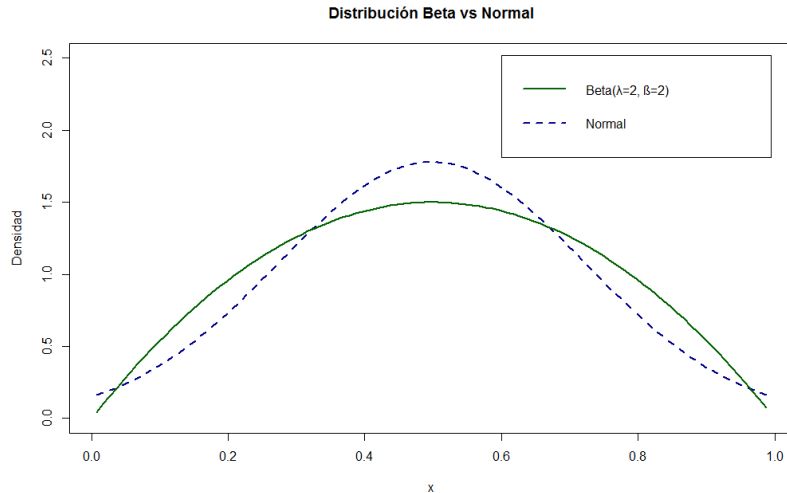


Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

En el estudio de simulación aplicamos dos diferentes tipos de distribuciones Beta, con los siguientes parámetros:

- a) **Simétrica leptocúrtica** ($\lambda = \beta = 2$). Se puede apreciar en la Figura 6, que la distribución beta con estos parámetros, es simétrica aunque más aplanada que una distribución normal, es decir, con colas anchas o cortas.

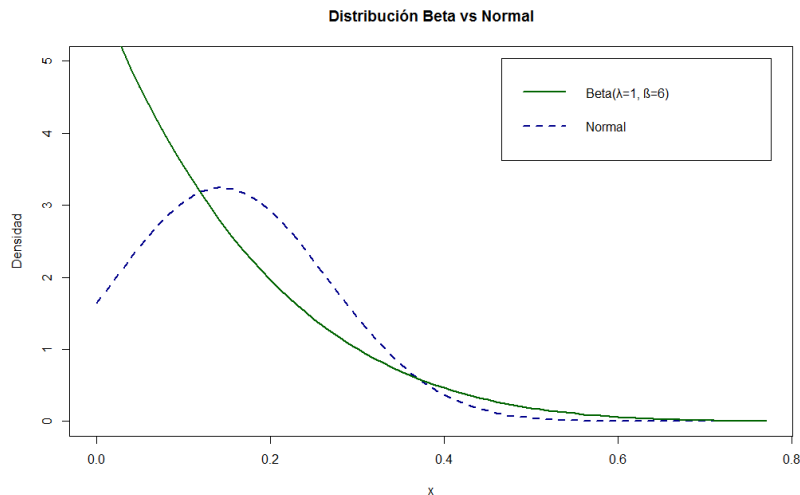
Figura 6. Comparación de una distribución **Beta(2, 2)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

- b) **Asimétrica leptocúrtica** ($\lambda = 1, \beta = 6$). Debido a que $\beta > \lambda$, es una distribución con asimetría positiva y una curtosis elevada, al compararse con una distribución normal (ver Figura 7), se puede apreciar la diferencia en la concentración de los datos.

Figura 7. Comparación de una distribución **Beta(1, 6)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.3. UNIFORME

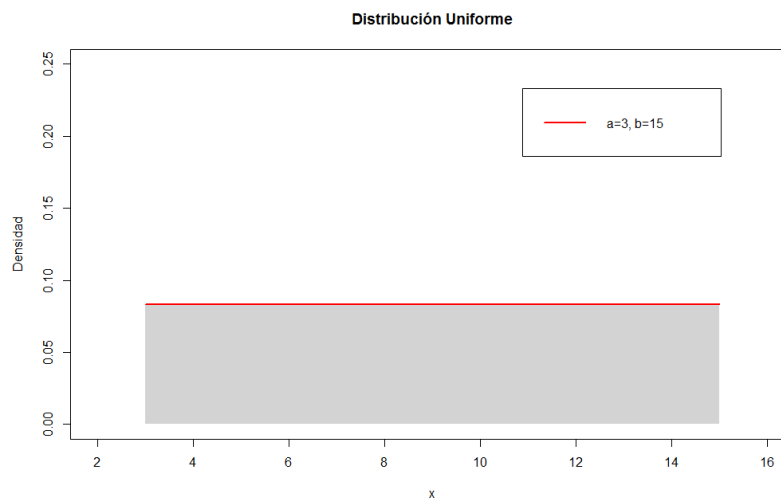
La distribución Uniforme es utilizada para modelar eventos aleatorios cuando cada instancia o resultado posee la misma probabilidad de ocurrir.

Sea X una v.a. que sigue la distribución Uniforme, denotada por $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|a, b) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x) \quad a, b \in \mathbf{R}, \quad a < b$$

Esta densidad forma un rectángulo con base $(b - a)$ y altura $\left(\frac{1}{b-a}\right)$, como se aprecia en la Figura 8, a menudo a ésta distribución se le conoce también como distribución rectangular.

Figura 8. Función de densidad de una distribución $\text{Uniforme}(3, 15)$.



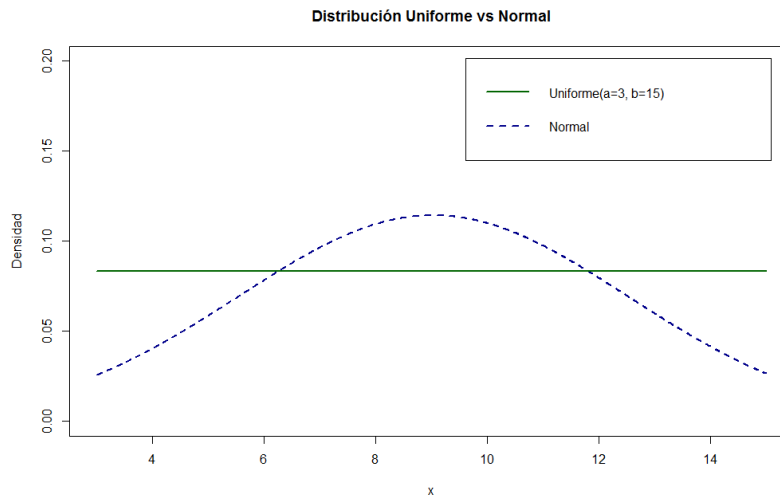
Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

La Media, Varianza, Simetría y Curtosis de la distribución Uniforme respectivamente son:

$$E(x) = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}(x) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad g_1 = 0 \quad g_2 = \frac{9}{5}$$

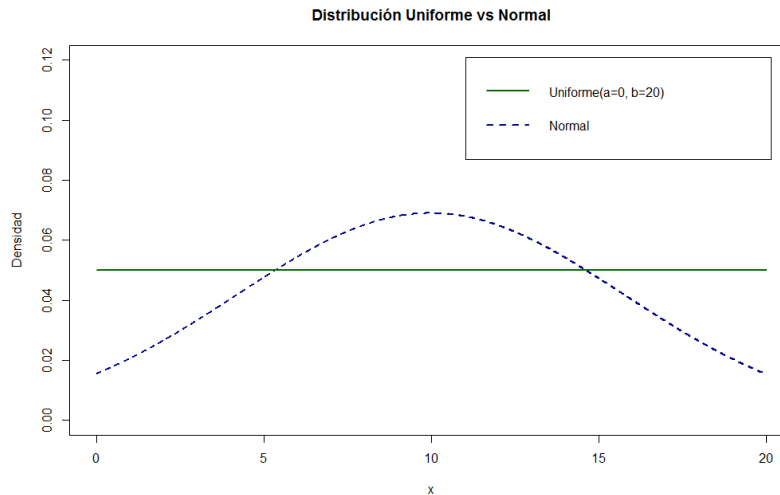
La distribución uniforme, es el caso extremo de una **distribución platicúrtica** o de colas cortas; así mismo, es **simétrica** por definición, como se observa en las Figuras 9 y 10. Para el estudio de simulación, aplicamos dos diferentes tipos de distribución uniforme con parámetros ($a = 3, b = 15$) y ($a = 0, b = 20$).

Figura 9. Comparación de una distribución *Uniforme*(3,15) contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Figura 10. Comparación de una distribución *Uniforme*(0,20) contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.4. PARETO

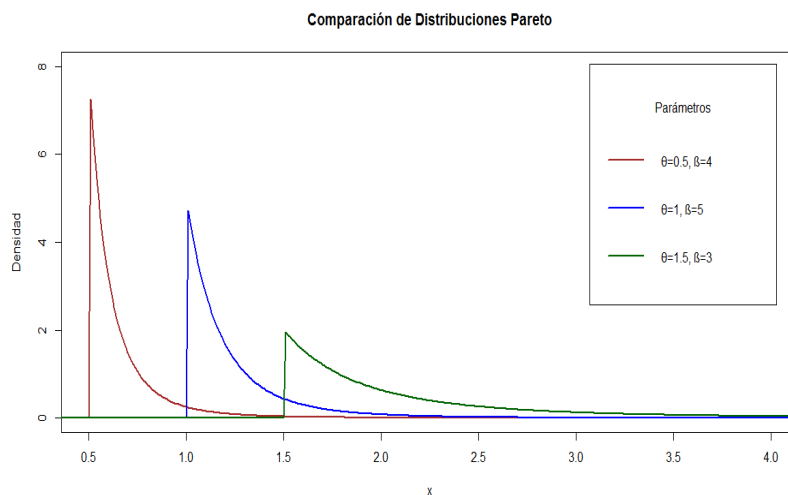
La distribución de Pareto fue introducida por el economista italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) como un modelo para explicar la distribución de las rentas de los individuos de una población.

Sea X una v.a. que sigue la distribución Pareto, denotada por $X \sim \text{Pareto}(\theta, \beta)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\theta, \beta) = \frac{\beta\theta^\beta}{x^{(\beta+1)}} I_{(\theta, \infty)}(x) \quad \beta > 1, \theta > 0$$

Se trata de una distribución biparamétrica, con parámetros de forma (β) y de localización (θ). El parámetro θ es un indicador de posición, marca el límite inferior de los valores posibles que una v.a. Pareto puede tomar que, en términos económicos, puede interpretarse como el ingreso mínimo de la población. El parámetro β está asociado con la dispersión; mayores valores de β , se obtienen densidades Pareto más concentradas cerca del mínimo (θ), es decir menos dispersas (ver Figura 11).

Figura 11. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Pareto con distintos parámetros de forma (β) y de localización (θ).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

La distribución Pareto es una distribución leptocúrtica, o de cola pesada. En consecuencia, la media y la varianza son finitas solo si el parámetro de forma es suficientemente grande. En efecto, sean la media, varianza, sesgo y curtosis:

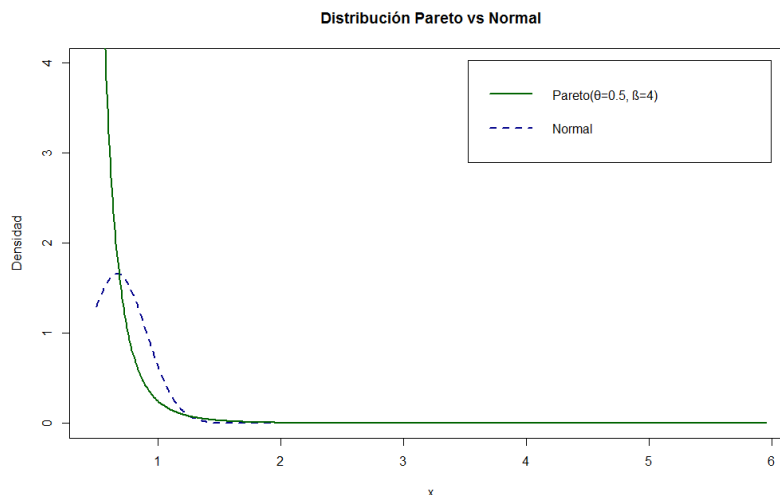
$$E(x) = \frac{\theta\beta}{\beta-1}; \beta > 1 \quad \text{Var}(x) = \frac{\beta\theta^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)}; \beta > 2$$

$$g_1 = \frac{2(1+\beta)}{\beta-3} \sqrt{\frac{\beta-2}{\beta}}; \beta > 3 \quad g_2 = \frac{6(\beta^3+\beta^2-6\beta-2)}{\beta(\beta-3)(\beta-4)}; \beta > 4$$

Por lo tanto, si $\beta \leq 1$ el valor esperado es infinito, del mismo modo la varianza $\beta \leq 2$, el sesgo $\beta \leq 3$ y la curtosis $\beta \leq 4$. Asimismo, a medida que el parámetro de forma β crece, la media tiende a aproximarse al parámetro de localización θ por la derecha, lo que corrobora que la distribución tiende a concentrarse cerca de θ para valores grandes de β .

Para el estudio de simulación, aplicamos una distribución Pareto con parámetros $\theta = 0.5$ y $\beta = 4$, por lo que al compararla con una distribución normal (ver Figura 12), se puede observar que la distribución Pareto tiene una asimetría positiva, con una curtosis elevada, por lo que los datos se concentran cerca de su parámetro θ , siendo una **distribución asimétrica leptocúrtica**.

Figura 12. Comparación de una distribución **Pareto(0.5,4)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.5. CAUCHY

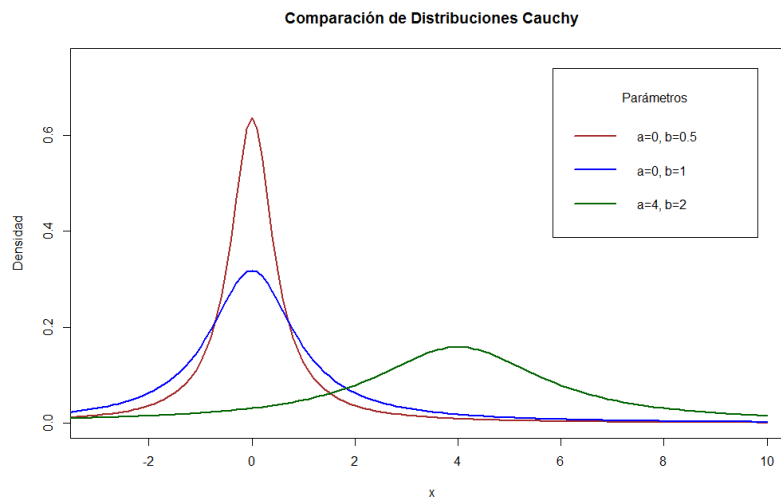
Esta distribución fue introducida por Simeón Denis Poisson (1781-1840) en 1824, aunque debe su nombre al matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857) quien la reintrodujo en 1853. En el ámbito de la física también es conocida con el nombre de distribución de Lorentz o distribución de Breit-Wigner.

Sea X una v.a. que sigue una distribución Cauchy, denotada por $X \sim \text{Cauchy}(a, b)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x | a, b) = \frac{b^2}{\pi[b^2+(x-a)^2]} I_{(-\infty, \infty)}(x) \quad a \in \mathbb{R}, b > 0$$

La distribución de Cauchy depende de dos parámetros: localización (a) y forma (b). Su función de densidad es simétrica respecto al parámetro de escala a (ver Figura 13).

Figura 13. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Cauchy con distintos parámetros de localización (a) y forma (b).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Una característica destacable de esta distribución es que carece de momentos, por lo que no existen la Media, Varianza, Asimetría y Curtosis de esta distribución.

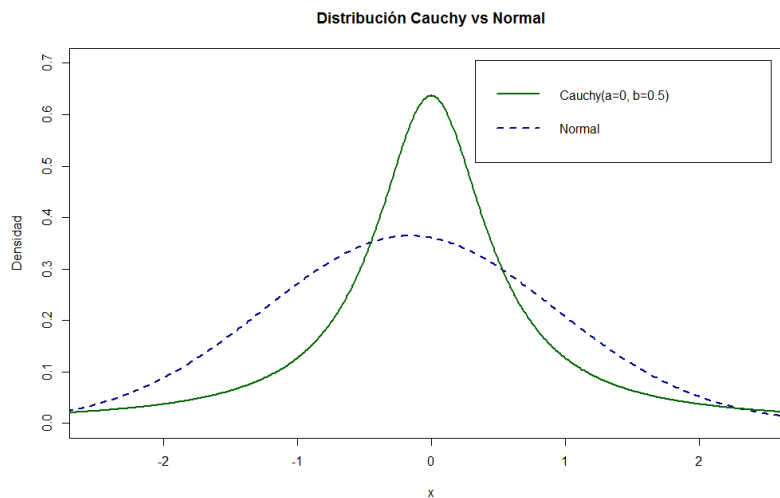
$$E[X^2] \propto \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx - \pi = \infty$$

La forma estándar de la distribución Cauchy puede ser obtenida al reemplazar los valores de los parámetros $a = 0$ y $b = 1$, es decir, $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ donde su función de densidad de probabilidad está definida por:

$$f(x | 0, 1) = \frac{1}{\pi[1+x^2]} I_{(-\infty, \infty)}(x)$$

Para el estudio de simulación, aplicamos una distribución Cauchy con parámetros $a = 0$ y $b = 0.5$, que se caracteriza por ser **simétrica leptocúrtica** (o de colas largas). Al compararla con una distribución normal, podemos observar que tiene un grado mayor de apuntamiento, por lo que los datos se concentran cerca del parámetro a (ver Figura 14).

Figura 14. Comparación de una distribución **Cauchy(0,0.5)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.6. LAPLACE

Fue descubierta en 1774 por Pierre-Simon Laplace (1749-1827), a quien debe su nombre, aunque también es conocida por el nombre de distribución doble exponencial. Sea X una v.a. que sigue una distribución Laplace, denotada por $X \sim \text{Laplace}(\lambda, \beta)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

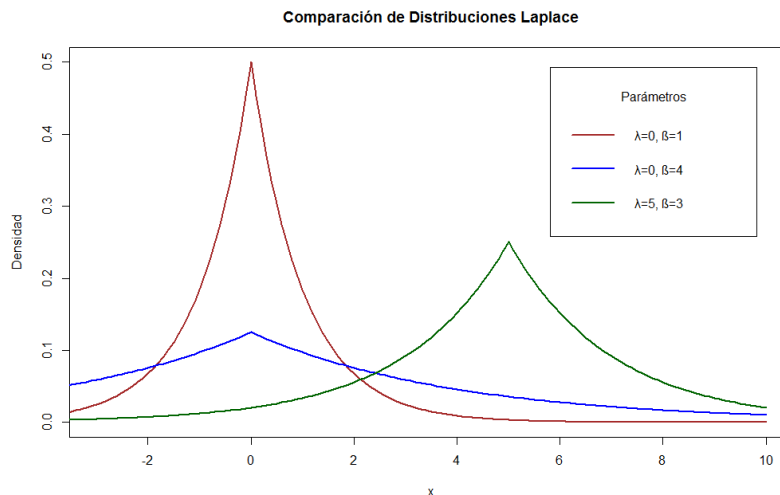
$$f(x|\lambda, \beta) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x-\lambda|}{\beta}\right) I_{(-\infty, \infty)}(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

Así la Media, Varianza, Sesgo de la distribución son, respectivamente:

$$E(x) = \lambda \quad \text{Var}(x) = 2\beta^2 \quad g_1 = 0$$

Esta distribución viene determinada por dos parámetros, uno de localización (λ) y otro de escala (β). Su función de densidad es simétrica y el parámetro de localización determina su eje de simetría, además de ser el punto donde la función alcanza su valor máximo en forma de pico afilado (ver Figura 15).

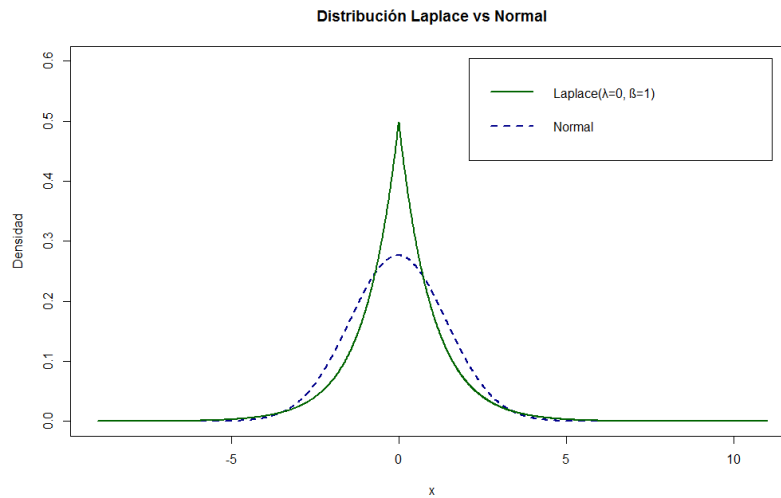
Figura 15. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Laplace con distintos parámetros de localización (λ) y escala (β).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Independientemente de los valores que tomen sus parámetros, es una **distribución simétrica leptocúrtica**, lo que quiere decir que su función de densidad es más apuntada que la función de densidad normal con la misma media y desviación estándar, como se puede apreciar en la Figura 16. Debido a sus características en el estudio de simulación se aplicó una distribución Laplace con parámetros $\lambda = 0$ y $\beta = 1$.

Figura 16. Comparación de una distribución **Laplace(0,1)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.7. TRIANGULAR

El nombre de ésta distribución viene dado por la forma de su función de densidad. Este modelo proporciona una primera aproximación cuando hay poca información disponible, de forma que sólo se necesita conocer el mínimo (valor pesimista), el máximo (valor optimista) y la moda (valor más probable). Estos tres valores son los parámetros que caracterizan a la distribución triangular y se denotan por **a**, **b** y **c**, respectivamente.

Si una v.a. X tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)(c-a)}(x-a) & a \leq x \leq c \\ \frac{2}{(b-a)(b-c)}(b-x) & c \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

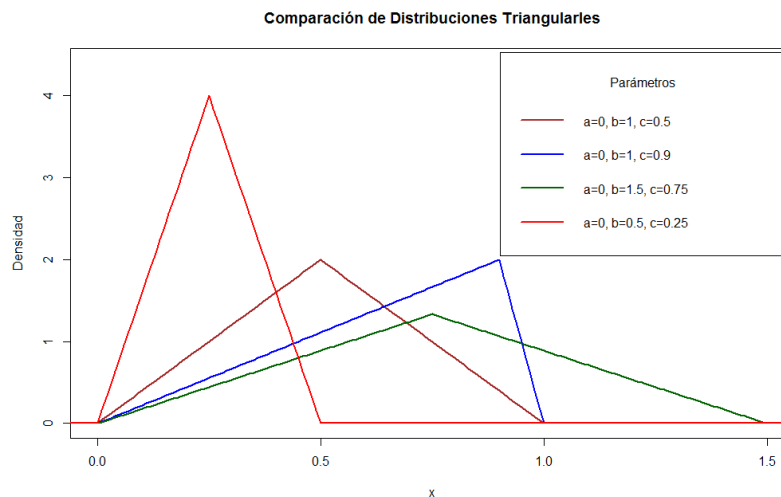
Entonces definimos a X como una v.a. con la distribución Triangular, denotada por $X \sim \text{Triangular}(a, b, c)$; donde a es el parámetro de localización, b es el parámetro de forma, y c es el parámetro de escala. Así, la Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de dicha distribución son, respectivamente:

$$E(x) = \frac{a+c+b}{3} \quad \text{Var}(x) = \frac{(b-a)^2 - (b-m)(m-a)}{18}$$

$$g_1 = \frac{\sqrt{2}(a-2c+b)(b-2a+c)(2b-c-a)}{5[(b-a)^2 - (c-a)(b-c)]^{3/2}} \quad g_2 = \frac{12}{5}$$

La distribución presenta distintas intensidades en su asimetría, dependiendo del valor modal con respecto al centro del intervalo, tal y como se observa en la Figura 17.

Figura 17. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Triangulares con distintos parámetros (a , b y c).

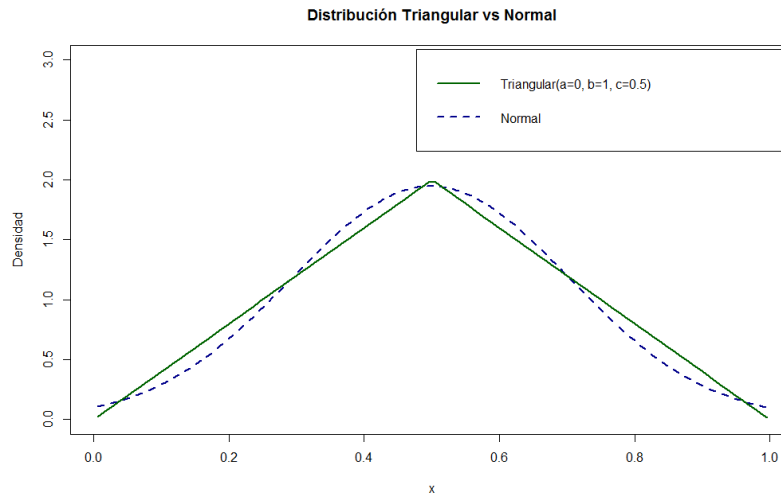


Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, aplicamos dos tipos de distribuciones triangulares:

- a) **Simétrica platicúrtica** ($a = 0, b = 1, c = 0.5$). Tal como se puede apreciar en la Figura 18, esta distribución tiene una curtosis cercana a la distribución normal; no obstante es una distribución con colas cortas, por lo que hay mayor concentración de datos en las colas.

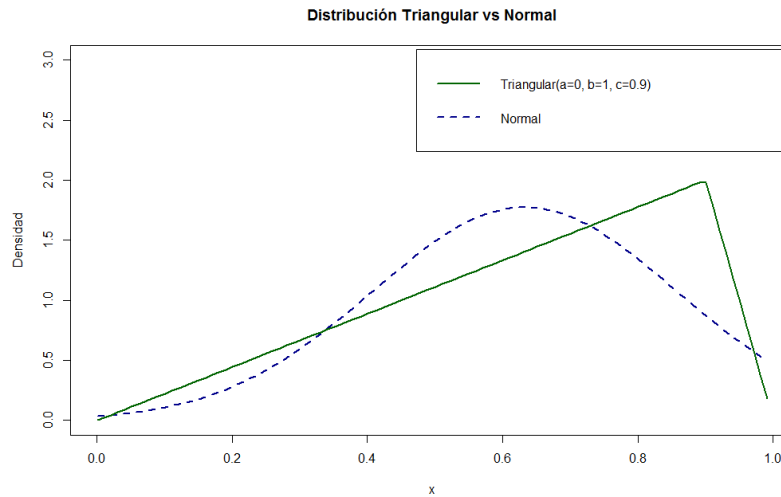
Figura 18. Comparación de una distribución **Triangular(0,1,0.5)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

- b) **Asimétrica platicúrtica** ($a = 0, b = 1, c = 0.9$). Debido a que el parámetro c o moda es mayor a la media, tiene asimetría negativa como se observa en la Figura 19.

Figura 19. Comparación de una distribución *Triangular(0,1,0.9)* contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.8. GAMMA

La distribución Gamma tiene su origen en la familia de curvas sesgadas propuestas por Karl Pearson (1857-1936). Uno de sus primeros y más importantes trabajos fue su contribución al análisis de curvas sesgadas. Su motivación nació al notar que ciertas medidas biológicas, sociológicas y económicas, existe una desviación de la forma normal y es importante la dirección y la cantidad de esa desviación.

Sea X una v.a. que sigue una distribución Gamma, denotada por $X \sim \text{Gamma}(\lambda, \beta)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\lambda, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\beta^\lambda} x^{\lambda-1} e^{-\frac{x}{\beta}} I_{(0,\infty)}(x) \quad \alpha, \beta > 0$$

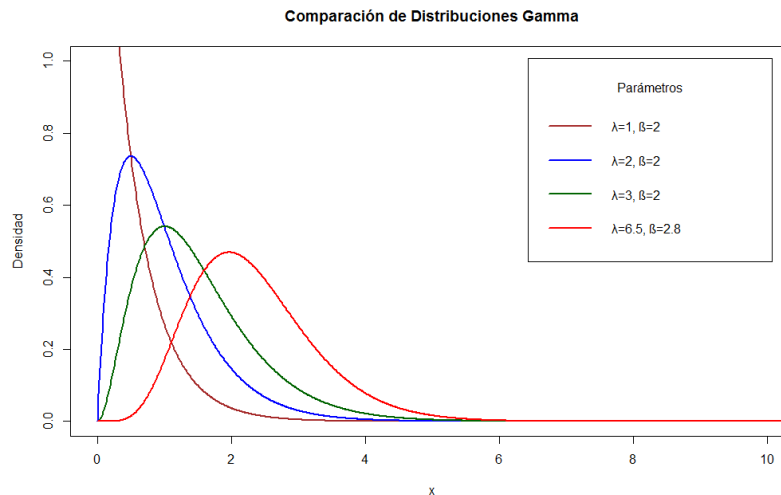
Dónde:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-t} dt$$

La distribución tiene dos parámetros, uno de forma (λ) y otro de escala (β); los cuales de acuerdo a su comportamiento ofrecen las características siguientes a la forma que presenta su función de densidad (ver Figura 20):

- Para $\lambda < 1$, la distribución está fuertemente sesgada hacia la derecha.
- Para $\lambda = 1$, la función corta el eje vertical en $\frac{1}{\beta}$ para $x = 0$ (Este caso especial de la distribución gamma es llamada la distribución exponencial).
- Para $\lambda = 1$ y $\beta = \frac{n}{2}$, es un caso especial de la distribución gamma también conocida como distribución Chi cuadrada.
- Para $\lambda > 1$, la función gamma comienza en el origen [$f(0) = 0$]. Cuando los valores de éste parámetro aumentan, resulta una distribución con menor sesgo, y tiene un desplazamiento de la media de los datos hacia la derecha.
- El parámetro de escala β hace que la función se alargue o se estreche.

Figura 20. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Gamma con distintos parámetros de forma (λ) y escala (β).



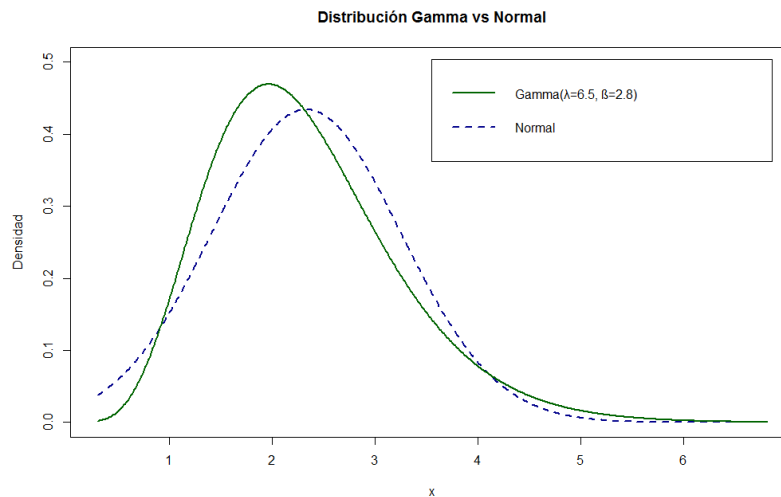
Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de esta distribución son, respectivamente:

$$E(x) = \lambda\beta \quad \text{Var}(x) = \lambda\beta^2 \quad g_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \quad g_2 = \frac{6+3\lambda}{\lambda}$$

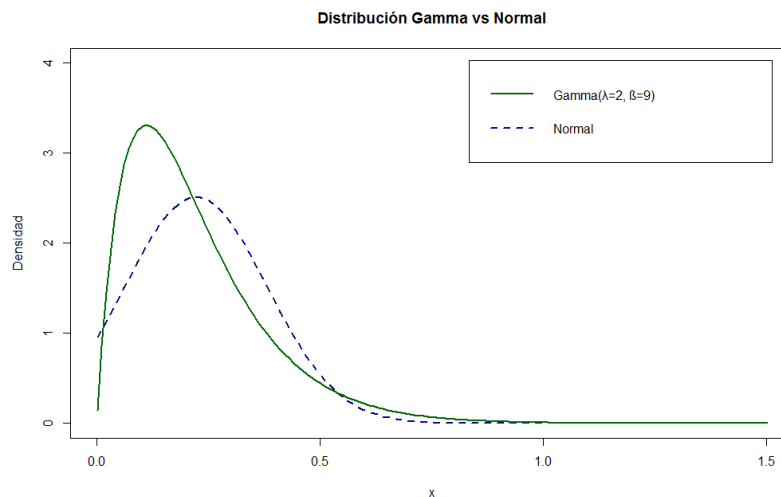
Para el estudio de simulación, empleamos dos distribuciones Gamma; la primera, con parámetros $\lambda = 6.5$ y $\beta = 2.8$, la cual tiene una curtosis ligeramente mayor a una distribución normal, con una asimetría positiva como se observa en la Figura 21; la segunda, con parámetros $\lambda = 2$ y $\beta = 9$, teniendo tanto una mayor asimetría positiva, así como una mayor dispersión en los datos debido al aumento de curtosis (ver Figura 22). Ambas son **distribuciones asimétricas leptocúrticas**.

Figura 21. Comparación de una distribución **Gamma(6.5, 2.8)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Figura 22. Comparación de una distribución **Gamma(2, 9)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.9. T STUDENT

Esta distribución fue propuesta y tabulada por William Sealy Gosset (1876-1937), más conocido por el seudónimo de Student, como resultado de un estudio sobre la estimación de la media cuando el tamaño de muestra es pequeño (Student, 1908).

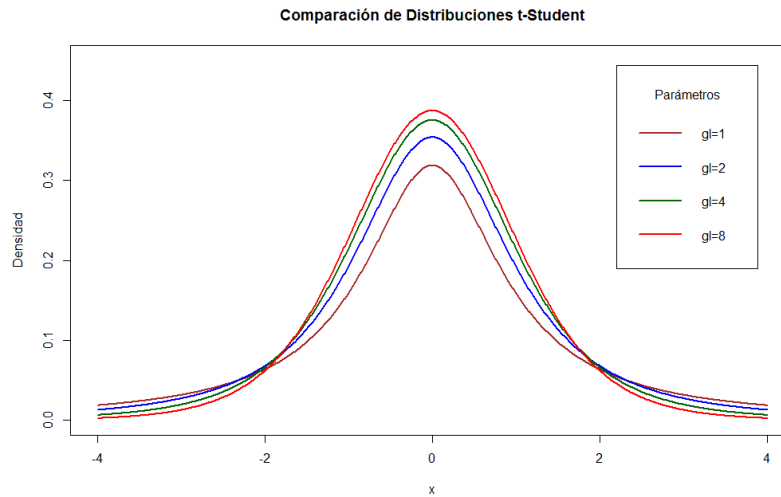
Sea X una v.a. que sigue la distribución t-Student, denotada por $X \sim t - Student(n)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} I_{(-\infty, \infty)}(x) \quad n > 0$$

La distribución t de Student queda completamente definida por medio de sus grados de libertad (n). Surge cuando se plantea estudiar el cociente entre una v.a. con distribución normal estándar y la raíz cuadrada del cociente entre una v.a. con distribución Chi-cuadrado y sus grados de libertad (n), siendo las dos variables independientes. Esta distribución desempeña un papel muy importante en la inferencia estadística asociada a la teoría de muestras pequeñas y es usada habitualmente en el contraste de hipótesis para la media de una población o para comparar medias de dos poblaciones.

En cuanto a la forma que presenta su función de densidad cabe destacar las similitudes que mantiene con la función de densidad de la distribución normal estándar: forma acampanada, simétrica y centrada en el origen; la única diferencia existente entre ambas distribuciones es que la función de densidad de la t de Student presenta unas colas más pesadas (mayor dispersión) que la normal (leptocúrtica), como se aprecia en la Figura 23. La distribución t de Student con 1 grado de libertad coincide con la distribución de Cauchy estándar.

Figura 23. Comparación de funciones de densidad de distribuciones t Student con distintos grados de libertad (gl).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

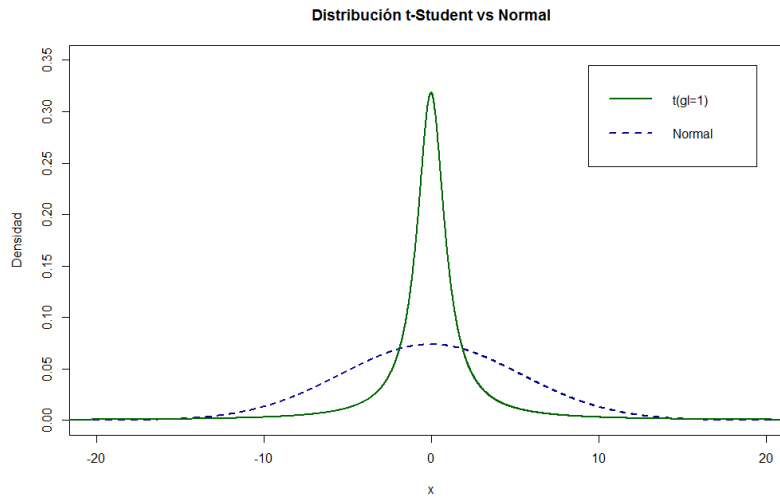
La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de esta distribución son, respectivamente:

$$E(x) = 0 \quad n > 1 \quad Var(x) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2$$

$$g_1 = 0 \quad n > 3 \quad g_2 = \frac{6}{n-4} \quad n > 4$$

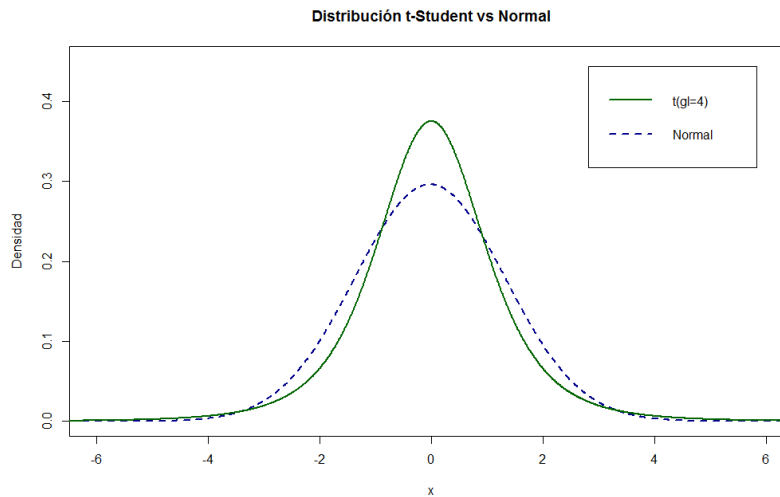
Para el estudio de simulación, empleamos dos diferentes distribuciones t Student; la primera, con un grado de libertad ($n = 1$), con un exceso de curtosis elevado como se observa al compararlo con una distribución normal en el Figura 24; la segunda, con cuatro grados de libertad ($n = 4$), distinguiendo en el Figura 25, que mientras aumentemos el valor de los grados de libertad, la distribución se irá ajustando a una distribución normal. Ambas son **distribuciones simétricas leptocúrticas**.

Figura 24. Comparación de una distribución t – *Student*(1) contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Figura 25. Comparación de una distribución t – *Student*(4) contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.10. EXPONENCIAL

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma y el equivalente continuo de la distribución geométrica discreta, es probablemente la más usada en trabajos estadísticos después de la distribución normal.

Sea X una v.a. que sigue una distribución Exponencial, denotada por $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-(\lambda x)} I_{(0,\infty)}(x) \quad \lambda > 0$$

Donde λ es un parámetro de forma.

Una característica importante de esta distribución es la propiedad conocida como “**falta de memoria**”. Si X representa el tiempo de vida de un individuo, entonces la probabilidad de que un individuo con antigüedad s viva t unidades de tiempo más, coincide con la probabilidad de que un nuevo individuo viva al menos t unidades de tiempo. Es decir, este individuo “no recuerda” que ha vivido ya s unidades de tiempo; la distribución que sigue la cantidad adicional de tiempo que sobrevive el organismo coincide con la distribución original del tiempo de vida. La distribución exponencial es la única distribución continua que satisface la pérdida de memoria.

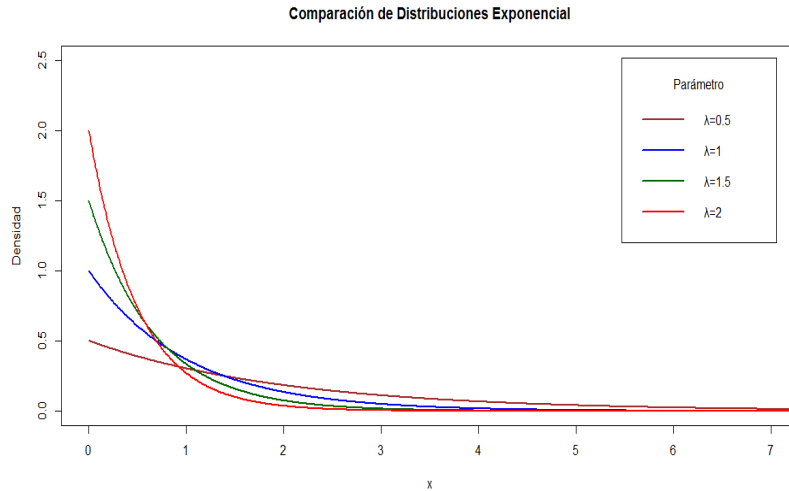
$$P(X > t + s | X > s) = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de la distribución Exponencial son, respectivamente:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2} \quad g_1 = 2 \quad g_2 = 9$$

En cuanto a la forma que presenta su función de densidad, es una distribución sesgada hacia la derecha, donde a medida que el parámetro de forma (λ) disminuye, las colas son más pesadas, porque hay mayor dispersión en los datos. Independientemente de los valores que tome λ , es una **distribución asimétrica leptocúrtica** (ver Figura 26).

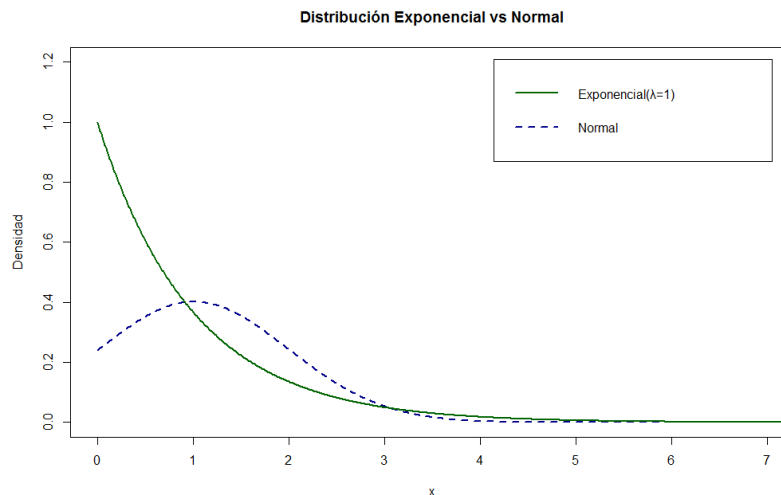
Figura 26. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Exponenciales con distintos valores del parámetro de forma (λ).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, aplicamos una distribución Exponencial con parámetro $\lambda = 1$, por lo que al compararla con una distribución normal (ver Figura 27), se puede observar que la distribución Exponencial es muy sesgada hacia la derecha (asimetría positiva), con una curtosis elevada.

Figura 27. Comparación de una distribución *Exponencial(1)* contra una distribución Normal.

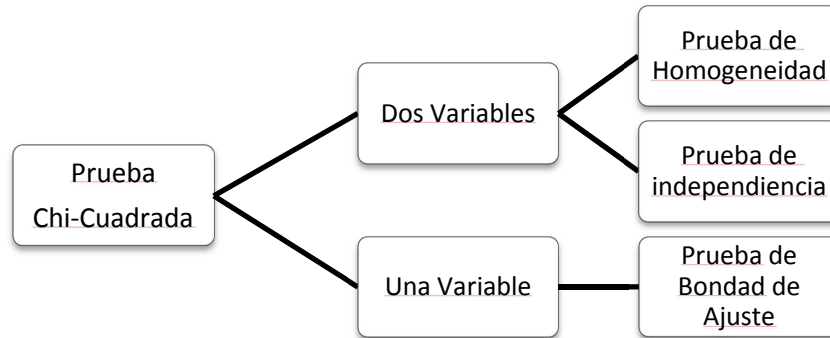


Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.11. CHI-CUADRADA

Conocida como distribución de Pearson, ji cuadrada o chi cuadrada, debe su nombre al matemático inglés Karl Pearson (1857-1936), es fundamental en inferencia estadística y en los test estadísticos de bondad de ajuste (ver Figura 28).

Figura 28. Clasificación de la Prueba Chi-Cuadrada.



Fuente: Elaboración propia.

Sea X una v.a. que sigue una distribución Chi Cuadrada, denotada por $X \sim \text{Chi cuadrada}(n)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{(n/2)-1} e^{-\frac{x}{2}} I_{(0,\infty)}(x) \quad n > 0$$

Donde n son los grados de libertad y el parámetro de la distribución.

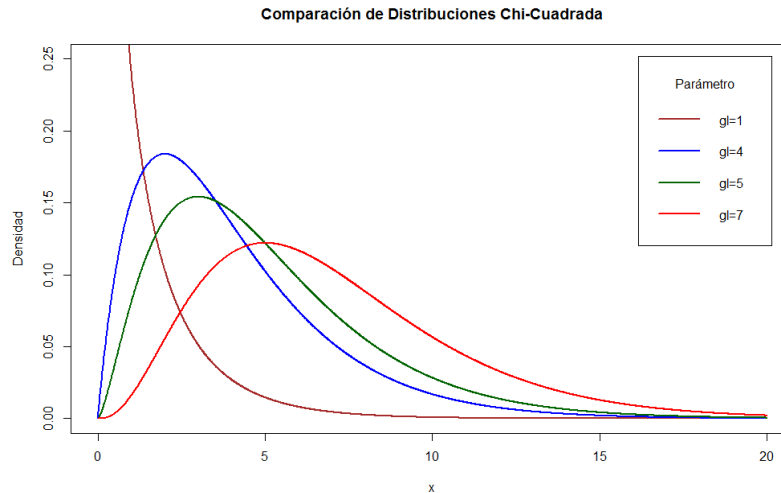
La Media, Varianza Sesgo y Curtosis de la distribución Exponencial son, respectivamente:

$$E(x) = n \quad \text{Var}(x) = 2n \quad g_1 = \sqrt{\frac{8}{n}} \quad g_2 = \frac{12}{n}$$

La representación gráfica de la función de densidad depende de los grados de libertad (n); para valores pequeños la función de densidad es asimétrica con cola larga a la derecha. A medida que aumentan los grados de libertad, el centro de la distribución se

desplaza hacia la derecha y la forma de la distribución se hace más simétrica; para valores grandes ($n > 30$) la función χ_n^2 se aproxima a una normal $N(n, 2n)$. Su función de densidad solo tiene valores positivos, por lo que es una distribución asimétrica con colas largas, como se observa en la Figura 29.

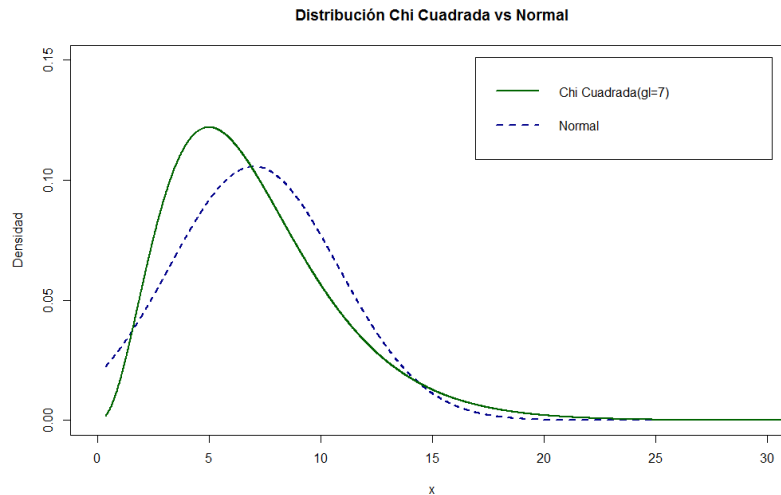
Figura 29. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Chi cuadrada con distintos grados de libertad (gl).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, empleamos una distribución Chi cuadrada con siete grados de libertad ($n = 7$), al compararla con una distribución normal (ver Figura 30), se puede observar que tiene una mayor curtosis con una asimetría positiva (o a la derecha), por lo que es una **distribución asimétrica leptocúrtica**.

Figura 30. Comparación de una distribución *Chi cuadrada*(2) contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.12. LOGNORMAL

La habitual definición de una v.a. X con distribución Lognormal, es la de aquella variable cuyo logaritmo neperiano $Y = \ln(X)$, sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Por lo tanto, se puede verificar que la función de densidad para $X = \exp(Y)$ donde $Y = \ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$, siendo $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma)$ cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{\left[\frac{-(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} I_{(0,\infty)}(x) \quad \mu \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0$$

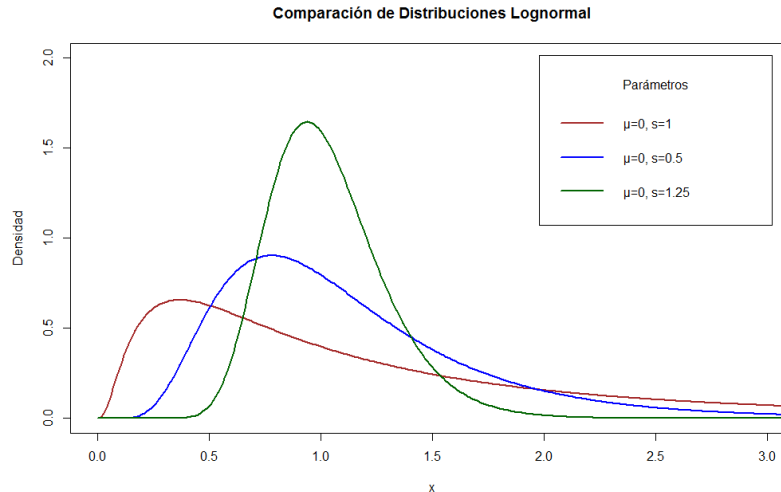
Sus características estadísticas más relevantes, se deducen al igual que su función de densidad, de su relación con la distribución normal. Por lo tanto, la Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de la distribución son, respectivamente:

$$E(x) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \quad \text{Var}(x) = e^{(2\mu + \sigma^2)} \cdot (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$g_1 = e^{(-\mu - \sigma^2)} \cdot (e^{\sigma^2} + 2) \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1} \quad g_2 = e^{4\sigma^2} + 2e^{3\sigma^2} + 3e^{2\sigma^2} - 6$$

También conocida como distribución logarítmico-normal, es lo que se conoce en estadística como una distribución de colas anchas, es decir, su densidad refleja una característica que también corrobora la varianza de esta distribución, hay probabilidad alta de que la variable tome valores alejados de la media (ver Figura 31).

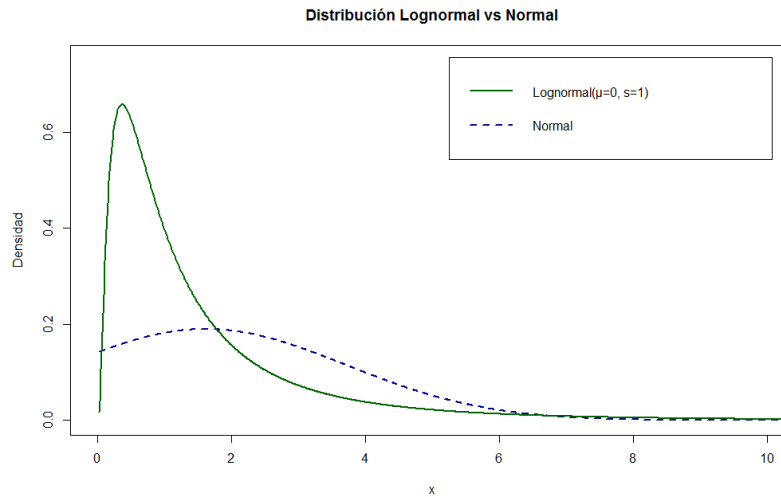
Figura 31. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Lognormal con distintos parámetros (μ y σ).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, aplicamos una distribución Lognormal con parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, por lo que al compararla con una distribución normal (Figura 32), se puede observar que la distribución Lognormal es muy sesgada hacia la derecha (asimetría positiva), con una curtosis elevada, por lo que es una **distribución asimétrica leptocúrtica**.

Figura 32. Comparación de una distribución *Lognormal(0,1)* contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.13. LOGÍSTICA

Pierre François Verhulst (1804-1849) describió por primera vez la curva logística en un trabajo, publicado en 1845, que versaba sobre las investigaciones matemáticas en las leyes que gobiernan el crecimiento de la población.

Sea X una v.a. que sigue la distribución Logística, denotada por $X \sim \text{Logística}(\lambda, \beta)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

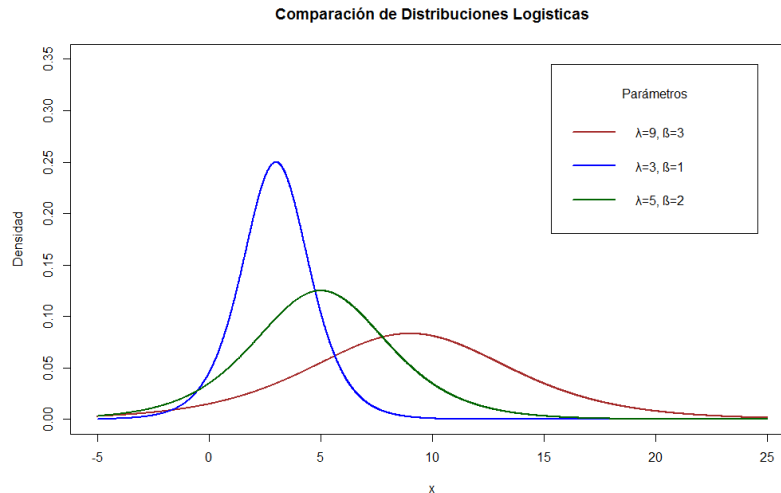
$$f(x|\lambda, \beta) = \frac{e^{-\frac{(x-\lambda)}{\beta}}}{\beta \left[1 + e^{-\frac{(x-\lambda)}{\beta}}\right]^2} I_{(-\infty, \infty)}(x) \quad \lambda \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis definidas para ésta distribución son las siguientes:

$$E(x) = \lambda \qquad \text{Var}(x) = \frac{\pi^2}{3} \cdot \beta^2 \qquad g_1 = 0 \qquad g_2 = \frac{6}{5}$$

Los parámetros asociados a ésta distribución son dos: localización (λ) y escala (β). Su función de densidad es simétrica respecto al parámetro λ y presenta un perfil más apuntado de acuerdo al valor que toma el parámetro β , que el de la distribución normal con la misma media y desviación estándar (ver Figura 33).

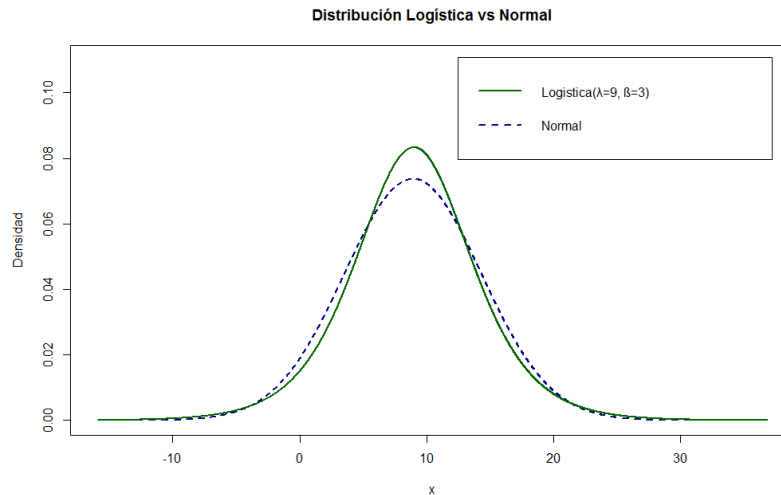
Figura 33. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Logísticas con distintos parámetros de localización (λ) y escala (β).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, empleamos la distribución Logística, con parámetros $\lambda = 9$ y $\beta = 3$, la cual presenta una curtosis ligeramente mayor en comparación con la distribución normal; es así que cumple con las características de una **distribución simétrica mesocúrtica** (ver Figura 34).

Figura 34. Comparación de una distribución *Logística(9,3)* contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.14. WEIBULL

La distribución Weibull adquiere el nombre del ingeniero matemático sueco Waloddi Weibull (1887-1979), después de haber sido realizado el estudio “*Una Función de Distribución Estadística de Amplia Aplicación*” (A Statistical Distribution Function of Wide Applicability); es sumamente utilizada en estudios de confianza debido a su versatilidad.

Si una v.a. X tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x|a, b) = \frac{a}{b^a} x^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} I_{(0, -\infty)}(x) \quad a > 0, b > 0$$

Donde b es el parámetro de escala, y a es el parámetro de forma de la distribución.

Entonces definimos a X como una v.a. con la distribución Weibull, denotada por $X \sim \text{Weibull}(a, b)$. Así la Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de la distribución, respectivamente son:

$$E(x) = b \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad \text{Var}(x) = b^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right]^2 \right\}$$

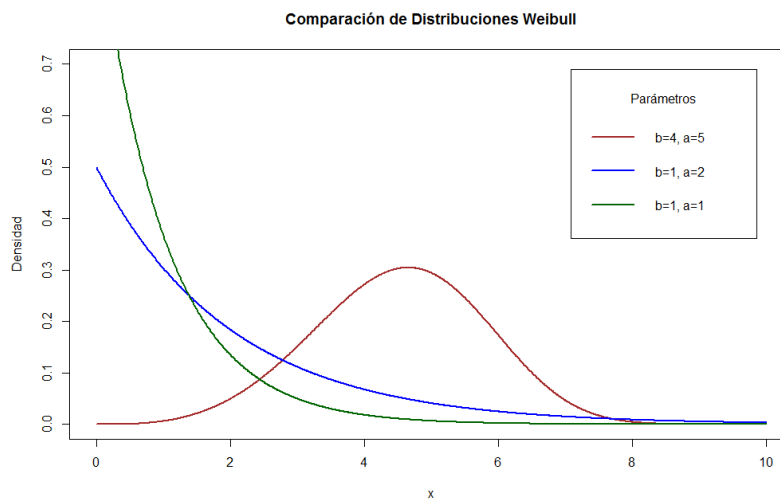
$$g_1 = \frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)^3 \right] - 3 \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right]^2 \right\}}{\left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right]^2 \right\}^{3/2}}$$

$$g_2 = \frac{b^4 \Gamma\left(1 + \frac{4}{a}\right) - 4g_1 b^3 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right]^2 \right\}^{3/2} E(x) - 6[E(x)]^2 [Var(x)] - [E(x)]^4}{b^4 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right]^2 \right\}^2}$$

Los dos parámetros de la distribución son: forma (**a**) y escala (**b**), los cuales de acuerdo a los valores que tomen (ver Figura 35), ofrecen el siguiente comportamiento a la función de densidad:

- Para $a < 1$, la distribución está fuertemente sesgada hacia la derecha presentando un sesgo positivo.
- Para $a = 1$, la distribución puede ser redefinida como una distribución Exponencial [$X \sim Exponencial(b)$]
- Para $a > 1$, cuanto mayor sea el valor de este parámetro, la distribución presenta un menor sesgo, y tiene un desplazamiento de su función de densidad presentando una asimetría más pronunciada hacia la izquierda.

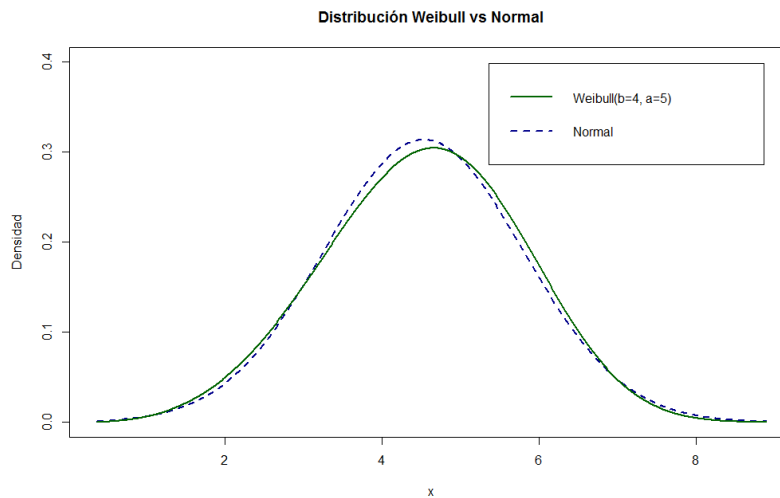
Figura 35. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Weibull con distintos parámetros de escala (**b**) y forma (**a**).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, aplicamos una distribución Weibull con parámetros $a = 5$ y $b = 4$, de modo que al contrastarla con la distribución normal (ver Figura 36), podemos observar un ligero desplazamiento de la forma de la densidad de la distribución hacia la derecha y una menor curtosis, representando así una **distribución simétrica mesocúrtica**.

Figura 36. Comparación de una distribución *Weibull*(5,4) contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.15. RAYLEIGH

La distribución Rayleigh es nombrada así debido a William Strutt (1842-1919), físico británico que descubrió el gas inerte Argón, motivo por el cual recibió el premio Nobel en 1904. Es definida como la distribución de la magnitud de un vector aleatorio bidimensional cuyas coordenadas son independientes, idénticamente distribuidas y de variables normales. La distribución tiene un gran número de aplicaciones en conjuntos donde las magnitudes de las variables normales son importantes.

Sea X una v.a. con la distribución Rayleigh, denotada por $X \sim \text{Rayleigh}(\sigma)$, cuya función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x|\sigma) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} I_{[0,\infty)}(x) \quad \sigma > 0$$

Donde σ es el parámetro de escala.

La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis definidas para ésta distribución son las siguientes:

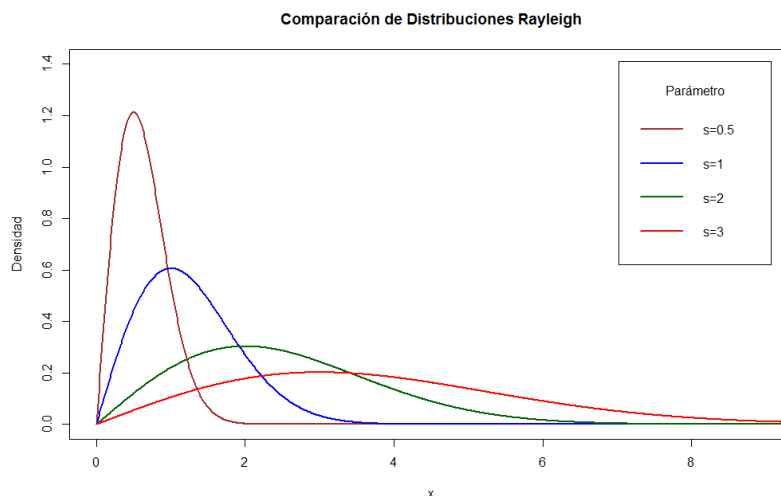
$$E(x) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{Var}(x) = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$g_1 = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{3/2}} \qquad g_2 = \frac{(32-3\pi^2)}{(4-\pi)^2}$$

La distribución Rayleigh es un caso particular de la distribución Weibull cuando el parámetro de escala σ es igual a 2 [**Rayleigh**(2) = **Weibull**(a, 2)].

Cuando el valor de σ es pequeño ($\sigma \leq 1$), la distribución presenta un grado alto de apuntamiento, con una asimetría positiva. Por el contrario, cuando σ toma valores mayores ($\sigma > 1$), la distribución se hace más simétrica y su curtosis disminuye, por lo que se hace más aplanada (ver Figura 37).

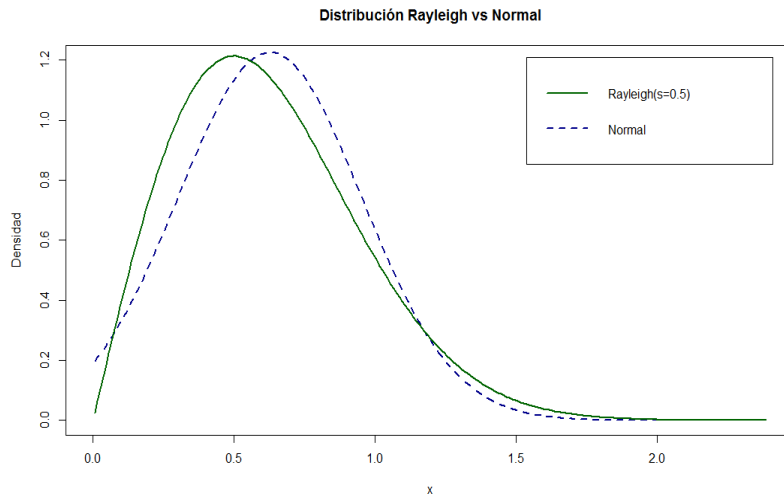
Figura 37. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Rayleigh con diferentes valores del parámetro de escala (s).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, aplicamos la distribución Rayleigh con el parámetro de escala $\sigma = 0.5$, y al ser comparada con la distribución normal podemos observar su asimetría positiva hacia la derecha, y el evidente apuntamiento, correspondientes a las **distribuciones asimétricas leptocúrticas** (ver Figura 38).

Figura 38. Comparación de una distribución *Rayleigh(0.5)* contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.16. RICE

La distribución Rice fue nombrada así debido al ingeniero estadounidense Stephen O. Rice (1907-1986), quien fue pionero en la teoría información, teoría de comunicaciones y telecomunicaciones.

Si una v.a. X tiene una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x|v, \sigma) = \left(\frac{x}{\sigma^2}\right) e^{\left[-\frac{(x^2+v^2)}{2\sigma^2}\right]} I_0\left(\frac{xv}{\sigma^2}\right) I_{[0,\infty)}(x) \quad v, \sigma > 0$$

Donde I_0 es la función de Bessel, σ es el parámetro de escala, y v es el parámetro de localización. Entonces definimos a X como una v.a. con la distribución Rice, denotada por $X \sim \text{Rice}(\sigma, v)$.

La Media, Varianza, Sesgo y Curtosis de la distribución Rice están definidas, respectivamente, como sigue:

$$E(x) = \sigma \sqrt{\pi/2} \left[{}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right]$$

$$Var(x) = 2\sigma^2 + v^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} \left[{}_1F_1 \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right]^2$$

$$g_1 = 3\sqrt{\pi} \left[{}_1F_1 \left(\frac{-3}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right] - \frac{3}{\sigma^3} (v^2 + 2\sigma^2) \sqrt{\pi/2} \left[{}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right] - \left(\frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \left[{}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right]^3$$

$$g_2 = \left[\frac{(v^4 + 8\sigma^2 v^2 + 8\sigma^4)}{\sigma^4} \right] - [3\pi(2)^{3/2}] \left[{}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right] \left[{}_1F_1 \left(\frac{-3}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right] \\ + \left[\frac{3\pi}{\sigma^2} (v^2 + 2\sigma^2) \right] \left[{}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right]^2 - \left[3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \left[{}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) \right]^4$$

Donde ${}_1F_1$ es la Función Hipergeométrica Confluyente⁹, la cual converge (en términos de la Función de Bessel) a:

$${}_1F_1 \left(\frac{-1}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) = e^{\left(\frac{-v^2}{4\sigma^2}\right)} \left[\left(1 + \frac{v^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{v^2}{4\sigma^2} \right) + \left(\frac{v^2}{2\sigma^2} \right) I_1 \left(\frac{v^2}{4\sigma^2} \right) \right] \\ {}_1F_1 \left(\frac{-3}{2}; 1; \frac{-v^2}{2\sigma^2} \right) = e^{\left(\frac{-3v^2}{4\sigma^2}\right)} \left[\left(1 + \frac{v^2}{2\sigma^2} \right) I_0 \left(\frac{3v^2}{4\sigma^2} \right) + \left(\frac{v^2}{2\sigma^2} \right) I_1 \left(\frac{3v^2}{4\sigma^2} \right) \right]$$

La Función de Bessel Modificada de Primer Tipo y Orden Cero, surge de la expansión de una Serie de Taylor de $e^{xcos\phi}$, descrita como sigue:

$$I_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^m}{m!} \right]^2$$

⁹ La Función Hipergeométrica Confluyente es una Función Hipergeométrica de Gauss definida por:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{k! (c)_k}; \text{ para } |z| < 1$$

Con $c \neq 0, -1, -2, \dots$ y $(a)_k$ es el símbolo de Pochhammer definido por:

$$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

$$I_0(x) \approx 1 + \frac{x^2}{4}, \text{ para } x \approx 0$$

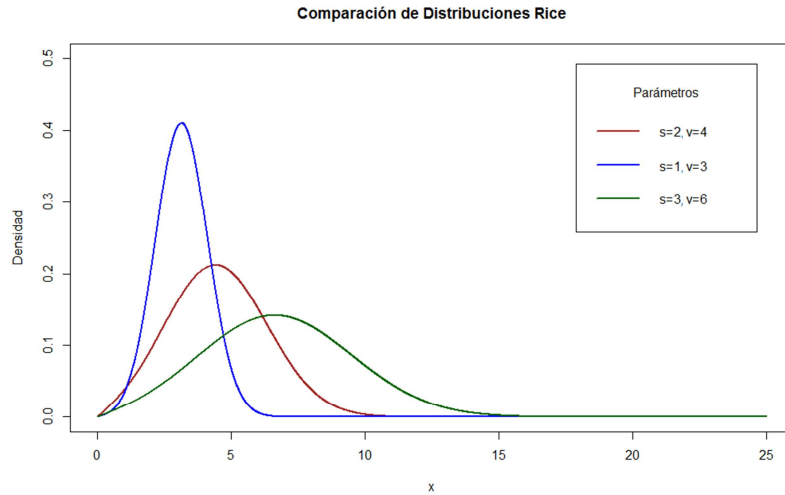
$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \text{ para } x \gg 1$$

Algunas propiedades de la distribución Rice pueden ser descritas bajo el siguiente comportamiento:

- Para $\nu \gg \sigma$, la distribución Rice tiende a ser una distribución Normal.
- Para $\nu = 0$, la distribución Rice se reduce a una distribución Rayleigh [$\text{Rice}(0, \sigma) = \text{Rayleigh}(\sigma)$].

La distribución Rice presenta características de acuerdo al comportamiento de su parámetro de escala σ , que modifica la dispersión de la distribución. Para valores pequeños ($\sigma \leq 1$) se comporta como una distribución con elevada curtosis, teniendo una forma muy apuntada haciendo que los datos se encuentren concentrados; por el contrario, si toma valores grandes ($\sigma > 1$) los datos se encontrarán más dispersos, por lo tanto, la distribución es más aplanada, disminuyendo su curtosis. Por otro lado, el parámetro de localización ν describe el desplazamiento de la distribución, como se aprecia en la Figura 39.

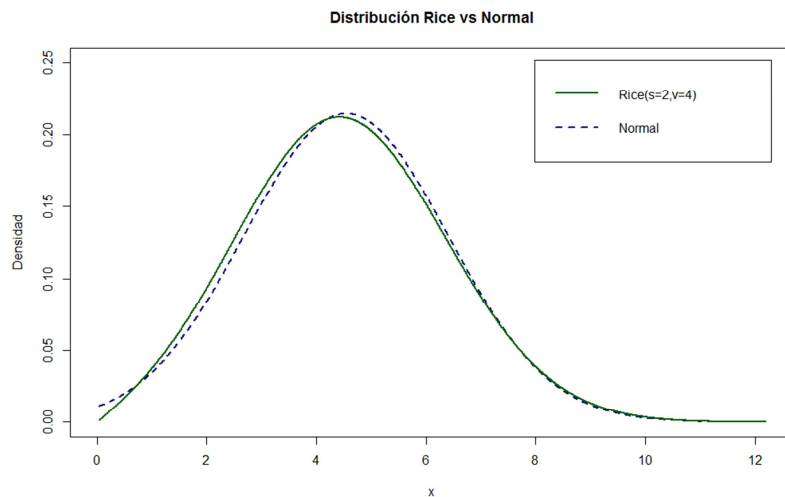
Figura 39. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Rice con diferentes valores en los parámetros $\sigma(s)$ y ν .



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, utilizamos la distribución Rice con los parámetros $\sigma = 2$ y $\nu = 4$, debido a que presenta un comportamiento similar a una distribución normal, con una curtosis cercana a 3, y un ligero desplazamiento de su forma de densidad de la distribución hacia la izquierda, por lo que cumple con las características de una **distribución simétrica mesocúrtica** (ver Figura 40).

Figura 40. Comparación de la distribución **Rice(2, 4)** contra una distribución Normal.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.1.17. CARDIROID

El término Cardioid fue acuñado por el matemático y astrónomo italiano Giovanni Di Castiglione en 1941, y ha sido objeto de estudio desde entonces. Está representado por una curva plana trazada desde un punto del perímetro de un círculo que es girado alrededor de otro círculo ajustado del mismo radio.

Sea X una v.a. continua que sigue la distribución Cardioid, entonces la función de densidad de probabilidad está definida por:

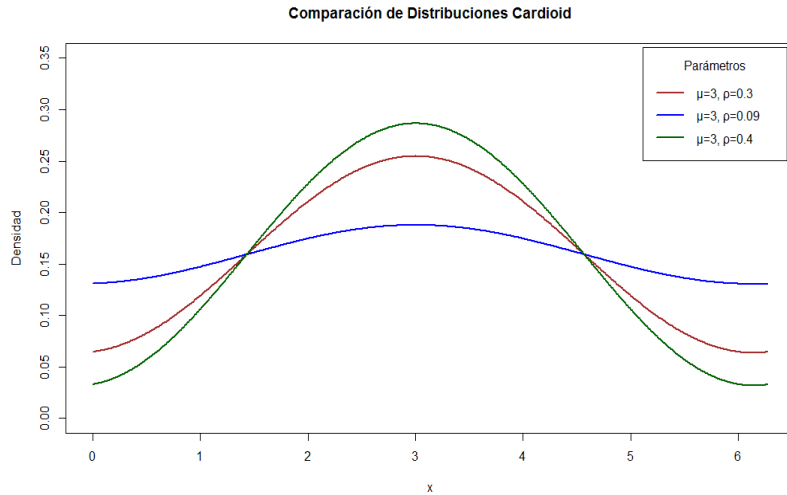
$$f(x|\mu, \rho) = \frac{1+2\rho \cos(x-\mu)}{2\pi} I_{[0,2\pi)}(x) \quad 0 \leq \mu < 2\pi \quad -\frac{1}{2} < \rho < \frac{1}{2}$$

La Media de una v.a. que tiene la distribución Cardioid está definida por:

$$E(x) = \pi + \frac{\rho}{\pi} [(2\pi - \mu) \sin(2\pi - \mu) + \cos(2\pi - \mu) - \mu \sin(\mu) - \cos(\mu)]$$

La distribución Cardioid es simétrica con respecto al parámetro μ , que simultáneamente describe la escala de la distribución; mientras que el parámetro ρ es el que define la forma de la función de densidad: conforme éste se aproxima a 0.5 la distribución es más apuntada, y de modo contrario, al aproximarse a cero, la distribución se hace más plana (ver Figura 41).

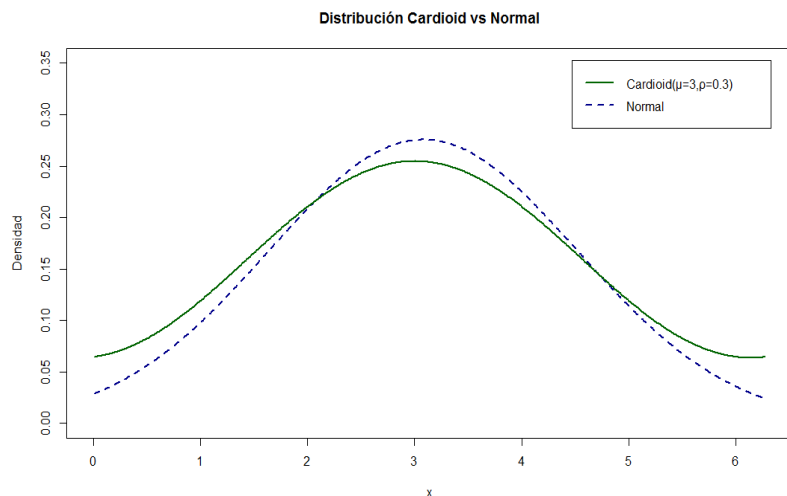
Figura 41. Comparación de funciones de densidad de distribuciones Cardioid con diferentes valores en los parámetros (μ y ρ).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Para el estudio de simulación, utilizamos la distribución Cardioid con los parámetros $\mu = 3$ y $\rho = 0.3$ para ser contrastada con la distribución Normal, donde es visible la simetría de la distribución Cardioid y la concentración de información en las colas, lo que corresponde a una **distribución simétrica platicúrtica** (ver Figura 42).

Figura 42. Comparación de la distribución *Cardioid*(3,0.3) contra la distribución Normal.



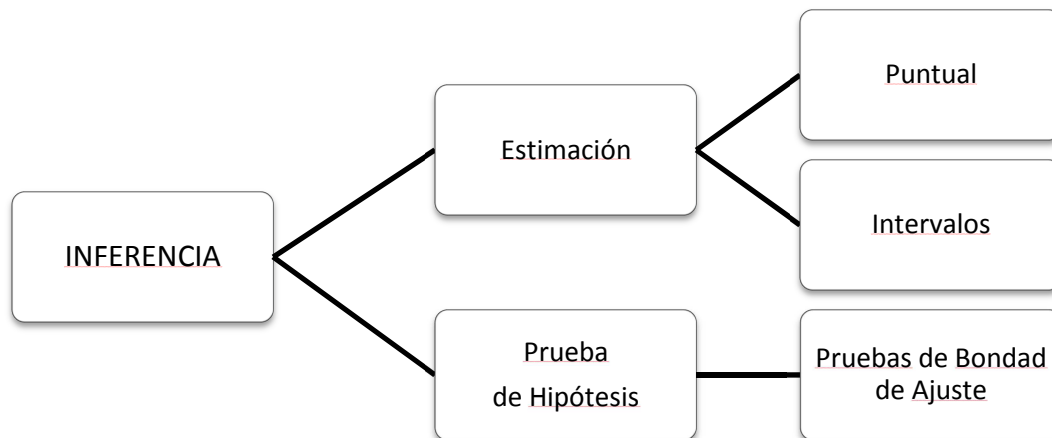
Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.2. ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Al conjunto de procedimientos estadísticos en los que interviene la aplicación de modelos de probabilidad y mediante los cuales se realiza alguna afirmación sobre poblaciones con base en la información producida por muestras se le llama Inferencia Estadística o Estadística Inferencial.

La Inferencia Estadística es el proceso de usar resultados muestrales para obtener conclusiones respecto a las características de una población. Clásicamente la estadística inferencial se ocupa de dos cuestiones: la estimación de parámetros y la prueba de hipótesis, aunque por lo general la mayoría de las aplicaciones de la estadística inferencial pertenecen al área de la prueba de hipótesis (Pagano, 1998).

Figura 43. Clasificación de la Inferencia Estadística.



Fuente: Elaboración propia.

El objetivo de la estimación es obtener una aproximación al valor de cierto parámetro poblacional; mientras que la finalidad de una prueba de hipótesis es determinar si existe evidencia a favor del cumplimiento de una aseveración en torno a un parámetro o conjunto de parámetros de la población a partir de la disponibilidad de cierta información concentrada en una muestra.

Dentro de las pruebas de hipótesis, se encuentran las pruebas de bondad de ajuste que desempeñan un papel primordial. Éstas son utilizadas para determinar qué tan bien una

muestra de datos es consistente con alguna distribución de probabilidad y, sobre la cual, se realizará un ejercicio de inferencia.

2.2.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Para entender la metodología concerniente a las pruebas de bondad de ajuste, a continuación se introducen algunas definiciones y notación relevantes.

2.2.1.1. HIPÓTESIS ESTADÍSTICA

Una **Hipótesis Estadística** se define simplemente como una aseveración o conjetura de una o más poblaciones. Las hipótesis estadísticas se establecen de tal forma que pueden ser evaluadas por medio de técnicas estadísticas adecuadas, por lo que toda prueba de hipótesis se basa en la formulación de dos hipótesis.

2.2.1.1.1. HIPÓTESIS NULA

Es la hipótesis que se desea contrastar, la denominaremos Hipótesis Nula, y la denotaremos por H_0 . Esta hipótesis es la que se somete a comprobación y es la que se acepta o rechaza como la conclusión final del contraste.

2.2.1.1.2. HIPÓTESIS ALTERNATIVA

Como su nombre lo indica, es la alternativa que debe ser cierta en caso de que la hipótesis nula sea considerada como falsa y la denotaremos por H_1 .

Puesto que cada una de estas hipótesis afirma lo contrario que la otra, es incompatible que ambas sean ciertas. Por tanto, si llegamos a la conclusión de que la hipótesis nula no se cumple, podemos afirmar que sí se cumple la hipótesis alternativa y viceversa.

En el caso de las pruebas de bondad de ajuste, el juego de hipótesis a ser contrastadas se expresa de la siguiente manera:

$$H_0: F(x; \theta) = F^*(x; \theta)$$

vs

$$H_1: F(x; \theta) \neq F^*(x; \theta)$$

Donde en principio se asume que se tiene una muestra aleatoria x_1, x_2, \dots, x_n de alguna densidad $f(x; \theta)$, con su correspondiente función de distribución $F(x; \theta)$ dónde: $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, Ω el espacio de parámetros y $F^*(x; \theta)$ es la función de distribución hipotética.

2.2.1.2. PRUEBA DE HIPÓTESIS

El proceso que corrobora si la información de una muestra sostiene o refuta la hipótesis estadística se llama **Prueba de Hipótesis**.

No se puede saber con absoluta certeza la verdad o falsedad de una hipótesis estadística, a no ser que se examine toda la población, esto por supuesto, sería impráctico en la mayoría de las situaciones, ya sea por falta de medios económicos, imposibilidades técnicas, etc. Es por ello que se toma una muestra aleatoria de la población de interés y se utilizan los datos que contiene tal muestra para proporcionar evidencias que confirmen o no la hipótesis.

Debemos aclarar que el diseño de un procedimiento de decisión se debe hacer con la idea en mente de la probabilidad de una conclusión errónea. Los términos de aceptar (no rechazar) y rechazar son comúnmente usados para las posibles decisiones sobre la hipótesis nula en los resúmenes formales de los resultados de un contraste particular. Por lo tanto, al “aceptar” una hipótesis nula, indica que los datos disponibles no proporcionan suficiente evidencia para rechazarlos. Por otro lado, el rechazo implica que la evidencia muestral la refuta. Con esto en mente se pueden cometer dos tipos de errores.

2.2.1.3. ERROR TIPO I

El Error Tipo I se comete al afirmar que la H_0 es falsa cuando en realidad es verdadera. Este tipo de error es el más grave y peligroso en cualquier investigación cuantitativa, por lo tanto, es el que mayor atención recibe y el más controlado, normalmente se fija con el valor de 0.05. Se le denota con la letra griega α y es equivalente a encontrar un resultado falso positivo (Quezada, 2007).

A este error también se le conoce con el nombre de **Nivel de significancia** y se define en términos de una probabilidad condicionada, como la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es cierta.

$$\alpha = P[\text{Error Tipo I}] = P[\text{Rechazar } H_0 | H_0]$$

2.2.1.4. ERROR TIPO II

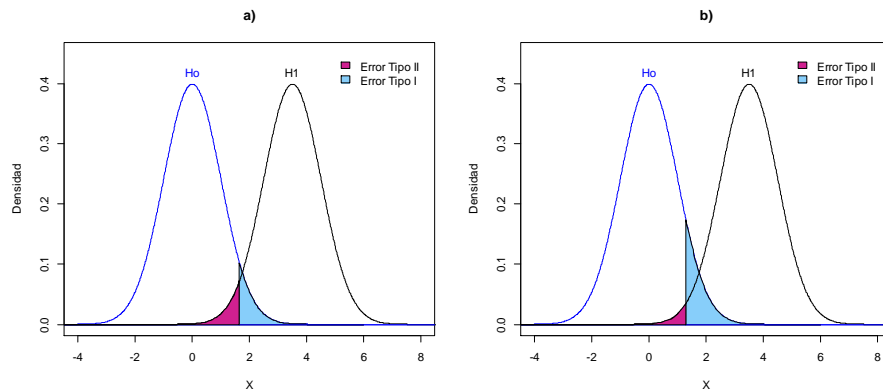
El Error Tipo II se comete cuando se acepta una H_0 que en realidad es falsa, se denota con la letra griega β y se puede cometer por distintas razones, entre ellas un tamaño muestral bajo (Quezada, 2007), como se aprecia en la Figura 45. Es equivalente a encontrar un resultado falso negativo. En términos de probabilidad condicionada, se define como la probabilidad de no rechazar H_0 cuando esta es falsa, este error contrario al anterior no está prefijado.

$$\beta = P[\text{Aceptar } H_0 | H_1]$$

Evidentemente, lo ideal sería que las probabilidades de los dos tipos de error fuesen lo más pequeñas posibles. Sin embargo hay una clara compensación entre los dos. Cuando se ha tomado una muestra, cualquier modificación de la regla de decisión que haga menos probable rechazar una hipótesis nula cierta, inevitablemente, se traducirá en mayor probabilidad de aceptar esta hipótesis cuando es falsa. En otras palabras, cuando α decrece entonces β aumenta, y viceversa. La única forma de disminuir ambos errores a la vez es aumentar el tamaño de muestra, aunque no siempre es

posible. En consecuencia, el problema que surge al investigador es en alcanzar un equilibrio entre α y β (ver Figura 44).

Figura 44. Contraste de hipótesis unilateral con dos niveles de significancia: a) 5% ($\alpha = 0.05$) y b) 10% ($\alpha = 0.10$) para comparar la potencia estadística.



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

Por otro lado, las decisiones correctas en el contraste de hipótesis se definen como:

2.2.1.5. NIVEL DE CONFIANZA

Es el complemento del Error Tipo I, por lo que se define como la probabilidad de aceptar H_0 cuando esta es cierta, y se denota mediante:

$$1 - \alpha = P[\text{Aceptar } H_0 | H_0]$$

2.2.1.6. POTENCIA ESTADÍSTICA

Es el complemento del Error de Tipo II, representa la probabilidad de rechazar H_0 cuando esta es falsa y se denota mediante:

$$1 - \beta = P[\text{Rechazar } H_0 | H_1]$$

El concepto de potencia se atribuye, históricamente, a Pearson y Neyman (1928, 1933). A partir de entonces, aparecieron una serie de autores que tenían en cuenta en sus estudios la potencia estadística (Tukey, 1960; Tullock, 1959; Cox, 1948; McNemar, 1960; Sterling, 1959). Sin embargo, no fue hasta 1962 cuando apareció por primera vez, en el ámbito de las ciencias sociales, un estudio sistemático de la potencia estadística. Se trata del trabajo realizado por Cohen (1962) en el que se destacó, en primer lugar, la importancia de la potencia estadística dentro de la investigación experimental y, en segundo lugar, proporcionó una serie de pautas para llevar a cabo un análisis de potencia. Este estudio alentó a los investigadores a prestar mayor atención a la potencia de las pruebas y a no centrarse, exclusivamente, en el nivel de significancia.

En la Tabla 1 se resumen las situaciones posibles en una prueba o contraste de hipótesis al tomar la decisión sobre la hipótesis nula.

Tabla 1. Contraste de Hipótesis conforme la toma de decisión sobre la Hipótesis Nula.

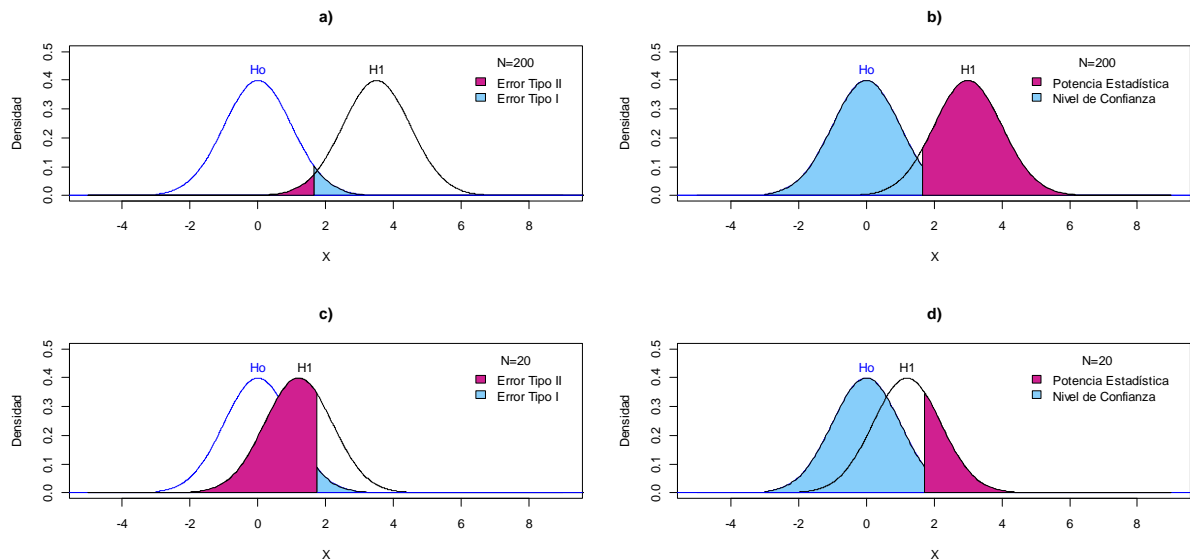
DECISIONES SOBRE H_0	SITUACIÓN REAL	
	H_0 CIERTA	H_0 FALSA
ACEPTAR H_0	Nivel de Confianza $1 - \alpha$	Error Tipo II β
RECHAZAR H_0	Error Tipo I α	Potencia Estadística $1 - \beta$

Fuente: Elaboración propia (2015).

La estimación de la potencia estadística está determinada principalmente por dos factores. El primero es el tamaño muestra, debido a que cuanto mayor sea la muestra, la potencia aumentará, como se observa en la Figura 45; en caso contrario, cuando el tamaño de muestra es pequeño ($n = 20$), el error tipo II es considerablemente alto, por ende la potencia es pequeña a comparación con el nivel de significancia; por otro lado, al aumentar el tamaño de la muestra ($n = 200$), podemos observar una reducción del error tipo II, por lo que la potencia aumenta considerablemente. El segundo factor, es el

valor que se establece al nivel de significancia, dado que al incrementarse la probabilidad de error Tipo I, la potencia también aumenta (ver Figura 45).

Figura 45. Comparativo de la relación entre los errores Tipo I y Tipo II (incisos a y c); así como la Potencia Estadística y el Nivel de Significancia (incisos b y d), mediante un contraste de hipótesis unilateral con 5% de significancia ($\alpha = 0.05$) y dos tamaños de muestra ($n = 200, 20$).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.2.1.7. ESTADÍSTICO DE PRUEBA

Un **Estadístico de Contraste (o de Prueba)**, es una función de las observaciones muestrales que nos permite extraer conclusiones que permitan aceptar o rechazar H_0 . A través de este contraste, es necesario establecer una regla de decisión con las condiciones que llevan a la aceptación o rechazo de la hipótesis establecida, por lo que se crean dos tipos de regiones:

2.2.1.8. REGIÓN DE ACEPTACIÓN

Es un rango de valores, tal que si el estadístico de prueba se encuentra dentro, la H_0 se declara aceptable (ver Figura 46).

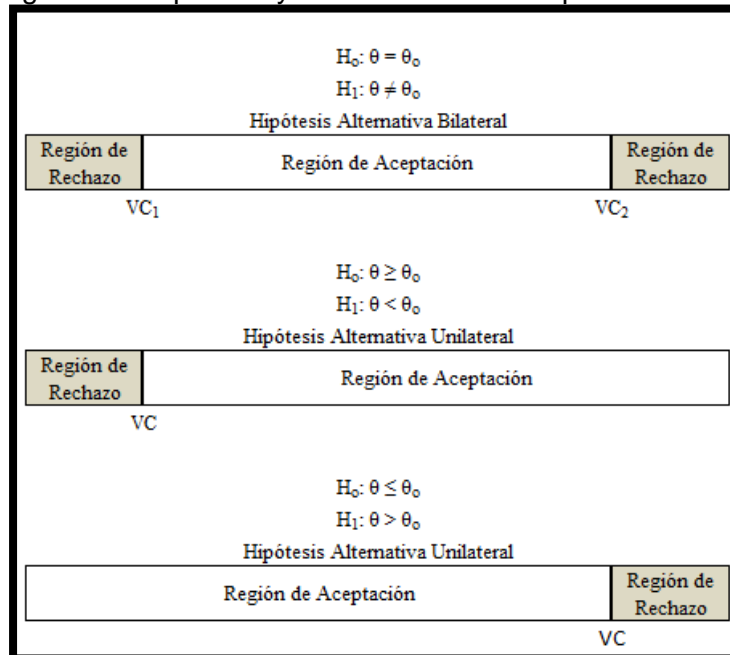
2.2.1.9. REGIÓN DE RECHAZO

Es un rango separado de valores, tal que si el estadístico de prueba se encuentra dentro, la H_0 se rechaza (ver Figura 46).

El punto que divide estas regiones se le denomina **Valor Crítico (VC)**, y depende del nivel de significancia (α), el tipo de distribución de probabilidad del estadístico de contraste, y el tipo de hipótesis que se está contrastando (bilateral o unilateral). El contraste bilateral sitúa la región de rechazo en los dos extremos (colas) de la distribución muestral. En cambio el contraste unilateral sitúa la región de rechazo en uno de los dos extremos (colas) de la distribución muestral.

Los valores críticos pertenecen a la región de rechazo. En la Figura 46 de forma ilustrativa se pueden apreciar las regiones de aceptación y rechazo, como también los valores críticos para las diferentes hipótesis alternativas.

Figura 46. Región de aceptación y rechazo con sus respectivos Valores Críticos (VC).



Fuente: Elaboración propia.

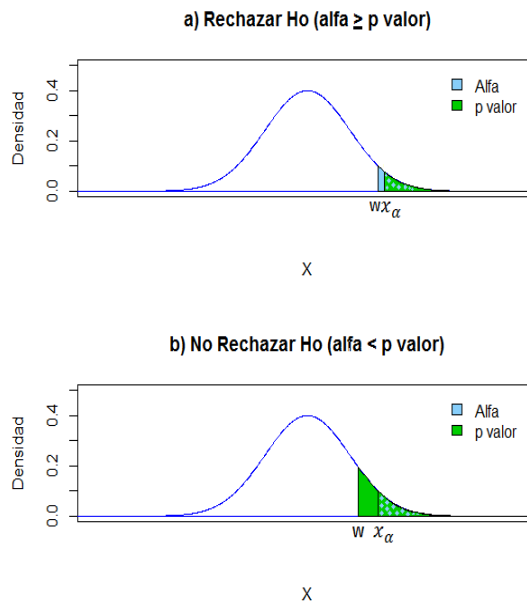
2.2.1.10. P- VALOR

El talón de Aquiles del planteamiento clásico para el contraste de hipótesis es la arbitrariedad en la elección de α . Aunque 1%, 5%, y 10% son los valores comúnmente utilizados para α , no hay nada inviolable en estos valores (Gujarati, 2006). En la práctica, es preferible encontrar el valor p (valor de probabilidad). Este valor se puede definir como el nivel de significancia observado más pequeño en el que se puede rechazar H_0 . Al ser una probabilidad, se cumple que:

$$0 \leq \text{valor } p \leq 1$$

Por consiguiente, teniendo un estadístico de prueba W , si el valor deseado de α es mayor o igual al valor p ($\alpha \geq p \text{ valor}$), **se rechaza H_0** ; en caso contrario, si el valor de α es estrictamente menor que el valor p ($\alpha < p \text{ valor}$), **no se rechaza H_0** (ver Figura 47). Es decir, si el valor p es muy pequeño el investigador puede concluir que los datos no sustentan H_0 ; del mismo modo, si el valor p es grande el investigador podrá concluir que los datos sustentan H_0 .

Figura 47. Criterio de decisión sobre la Hipótesis Nula mediante el uso del p valor: a) Rechazar la hipótesis nula ($\alpha \geq p \text{ valor}$) y b) No Rechazar la hipótesis nula ($\alpha < p \text{ valor}$).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.3. PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

Las pruebas de bondad de ajuste tienen por objetivo determinar si los datos disponibles se ajustan a una determinada distribución. Se entiende por bondad de ajuste a la asimilación de los datos observados de una variable a una función matemática previamente establecida y reconocida. A través de ésta es posible entonces predecir el comportamiento de la variable en estudio.

Si la distribución básica se conoce (pero no necesariamente normal) uno puede ser capaz de obtener exactamente (o lo suficientemente precisa) las pruebas de hipótesis e intervalos de confianza sobre la base de esa distribución. En muchos casos, un investigador no sabe la forma de la distribución así como las necesidades básicas de las técnicas estadísticas que son aplicables independientemente de la forma de la densidad. Estas técnicas se denominan no paramétrica o métodos de distribución libre (Mood et al., 1974).

Una prueba estadística no paramétrica es aquella cuyo modelo no especifica las condiciones de los parámetros de la población de donde se obtuvo la muestra. Hay algunas suposiciones que se asocian con la mayoría de las pruebas estadísticas no paramétricas, como observaciones independientes y variables de continuidad básica; pero estas suposiciones son pocas y mucho más débiles que las asociadas con las pruebas paramétricas (Juez y Diez, 1997).

Algunas ventajas y desventajas en la aplicación de las pruebas no paramétricas se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2. Ventajas y desventajas de las Pruebas No Paramétricas

VENTAJAS	DESVENTAJAS
Las declaraciones de probabilidad obtenidas de la mayoría de estas pruebas son probabilidades exactas, independientemente de la forma de la distribución de la que se tomó la muestra.	Fundamentalmente cuando las muestras son muy grandes estas pruebas tienen una eficiencia relativamente baja con relación a las paramétricas, cuando se cumplen los supuestos.

Tabla 2. Ventajas y desventajas de las Pruebas No Paramétricas.
Continuación

VENTAJAS	DESVENTAJAS
Si los tamaños de las muestras son tan pequeños como $n=6$, se debe realizar una prueba estadística no paramétrica, a menos que se conozca exactamente la naturaleza de la distribución.	Su aplicación en muestras grandes se hace muy laboriosa.
Son útiles para los datos clasificatorios, medidos en una escala nominal. Ninguna técnica paramétrica se puede aplicar a tales datos.	No hay métodos no paramétricos para probar las interacciones dentro del modelo de análisis de varianza, a menos que se hagan suposiciones especiales acerca de la adaptabilidad.
Las pruebas estadísticas no paramétricas son típicamente mucho más fáciles de aplicar que las pruebas paramétricas.	Las hipótesis que se plantean en éstas pruebas son menos precisas, lo que hace que la interpretación de los resultados sea más ambigua.
Tienen mayor eficiencia que los métodos paramétricos en distribuciones asimétricas, o sea cuando hay valores atípicos o datos aberrantes.	Si los supuestos del modelo estadístico paramétrico se cumplen, las pruebas no paramétricas disipan los datos.
Tienen validez en el sentido de que su nivel de confiabilidad es realmente el especificado en la mayoría de las pruebas.	Estos métodos son preferencialmente orientados hacia las Pruebas de Hipótesis que a la Estimación. Suele ser posible obtener estimaciones no paramétricas y sus intervalos de confianza asociados, pero generalmente no es sencillo.
Estas pruebas son mucho menos exigentes que las paramétricas, y se consideran de distribución libre, en cuanto que no plantean suposiciones con relación a la distribución de las puntuaciones en la población.	Para un problema particular pueden existir varias pruebas, por lo que en ocasiones es difícil seleccionar la mejor.
Algunos de los procesos sólo requieren los rangos de las observaciones y no de sus magnitudes, mientras que los procesos paramétricos las necesitan forzosamente.	Puede ser limitado el software para este tipo de métodos, así como su procedencia. Además, la manera en que el software le da tratamiento a los valores ajustados o cómo es que se obtiene adecuadamente el valor p puede ser no tan evidente.

Fuente: Elaboración propia en base a la información contenida en Pria, 2001; Gaito, 1959; Whitley y Ball, 2002; Hollander y Wolfe, 1999; Siegel y Castellán, 1988.

2.3.1. JARQUE BERA

La prueba de Jarque-Bera (*JB*), ha sido identificada dentro de las pruebas de momentos, debido a que está basada en el tercer y cuarto momento de la Distribución Normal Estándar [$N(0, 1)$], es decir, la normalidad es evaluada a partir del sesgo y la curtosis. Es considerada como una de las pruebas más populares en aplicaciones de regresión.

Las hipótesis a contrastar están establecidas de la siguiente manera:

H₀: La muestra sigue una distribución Normal

H₁: La muestra NO sigue una distribución Normal

Sea x_i que denota una muestra de n observaciones, con media y varianza denotadas como μ , σ_x^2 y los momentos centrales definidos mediante: $\mu_j = E[x_i - \mu]^j$, por lo que la varianza también se puede denotar mediante $\sigma_x^2 = \mu_2$. El sesgo y curtosis están definidos como:

$$\text{Sesgo} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

$$\text{Curtosis} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

Entonces la asimetría y curtosis muestral están definidas:

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{1/n \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^3}{[1/n \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2]^{3/2}}$$

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{1/n \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^4}{[1/n \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2]^2}$$

Éstas son estimaciones consistentes de la simetría y la curtosis teórica de la distribución. Por otra parte, si la muestra de hecho proviene de una distribución normal, entonces su distribución de la muestra también se puede calcular, mediante el uso de:

$$\sqrt{ng_1} \sim N(0, 6)$$

$$\sqrt{n}(g_2 - 3) \sim N(0, 24)$$

Ambas son asintóticamente normales, debido a que la curtosis se compara con una distribución normal que toma un valor de 3, entonces $(g_2 - 3)$ es conocido como el coeficiente de exceso de curtosis.

Al estandarizar estos coeficientes mediante la transformación $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt{ng_1}}{\sqrt{6}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\sqrt{n}(g_2 - 3)}{\sqrt{24}} \sim N(0, 1)$$

Una característica importante, es que la suma de los cuadrados de dos distribuciones normales estándar se aproximan a una distribución chi-cuadrada con dos grados de libertad (χ_2^2). Por lo tanto, al sumar el cuadrado de los coeficientes estandarizados queda de la siguiente manera:

$$\left\{ \left(\frac{\sqrt{ng_1}}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left[\frac{\sqrt{n}(g_2 - 3)}{\sqrt{24}} \right]^2 \right\} \sim \chi_2^2$$

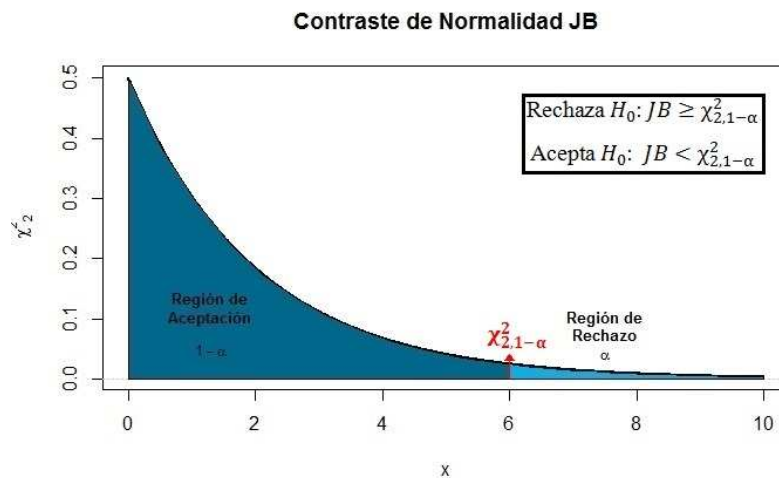
$$\left\{ n \cdot \left[\frac{(g_1)^2}{6} + \frac{(g_2 - 3)^2}{24} \right] \right\} \sim \chi_2^2$$

Debido a esto, Bowman y Shenton (1975) consideraron el siguiente estadístico de prueba, que posteriormente fue derivado como una prueba de Multiplicadores de Lagrange (ML) por Jarque y Bera (1987).

$$JB = n \cdot \left[\frac{(g_1)^2}{6} + \frac{(g_2 - 3)^2}{24} \right]$$

Si el valor obtenido del estadístico de **JB** es mayor que el valor crítico tabulado ($\chi^2_{2,1-\alpha}$: **Chi cuadrada**(2, 1 - α)), se rechaza la hipótesis nula de normalidad. En caso contrario no se rechaza la normalidad de la variable, como se aprecia gráficamente en la Figura 48.

Figura 48. Contraste de Normalidad del Estadístico Jarque Bera (JB).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

En la aplicación de la simulación, con el programa R Project, la prueba de **JB** se encuentra en la librería "tseries"¹⁰ (Trapletti y Hornik, 2013). Su código es el siguiente:

jarque.bera.test(x)

¹⁰ Dentro de esta librería se instalan también los paquetes: "quadprog" que tiene las funciones para resolver problemas de programación cuadrática; y "zoo" que tiene la infraestructura para regular e irregular Series de Tiempo.

Dónde:

x : Vector numérico de datos o series de tiempo.

Al aplicar la prueba **JB** a un conjunto de datos (muestra) en R Project, nos proporciona el estadístico de prueba (**X-squared**), así como los grados de libertad del estadístico (**df**), y el valor p (**p-value**), como se observa en la Figura 49.

Figura 49. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Jarque-Bera (JB).

```

R Console
> jarque.bera.test(x)

      Jarque Bera Test

data:  x
X-squared = 1.9801, df = 2, p-value = 0.3716

> |
    
```

Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.3.2. JARQUE BERA ROBUSTA

La prueba Jarque-Bera Robusta (**RJB**¹¹) se creó debido a la sensibilidad que presentan los momentos muestrales a valores atípicos, un claro ejemplo sucede con la varianza muestral, que se ve más afectada que la media muestral. Una medida de resistencia para éste caso, es la aplicación de un estimado robusto de dispersión a la prueba Jarque Bera, aplicando la desviación media absoluta de la mediana en lugar del estimador clásico de dispersión (Gel y Gastwirth, 2008).

Las hipótesis a contrastar están establecidas de la siguiente manera:

H_0 : La muestra sigue una distribución Normal

H_1 : La muestra NO sigue una distribución Normal

¹¹ Por sus siglas en Inglés "Robust Jarque-Bera" (RJB).

Para la obtención del estadístico de prueba, fue empleado un estimador robusto de dispersión que resiste a la influencia de las observaciones atípicas, aplicando la desviación media absoluta de la mediana en los denominadores de los estimadores del sesgo y curtosis de la muestra, la cual está definida de la siguiente forma:

$$J_n = \left(\frac{c}{n}\right) \sum_{i=1}^n |X_i - M| \quad \text{sea } c = \sqrt{\pi/2}$$

Dónde:

M : Estimador de la Mediana

n : Tamaño muestral

Por lo tanto, los estimadores robustos correspondientes del sesgo y la curtosis muestral son:

$$\frac{\mu_3}{J_n^3} : \text{Sesgo Robusto}$$

$$\frac{\mu_4}{J_n^4} : \text{Curtosis Robusta}$$

Los cuales se implementan en el estadístico de prueba robusto:

$$RJB = \frac{n}{C_1} \left(\frac{\mu_3}{J_n^3}\right)^2 + \frac{n}{C_2} \left(\frac{\mu_4}{J_n^4} - 3\right)^2$$

Dónde:

J_n : Estimador robusto de la Desviación Estándar.

C_1, C_2 : Son constantes positivas

n : Tamaño de la muestra

La prueba de que J_n es un estimador consistente de la desviación estándar de la muestra (σ) y que además se distribuye asintóticamente como una Normal, puede ser obtenida a través de la ley de los Números Grandes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EJ_n = \sigma$$

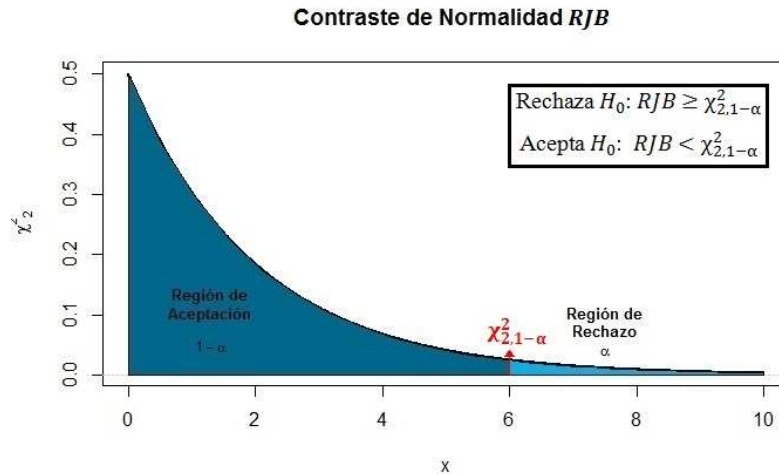
$$\therefore J_n \sim \text{Normal} \left(0, \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \right)$$

Para obtener los valores de las constantes positivas C_1 y C_2 , es necesario encontrar las expresiones EJ_n^3 , EJ_n^4 , EJ_n^6 y EJ_n^8 para un tamaño de muestra finito n , que pueden calcularse según lo sugerido por Geary (1936). Sin embargo, tales cálculos son bastantes tediosos y no son de uso práctico, ya que la convergencia asintótica de los estimadores de sesgo y curtosis a la distribución normal es muy lenta. Por lo tanto, se obtienen los valores de C_1 y C_2 a partir de una simulación Monte Carlo dados por Gel y Gastwirth (2008). En particular para conservar un nivel de significancia del $\alpha = 0.05$, se recomiendan los valores $C_1 = 6$ y $C_2 = 64$, entonces el estadístico de prueba toma la forma de:

$$RJB = \left(\frac{n}{6} \right) \left(\frac{\mu_3}{J_n^3} \right)^2 + \left(\frac{n}{64} \right) \left(\frac{\mu_4}{J_n^4} - 3 \right)^2$$

El estadístico de prueba de RJB , sigue asintóticamente una distribución Chi Cuadrada con dos grados de libertad ($RJB \sim \chi^2_2$). La validación del supuesto de normalidad implica que el estadístico RJB sea menor que el valor crítico tabulado; en caso contrario se rechaza H_0 , como se aprecia gráficamente en la Figura 50.

Figura 50. Contraste de Normalidad del Estadístico Jarque-Bera Robusta (RJB).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

En la aplicación de la simulación con el programa R Project, la prueba ***RJB*** se encuentra en la librería lawstat¹² (Noguchi et al., 2009). Su código es el siguiente:

rjb.test(x)

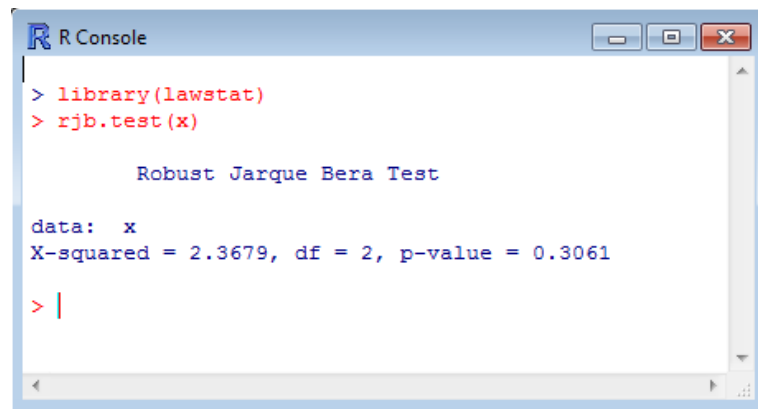
Dónde:

x: Vector numérico de datos.

Al aplicar la prueba ***RJB*** a un conjunto de datos (**muestra**) en R Project, nos proporciona el estadístico de prueba (**X-squared**), así como los grados de libertad del estadístico (**df**), y el valor p (**p-value**), como se observa en la Figura 51.

¹² Dentro de esta librería se instalan también los paquetes: “mvtnorm”(calcula probabilidades multivariantes t y normales), “kendall” (rango de correlación y prueba de tendencias de Mann-Kendall), “Hmisc” (funciones para el análisis de datos, gráficos de alto nivel, funciones para el cálculo de tamaño de muestra y potencia), “grid” (funciones gráficas), “survival” (Rutinas de análisis de la supervivencia), “formula” (fórmulas extendidas de Múltiples Regresores) y “ggplot2” (Implementación de la gramática de gráficos en R).

Figura 51. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Jarque-Bera Robusta (RJB).



```
R Console
> library(lawstat)
> rjb.test(x)

Robust Jarque Bera Test

data: x
X-squared = 2.3679, df = 2, p-value = 0.3061
> |
```

Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.3.3. SHAPIRO WILK

La prueba Shapiro Wilk (*SW*), se restringió originalmente para tamaños de muestra pequeños ($n < 50$). Esta prueba fue la primera que fue capaz de detectar desviaciones de la normalidad, ya sea debido a la asimetría o curtosis, o ambos (Althouse et al., 1998). Se ha convertido en la prueba preferida debido a sus buenas propiedades de potencia en comparación con una amplia gama de pruebas alternativas (Mendes y Pala, 2003).

Las hipótesis a contrastar están establecidas de la siguiente manera:

H₀: la muestra sigue una distribución Normal

H₁: la muestra NO sigue una distribución Normal

En particular la prueba *SW* está basada en regresiones y correlaciones que han sido empleadas en muestras completas de estadísticos de orden para verificar normalidad; el uso de estadísticos de orden implica, por lo tanto, que la muestra debe estar ordenada de modo ascendente.

Shapiro y Wilk propusieron una prueba de bondad de ajuste basada en dos estimadores de la desviación estándar: L_n , el mejor estimador lineal¹³ (MEL) bajo la hipótesis de que esté presente una distribución Normal Estándar, y el estimador de máxima verosimilitud (EMV) bajo la misma hipótesis.

El estadístico de prueba definido por Shapiro y Wilk (1965), es el siguiente:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2]}$$

Dónde:

$x_{(i)}$: Es la i -ésima estadística de orden.

$\bar{x} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)$: Media de la muestra.

$$a_i = (a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}}$$

$m = (m_1, \dots, m_n)^T$: Son los valores esperados de las estadísticas de orden.

V : Es la matriz de covarianza de las estadísticas de orden.

Con mayor detalle, a_i son los coeficientes normalizados del estimador lineal insesgado óptimo, BLUE (Best Lineal Unbiased Estimator) de sigma (σ) y $\sum a_i x_{(i)}$ es el BLUE de la pendiente de la línea de regresión de $x_{(i)}$ con respecto de a_i .

La prueba de Shapiro Wilk fue modificada por Royston (1982) para ampliar la restricción del tamaño de muestra, a través del algoritmo AS 181, cuyo propósito es habilitar el cálculo del estadístico W y su nivel de significancia para cualquier tamaño de muestra ($3 \leq n \leq 2,000$).

¹³ Si es lineal θ , es insesgado y tiene mínima varianza entre todos los estimadores lineales e insesgados de θ , entonces se denomina MEL.

La descripción completa de la teoría detrás del algoritmo de esta prueba, está dada por Royston (1982), usando una simulación Monte Carlo, aplicando la siguiente transformación:

$$y = (1 - W)^\lambda$$

Esta transformación produce una variable y que se aproxima a una distribución Normal; es adecuada para tamaños de muestra $n \in [7, 2,000]$. Donde λ es un parámetro estimado para 50 tamaños de muestra seleccionados y, posteriormente, es suavizado con polinomios de la forma:

$$\log_e(n) - d$$

Dónde:

$$\begin{aligned} d = 3 & \quad \text{Para } 7 \leq n \leq 20 \\ d = 5 & \quad \text{Para } 21 \leq n \leq 2,000. \end{aligned}$$

Dado un valor del estadístico W , por consiguiente, el nivel de significancia se calcula haciendo referencia a la cantidad $z = [(1 - W)^\lambda - \mu_y] / \sigma_y$, es decir $z = (y - \mu_y) / \sigma_y$, de la cola superior de la distribución normal estándar, ya que los valores grandes de z indican la no normalidad de la muestra original. La media (μ_y) y desviación estándar (σ_y), de la transformación z , fueron calculadas utilizando los polinomios suavizados en $\log_e(n) - d$.

Los valores del estadístico W recaen entre cero y uno. Para valores pequeños de W , hay evidencia de desviación de la normalidad, es decir, se rechaza normalidad; mientras que el valor de uno indica la normalidad de los datos (Nornadiah y Yap, 2010).

En la aplicación de la simulación, con el programa R Project, la prueba de SW se encuentra en la librería “stats”¹⁴. Su código es el siguiente:

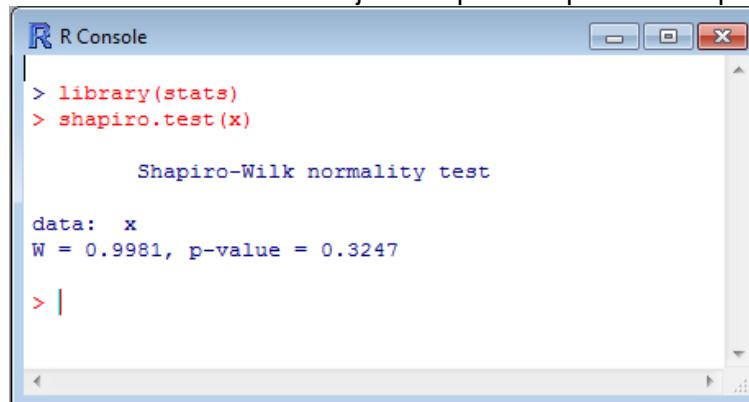
shapiro.test(x)

Dónde:

x: Vector numérico de datos.

Al aplicar la prueba *SW* a un conjunto de datos (muestra) en R Project, nos proporciona el estadístico de prueba (*W*), así como el valor p (**p-value**), como se observa en la Figura 52.

Figura 52. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Shapiro-Wilk (SW).



```
R Console
> library(stats)
> shapiro.test(x)

Shapiro-Wilk normality test

data: x
W = 0.9981, p-value = 0.3247
> |
```

Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.3.4. CHEN SHAPIRO

El estadístico de *SW* y sus modificaciones son ampliamente utilizados para evaluar la hipótesis de que una muestra fue tomada de una distribución normal. Chen y Shapiro (1995) proponen una alternativa de prueba estadística de normalidad que es fácil de calcular y tiene una potencia comparable o superior a la prueba estadística original de *SW*, denotada como la prueba *QH*.

¹⁴ Este paquete fue creado por R Core Team, contiene funciones de cálculo estadístico y generación de números aleatorios. Se encuentra instalado en la paquetería básica de R Project.

Las versiones alternativas de la prueba *SW* usan sólo la información que concierne a las expectativas normales de los estadísticos de orden y ninguna información sobre su correlación, esto causa procedimientos con menor potencia.

Para facilitar la comprensión, sean X_1, X_2, \dots, X_n los estadísticos de orden para una distribución $N(0, 1)$, y sea $m_i = E(X_i)$. Similarmente, sea Y_i el estadístico de orden para una distribución $N(\mu, \sigma^2)$, por lo tanto:

$$Y_i = \mu + \sigma m_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Dónde:

ε_i : Es el término de error.

Puesto que los ε_i se correlacionan, Shapiro y Wilk (1965) utilizaron mínimos cuadrados generalizados (Aitken, 1935; Lloyd, 1952) para obtener un estimador BLUE¹⁵ de σ .

Las hipótesis a contrastar están establecidas de la siguiente manera:

H₀: La muestra sigue una distribución Normal.

H₁: La muestra NO sigue una distribución Normal.

Ahora bien, supóngase una función de distribución continua $F(x)$ completamente especificada, y sea $G(y)$ la función de distribución de Y , donde $Y = \mu + \sigma X$; siendo μ y σ los parámetros de localización y escala respectivamente en $G(y)$.

Si $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ son los estadísticos de orden de una muestra aleatoria de $G(y)$, entonces Y_i se puede representar como $Y_i = \mu + \sigma X_i$ donde X_i es una muestra aleatoria ordenada de $F(x)$. Las separaciones entre los Y_i están definidos por $Y_{i+1} - Y_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ y las separaciones normalizadas son:

¹⁵ Estimador lineal e insesgado óptimo (BLUE: Best Linear Unbrased Estimator).

$$Z_i = \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{m_{i+1} - m_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Las separaciones normalizadas proporcionan pruebas de ajuste útiles para muchas distribuciones continuas, esto motivó a considerar una regresión $Y_{i+1} - Y_i$ en $m_{i+1} - m_i$, por lo tanto, de la expresión $Y = \mu + \sigma X$ se tiene:

$$Y_{i+1} - Y_i = \sigma(m_{i+1} - m_i) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{Y_{i+1} - Y_i}{m_{i+1} - m_i} = \sigma + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{m_{i+1} - m_i}$$

Sustituyendo por $Z_i = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{m_{i+1} - m_i}$ y $\tilde{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{m_{i+1} - m_i}$ se tiene:

$$Z_i = \sigma + \tilde{\varepsilon}_i$$

Minimizando a $\sum(\tilde{\varepsilon}_i)^2$ se obtiene:

$$\hat{\sigma} = \left[\frac{1}{(n-1)} \right] \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{m_{i+1} - m_i} \right)$$

Se puede observar que $\hat{\sigma}$ es un estimador insesgado de σ , mientras que $\tilde{\varepsilon}_i$ está correlacionado, por lo tanto no es un estimador BLUE. Pero a partir de las separaciones normalizadas, las correlaciones entre ellos deben de ser menor que entre las Y_i .

Esto se cumple para muestras a partir de una normal estándar, e incluso para tamaños de muestra pequeños. Por lo tanto, usando el fundamento básico de la prueba SW, se considera el siguiente estadístico:

$$\left[\frac{1}{(n-1)S} \right] \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{m_{i+1} - m_i} \right)$$

Dónde:

$$S = \left[\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} \right]^{1/2} : \text{Es la desviación estándar muestral.}$$

Con la finalidad de simplificar el cálculo, los valores esperados de los estadísticos de orden de la distribución normal estándar fueron reemplazados por H_i en la expresión anterior, de modo similar a la prueba propuesta por Weisberg y Bingham (1975).

Por lo tanto, obtenemos el estadístico de prueba de Chen-Shapiro (1995) como sigue:

$$QH = \left[\frac{1}{(n-1)S} \right] \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{H_{i+1} - H_i} \right)$$

Dónde:

$$H_i = \Phi^{-1} \left[\frac{\left(\frac{i-3}{8} \right)}{\left(\frac{n+1}{4} \right)} \right] : \text{Es la inversa de la distribución normal estándar.}$$

Cuando la hipótesis nula es verdadera, la media del estadístico QH es cercana a uno. Las desviaciones de normalidad cambian la distribución hacia su límite inferior, por lo tanto se utiliza una prueba de cola inferior.

Con el fin de eliminar la necesidad de tablas de percentiles, se define:

$$QH^* = \sqrt{n}(1 - QH)$$

Así QH^* es una prueba de cola superior. Las ecuaciones de regresión se ajustaron a percentiles superiores seleccionados de QH^* como una función del tamaño de la muestra.

En el programa R Project esta prueba se aplica con el nombre de “*Data Driven Smooth Test for Normality*” y se encuentra en la librería “*ddst*”¹⁶ (Biecek y Ledwina, 2011). Su código es el siguiente:

ddst.norm.test(x, base, compute.p)

Dónde:

- x***: Vector numérico de datos (no vacío).
- base***: Función que devuelve el sistema ortogonal (***ddst.base.legendre*** para los polinomios de Legendre o ***ddst.base.cos*** para el sistema de coseno), en caso de no especificar, se genera con los polinomios de Legendre.
- compute.p***: Valor lógico para indicar el cálculo del p valor (True=T o False=F), en caso de no especificar toma el valor de Falso.

Al aplicar la prueba **QH** a un conjunto de datos (muestra) en R Project, nos proporciona el estadístico de prueba (**WT***), así como el valor p (**p-value**) ya que el valor lógico de *compute.p* es verdadero (***compute.p = TRUE***), como se observa en la Figura 53.

Figura 53. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Chen-Shapiro (QH).

```

R Console
> library(ddst)
> ddst.norm.test(x, compute.p=TRUE)

      Data Driven Smooth Test for Normality

data: x,   base: ddst.base.legendre,   c: 100
WT* = 2.3382, n. coord = 1, p-value = 0.146

> |
    
```

Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

¹⁶ Dentro de esta librería se instalan también los paquetes: “*polynom*” (funciones para implementar polinomios univariados), “*orthopolynom*” (Una colección de funciones para la construcción de conjuntos de polinomios ortogonales y sus relaciones de recurrencia.) y “*evd*” (funciones de cuantiles y densidad a las distribuciones de valores extremos paramétricas univariados y multivariados, y proporciona funciones de ajuste que calculan estimaciones de máxima verosimilitud).

2.3.5. PEARSON

La prueba Pearson (P) o también conocida por el nombre de Chi Cuadrada, es un contraste de bondad de ajuste que se utiliza para probar si una muestra de datos proviene de una distribución específica, y en un caso particular puede utilizarse para contrastar la normalidad. Pearson (Moore, 1986) propuso un estadístico que compara las frecuencias observadas con las frecuencias esperadas, con base a la distribución de probabilidad especificada, es válida para distribuciones tanto discretas como continuas.

Las hipótesis a contrastar están establecidas de la siguiente manera:

H_0 : La muestra proviene de una distribución específica.

H_1 : La muestra NO proviene de una distribución específica.

La prueba P puede también ser aplicada a los datos que han sido asignados a diferentes clases, aunque el valor del estadístico de la prueba es dependiente de la forma en que han sido clasificados los datos. Esta prueba presenta una desventaja remarcable, puesto que requiere un tamaño suficiente de muestra para que la aproximación de la Chi Cuadrada sea válida.

Consideremos que la v.a. perteneciente a una distribución específica $F_0(x)$ que es de interés para la aplicación de la prueba P , realiza un recorrido en un intervalo (a, b) , donde a y b , no están sujetos a restricciones (por ejemplo: $a = -\infty$ y/o $b = \infty$), entonces se contempla $n - 1$ números reales que hacen una partición del intervalo (a, b) en n subintervalos $(y_0, y_1], (y_1, y_2], \dots, (y_{n-1}, y_n]$. A continuación se cuentan los elementos de la muestra que están contenidos en cada subintervalo, siendo ésta la frecuencia observada de dicha muestra, denotándola como C_i . Posteriormente, se realiza el cálculo de la probabilidad bajo la distribución específica para cada subintervalo, como sigue (Beltrán, 2012):

$$p_i = F_0(y_i) - F_0(y_{i-1}) \quad i = 1, \dots, n$$

Entonces el estadístico de prueba de P (Moore, 1986) se define como:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{(C_i - E_i)^2}{E_i}$$

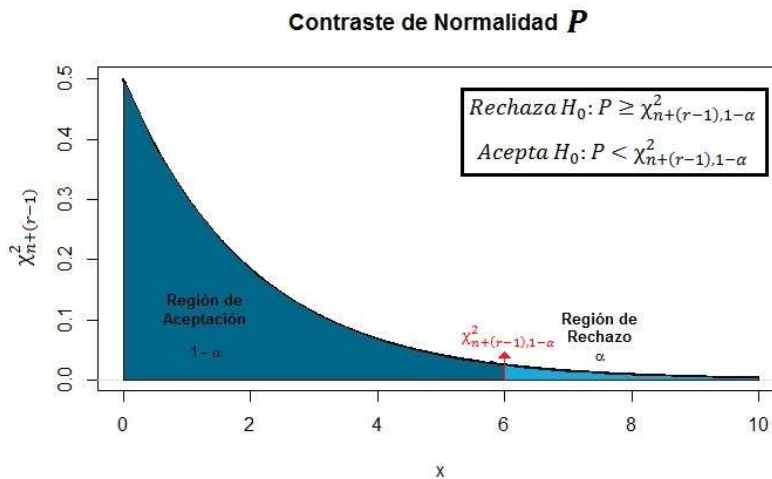
Dónde:

- P : Estadístico de prueba P que asintóticamente se aproxima a una distribución χ^2 con $n - 1$ grados de libertad (Moore, 1986).
- C_i : Frecuencia observada de la muestra.
- $E_i = np_i$: Frecuencia esperada (teórica), que afirma la hipótesis nula.

El estadístico de prueba sigue una distribución Chi Cuadrada, aproximadamente, con $n - (r + 1)$ grados de libertad, donde n es el número de clases o intervalos y r es el número de parámetros estimados. Así al ser contrastada la hipótesis de normalidad, hay que estimar dos parámetros μ, σ^2 . Por tanto el número de grados de libertad es $n - 3$.

La H_0 es rechazada al nivel de significancia elegido α , cuando el valor del estadístico de la prueba P es mayor al valor de la aproximación de la Chi Cuadrada con $n + (r - 1)$ grados de libertad, como se aprecia gráficamente en la Figura 54.

Figura 54. Contraste de Normalidad del Estadístico Pearson (P).



Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

En la aplicación en R-project, se utilizó el paquete “nortest¹⁷” (Gross, 2012). Su código es el siguiente:

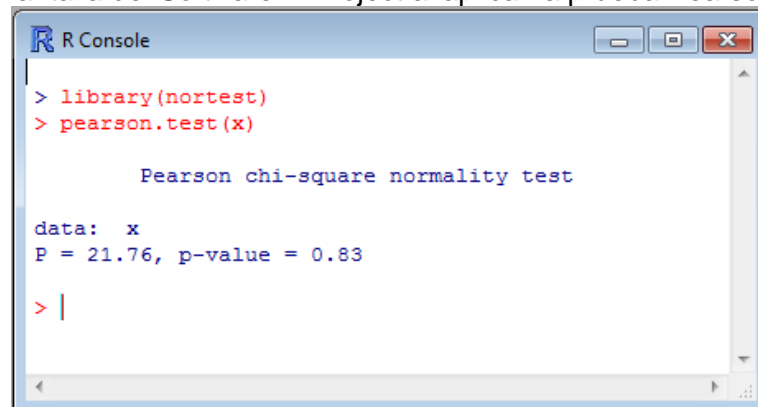
pearson.test(x)

Dónde:

x: Vector numérico de datos.

Al aplicar la prueba **P** a un conjunto de datos (muestra) en R Project, nos proporciona el estadístico de prueba (**P**), así como el valor p (**p-value**), como se observa en la Figura 55.

Figura 55. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Pearson (P).



```
R Console
> library(nortest)
> pearson.test(x)

      Pearson chi-square normality test

data:  x
P = 21.76, p-value = 0.83
> |
```

Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

2.3.6. ANDERSON DARLING

La prueba de Anderson-Darling (**AD**) se utiliza para probar si una muestra de datos proviene de una población con una distribución específica, basada en la función de distribución empírica (FDE¹⁸). Las estadísticas FDE son medidas de discrepancia entre la FDE y una función de distribución dada, y son usadas para probar el ajuste de la muestra a la distribución.

¹⁷ Contiene cinco pruebas para probar la hipótesis de normalidad (Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Lilliefors, Pearson chi-square, Shapiro Francia).

¹⁸ La FDE es una función escalonada, calculada de la muestra, la cual estima la función de distribución de la población.

Las hipótesis a contrastar están establecidas de la siguiente manera:

H_0 : La muestra proviene de una distribución específica.

H_1 : La muestra NO proviene de una distribución específica.

La FDE se define como una muestra aleatoria de tamaño n , x_1, \dots, x_n y sean $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ las estadísticas de orden¹⁹. Suponga también que la distribución de X es $F(x)$. Entonces, la FDE denotada como $F_n(x)$, es tal que:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & X_{(i)} \leq x \leq X_{(i+1)}, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & x \geq X_{(n)} \end{cases}$$

Un tipo de estadísticas FDE, de la clase cuadrática, son de la familia:

$$Q = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \psi(x) dF(x)$$

Donde $\psi(x)$ es una función conveniente, la cual da los pesos a la diferencia cuadrática $[F_n(x) - F(x)]^2$. Cuando $\psi(x) = 1$, se trata de la estadística de Cramér-von Mises, y cuando $\psi(x) = \{[F(x)][1 - F(x)]\}^{-1}$, se trata de la estadística de Anderson-Darling denotada por **AD**.

Por lo cual, Anderson y Darling (1954) definieron el estadístico de prueba como:

$$A = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F^*(x)]^2 \psi[F^*(x)] dF^*(x)$$

¹⁹ En el caso de variables aleatorias, si se tiene una secuencia de n variables aleatorias, x_1, \dots, x_n , los estadísticos de orden $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ también son variables aleatorias, que se definen ordenando las variables en orden ascendente, es decir: $X_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\} < X_{(2)} < \dots < X_{(n-1)} < X_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$.

Debido a que ψ es una función no negativa, puede ser calculada mediante $\psi = \{[F(x)][1 - F(x)]\}^{-1}$. La definición de este estadístico parece difícil de manejar, por esta razón existen fórmulas computacionales sencillas, que se derivan de la Transformación Integral de Probabilidad²⁰ (PIT):

$$p = F(x; \theta)$$

Ésta transformación, da como resultado una variable p que es una distribución uniforme entre cero y uno, escrita como $U(0, 1)$. Se aplica con el fin de hacer más fácil el cálculo del estadístico de prueba (Arshad et al., 2003), mediante la siguiente formula:

$$A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) [\ln(p_{(i)}) + \ln(1 - p_{(n-i+1)})]$$

$$p_{(i)} = I \left[\frac{(x_{(i)} - \bar{x})}{s} \right]$$

Dónde:

- I:** Función de distribución acumulada de una normal estándar.
- \bar{x} :** Media muestral
- s:** Desviación estándar.
- n:** Tamaño de muestra.

El valor p se calcula a partir de la estadística modificada $Z = A (1 + .75/n + 2.25/n^2)$ con base en los valores críticos de la distribución teórica (Stephens, 1986).

En la aplicación de la simulación, con el programa R Project, la prueba de **AD** se encuentra en la librería “nortest²¹” (Gross, 2012). Su código es el siguiente:

$$ad.test(x)$$

²⁰ Transformación Integral Probabilidad. Si U es una v.a con distribución uniforme en el intervalo (0,1), entonces la v.a F-1(U) tiene distribución F.

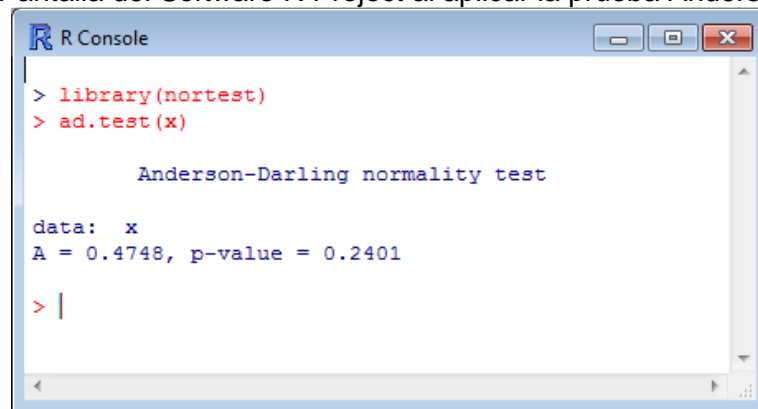
²¹ Contiene cinco pruebas para probar la hipótesis de normalidad (Anderson-Darling, Cramer-von Mises, Lilliefors, Pearson chi-square, Shapiro Francia).

Dónde:

x : Vector numérico de datos.

Al aplicar la prueba **AD** a un conjunto de datos (muestra) en R Project, nos proporciona el estadístico de prueba (**A**), así como el valor p (**p-value**), como se observa en la Figura 56.

Figura 56. Pantalla del Software R Project al aplicar la prueba Anderson-Darling (AD).



```
R Console
> library(nortest)
> ad.test(x)

Anderson-Darling normality test

data: x
A = 0.4748, p-value = 0.2401

> |
```

Fuente: Elaboración propia con el software R Project (2015).

3. ESTUDIO COMPARATIVO DE POTENCIA ESTADÍSTICA

3.1. INTRODUCCIÓN

En la última década las computadoras han avanzado aumentando su velocidad, permitiendo conseguir simulaciones Monte Carlo más precisas. También se han definido nuevas medidas para obtener la Asimetría y la Curtosis (Hosking, 1990), así como distintas pruebas de normalidad se han propuesto en los últimos años (Chen y Shapiro, 1995; Park, 1999; Zhang, 1999). Por lo que una nueva comparación de pruebas de normalidad es esencial para futuras aplicaciones.

En este trabajo, seis pruebas de normalidad (*AD*, *P*, *JB*, *RJB*, *SW* y *QH*) son estudiadas aplicando una simulación Monte Carlo, con cien mil repeticiones ($m = 100,000$), para diferentes tamaños de muestra que van desde pequeñas, moderadas y grandes ($n = 10, 20, 30, 50, 100, 200, 500, 1,000$).

Para comparar la potencia de estas pruebas de normalidad, se generaron muestras aleatorias de 22 distribuciones no normales, con la finalidad de clasificarlas en cinco categorías de acuerdo con Shapiro et al. (1968), dependiendo de los valores que tomen sus niveles de asimetría (g_1) y curtosis (g_2) (ver Tabla 3). Otro factor importante para el análisis de la potencia estadística, es el valor que se asigna al nivel de significancia, por consiguiente, se aplicaron tres diferentes niveles ($\alpha = 0.01; 0.05; 0.10$), con la finalidad de medir su impacto.

Tabla 3. Clasificación de las distribuciones alternativas de acuerdo con sus niveles de Asimetría y Curtosis.

Casos	g_1 (Asimetría), g_2 (Curtosis)	Clasificación	Distribuciones Alternativas
1	$g_1 = 0$ $2.5 \leq g_2 \leq 4.5$	Simétrica mesocúrtica	Weibull(4,5) Rice(2,4) Logística(9,3)
2	$g_1 = 0$ $g_2 > 4.5$	Simétrica leptocúrtica	t-Student(4) Laplace(0,1) t-Student(1) Cauchy (0,0.5)*

Tabla 3. Clasificación de las distribuciones alternativas de acuerdo con sus niveles de Asimetría y Curtosis. Continuación

Casos	g_1 (Asimetría), g_2 (Curtosis)	Clasificación	Distribuciones Alternativas
3	$g_1 = 0$ $g_2 < 2.5$	Simétrica platicúrtica	Uniforme(3,15) Uniforme(0,20) Beta(2,2) Triangular(0,1,0.5) Cardioid(3,0.3)
4	$ g_1 > 0.3$ $g_2 > 3$	Asimétrica leptocúrtica	Chi Cuadrada(7) Beta(1,6) Pareto(0.5,4) Exponencial(1) Lognormal(0,1) Gamma(2,9) Gamma(6.5,2.8) Rayleigh(0.5) Weibull(1,2)
5	$ g_1 > 0.3$ $g_2 < 3$	Asimétrica platicúrtica	Triangular(0,1,0.9)

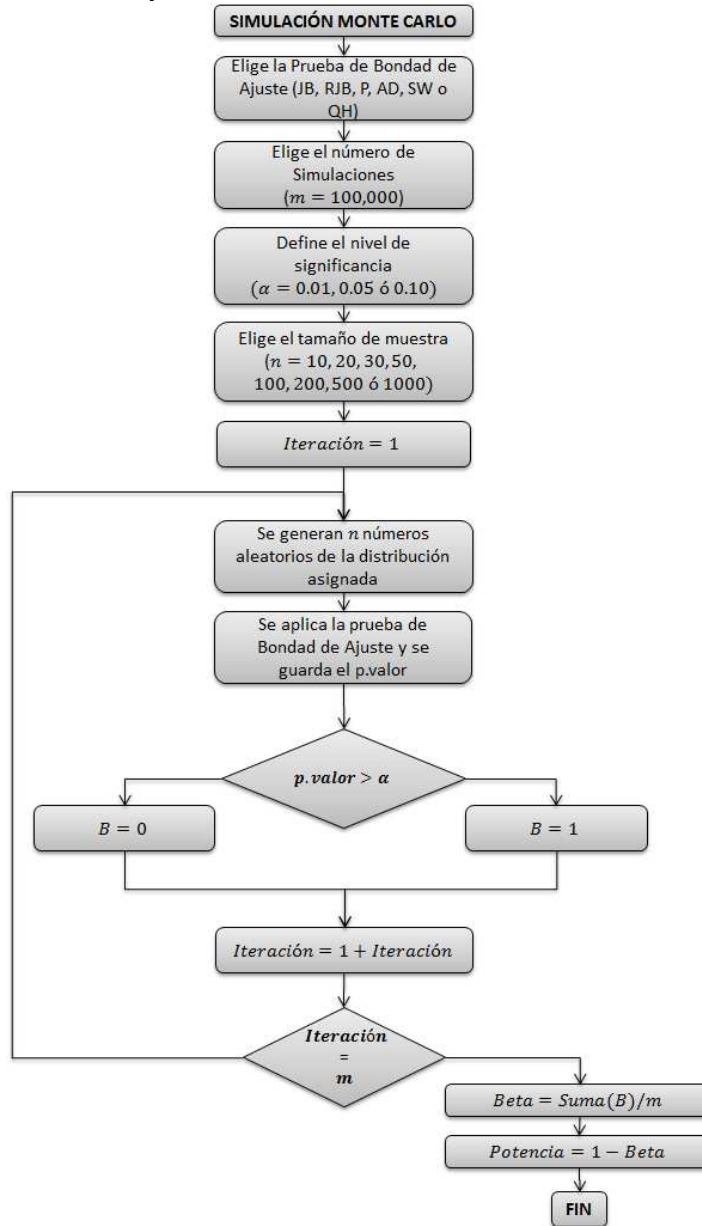
*La Distribución Cauchy se considera una distribución simétrica leptocúrtica.

Fuente: Elaboración propia conforme la clasificación que presentaron Shapiro et al. (1968).

La Figura 57 muestra el modelo lógico (diagrama de flujo) que sirve como puente entre el modelo conceptual y la aplicación en el software mediante un código en R Project. El desarrollo de este modelo es un proceso iterativo, en el cual se deben establecer ciertos criterios al inicio del mismo:

- ✓ La **Prueba de Bondad de Ajuste** a emplear (*AD, P, JB, RJB, SW* o *QH**)
- ✓ El **Número de simulaciones o repeticiones** ($m = 100,000$)
- ✓ El **Nivel de significancia** ($\alpha = 0.01, 0.05$ o 0.10)
- ✓ El **Tamaño de muestra** ($n = 10, 20, 30, 50, 100, 200, 500$ y $1,000$)

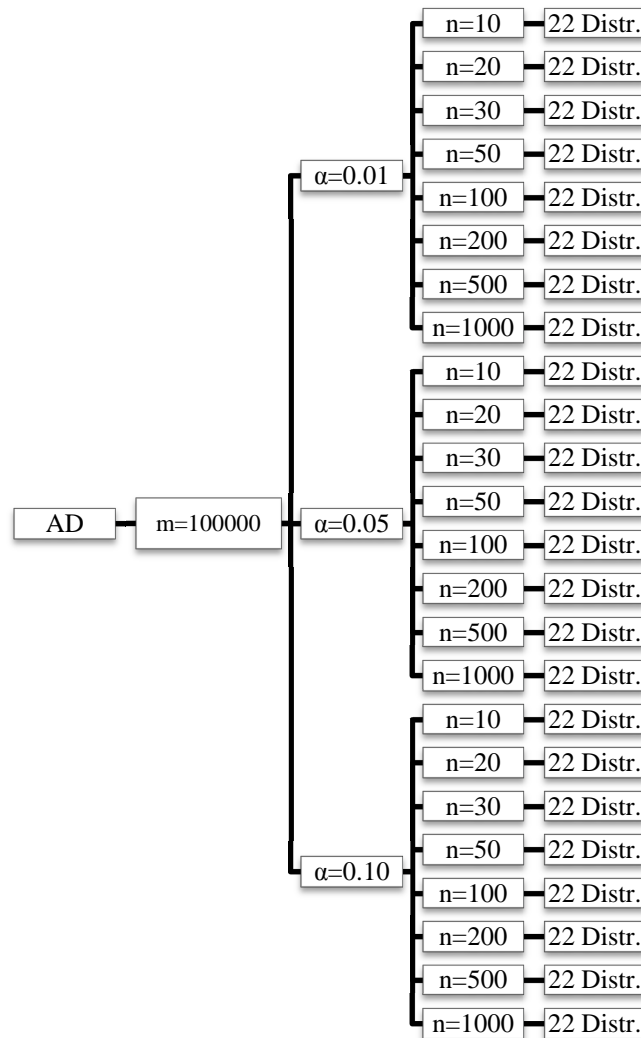
Figura 57. Diagrama de Flujo para el Proceso de la Simulación Montecarlo para las pruebas de bondad de ajuste.



Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto, para este estudio de potencia se aplicaron todas las combinaciones con la información anterior. Por ejemplo, para el caso de la prueba **AD**, se aplicó una simulación con tres niveles de significancia y ocho tamaños de muestra (ver Figura 58). Cabe aclarar que la prueba **QH** al presentar un alto tiempo de cómputo para obtener su estadístico de prueba, solamente se realizaron mil simulaciones ($m = 1,000$).

Figura 58. Organigrama para el Proceso de Simulación de la Prueba Anderson y Darling (AD).



Fuente: Elaboración propia.

Una vez establecida esta información, se inicia el proceso de simulación, en la cual para cada proceso iterativo, se generaron v.a. dependiendo del tamaño de muestra asignado, a cada una de las 22 distribuciones aplicadas en este estudio, para posteriormente aplicar la Prueba de bondad de Ajuste.

Las hipótesis a contrastar en este estudio son:

H_0 : La muestra se distribuye normalmente

H_1 : La muestra NO se distribuye normalmente

El proceso de decisión sobre la aceptación o rechazo de la H_0 , se obtiene mediante el contraste del p-valor y el nivel de significancia, conforme las siguientes condiciones:

- Sí el p-valor es menor al nivel de significancia, entonces se rechaza H_0 ($p \text{ valor} < \alpha$)
- Sí el p-valor es mayor o igual a nivel de significancia, entonces no se rechaza H_0 ($p \text{ valor} \geq \alpha$)

Una vez especificado nuestro proceso de decisión, creamos en R Project una matriz para cada distribución donde el número de filas es igual al número de simulaciones y las columnas son los diferentes tamaños de muestra. En cada iteración, se asigna el valor de 0 cuando se rechace la H_0 y el valor de 1 cuando se acepte la H_0 , por lo que tendremos una matriz de dimensión ($m \times 8$) como se aprecia en la Tabla 4 con valores binarios. A esta variable, la denotaremos por la letra griega β , ya que en realidad cuando se asigna el valor de uno, estamos aceptando algo que es falso (Error tipo II).

Tabla 4. Representación de la matriz en el contraste de hipótesis para cada distribución y tamaños de muestra.

Iter.\n	10	20	30	50	100	200	500	1000
1	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	1	0	1	0	1	1	0
3	1	0	0	0	1	0	0	1
4	1	0	1	0	0	1	1	1
.
.
.
.
49,999	0	1	0	1	0	1	1	1
m=100,000	1	0	1	0	1	1	1	1

Fuente: Elaboración propia.

Una vez concluido el ciclo, se obtiene para cada distribución de acuerdo al tamaño de muestra, el promedio de la potencia estadística, mediante el siguiente cálculo:

$$Potencia = 1 - \frac{Suma(\beta)}{m}$$

Por último, se creó otra matriz en R Project, donde se asigna el valor del promedio de la potencia estadística, para las 22 distribuciones, con sus respectivos tamaños de muestra como se aprecia en la Tabla 5.

Tabla 5. Representación de la matriz con el valor promedio de la potencia estadística con cada distribución para todos los tamaños de muestra empleados en el estudio.

Distr.\n	10	20	30	50	100	200	500	1000
distr_1	0.2798	0.4642	0.6665	0.9244	0.9994	1.0000	1.0000	1.0000
distr_2	0.0607	0.0507	0.0591	0.0733	0.1113	0.2298	0.6945	0.9893
distr_3	0.0870	0.0834	0.1091	0.1963	0.4563	0.9062	1.0000	1.0000
distr_4	0.0859	0.0818	0.1125	0.1952	0.4573	0.9050	1.0000	1.0000
.
.
distr_21	0.0648	0.0499	0.0525	0.0539	0.0572	0.0680	0.1022	0.1849
distr_22	0.0642	0.0486	0.0506	0.0527	0.0524	0.0537	0.0496	0.0525

Fuente: Elaboración propia.

Para realizar todos los procesos de simulación, se crearon funciones para cada una de las pruebas de bondad de ajuste y se aplicaron las combinaciones que se muestran en la Figura 59, para obtener todas las potencias estadísticas. Al final se crea un archivo en Excel que con el nombre de cada prueba, que contiene la información de la Tabla 5. Si se desea conocer mayor detalle el código que se empleó, ver Anexos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

En cada una de las pruebas se creó el siguiente código para aplicar las funciones que tienen la simulación en R Project:

Shapiro.prueba(muestra, max.iter, alfa)

RJarque.prueba(muestra, max.iter, alfa)

Pearson.prueba(muestra, max.iter, alfa)

Jarque.prueba(muestra, max.iter, alfa)

Anderson.prueba(muestra, max.iter, alfa)

Dónde:

- muestra:** Incluye un vector por default con los ocho tamaños de muestra a emplear (10, 20, 30, 50, 100, 200, 500 y 1,000).
- max.iter:** Es el número máximo de iteraciones o repeticiones que se aplican en la simulación, en este caso no hay un valor predeterminado, por lo que se necesita especificar.
- alfa:** Es el nivel de significancia que se aplica, también no hay un valor predeterminado por lo que se necesita especificar con un formato decimal.

Figura 59. Aplicación del código que se empleó en R Project para emplear las funciones de cada prueba de bondad de Ajuste, en el proceso de simulación.

```

#Se aplica una simulación con 100,000 repeticiones, y un nivel de significancia del 1%
Shapiro.prueba(muestra,100000,0.01)
RJarque.prueba(muestra,100000,0.01)
Pearson.prueba(muestra,100000,0.01)
Jarque.prueba(muestra,100000,0.01)
QH.prueba(muestra,100000,0.01)
Anderson.prueba(muestra,100000,0.01)

#Se aplica una simulación con 100,000 repeticiones, y un nivel de significancia del 5%
Shapiro.prueba(muestra,100000,0.05)
RJarque.prueba(muestra,100000,0.05)
Pearson.prueba(muestra,100000,0.05)
Jarque.prueba(muestra,100000,0.05)
QH.prueba(muestra,100000,0.05)
Anderson.prueba(muestra,100000,0.05)

#Se aplica una simulación con 100,000 repeticiones, y un nivel de significancia del 10%
Shapiro.prueba(muestra,100000,0.10)
RJarque.prueba(muestra,100000,0.10)
Pearson.prueba(muestra,100000,0.10)
Jarque.prueba(muestra,100000,0.10)
QH.prueba(muestra,100000,0.10)
Anderson.prueba(muestra,100000,0.10)
    
```

Fuente: Elaboración propia.

Para este estudio se utilizó el programa R Project 3.0.2 que se emplea como un entorno donde se han implementado muchas técnicas estadísticas, tanto clásicas como modernas. Algunas técnicas estadísticas están incluidas en el entorno base de R y otras se acompañan en forma de biblioteca (packages); el hecho de distinguir entre ambos conceptos es fundamental para la implementación de las mismas. Junto con R

se incluyen 14 bibliotecas (llamadas bibliotecas estándar²² o básicas), otras están disponibles a través de internet en CRAN (The Comprehensive R Archive Network).

3.2. TASA EMPÍRICA DEL ERROR TIPO I

El Error Tipo I se estimó mediante técnicas de simulación con el Método Monte Carlo. Para esto, se ejecutó el código m veces, en las seis pruebas de bondad de ajuste, generando números aleatorios de una distribución normal estándar de acuerdo a cada tamaño muestral, definiéndolo de la manera siguiente:

$$\hat{\alpha} = \frac{X}{m}$$

Dónde:

- $\hat{\alpha}$: Tasa Empírica del Error Tipo I.
- X : El número de veces que se rechazó H_0 siendo cierta.
- m : Es el número de repeticiones.

Una vez calculado el valor de $\hat{\alpha}$ para las seis pruebas de bondad de ajuste, se compara con su respectivo valor teórico ($\alpha = 0.10; 0.05; 0.01$), los cuales se muestran en la Tabla 6.

²² R viene con las siguientes librerías: base, compiler, dataset, grDevices, graphics, grid, methods, parallel, splines, stats, stats4, tcltk, tools y utils. Para mayor detalle ver la siguiente página web: http://cran.r-project.org/doc/manuals/r-release/R-FAQ.html#Which-add_002don-packages-exist-for-R_003f

Tabla 6. Tasa Empírica del Error Tipo I para distintos niveles de significancia.

n	P			AD			RJB		
	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
10	0.1093	0.0660	0.0113	0.1022	0.0507	0.0095	0.0699	0.0540	0.0354
20	0.1264	0.0495	0.0117	0.1008	0.0502	0.0098	0.0795	0.0621	0.0367
30	0.1170	0.0515	0.0107	0.1015	0.0486	0.0098	0.0820	0.0621	0.0365
50	0.1041	0.0521	0.0105	0.1008	0.0491	0.0097	0.0846	0.0618	0.0337
100	0.1021	0.0518	0.0110	0.1000	0.0483	0.0098	0.0839	0.0549	0.0280
200	0.1021	0.0529	0.0111	0.1011	0.0499	0.0098	0.0827	0.0507	0.0217
500	0.1012	0.0499	0.0110	0.0989	0.0500	0.0101	0.0845	0.0474	0.0162
1000	0.1022	0.0520	0.0107	0.0998	0.0481	0.0098	0.0883	0.0463	0.0129

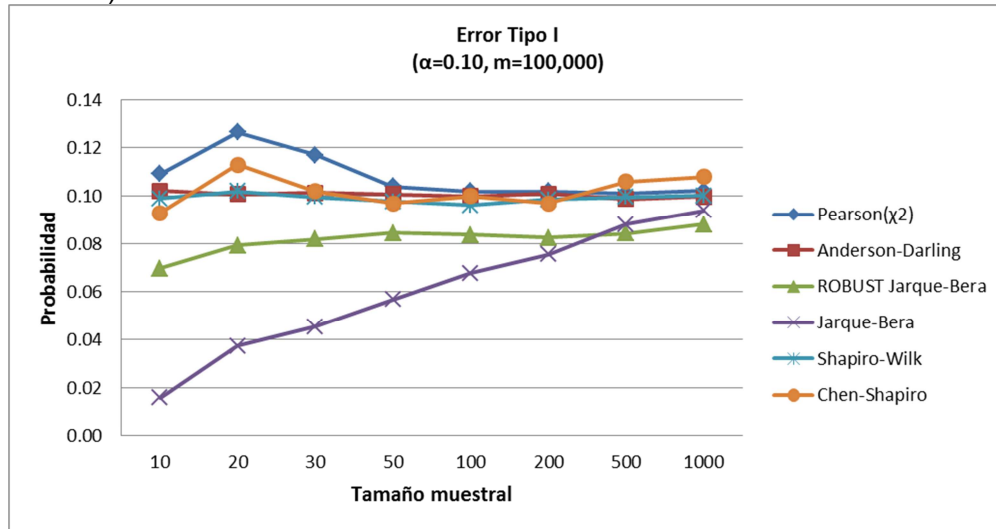
n	JB			SW			QH*		
	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.10$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
10	0.0161	0.0090	0.0022	0.0990	0.0500	0.0102	0.0930	0.0470	0.0170
20	0.0374	0.0240	0.0115	0.1021	0.0499	0.0096	0.1130	0.0600	0.0080
30	0.0455	0.0315	0.0145	0.0996	0.0501	0.0101	0.1020	0.0400	0.0080
50	0.0568	0.0372	0.0185	0.0979	0.0485	0.0104	0.0970	0.0410	0.0050
100	0.0678	0.0408	0.0193	0.0963	0.0492	0.0104	0.1000	0.0520	0.0060
200	0.0756	0.0453	0.0183	0.0986	0.0499	0.0104	0.0970	0.0560	0.0110
500	0.0882	0.0476	0.0158	0.0996	0.0506	0.0102	0.1060	0.0470	0.0160
1000	0.0940	0.0487	0.0131	0.1002	0.0511	0.0102	0.1080	0.0520	0.0080

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

Fuente: Elaboración propia.

En el caso de un nivel de significancia del 10%, se puede apreciar una subestimación de $\hat{\alpha}$ en las pruebas basadas en momentos, para tamaños de muestra de pequeños a moderados ($10 \leq n \leq 50$), tomando valores entre **(0.0161, 0.0618)** para la prueba **JB** y entre **(0.0699, 0.0839)** para la prueba **RJB**; lo cual indica que la H_0 casi nunca es rechazada. Sin embargo, al aumentar el tamaño muestral, ambas pruebas convergen a su valor teórico ($\alpha = 0.10$). Por otro lado, las pruebas **SW**, **AD** y **QH** se puede notar que tienen un buen ajuste para todos los tamaños de muestra, debido a que sus respectivos $\hat{\alpha}$ toman valores cercanos a su valor teórico ($\alpha = 0.10$) (ver Figura 60).

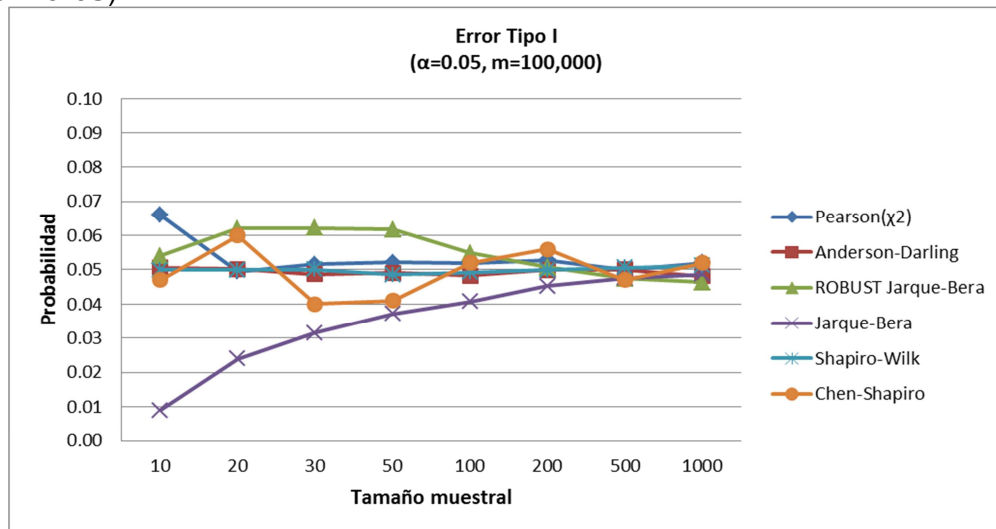
Figura 60. Tasa Empírica del Error Tipo I con un nivel de significancia del 10% ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

Cuando disminuye el nivel de significancia a un valor del 5%, se observa que la prueba **JB** está subestimando a $\hat{\alpha}$, para tamaños de muestra de pequeños a moderados ($10 \leq n \leq 50$); no obstante, la prueba **RJB** tiene un mejor ajuste para estos tamaños muestrales que la prueba **JB**. También las pruebas **SW** y **AD** tienen un buen ajuste en todos los tamaños muestrales; mientras que al aumentar el tamaño de muestra para las seis pruebas, todos los $\hat{\alpha}$ convergen a su valor teórico ($\alpha = 0.05$) (ver Figura 61).

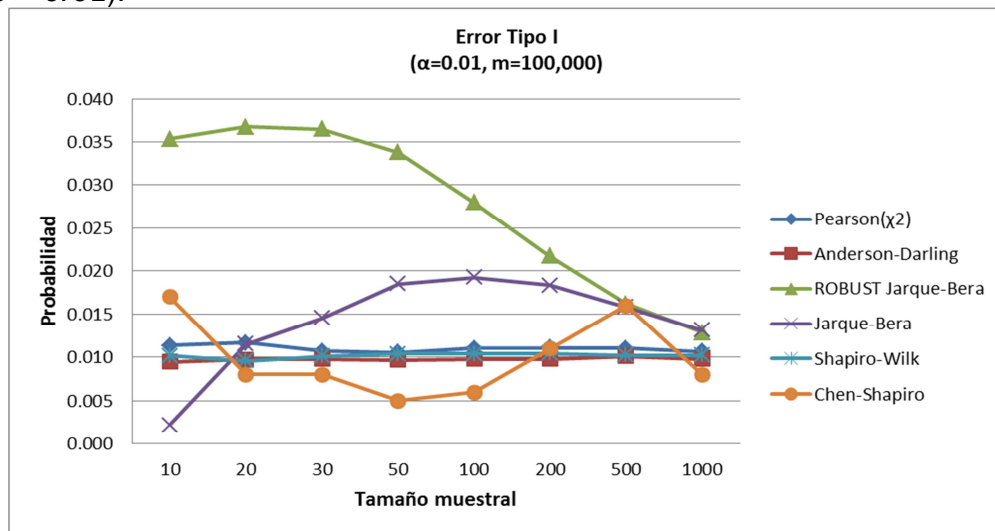
Figura 61. Tasa Empírica del Error Tipo I con un nivel de significancia del 5% ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Por último, con el mínimo nivel de significancia en este análisis del 1%, se puede notar principalmente que la prueba **RJB** tiene una variabilidad remarcable en comparación con el resto, debido a que sobreestima al valor de $\hat{\alpha}$, para tamaños de muestra menores a cien ($n \leq 100$), tomando valores entre (0.0354, 0.0280), lo cual indica que la H_0 es rechazada más veces, aunque ésta sea cierta. Además se observa una sobreestimación para la prueba **JB**, aunque de menor valor en comparación con la **RJB**, para tamaños de muestra entre treinta y doscientos ($30 \leq n \leq 200$). Por otro lado, las pruebas **SW**, **AD** y **P** tienen un buen ajuste en todos los tamaños muestrales; mientras que al aumentar el tamaño de muestra para las seis pruebas, todos los $\hat{\alpha}$ convergen a su valor teórico ($\alpha = 0.01$) (ver Figura 62).

Figura 62. Tasa Empírica del Error Tipo I con un nivel de significancia del 1% ($\alpha = 0.01$).



Fuente: Elaboración propia (2015).

3.3. COMPARATIVO DE POTENCIA

3.3.1. PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA

Debido a la amplia gama de distribuciones empleadas en este estudio, aplicamos el promedio de la potencia estadística a manera de resumir la información conforme a dos factores: el tamaño de muestra y la clasificación de las distribuciones alternativas (ver

Tabla 3). Para más detalle de la potencia estadística en cada una de las distribuciones ver el Anexo correspondiente tomando en cuenta su clasificación (ver Anexo 8, 9, 10, 11 y 12).

En la Tabla 7 se muestra el promedio de la potencia estadística para un nivel de significancia del 5%, con los cuales se realizaron las conclusiones de acuerdo a la clasificación de las distribuciones (Simétricas Mesocúrticas, Simétricas Leptocúrticas, Simétricas Platicúrticas, Asimétricas Leptocúrticas y Asimétricas Platicúrticas), en los siguientes apartados.

Tabla 7. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad ($\alpha = 0.05$).

Clasificación Distribuciones	n	P	AD	RJB	JB	SW	QH*
Simétrica Mesocúrtica	10	0.06980	0.05803	0.06585	0.01293	0.05729	0.05733
	20	0.05473	0.06658	0.08724	0.04204	0.06932	0.06933
	30	0.05851	0.07448	0.10293	0.06079	0.08085	0.08800
	50	0.06244	0.08982	0.12464	0.09050	0.10079	0.11467
	100	0.06778	0.12567	0.17257	0.14518	0.15268	0.16067
	200	0.08439	NA	0.24735	0.23282	0.25801	0.24500
	500	0.13372	NA	0.43960	0.46719	0.55594	0.42033
	1000	0.24314	NA	0.68925	0.73539	0.79461	0.66800
Simétrica Leptocúrtica	10	0.32888	0.37953	0.42027	0.24636	0.36884	0.36450
	20	0.45418	0.56454	0.63399	0.51747	0.55866	0.58925
	30	0.53866	0.64961	0.72461	0.63806	0.65036	0.67800
	50	0.60848	0.74019	0.81764	0.74991	0.74582	0.77000
	100	0.69166	NA	0.92760	0.88416	0.87681	0.90050
	200	0.81877	NA	0.98799	0.97720	0.98129	0.98075
	500	0.96237	NA	0.99994	0.99988	0.99984	1.00000
	1000	0.99829	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
Simétrica Platicúrtica	10	0.07502	0.06115	0.02062	0.00279	0.06270	0.06060
	20	0.06659	0.09615	0.00620	0.00140	0.10436	0.08380
	30	0.08533	0.15173	0.00254	0.00063	0.18340	0.16120
	50	0.11389	0.27682	0.00075	0.00027	0.35185	0.30640
	100	0.22979	NA	0.01957	0.22855	0.54648	0.45360
	200	0.43911	NA	0.45121	0.55903	0.78612	0.69280
	500	0.60314	NA	0.82640	0.95260	0.99527	0.81300
	1000	0.76318	NA	0.99081	0.99988	1.00000	0.89220
Asimétrica Leptocúrtica	10	0.29824	0.31313	0.25567	0.12200	0.33427	0.26311
	20	0.44982	0.55793	0.46229	0.36881	0.60469	0.51011
	30	0.56832	0.68486	0.59160	0.53891	0.73287	0.65911
	50	0.68407	0.80023	0.74020	0.73044	0.84346	0.79978
	100	0.78724	NA	0.89049	0.89539	0.95227	0.92473
	200	0.89367	NA	0.98388	0.98870	0.99765	0.99300
	500	0.99392	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1000	1.00000	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Tabla 7. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad ($\alpha = 0.05$).
Continuación

Clasificación Distributions	n	P	AD	RJB	JB	SW	QH*
Asimétrica Platicúrtica	10	0.12195	0.11262	0.06081	0.01260	0.11890	0.11200
	20	0.14542	0.23517	0.06598	0.02722	0.26098	0.16700
	30	0.22530	0.38121	0.07268	0.03807	0.44321	0.29800
	50	0.42115	0.65371	0.10102	0.09009	0.75850	0.54200
	100	0.80711	0.96421	0.37609	0.67014	0.99171	0.93000
	200	0.99443	0.99996	0.99700	0.99964	1.00000	0.99900
	500	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo con los resultados obtenidos, se puede apreciar que para todos los tamaños de muestra, se observa un pequeño incremento en la potencia en comparación con un nivel de significancia del 1%, lo cual reafirma que al aumentar el nivel de significancia (Error tipo I), disminuye el Error tipo II, lo que conlleva al aumento de la potencia estadística.

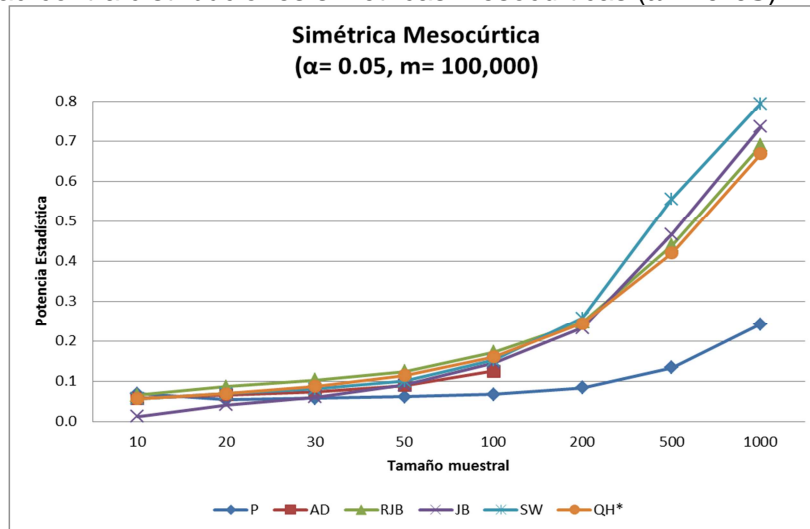
3.3.1.1. DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS MESOCÚRTICAS.

En esta primera clasificación, las distribuciones que se emplearon tienen semejanza con una distribución Normal, debido a que sus valores de asimetría y curtosis son cercanos a 0 y 3 respectivamente. Con los resultados obtenidos para tamaños de muestra menores a cien ($n \leq 100$), todas las pruebas tienen una baja potencia, es decir, que en la mayoría de los casos se acepta que los datos provienen de una distribución Normal, aunque esto sea falso. Por otro lado, al aumentar el tamaño de muestra ($n \geq 200$) la prueba *SW* tiene el mejor desempeño en potencia. Sin embargo, para tamaños de muestra mayores a cincuenta ($n \geq 50$), la prueba con peor desempeño en potencia es la *P* (ver Figura 63).

Es importante mencionar, que para muestras menores a treinta ($n \leq 30$) la prueba *JB* es la de menor potencia; mientras que para muestras muy grandes ($n \geq 500$) tiene un buen desempeño, siendo la segunda prueba más potente, es decir, que su potencia

crece considerable cuando aumenta el tamaño de muestra en comparación con las demás pruebas.

Figura 63. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas mesocúrticas ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

La prueba **RJB** tiene el mejor desempeño para todos los tamaños de muestra respecto de la distribución **Logística(9,3)**, mientras que la prueba que tiene un pobre desempeño para estos mismo casos es la **P**. En el caso de la distribución **Rice(4,2)**²³, es destacable el buen desempeño de la prueba **SW** en todos los tamaños de muestra. Por otro lado, para la distribución **Weibull(4,5)**²⁴ la prueba **JB** presentó una potencia baja en comparación con el resto, para tamaños de muestra menores a doscientos ($n \leq 200$) (ver Anexo 8).

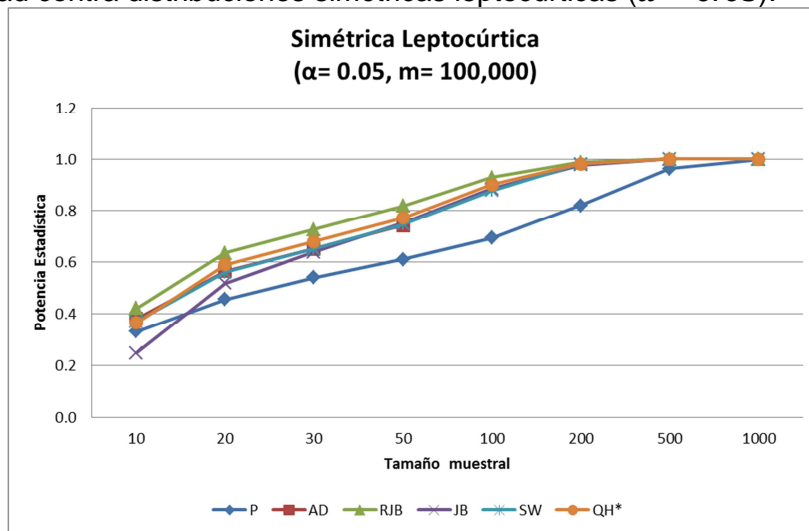
²³ La distribución **Rice(4,2)** en el caso de un nivel de significancia del 10% ($\alpha = 0.10$), para tamaños de muestra menores a treinta ($n \leq 30$) la prueba con mejor potencia es la **P**; asimismo al aumentar el tamaño de muestra es la prueba **SW**. Sin embargo, para un nivel de significancia del 1% ($\alpha = 0.01$), la prueba con mayor potencia es la **RJB** para tamaños de muestra menores a doscientos ($n \leq 200$) (ver Anexo 8).

²⁴ La distribución **Weibull(4,5)** para un nivel de significancia del 10% ($\alpha = 0.10$), es notable la diferencia en potencia para las pruebas de momentos (**RJB** y **JB**) debido a su baja potencia contra las demás pruebas, para tamaños de muestra menores a doscientos ($n \leq 200$) (ver Anexo 9).

3.3.1.2. DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS

En esta clasificación, la prueba que muestra el mejor desempeño es la **RJB** seguida de la **QH**, ambas para tamaños de muestra menores a cien ($n \leq 100$). De manera opuesta, la prueba que posee la menor potencia para todos los tamaños de muestra es la **P**, seguida de la prueba **JB** para el caso de muestras menores a treinta ($n \leq 30$). Cuando el tamaño de muestra es muy grande ($n \geq 500$), todas las pruebas tienen una potencia óptima (ver Figura 64).

Figura 64. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

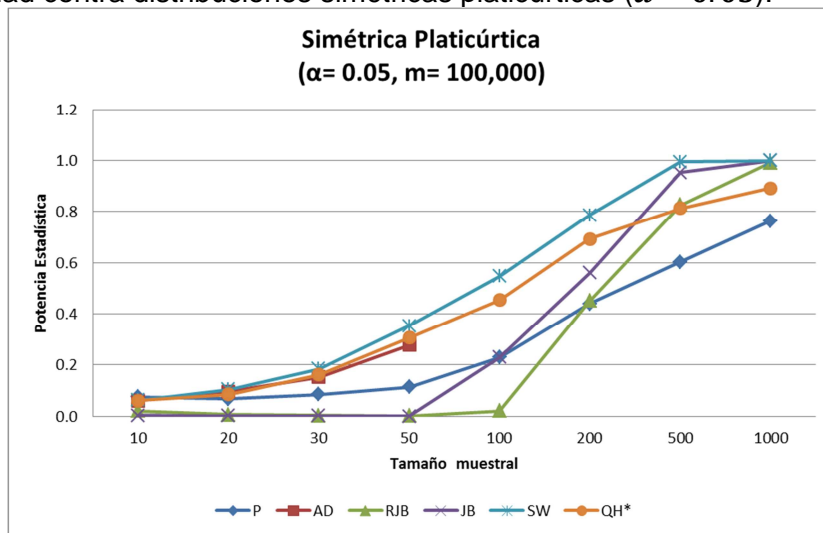
Para tamaños de muestra entre veinte y cincuenta ($20 \leq n \leq 50$) con respecto a la distribución $t - Student(4)$, la prueba con menor desempeño sigue siendo la **P** seguida ahora por la prueba **AD** (ver Anexo 9).

En el caso de las distribuciones $t - Student(1)$ y $Cauchy(0, 0.5)$, se puede apreciar que tienen una potencia mayor en el caso de tamaños de muestra menores a cincuenta ($n \leq 50$), en comparación con el resto de las distribuciones de esta categoría. Mientras que para muestras grandes a muy grandes ($n \geq 100$), todas las pruebas tienen un buen desempeño en potencia.

3.3.1.3. DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS PLATICÚRTICAS

Con respecto a ésta clasificación, podemos apreciar para todas las pruebas de bondad de ajuste presentan una potencia estadística baja para tamaños de muestra de pequeñas a medianas ($10 \leq n \leq 50$), donde las pruebas que describen un deficiente desempeño son las basadas en momentos²⁵ (*JB* y *RJB*), mientras que las que poseen la potencia más alta son las pruebas *SW* y *QH*, mismas que mantienen su buen desempeño también para tamaños de muestra grandes ($100 \leq n \leq 200$). Por otro lado, tenemos que la prueba que tiene el nivel más bajo de potencia para tamaños de muestra muy grandes ($n \geq 500$) corresponde a la *P*; mientras que la pruebas con mayor potencia para este caso son la *SW* seguida de la *JB* (ver Figura 65).

Figura 65. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas platicúrticas ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a las distribuciones *Uniforme(3, 15)* y *Uniforme(0, 20)*, tenemos que todas las pruebas poseen un buen desempeño para los tamaños de muestra mayores a doscientos ($n \geq 200$).

²⁵ Cuando aumenta el nivel de significancia al 10% ($\alpha = 0.10$), se puede observar una mejora en la potencia estadística para las pruebas de momentos (*RJB* y *JB*), en comparación con el resto cuando aumenta el tamaño de muestra ($n \geq 100$) (ver Anexo 7).

Cabe mencionar que para las distribuciones *Triangular*(0, 1, 0.5) y *Cardioid*(3, 0.3) para tamaños de muestras menores a cien ($n \leq 100$), todas las pruebas analizadas tienen un comportamiento similar donde destaca su baja potencia, siendo las pruebas de momentos (*RJB* y *JB*) las que tienen los niveles más bajos. La prueba con mayor potencia para la distribución *Triangular*(0, 1, 0.5) en tamaños de muestra muy grandes ($n \geq 200$) es la *QH*; mientras que para la distribución *Cardioid*(3, 0.3) la mejor prueba para estos tamaños de muestra es la *SW*. En el caso de la distribución *Beta*(2, 2)²⁶ para tamaños de muestra mayores a doscientos ($n \geq 200$), la prueba que tiene la menor potencia es la *QH* (ver Anexo 10).

3.3.1.4. DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS

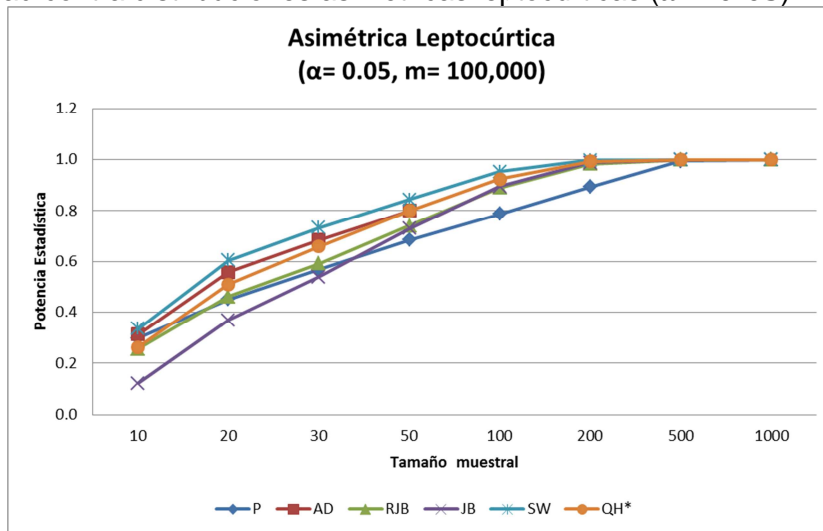
Para esta clasificación, las distribuciones analizadas presentan un grado de asimetría con colas largas. Se puede apreciar que la potencia estadística va aumentando conforme aumenta el tamaño de muestra para todas las pruebas analizadas, es decir, que en la mayoría de los casos se rechaza que los datos provienen de una distribución Normal, cuando esto es falso. La prueba con mejor potencia es la *SW* en todos los casos, seguida de la prueba *AD* para tamaños de muestra de pequeños a moderados ($10 \leq n \leq 50$), y la prueba *QH*²⁷ para tamaños de muestra de grandes a muy grandes ($n \geq 100$). Es importante mencionar la baja potencia de la prueba *JB*²⁸ para tamaños de muestra menores a treinta ($n \leq 30$), y para el resto de los tamaños de muestra ($n \geq 50$), la de menor potencia es la prueba *P* (ver Figura 66).

²⁶ Para la distribución *Beta*(2, 2), al aumentar el nivel de significancia al 10% ($\alpha = 0.10$), se puede observar una mejora en la potencia estadística para las pruebas de momentos (*RJB* y *JB*), en comparación con el resto de las pruebas para un tamaño de muestra mayor a doscientos ($n \geq 200$), haciendo que la prueba *JB* sea la segunda mejor prueba, por debajo de la *SW* (ver Anexo 11).

²⁷ La prueba *QH* con un nivel de significancia del 1% ($\alpha = 0.01$), tiene una baja potencia similar a las pruebas *JB* y *P*, para tamaños de muestra menores a cincuenta ($n \leq 30$) (ver Anexo 7).

²⁸ Cuando aumenta el nivel de significancia al 10% ($\alpha = 0.10$), la prueba *RJB* baja su potencia, haciendo que las pruebas de momentos se encuentren como las peores en ésta clasificación, para tamaños de muestra menores a treinta ($n \leq 30$) (ver Anexo 7).

Figura 66. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.05$).



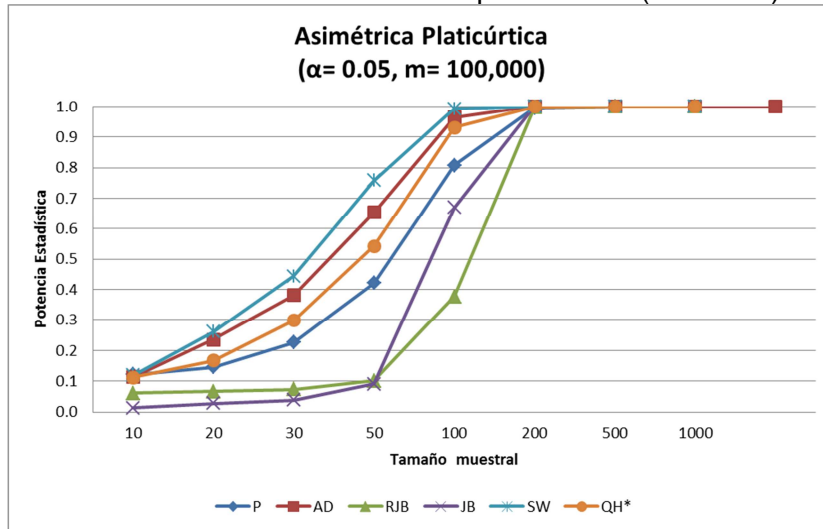
Fuente: Elaboración propia.

Para las distribuciones *Chi cuadrada*(7), *Gamma*(2, 9), *Rayleigh*(0.5) y *Gamma*(6.5, 2.8) se puede apreciar que la prueba *P* tiene un pobre desempeño de potencia. Sin embargo, en las distribuciones *Beta*(1, 6), *Pareto*(0.5, 4), *Exponencial*(1), *Lognormal*(0, 1) y *Weibull*(1, 2) las pruebas de momentos (*RJB* y *JB*), tienen el peor desempeño de potencia para tamaños de muestra de pequeñas a moderadas ($10 \leq n \leq 50$); mientras que para tamaños de muestra mayores a cien ($n \geq 100$), todas las pruebas poseen un buen nivel de potencia (ver Anexo 11).

3.3.1.5. DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICA PLATICÚRTICA

En esta clasificación, sólo se encuentra la distribución *Triangular*(0, 1, 0.9), en la cual se puede apreciar que un aumento significativo de la potencia estadística para todas las pruebas analizadas conforme aumenta el tamaño de muestra. Las pruebas con mayor potencia son la *SW* y *AD*; mientras que las pruebas de normalidad basadas en momentos (*RJB* y *JB*) son las que tienen los niveles más bajos de potencia siendo significativa con el resto de las pruebas, para tamaños de muestra menores cien ($n \leq 100$). Por otro lado, cuando el tamaño de muestra aumenta ($n \geq 200$), todas las pruebas tienen a una potencia óptima (ver Figura 67).

Figura 67. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas platicúrticas ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

3.3.2. RANGO DE POTENCIA ESTADÍSTICA

Con la finalidad de representar de una manera clara el desempeño de las diferentes pruebas de normalidad, para todos los casos estudiados (nivel de significancia, tamaño muestral, repeticiones y clasificación de distribuciones), se emplea el procedimiento de clasificación por rango. El rango asignado con el valor de 1 fue otorgado a la prueba con mayor potencia, mientras que el rango 6 (debido a que en nuestro estudio fueron consideradas seis pruebas de normalidad) fue asignado a la prueba que posee el menor desempeño de potencia. Posteriormente, los rangos son sumados para obtener el gran total de rangos. Como el menor número fue asignado a la prueba con mayor potencia, por consiguiente, la prueba que posea el menor valor en el total de rangos fue denominada como la mejor prueba para detectar la desviación de la normalidad. Se categorizó de acuerdo a la calificación de las distribuciones y también conforme el tamaño de muestra para los diferentes niveles de significancia, así mismo como al número de repeticiones.

En la Tabla 8 se muestra el Rango de potencia basado en la clasificación de las distribuciones de acuerdo a su grado de asimetría y curtosis, para el caso de cien mil repeticiones. Es importante aclarar que se realizó este comparativo con cinco pruebas

de normalidad (**P**, **RJB**, **JB**, **SW** y **QH**), omitiendo la prueba **AD** debido a que en distintos tamaños de muestra hay valores No Aplicables (NA²⁹), lo que impide que se realice el rango para todos los casos estudiados.

Tabla 8. Rango de Potencia basado en los Tipos de Distribuciones Alternativas.

Distribuciones Alternativas	Rango Total														
	$\alpha = 0.01$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.10$				
	P	RJB	JB	SW	QH*	P	RJB	JB	SW	QH*	P	RJB	JB	SW	QH*
Simétrica Mesocúrtica	93.0	43.0	87.0	75.0	86.0	86.0	76.0	100.0	61.0	72.0	82.0	83.0	103.0	57.0	71.0
Simétrica Leptocúrtica	161.0	49.5	113.0	104.0	92.5	158.0	53.0	126.5	108.5	81.0	155.0	58.0	135.5	105.5	79.0
Simétrica Platicúrtica	110.0	172.0	184.0	91.5	121.5	124.0	179.0	176.5	75.5	116.0	129.0	178.0	170.0	71.0	122.0
Asimétrica Leptocúrtica	329.0	192.5	282.5	135.5	257.5	293.0	275.5	308.5	127.5	207.5	292.5	292.0	308.5	133.5	185.5
Asimétrica Platicúrtica	22.0	31.0	38.0	15.0	29.0	27.0	35.0	36.0	13.0	24.0	31.0	36.0	35.0	12.5	21.5

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 8 se puede apreciar claramente que la prueba **SW** es la mejor prueba para este estudio, ya que tiene el rango total más bajo para todos los niveles de significancia (1%, 5% y 10%). En la única clasificación donde la prueba **SW** tiene problemas al rechazar la hipótesis de normalidad es en el caso de las Distribuciones Simétricas Leptocúrticas, aunque es importante resaltar que aun así, no se encuentra dentro de las peores para esta clasificación. La segunda mejor prueba para el rechazo de normalidad en todas las distribuciones alternativas, para los niveles de significancia del 5% y 10% es la prueba **QH**. Sin embargo, en el caso de un nivel de significancia del 1% se ve una discrepancia en comparación con los demás niveles de significancia, para la prueba **QH**, que ocupa el tercer lugar.

En general, la prueba **JB** es una de las peores pruebas para los tres niveles de significancia estudiados (1%, 5% y 10%), debido a que posee el rango total más alto; mientras que la prueba **RJB** es la mejor prueba para el caso de las Distribuciones Simétricas Leptocúrticas, no obstante se encuentra como una de las peores pruebas para el caso de Distribuciones Asimétricas junto con la **JB**. También la prueba **P** tiene un mal desempeño para Distribuciones Mesocúrticas y Leptocúrticas, en todos los

²⁹ Por sus siglas en Ingles "Not Available", se muestra al interrumpir en un punto la simulación por valores faltantes al aplicar la prueba AD con el software R Project.

niveles de significancia; mientras que para las Distribuciones Platicúrticas es la segunda mejor prueba para un nivel de significancia del 1%.

La Tabla 9 muestra el caso particular cuando las distribuciones son ordenadas únicamente de acuerdo a su nivel de asimetría, en dos clasificaciones: Distribuciones Simétricas y Distribuciones Asimétricas. En la cual, la mejor prueba sigue siendo la de **SW** para todos los niveles de significancia, seguida de la prueba **RJB** para un nivel de significancia del 1% y la prueba **QH** para el resto de los niveles de significancia (5% y 10%). Del mismo modo, la prueba **JB** sigue siendo de las peores pruebas para distribuciones simétricas así como asimétricas, para todos los niveles de significancia, ya que tiene los mayores rangos totales en comparación con las demás pruebas.

Tabla 9. Rango de Potencia basado en distribuciones Simétricas y Asimétricas.

Distribuciones Alternativas	Rango Total														
	$\alpha = 0.01$					$\alpha = 0.05$					$\alpha = 0.10$				
	P	RJB	JB	SW	QH*	P	RJB	JB	SW	QH*	P	RJB	JB	SW	QH*
Simétricas	364.0	264.5	384.0	270.5	300.0	368.0	308.0	403.0	245.0	269.0	366.0	319.0	408.5	233.5	272.0
Asimétricas	351.0	223.5	320.5	150.5	286.5	320.0	310.5	344.5	140.5	231.5	323.5	328.0	343.5	146.0	207.0

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

Fuente: Elaboración propia.

Por último, analizamos las pruebas de acuerdo únicamente al tamaño muestral, sin importar los valores de asimetría o curtosis de las distribuciones, que aparecen en la Tabla 3. En este caso incluimos la prueba **AD** únicamente para muestras menores a cien, debido a que se tienen datos completos, es decir, sin que en alguna distribución aparezca No Aplicable (NA). Para el resto de los tamaños muestrales, se volvió a omitir la prueba **AD**.

Por lo tanto, en la Tabla 10, se puede observar el constante y buen desempeño que mantiene la prueba **SW** para todos los tamaños muestrales, ya que posee los menores rangos totales en comparación con el resto de las pruebas. Existe discrepancia con respecto a la segunda mejor prueba de acuerdo con el tamaño de muestra y a los niveles de significancia del 5% y 10%; para muestras menores a treinta ($n \leq 30$) es la

prueba **AD**; posteriormente, para muestras de cincuenta a doscientos ($50 \leq n \leq 200$) es la prueba **QH**. Hay una relación imperante respecto al aumento del tamaño muestral con la prueba **JB**, donde para muestras muy grandes ($n \geq 500$) es la segunda mejor prueba en rango de potencia. Sin embargo, las pruebas de momentos (**JB** y **RJB**) para tamaños de muestra pequeños ($n \leq 20$), son las peores debido a que posee los mayores rangos totales. Cabe mencionar que la prueba **P** se encuentra dentro de las peores en el rango de potencia para tamaños de muestra mayores a treinta ($n \geq 30$).

En el caso de un nivel de significancia del 1%, la prueba **SW** sigue siendo la mejor para todos los tamaños de muestra, teniendo para el caso de $n = 20$ un rango de potencia total cercano a la prueba **AD**. También se puede observar que la prueba **RJB** es la segunda mejor prueba para tamaños de muestra menores a treinta ($n \leq 30$), pero conforme aumenta el tamaño muestral su rango total también aumenta, dejándola como una de las peores pruebas. Mientras que la prueba **JB** muestra un mal desempeño, a excepción de tamaños de muestra iguales a mil ($n = 1000$), en el cual su rango total es cercano a la prueba **SW**. Por último la prueba **P** tiene un mal desempeño para todos los tamaños muestrales.

Tabla 10. Rango de Potencia basado en el Tamaño de Muestra.

Tamaño de muestra (n)	Rango Total																	
	$\alpha = 0.01$						$\alpha = 0.05$						$\alpha = 0.10$					
	P	AD	RJB	JB	SW	QH*	P	AD	RJB	JB	SW	QH*	P	AD	RJB	JB	SW	QH*
10	81.0	74.0	34.0	126.0	67.0	80.0	60.0	59.0	80.0	132.0	50.0	81.0	73.0	44.0	99.0	132.0	48.0	66.0
20	93.0	59.0	53.0	108.0	61.0	88.0	93.0	53.0	81.0	124.0	43.0	68.0	81.0	57.0	87.0	131.0	47.0	59.0
30	95.0	60.0	58.0	103.0	51.0	95.0	95.0	55.0	84.0	119.0	43.0	66.0	92.0	57.0	86.0	124.0	42.0	61.0
50	103.0	60.0	68.0	99.0	47.0	85.0	98.0	61.0	92.0	112.0	45.0	54.0	102.0	63.0	96.0	111.0	39.5	50.5
100	89.0	NA	67.5	75.5	42.0	56.0	85.0	NA	78.5	76.0	44.0	46.5	84.5	NA	80.0	72.5	42.0	51.0
200	85.0	NA	76.5	69.5	43.5	55.5	90.0	NA	73.5	64.5	46.5	55.5	91.0	NA	73.5	61.5	47.0	57.0
500	84.0	NA	67.0	63.5	53.5	62.0	86.0	NA	65.5	61.5	56.5	60.5	85.0	NA	62.5	61.5	57.5	63.5
1000	85.0	NA	64.0	60.0	56.0	65.0	81.0	NA	64.0	58.5	57.5	69.0	81.0	NA	63.0	58.5	56.5	71.0

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIÓN

El proceso de poner a prueba una hipótesis involucra una toma de decisiones para rechazar una H_0 , por ello en estudios de investigación donde se aplica las pruebas de hipótesis, el nivel de significancia o Error Tipo I es la probabilidad que voluntariamente asume el investigador de equivocarse al rechazar H_0 cuando en realidad es cierta. Por ello, realizamos una simulación para estimar la Tasa Empírica del Error Tipo I para las seis pruebas de bondad de ajuste, en la cual concluimos que las pruebas que tienen un mal ajuste a la estimación de $\hat{\alpha}$ para tamaños de muestra menores a cien ($n \leq 100$), son las basadas en momentos (***RJB*** y ***JB***). Debido a que para un alfa del 10% se subestimó a $\hat{\alpha}$; mientras que al disminuir alfa al 1%, sucede lo inverso, haciendo que se sobreestime a $\hat{\alpha}$. Por lo tanto, concluimos que las pruebas ***RJB*** y ***JB***, tienen un mal ajuste para la estimación del Error Tipo I en muestras pequeñas ($n < 20$), dependiendo de los valores que se le asignen a alfa. Por otro lado, las pruebas que mejor se ajustan a la Tasa empírica en los tres niveles de significancia empleados, para todos los tamaños de muestra son la ***SW*** y la ***AD***.

El foco de la investigación radica en la potencia estadística, siendo el complemento del Error Tipo II, que corresponde a la probabilidad de rechazar H_0 cuando ésta es falsa. Por lo cual, se aplicó una simulación donde se emplearon seis pruebas de normalidad (***SW***, ***AD***, ***QH***, ***P***, ***RJB*** y ***JB***), con el fin de comparar su potencia estadística para determinar las mejores pruebas de potencia, así como las peores. Se utilizaron 22 distribuciones alternativas que se clasificaron en cinco categorías conforme sus valores de asimetría y curtosis (simétricas mesocúrticas, simétricas leptocúrticas, simétricas platicúrticas, asimétricas leptocúrticas y asimétricas platicúrticas); asimismo se usaron ocho tamaños de muestra ($n = 10, 20, 30, 50, 100, 200, 500$ y $1,000$) y tres niveles de significancia ($\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$). Para realizar la comparación de la potencia estadística, se empleó el promedio de potencia y el rango de potencia.

Para las distribuciones simétricas mesocúrticas, que son aquellas que tienen semejanza con una distribución normal debido a que son simétricas y tienen una curtosis igual a tres ($g_1 = 0$ y $g_2 = 3$), las mejores pruebas para tamaños de muestra pequeños a moderados ($10 \leq n \leq 50$), con un nivel de significancia de 1% y 5%, son la **RJB**, **JB** y **QH**, mientras que las peores son la **AD** y **P**.

Sin embargo, con un nivel de significancia del 10%, las pruebas de mayor promedio de potencia son la **QH** y **SW**, y de manera contrastante con los anteriores resultados, las pruebas con menor promedio de potencia son ahora la **RJB** y **JB**. Cuando se aumenta el tamaño de muestra, la prueba **SW** es asemeja su promedio de potencia a las pruebas basadas en momentos (**RJB** y **JB**). Por lo tanto, de acuerdo con los resultados obtenidos, se sugiere utilizar las pruebas de momentos (**RJB** y **JB**) para esta clasificación para niveles de significancia del 1% y 5%; mientras que para un nivel de significancia del 10%, se sugiere el uso de las pruebas **QH** y **SW**. Por otro lado, para esta clasificación no se sugiere el uso de la prueba **P** por su bajo nivel de promedio de potencia en la mayoría de los casos.

Para las distribuciones simétricas leptocúrticas, que son aquellas distribuciones con sesgo cero que poseen una curtosis elevada ($g_1 = 0$ y $g_2 > 3$), las pruebas más potentes para todos los tamaños de muestra son la **RJB** y **QH**, en todos los niveles de significancia. Para muestras grandes, la mejor sigue siendo la **RJB**. En esta clasificación concluimos que se debe utilizar la **RJB** y la **QH**; mientras que no se sugiere el uso de la prueba **JB** para tamaños de muestra pequeños ($n \leq 30$) y la prueba **P** para ninguno de los casos.

Con respecto a las distribuciones simétricas platicúrticas, que son aquellas distribuciones con sesgo cero y baja curtosis ($g_1 = 0$ y $g_2 < 3$), las mejores pruebas para tamaños de muestra pequeñas a moderadas ($10 \leq n \leq 50$), son la de **AD**, **SW** y **QH**; mientras que las peores son las basadas en momentos (**RJB** y **JB**). Para tamaños de muestra grandes ($n \geq 100$), las mejores pruebas son la de **SW** y **QH**, mientras que las pruebas de menor promedio de potencia son la **P** y **JB**. Por lo tanto, en esta clasificación concluimos que deben ser empleadas las pruebas basadas en regresión

(*SW* y *QH*), de manera opuesta, no se sugiere el uso de las pruebas basadas en momentos (*RJB* y *JB*) por su pobre desempeño en promedio de potencia.

Para las distribuciones asimétricas leptocúrticas, que son aquellas que tienen sesgo diferente de cero y elevada curtosis ($g_1 \neq 0$ y $g_2 > 3$), tenemos que la prueba más potente es la *SW*, para todos los tamaños de muestra y niveles de significancia, seguida de la prueba *AD*. Sin embargo, las pruebas de momentos (*RJB* y *JB*) no deben ser empleadas para muestras de pequeñas a grandes ($10 \leq n \leq 200$). Podemos concluir entonces que deben ser aplicadas las pruebas *SW* y *AD*, mientras que no deben ser usadas nuevamente las pruebas basadas en momentos (*RJB* y *JB*).

Para las distribuciones asimétricas platicúrticas, que son aquellas que tienen sesgo diferente de cero y baja curtosis ($g_1 \neq 0$ y $g_2 < 3$), las mejores pruebas en potencia son la *SW* y la *AD*, para todos los tamaños de muestra y niveles de significancia; mientras que las pruebas de momentos siguen teniendo un mal desempeño. Podemos concluir así que, las pruebas que deben ser usadas en ésta clasificación son la *SW* y *AD*, y no se sugiere el uso de las pruebas basadas en momentos (*RJB* y *JB*) por su pobre desempeño en promedio de potencia.

El rango de Potencia valida los resultados obtenidos en la clasificación de las distribuciones con el promedio de la potencia estadística. Cabe mencionar que con este análisis también fue realizada una clasificación de acuerdo con el tamaño de muestra, sin importar los valores de asimetría o curtosis de las distribuciones alternativas, en este caso concluimos que la *SW* es la mejor prueba para todos los tamaños muestrales, así como para los tres niveles de significancia, seguida de las pruebas *QH* y *AD*. Es importante mencionar el desempeño de las pruebas de momentos (*RJB* y *JB*) debido a que para muestras pequeñas se encuentran como las peores pruebas debido a su alto rango de potencia; mientras que al aumentar el tamaño de muestra considerablemente ($n \geq 1,000$) la prueba *JB* se encuentra como la segunda mejor prueba. Por lo tanto concluimos, que debe ser utilizada la prueba *SW* para cualquier tamaño de muestra y nivel de significancia, por el contrario, las pruebas de momentos no se recomiendan ser aplicadas para muestras pequeñas ($10 \leq n \leq 20$).

En general podemos concluir que entre las pruebas consideradas, la prueba **SW** es la prueba más potente a excepción de las distribuciones simétricas leptocúrticas, aunque mantiene un buen desempeño en dicha clasificación; además, es la mejor prueba considerando únicamente la clasificación de tamaños de muestra (para todos los valores). Por otro lado, las pruebas de momentos (**RJB** y **JB**) son las peores pruebas en potencia, a excepción de las distribuciones simétricas mesocúrticas, y para valores muy grandes ($n \geq 500$) en la clasificación de tamaños de muestra; siendo visible que la mejora en desempeño de la **RJB** con respecto a la **JB** radica en el ajuste que se aplicó al estadístico de prueba. Es importante mencionar que la prueba **P** tiene un pobre desempeño en potencia, a excepción de las distribuciones asimétricas platicúrticas, de manera similar ocurre en la clasificación de tamaños de muestra con un nivel de significancia del 1%.

Se debe tener en cuenta, que en este estudio se realizó un análisis respecto a la prueba **QH** limitado a mil repeticiones ($m = 1,000$), debido al alto requerimiento de memoria RAM³⁰ que es requerida para poderse aplicar en comparación con el resto de las pruebas, elevando hasta diez veces más su tiempo de ejecución. Debido a lo anterior, queda abierta la investigación para escenarios con un mayor número de repeticiones, tomando en cuenta las características de este análisis.

Cabe destacar que el uso de modelos estadísticos en el análisis actuarial donde se aplica la validación de normalidad es empleada en diversas áreas, como en la financiera mediante modelos autorregresivos condicionales heterocedásticos (ARCH), modelos estocásticos, rendimientos de activos y análisis de varianza (VaR); asimismo en los análisis actuariales se aplica este supuesto en Solvencia II al estimar la pérdida máxima posible y en la estimación de la Prima Pura mediante un modelo de regresión clásico, ente otros; además en el análisis de riesgos es fundamental el estudio de datos atípicos, debido a que son la máxima pérdida posible, por lo que se debe medir en qué medida superan las pruebas de normalidad; también puede ser aplicada en el análisis de calidad mediante modelos ANOVA para la toma de decisiones.

³⁰ Todas las entidades que maneja R se denominan objetos. R presenta los datos, resultados y funciones como objetos que pueden ser posteriormente tratados. Por lo cual R trabaja manteniendo en memoria copias de estos objetos, en lo que se denomina área de trabajo o "workspace".

BIBLIOGRAFÍA

- Aitken, A. C. (1935).** On least squares and linear combinations of observation. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Part A, 55, 42–47.
- Alizadeh, N. H. y Arghamia, N. R. (2011).** Monte Carlo comparison of seven normality tests. Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(4), 965-972.
- Althouse, L. A., Ware, W. B. y Ferron, J. M. (1998).** Detecting Departures from Normality: A Monte Carlo Simulation of A New Omnibus Test based on Moments. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.
- Amador, J. H. y Nava, L. R. (2004).** Suficiencia de reservas en seguros tradicionales a largo plazo. Tesis de Licenciatura. Universidad de las Américas Puebla.
- Anderson, T. y Darling, D. (1954).** A test of goodness of fit. Journal of the American Statistical Association, 49(258), 765–769.
- Andrei, E. A. y Bugudui, E. (2011).** Econometric Modeling of GDP Time Series. Theoretical and Applied Economics, 10(563), 91-98.
- Anscombe, F. J. y Glynn, W. J. (1983).** Distribution of kurtosis statistic b for normal statistics. Biometrika, 70, 227–234.
- Arshad, M., Rasool, M. T. y Ahmad, M. I. (2003).** Anderson Darling and Modified Anderson Darling Tests for Generalized Pareto Distribution. Pakistan Journal of Applied Sciences, 3(2), 85-88.
- Aquino, L. y Sanabria, C. (2007).** Modelo Macroeconómico de pequeña escala para el Salvador. Modelos Macroeconómicos de la Banca Central.
- Baringhaus, L., Danschke, R., y Henze, N. (1989).** Recent and classical tests for normality a comparative study. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 18, 363–379.
- Beltrán, J. B. (2012).** Cálculo del p-valor en pruebas de bondad de ajuste. Tesis de Maestro en Ciencias. Universidad Autónoma Metropolitana.
- Bhar, R., Chiarella, C. y Runggaldier, W. (2004).** Inferring the Forward Looking Equity Risk Premium from Derivative Prices. Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 8(1), 1-22.
- Biecek, P. y Ledwina, T. (2011).** Data Driven Smooth Tests. R packages version 0.10-

- Black, F. (1989).** How we came up with the option formula. *Journal of Portfolio Management*, 15(2), 4-8.
- Bonett, D. y Seier, E. (2002).** A test of normality with high uniform power. *Computational Statistics & Data Analysis*, 40, 435-445.
- Bowman, K. O. y Shenton, B. R. (1975).** Omnibus test contours for departures from normality based on $\sqrt{b_1}$ and b_2 . *Biometrika*, 52, 591-611.
- Brys G., Hubert M. y Struyf A. (2004).** A robustification of the Jarque-Bera test of normality. *J. Antoch Berlin*, 753-760.
- Chaichatschwal, R. y Budsaba, K. (2007).** A Power Comparison of Goodness-of-fit Tests for Normality Based on the Likelihood Ratio and the Non-likelihood Ratio. *Thailand Statistician*, 5, 57-68.
- Chen, L. y Shapiro, S. (1995).** An Alternative test for normality based on normalized spacings. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 53, 269-287.
- Christopoulos, D. K. y Tsionas, E. G. (2004).** Financial development and economic growth: evidence from panel unit root and cointegration tests. *Journal of Development Economics*, 73, 55-74.
- Cohen, J. (1962).** The statistical power of abnormal-social psychological research: A review. *Journal of Abnormal and Social Psychology*, 65, 145-153.
- Coin, D. y Corradetti, R. (2006).** Tests for Normality: Comparison of Powers. Department of Statistics and Applied Mathematics, University of Turin, 177-180.
- Cox, D. R. (1948).** Some problems connected with statistical inference. *Annals of Mathematical Statistics*, 29, 357-372.
- Cramer, H. (1928).** On the composition of elementary errors. *Skandinavisk Aktuarie-tidskrift*, 11, 13-74.
- D'Agostino, R. B. (1971).** An omnibus test of normality for moderate and large size samples. *Biometrika*, 58, 341-348.
- D'Agostino, R. B. y Pearson, E. S. (1973).** Testing for departures from normality. *Biometrika*, 60, 613-622.
- D'Agostino, R. B. y Stephens, M. A. (1986).** Goodness of Fit Techniques, Marcel Dekker, New York.

- D'Agostino, R. B., Belanger, A., y D'Agostino, Jr. R. B. (1990).** A suggestion for using powerful and informative tests of normality. *The American Statistician*, 44, 316-322.
- Dag, J. Steinskog, Dag, B. Tjøstheim y Iis, G. Kvamstø (2007).** Notes and Correspondence a Cautionary Note on the Use of the Kolmogorov–Smirnov Test for Normality. *American Meteorological Society*, 135, 1151-1157.
- Derya, Öztuna, Atilla, HalilElhan y Ersöz, Tüccar (2006).** Investigation of Four Different Normality Tests in Terms of Type 1 Error Rate and Power under Different Distributions. *Turk Journal of Medical Sciences*, 36(3), 171-176.
- Desmoulins-Lebeault, Francois (2004).** Semi-moments based tests of normality and the evolution of stock returns towards normality. *Economics Papers from University Paris Dauphine 123456789/2714*, Paris Dauphine University.
- Díaz, Miguel A. y Vergara, Reyna (2008).** La tasa de inflación en México, 2000-2007. *Investigación Económica*, 68 (269), 13-36.
- Dong, W. Cho y Kyung, So Im (2002).** A Test of Normality Using Geary's Skewness and Kurtosis Statistics. Mimeo, University of Central Florida.
- Dong, Lauren B. y Giles, David E. A. (2004).** An empirical likelihood ratio test for normality. Department of Economics, University of Victoria, B.C., Canada, 1-30.
- Durán, P. y Otero, L. A. (2010).** El Análisis Financiero Dinámico como herramienta para el desarrollo de modelos internos en el marco de Solvencia II. *Fundación MAFRE*, 153,1-562.
- Dufour, J. M., Farhat, A., Gardiol, L. y Khalaf, L. (1998).** Simulation based finite sample normality test in linear regressions. *Econometrics Journal*, 1,C154–C173.
- Engle, R.F. (1982).** Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007.
- Erceg-Hurn, David M. y Mirosevich, Vikki M. (2008).** Modern robust statistical methods an easy way to maximize the accuracy and power of your research. *American Psychologist*, 63(7), 591-601.
- Esteban, M. D., Castellanos, M. E., Morales, D. y Vajda, I. (2001).** Monte Carlo comparison of four normality test using different entropy estimates. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 30, 761-785.
- Fama, Eugene F. (1965).** The Behavior of Stock Market Prices. *Journal of Business*, 38(1), 34-105.

- Frain, John (2006).** Small sample power of tests of normality when the alternative is an α -stable distribution. Trinity College Dublin Department of Economics, 1-51.
- Franco, L. A. y Murillo, J. G. (2008).** Loss Distribution Approach (LDA): Metodología Actuarial Aplicada al Riesgo Operacional. Revista Ingenierías Universidad de Medellín, 7(13), 144-156.
- Gaito, John (1959).** Nonparametric Methods in Psychological Research. Psychological Reports, 5, 115-125.
- Galán, Javier F. (2008).** Revisión de la política monetaria en México a través del modelo IS-MP. Economía Informa, FE-UNAM, No. 341, 62-80.
- Gan, F. F. y Koehler, K. J. (1990).** Goodness of Fit Tests Based on P-P Probability Plots. Technometrics, 32(3), 289-303.
- Geary, R.C. (1936).** Moments of the ratio of the mean deviation to the standard deviation for normal samples. Biometrika, 28, 295–307.
- Geary, R. C. (1947).** Testing for normality. Biometrika, 34, 209-242.
- Gel, Y. R. y Gastwirth, J. L. (2008).** A robust modification of the Jarque-Bera test of normality. Economics Letters, 99, 30-32.
- González, Clara I. y Gimeno, Ricardo (2006).** Evaluación de las Metodologías para medir el Valor en Riesgo. Estabilidad Financiera, ISSN 1579-2498, No. 11, 45-60.
- González, Joaquín y Nieto, Fabio H. (2008).** Distribución de la Estadística de Jarque y Bera para la Prueba de Normalidad en una Serie Temporal Estacionaria con Datos Faltantes. Ciencia e Ingeniería ISSN, 2(4), 99-114.
- Groenewold, Nicolaas y Fraser, Patricia (2001).** Tests of asset-pricing models: how important is the iid-normal assumption?. Journal of Empirical Finance, 8(4), 427–449.
- Gross, J. (2012).** Nortest: Test of Normality. Technical Report, R CRAN Packages
- Guerra, C., Cabrera, A. y Fernández, L. (2003).** Criterios para la selección de modelos estadísticos en la investigación científica. Instituto de Ciencia Animal. La Habana, Cuba, 37(1), 3-10.
- Gujarati, N. G. (2006).** Principio de Econometría. España: McGraw-Hill/Interamericana de España.
- Hain, J. (2010).** Comparison of Common Tests for Normality. Abril 14, 2015, de Julius-Maximilians-Universität Würzburg Institut für Mathematik und Informatik Lehrstuhl für Mathematik VIII (Statistik) Sitio web: http://www.statistik-mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040800/user_upload/hain/da_hain_final.pdf

- Harrington, S. E. (1986).** Estimation and Testing for Functional Form in Pure Premium Regression Models. *A Journal of the International Actuarial Association*, 16, S31-S43.
- Hollander, M. y Wolfe, D. A. (1999).** *Nonparametric Statistical Methods*. United States of America: John Wiley & Sons.
- Hosking, J. R. M. (1990).** L-momentos: Analysis and Estimation of Distribution using Linear Combinations of Order Statistics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 52(1), 105-124.
- Huang, C. J. y Bolch, B. W. (1974).** On the testing of regression disturbances for normality. *Journal of the American Statistical Association*, 69, 330–335.
- Jarque, C. M. y Bera, A. K. (1987).** A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review*, 55, 163-172.
- Jarque, C. M. y Bera, A. K. (1980).** Efficient tests for normality homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Econometric Letters*, 6, 255-259.
- Juez, P. M. y Diez, J. V. (1997).** *Probabilidad y Estadística en Medicina*. Madrid, España: Diaz de Santos.
- Keskin, S. (2006).** Comparison of Several Univariate Normality Tests Regarding Type I Error Rate and Power of the Test in Simulation based Small Samples. *Journal of Applied Science Research*, 2(5), 296-300.
- Kolmogorov, A. N. (1933).** Sulladeterminazione empirica di una legge di distribuzione, *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari*, 4, 83-91.
- Kuiper, N. H. (1960).** Tests concerning random points on a circle. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 63 = Indag. Math.*, 22, 38-47.
- LaBrecque, J. (1977).** Goodness of fit tests based on nonlinearly in probability plots. *Technometrics*, 19(3), 293-306.
- Lilliefors, H. W. (1967).** On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American Statistical Association*, 62, 399–402.
- Lloyd, E. H. (1952).** Least-squares estimation of location and scale parameters using order statistics. *Biometrika*, 57, 677-678.
- Mandelbort, B. (1963).** The Variation Of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36(4), 394-419.
- Mardia, K. V. (1980).** Tests of univariate and multivariate normality. *Handbook of Statistics, Analysis of Variance*, Amsterdam: North Holland, 1, 279–320.

- McNemar, Q. (1960).** At random: sense and nonsense. *American Psychologist*, 15, 295-300.
- Mendes, M. y Pala, A. (2003).** Type I Error Rate and Power of Three Normality Tests. *Pakistan Journal of Information and Technology*, 2(2), 135-139.
- Mood, A. M., Graybill, F. A. y Boes, D. C. (1974).** Introduction to the theory of statistics, Nueva York, McGraw-Hill.
- Moore, D. S. (1986).** Tests of the chi-squared type. In: D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A., eds. *Goodness-of-Fit Techniques*. Marcel Dekker, New York.
- Neyman, J. (1937).** Smooth test for goodness of fit. *ScandinavianAktuar*, 20, 119–128.
- Noguchi, K., Wallace, H. W., Gel Yr, G. y Ji, M. (2009).** lawstat: An R package for biostatistics, public policy, and law Disponible en: URL:<http://CRAN.R-Project.org/package=lawstat>
- Nornadiah, R. M. y Yap, W. B. (2010).** Power comparisons of some selected normality tests. *Proceedings of the Regional Conference on Statistical Sciences 2010 (RCSS'10)*, 126-138.
- Otero, L., Durán, P., Fernández, S. y Vivel, M. (2012).** Estimating Insurer's Capital Requirements Through Markov Switching Models in the Solvency II Framework. *International Research Journal of Finance and Economics*, 86, 21-38.
- Oztuna, D., Elhan, A. H. y Tuccar, E. (2006).** Investigation of Four Different Normality Test in Terms of Type 1 Error Rate and Power under Different Distribution. *Turkish Journal of Medical Sciences*, 36(3), 171:176.
- Pagano, R. (1998).** *Estadística en las ciencias del comportamiento*. México: Internacional Thomson.
- Park, S. (1999).** A goodness of fit test for normality based on the sample entropy of order statistics. *Statistics and Probability Letters*, 44(4), 359-363.
- Pearson, E. S. y Neyman, J. (1928).** On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference: Part 1. *Biometrika*, 20A(1/2), 175-240.
- Pearson, E. S. y Neyman, J. (1933).** On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 231, 289-337.
- Pearson, K. (1900).** On the Criterion That a Given System of Deviations From the Probable In the Case of a Correlated System of Variables Is Such That It Can Be

Reasonably Supposed to Have Arisen From Random Sampling. *Philosophical Magazine Series*, 50(302), 157 - 175.

Pértegas, D. S. y Fernández, P. S. (2001). La distribución normal. *Unidad de Epidemiología Clínica y Bioestadística*, 8, 268-274.

Pria, M. C. (2001). Métodos no paramétricos. Marzo 03, 2015, de Universidad de La Habana Sitio web: <http://www.Vcl.sld.cy/75/cm/facmedic/webosalud/materiales/mnoparam.html>.

Quezada, C. (2007). Potencia Estadística, Sensibilidad y Tamaño de Efecto: ¿Un nuevo canon para la investigación?. *Onomázein*, 2(16), 159-170.

Rahman, M. M. y Govindarajulu, Z. (1997). A modification of the test of Shapiro and Wilk for normality. *Journal of Applied Statistics*, 24(2), 219-235.

Royston, J. P. (1982). Algorithm AS 181: The W Test for Normality. *Applied Statistics*, 31 (2), 176-180.

Royston, P. (1992). Approximating the Shapiro-Wilk's W test for non-normality. *Statistics and Computing*, 2, 117-119.

Salazar, J. C. y Baena, A. Z. (2009). Análisis y Diseño De Experimentos Aplicados a Estudios De Simulación. Universidad Nacional de Colombia. *Dyna*, 76(159), 249-257.

Sánchez, J. M., Cid, A. I. y Peña, M. L. (2004). Distribuciones de Siniestralidad Alternativas en Seguros De Vida y en Seguros No Vida. XIV Reunión ASEPELT - ESPAÑA, Universidad de Oviedo (Departamento de Economía Aplicada), ANALES DE ECONOMÍA APLICADA, ISBN: 84-699-2356-0 y 84-699-2357-9

Seier, E. (2002). Comparison of Tests for Univariate Normality. *InterStat Statistical Journal*, 1, 1-17.

Shapiro, S. y Francia, R. (1972). An approximate analysis of variance test for normality. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 215-216.

Shapiro, S. S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52, 591-611.

Shapiro, S. S., Wilk, M. B., y Chen, H. J. (1968). A comparative Study of Various Tests for Normality, *Journal of the American Statistical Association*, 63, 1343-1370.

Sherris, M. (1997). Actuarial Model Assumptions for Australian Inflation, Equity Returns, and Interest Rates. *Journal of Actuarial Practice*, 5(2), 1-24.

Siegel, S. y Castellan, N. J. Jr. (1988). Nonparametric statistic for the behavioural sciences. New York: McGraw-Hill Book Company.

- Smirnov, N. (1948).** Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19, 279–281.
- Stephens, M. A. (1974).** EDF Statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69, 730-737.
- Stephens, M. A. (1986).** "Tests Based on EDF Statistics" in *Goodness-of-Fit Techniques*, ed. R. B. D'Agostino and M. A. Stephens, New York: Marcel Dekker, 97-193.
- Sterling, T.D. (1959).** Publication decisions and their possible effects on inferences drawn from tests of significance or vice versa. *Journal of the American Statistical Association*, 54, 30-34.
- Student (1908).** The probable error of a mean. *Biometrika*, 6, 1-25.
- Tanweer-Ul-Islam (2008).** Normality Testing- A New Direction. *International Journal of Business and Social Science*, 2(3), 115-118.
- Terrell, G. R. (1995).** A Fisher information test for Pearson-family membership. *Proceedings of the Statistical Computing Section, Joint Statistical Meetings, Orlando, Florida*. 230-234.
- Thadewald, T. y Büning, H. (2007).** Jarque-Bera Test and its Competitors for Testing Normality - A Power Comparison. *Journal of Applied Statistics*, 34(1), 87–105.
- Trapletti, A. y Hornik, K. (2013).** tseries: Time Series Analysis and Computational Finance. R package version 0.10-32.
- Tukey, J.W. (1960).** Conclusions vs. decisions. *Technometrics*, 2, 423-433.
- Tulloch, G. (1959).** Publication decisions and tests on significance a comment. *Journal of the American Statistical Association*, 54, 593.
- Vargas, J. C. (2003).** Fundamentos para el Desarrollo de Productos de Daños. Trabajo presentado para el X Premio de investigación sobre Seguros y Fianzas. México: Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF).
- Velasco, N. D. (2009).** La Teoría del Valor Extremo en el Mercado de las Aseguradoras. Pregrado Tesis, Universidad Nacional de Colombia.
- Von Mises, R. (1931).** *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*, F. Deuticke, Leipzig, 574.
- Weisberg, S. y Bingham, C. (1975).** An Approximate Analysis of Variance Test for Non-Normality Suitable for Machine Calculation. *Technometrics*, 17, 133–134.

White, H. y MacDonald, G. M. (1980). Some large sample tests for non-normality in the linear regression model. *Journal of the American Statistical Association*, 75, 16–28.

Whitley, E. y Ball, J. (2002). Statistics review 6: Nonparametric Methods. *Critical Care*, 6(6), 509-513.

Yazici, B. y Yolacan, S. (2007). A comparison of various tests of normality. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 77(2), 175-183.

Yew-Haur, L. (1998). Fisher Information Test of Normality. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Department of Statistics. Blacksburg, VA.

Zhang, P. (1999). Omnibus test of normality using the Q statistic. *Journal of Applied Statistics*, 26, 519-528.

ANEXOS

ANEXO 1. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE SHAPIRO WILK EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.

```

Shapiro.prueba<-function(muestra,max.iter,alfa){
  library(VGAM) #librería distribuciones
#Se crea una matriz para cada una de las 23 distribuciones
  for (i in 1:23) assign(paste("distr_",i,sep=""),matrix(0, nrow=max.iter, ncol=length(muestra)))

#Se crea una hoja de datos donde se guardarán los promedios de la potencia estadística para cada una de las 23 distribuciones
  potencia<-data.frame(matrix(0, nrow=23, ncol=length(muestra)))

#Se asigna los nombres de las columnas de acuerdo a los tamaños de muestra establecidos
  colnames(potencia)<-muestra

#Se asigna los nombres de las filas de acuerdo a las distintas distribuciones
  list<-rep("a",23)
  for (i in 1:23) list[i]<-paste("distr_",i,sep="")
  rownames(potencia)<-list

#Para empezar el proceso de simulación se aplica un bucle para los diferentes tamaños de muestra establecidos
  for(j in 1:length(muestra)){
    n<-muestra[j] #Valor asignado para el tamaño de muestra conforme a su posición.
    iteracion<- 1 #Se crea esta variable entera para aplicarla como un contador.

#Posteriormente empieza un nuevo bucle, desde uno hasta el número de simulación establecido.
    while (iteracion<=max.iter){

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_1 Beta(1,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value1<- shapiro.test(rbeta(n,1,6))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value1 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_1[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_2 Beta(2,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value2<- shapiro.test(rbeta(n,2,2))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value2 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_2[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_3 Uniforme(0,20), guardando su correspondiente p-valor
      p.value3<- shapiro.test(runif(n,0,20))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value3 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_3[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_4 Uniforme(3,15), guardando su correspondiente p-valor
      p.value4<- shapiro.test(runif(n,3,15))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value4 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_4[posicion,]<- 1
      }
    }
  }
}

```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_5 Pareto(0.5,4), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value5<- shapiro.test(rpareto(n,0.5,4))$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value5 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_5[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_6 Cauchy(0,0.5), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value6<- shapiro.test(rcauchy(n,0,0.5))$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value6 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_6[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_7 Laplace(0,1), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value7<- shapiro.test(rlaplace(n,0,1))$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value7 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_7[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_8 Triangular(0.5), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value8<- shapiro.test(rtriangle(n,0.5))$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value8 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_8[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_9 Triangular(0.9), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value9<- shapiro.test(rtriangle(n,0.9))$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value9 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_9[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_10 T-Student(4), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value10<- shapiro.test(rt(n,4))$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value10 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_10[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_11 T-Student(1), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value11<- shapiro.test(rt(n,1))$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value11 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_11[posicion,j]<- 1  
}
```

```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_12 Exponencial(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value12<- shapiro.test(rexp(n,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value12 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_12[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_13 Chi-Cuadrada(7), guardando su correspondiente p-valor
p.value13<- shapiro.test(rchisq(n,7))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value13 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_13[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_14 Lognormal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value14<- shapiro.test(rlnorm(n,0,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value14 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_14[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_15 Gamma(2,9), guardando su correspondiente p-valor
p.value15<- shapiro.test(rgamma(n,2,9))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value15 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_15[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_16 Gamma(6.5,2.8), guardando su correspondiente p-valor
p.value16<- shapiro.test(rgamma(n,6.5,2.8))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value16 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_16[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_17 Rayleigh(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value17<- shapiro.test(rrayleigh(n,0.5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value17 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_17[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_18 Weibull(1,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value18<- shapiro.test(rweibull(n,1,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value18 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_18[posicion,j]<- 1
  }

```

```

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_19 Weibull(4,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value19<- shapiro.test(rweibull(n,4,5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value19 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_19[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_20 Logistica(9,3), guardando su correspondiente p-valor
p.value20<- shapiro.test(rlogis(n,9,3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value20 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_20[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_21 Cardiod(3,0.3), guardando su correspondiente p-valor
p.value21<- shapiro.test(rcard(n,3,0.3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value21 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_21[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_22 Rice(4,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value22<- shapiro.test(rrice(n,4,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value22 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_22[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Shapiro Wilk usando la distr_23 Normal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value23<- shapiro.test(rnorm(n))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value23 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_23[posicion,j]<- 1
}

iteracion<- iteracion+1
}

beta1<- sum(distr_1[,j])/length(distr_1[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(1,6)
beta2<- sum(distr_2[,j])/length(distr_2[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(2,6)
beta3<- sum(distr_3[,j])/length(distr_3[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(0,20)
beta4<- sum(distr_4[,j])/length(distr_4[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(3,15)
beta5<- sum(distr_5[,j])/length(distr_5[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Pareto(0.5,4)
beta6<- sum(distr_6[,j])/length(distr_6[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cauchy(0,0.5)
beta7<- sum(distr_7[,j])/length(distr_7[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Laplace(0,1)
beta8<- sum(distr_8[,j])/length(distr_8[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.5)
beta9<- sum(distr_9[,j])/length(distr_9[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.9)
beta10<- sum(distr_10[,j])/length(distr_10[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(4)
beta11<- sum(distr_11[,j])/length(distr_11[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(1)
beta12<- sum(distr_12[,j])/length(distr_12[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Exponencial(1)

```

```

beta13<- sum(distr_13[,j])/length(distr_13[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Chi-Cuadrada(7)
beta14<- sum(distr_14[,j])/length(distr_14[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Lognormal(0,1)
beta15<- sum(distr_15[,j])/length(distr_15[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(2,9)
beta16<- sum(distr_16[,j])/length(distr_16[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(6.5,2.8)
beta17<- sum(distr_17[,j])/length(distr_17[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rayleigh(0.5)
beta18<- sum(distr_18[,j])/length(distr_18[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(1,2)
beta19<- sum(distr_19[,j])/length(distr_19[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(4,5)
beta20<- sum(distr_20[,j])/length(distr_20[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Logística(9,3)
beta21<- sum(distr_21[,j])/length(distr_21[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cardiod(3,0.3)
beta22<- sum(distr_22[,j])/length(distr_22[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rice(4,2)
beta23<- sum(distr_23[,j])/length(distr_23[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Normal(0,1)

```

```

potencia[1,j]<- 1-beta1 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(1,6)
potencia[2,j]<- 1-beta2 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(2,6)
potencia[3,j]<- 1-beta3 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(0,20)
potencia[4,j]<- 1-beta4 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(3,15)
potencia[5,j]<- 1-beta5 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Pareto(0.5,4)
potencia[6,j]<- 1-beta6 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cauchy(0,0.5)
potencia[7,j]<- 1-beta7 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Laplace(0,1)
potencia[8,j]<- 1-beta8 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.5)
potencia[9,j]<- 1-beta9 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.9)
potencia[10,j]<- 1-beta10 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(4)
potencia[11,j]<- 1-beta11 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(1)
potencia[12,j]<- 1-beta12 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Exponencial(1)
potencia[13,j]<- 1-beta13 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Chi-Cuadrada(7)
potencia[14,j]<- 1-beta14 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Lognormal(0,1)
potencia[15,j]<- 1-beta15 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(2,9)
potencia[16,j]<- 1-beta16 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(6.5,2.8)
potencia[17,j]<- 1-beta17 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rayleigh(0.5)
potencia[18,j]<- 1-beta18 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(1,2)
potencia[19,j]<- 1-beta19 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(4,5)
potencia[20,j]<- 1-beta20 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Logística(9,3)
potencia[21,j]<- 1-beta21 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cardiod(3,0.3)
potencia[22,j]<- 1-beta22 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rice(4,2)
potencia[23,j]<- 1-beta23 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Normal(0,1)
}

```

Por último se crea un archivo en Excel donde contiene la información de la potencia estadística, para las 23 distribuciones con su correspondiente tamaño de muestra.

```
write.table (potencia, file = "potenciaSW.xls", quote = FALSE, sep = "\t", eol = "\n", dec = ".", row.names = TRUE, col.names = TRUE)
```

```
}
```

ANEXO 2. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE JARQUE-BERA ROBUSTA EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.

```

RJarque.prueba<-funcion(muestra,max.iter,alfa){
  library(lawstat) #librería rjb.test
  library(VGAM) #librería distribuciones
#Se crea una matriz para cada una de las 23 distribuciones
  for (i in 1:23) assign(paste("distr_",i,sep=""),matrix(0, nrow=max.iter, ncol=length(muestra)))

#Se crea una hoja de datos donde se guardarán los promedios de la potencia estadística para cada una de las 23 distribuciones
  potencia<-data.frame(matrix(0, nrow=23, ncol=length(muestra)))

#Se asigna los nombres de las columnas de acuerdo a los tamaños de muestra establecidos
  colnames(potencia)<-muestra

#Se asigna los nombres de las filas de acuerdo a las distintas distribuciones
  list<-rep("a",23)
  for (i in 1:23) list[i]<-paste("distr_",i,sep="")
  rownames(potencia)<-list

#Para empezar el proceso de simulación se aplica un bucle para los diferentes tamaños de muestra establecidos
  for(j in 1:length(muestra)){
    n<-muestra[j] #Valor asignado para el tamaño de muestra conforme a su posición.
    iteracion<- 1 #Se crea esta variable entera para aplicarla como un contador.

#Posteriormente empieza un nuevo bucle, desde uno hasta el número de simulación establecido.
    while (iteracion<=max.iter){

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_1 Beta(1,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value1<- rjb.test(rbeta(n,1,6))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value1 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_1[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_2 Beta(2,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value2<- rjb.test(rbeta(n,2,2))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value2 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_2[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_3 Uniforme(0,20), guardando su correspondiente p-valor
      p.value3<- rjb.test(runif(n,0,20))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value3 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_3[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_4 Uniforme(3,15), guardando su correspondiente p-valor
      p.value4<- rjb.test(runif(n,3,15))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value4 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_4[posicion,]<- 1
      }
    }
  }
}

```

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_5 Pareto(0,5,4), guardando su correspondiente p-valor
p.value5<- rjb.test(rpareto(n,0.5,4))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value5 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_5[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_6 Cauchy(0,0,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value6<- rjb.test(rcauchy(n,0,0.5))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value6 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_6[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_7 Laplace(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value7<- rjb.test(rlaplace(n,0,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value7 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_7[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_8 Triangular(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value8<- rjb.test(rtriangle(n,0.5))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value8 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_8[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_9 Triangular(0.9), guardando su correspondiente p-valor
p.value9<- rjb.test(rtriangle(n,0.9))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value9 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_9[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_10 T-Student(4), guardando su correspondiente p-valor
p.value10<- rjb.test(rt(n,4))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value10 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_10[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_11 T-Student(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value11<- rjb.test(rt(n,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value11 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_11[posicion,j]<- 1
}

```

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_12 Exponencial(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value12<- rjb.test(rexp(n,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value12 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_12[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_13 Chi-Cuadrada(7), guardando su correspondiente p-valor
p.value13<- rjb.test(rchisq(n,7))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value13 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_13[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_14 Lognormal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value14<- rjb.test(rlnorm(n,0,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value14 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_14[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_15 Gamma(2,9), guardando su correspondiente p-valor
p.value15<- rjb.test(rgamma(n,2,9))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value15 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_15[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_16 Gamma(6.5,2.8), guardando su correspondiente p-valor
p.value16<- rjb.test(rgamma(n,6.5,2.8))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value16 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_16[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_17 Rayleigh(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value17<- rjb.test(rrayleigh(n,0.5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value17 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_17[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_18 Weibull(1,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value18<- rjb.test(rweibull(n,1,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value18 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_18[posicion,j]<- 1
  }

```

```

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_19 Weibull(4,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value19<- rjb.test(rweibull(n,4,5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value19 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_19[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_20 Logistica(9,3), guardando su correspondiente p-valor
p.value20<- rjb.test(rlogis(n,9,3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value20 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_20[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_21 Cardiod(3,0.3), guardando su correspondiente p-valor
p.value21<- rjb.test(rcard(n,3,0.3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value21 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_21[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_22 Rice(4,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value22<- rjb.test(rrice(n,4,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value22 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_22[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Robusta Jarque Bera usando la distr_23 Normal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value23<- rjb.test(rnorm(n))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value23 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_23[posicion,j]<- 1
}

iteracion<- iteracion+1
}

```

```

beta1<- sum(distr_1[,j])/length(distr_1[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(1,6)
beta2<- sum(distr_2[,j])/length(distr_2[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(2,6)
beta3<- sum(distr_3[,j])/length(distr_3[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(0,20)
beta4<- sum(distr_4[,j])/length(distr_4[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(3,15)
beta5<- sum(distr_5[,j])/length(distr_5[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Pareto(0.5,4)
beta6<- sum(distr_6[,j])/length(distr_6[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cauchy(0,0.5)
beta7<- sum(distr_7[,j])/length(distr_7[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Laplace(0,1)
beta8<- sum(distr_8[,j])/length(distr_8[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.5)
beta9<- sum(distr_9[,j])/length(distr_9[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.9)
beta10<- sum(distr_10[,j])/length(distr_10[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(4)
beta11<- sum(distr_11[,j])/length(distr_11[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(1)
beta12<- sum(distr_12[,j])/length(distr_12[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Exponencial(1)

```

```

beta13<- sum(distr_13[,j])/length(distr_13[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Chi-Cuadrada(7)
beta14<- sum(distr_14[,j])/length(distr_14[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Lognormal(0,1)
beta15<- sum(distr_15[,j])/length(distr_15[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(2,9)
beta16<- sum(distr_16[,j])/length(distr_16[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(6.5,2.8)
beta17<- sum(distr_17[,j])/length(distr_17[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rayleigh(0.5)
beta18<- sum(distr_18[,j])/length(distr_18[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(1,2)
beta19<- sum(distr_19[,j])/length(distr_19[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(4,5)
beta20<- sum(distr_20[,j])/length(distr_20[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Logística(9,3)
beta21<- sum(distr_21[,j])/length(distr_21[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cardioid(3,0.3)
beta22<- sum(distr_22[,j])/length(distr_22[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rice(4,2)
beta23<- sum(distr_23[,j])/length(distr_23[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Normal(0,1)

```

```

potencia[1,j]<- 1-beta1 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(1,6)
potencia[2,j]<- 1-beta2 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(2,6)
potencia[3,j]<- 1-beta3 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(0,20)
potencia[4,j]<- 1-beta4 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(3,15)
potencia[5,j]<- 1-beta5 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Pareto(0.5,4)
potencia[6,j]<- 1-beta6 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cauchy(0,0.5)
potencia[7,j]<- 1-beta7 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Laplace(0,1)
potencia[8,j]<- 1-beta8 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.5)
potencia[9,j]<- 1-beta9 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.9)
potencia[10,j]<- 1-beta10 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(4)
potencia[11,j]<- 1-beta11 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(1)
potencia[12,j]<- 1-beta12 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Exponencial(1)
potencia[13,j]<- 1-beta13 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Chi-Cuadrada(7)
potencia[14,j]<- 1-beta14 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Lognormal(0,1)
potencia[15,j]<- 1-beta15 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(2,9)
potencia[16,j]<- 1-beta16 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(6.5,2.8)
potencia[17,j]<- 1-beta17 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rayleigh(0.5)
potencia[18,j]<- 1-beta18 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(1,2)
potencia[19,j]<- 1-beta19 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(4,5)
potencia[20,j]<- 1-beta20 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Logística(9,3)
potencia[21,j]<- 1-beta21 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cardioid(3,0.3)
potencia[22,j]<- 1-beta22 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rice(4,2)
potencia[23,j]<- 1-beta23 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Normal(0,1)
}

```

Por último se crea un archivo en Excel donde contiene la información de la potencia estadística, para las 23 distribuciones con su correspondiente tamaño de muestra.

```
write.table (potencia, file = "potenciaRJB.xls", quote = FALSE, sep = "\t", eol = "\n", dec = ".", row.names = TRUE, col.names = TRUE)
```

```
}
```

ANEXO 3. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE PEARSON EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.

```

Pearson.prueba<- function(muestra,max.iter,alfa){
  library(nortest) #librería ad.test, pearson.test
  library(VGAM) #librería distribuciones
#Se crea una matriz para cada una de las 23 distribuciones
  for (i in 1:23) assign(paste("distr_",i,sep=""),matrix(0, nrow=max.iter, ncol=length(muestra)))

#Se crea una hoja de datos donde se guardarán los promedios de la potencia estadística para cada una de las 23 distribuciones
  potencia<-data.frame(matrix(0, nrow=23, ncol=length(muestra)))

#Se asigna los nombres de las columnas de acuerdo a los tamaños de muestra establecidos
  colnames(potencia)<-muestra

#Se asigna los nombres de las filas de acuerdo a las distintas distribuciones
  list<-rep("a",23)
  for (i in 1:23) list[i]<-paste("distr_",i,sep="")
  rownames(potencia)<-list

#Para empezar el proceso de simulación se aplica un bucle para los diferentes tamaños de muestra establecidos
  for(j in 1:length(muestra)){
    n<-muestra[j] #Valor asignado para el tamaño de muestra conforme a su posición.
    iteracion<- 1 #Se crea esta variable entera para aplicarla como un contador.

#Posteriormente empieza un nuevo bucle, desde uno hasta el número de simulación establecido.
    while (iteracion<=max.iter){

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_1 Beta(1,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value1<- pearson.test(rbeta(n,1,6))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value1 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_1[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_2 Beta(2,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value2<- pearson.test(rbeta(n,2,2))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value2 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_2[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_3 Uniforme(0,20), guardando su correspondiente p-valor
      p.value3<- pearson.test(runif(n,0,20))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value3 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_3[posicion,]<- 1
      }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_4 Uniforme(3,15), guardando su correspondiente p-valor
      p.value4<- pearson.test(runif(n,3,15))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value4 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_4[posicion,]<- 1
      }
    }
  }
}

```

```

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_5 Pareto(0,5,4), guardando su correspondiente p-valor
p.value5<- pearson.test(rpareto(n,0,5,4))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value5 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_5[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_6 Cauchy(0,0,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value6<- pearson.test(rcauchy(n,0,0,5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value6 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_6[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_7 Laplace(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value7<- pearson.test(rlaplace(n,0,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value7 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_7[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_8 Triangular(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value8<- pearson.test(rtriangle(n,0,5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value8 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_8[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_9 Triangular(0.9), guardando su correspondiente p-valor
p.value9<- pearson.test(rtriangle(n,0,9))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value9 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_9[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_10 T-Student(4), guardando su correspondiente p-valor
p.value10<- pearson.test(rt(n,4))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value10 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_10[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_11 T-Student(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value11<- pearson.test(rt(n,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value11 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_11[posicion,j]<- 1
}

```

```

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_12 Exponencial(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value12<- pearson.test(rexp(n,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value12 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_12[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_13 Chi-Cuadrada(7), guardando su correspondiente p-valor
p.value13<- pearson.test(rchisq(n,7))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value13 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_13[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_14 Lognormal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value14<- pearson.test(rlnorm(n,0,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value14 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_14[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_15 Gamma(2,9), guardando su correspondiente p-valor
p.value15<- pearson.test(rgamma(n,2,9))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value15 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_15[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_16 Gamma(6.5,2.8), guardando su correspondiente p-valor
p.value16<- pearson.test(rgamma(n,6.5,2.8))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value16 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_16[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_17 Rayleigh(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value17<- pearson.test(rrayleigh(n,0.5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value17 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_17[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_18 Weibull(1,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value18<- pearson.test(rweibull(n,1,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value18 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_18[posicion,j]<- 1
  }

```

```

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_19 Weibull(4,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value19<- pearson.test(rweibull(n,4,5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value19 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_19[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_20 Logistica(9,3), guardando su correspondiente p-valor
p.value20<- pearson.test(rlogis(n,9,3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value20 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_20[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_21 Cardioid(3,0.3), guardando su correspondiente p-valor
p.value21<- pearson.test(rcard(n,3,0.3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value21 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_21[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_22 Rice(4,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value22<- pearson.test(rrice(n,4,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value22 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_22[posicion,j]<- 1
  }

#Se aplica la prueba Pearson usando la distr_23 Normal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value23<- pearson.test(rnorm(n))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
  if(p.value23 >alfa){
    posicion<- iteracion
    distr_23[posicion,j]<- 1
  }

  iteracion<- iteracion+1
}

beta1<- sum(distr_1[,j])/length(distr_1[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(1,6)
beta2<- sum(distr_2[,j])/length(distr_2[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(2,6)
beta3<- sum(distr_3[,j])/length(distr_3[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(0,20)
beta4<- sum(distr_4[,j])/length(distr_4[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(3,15)
beta5<- sum(distr_5[,j])/length(distr_5[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Pareto(0.5,4)
beta6<- sum(distr_6[,j])/length(distr_6[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cauchy(0,0.5)
beta7<- sum(distr_7[,j])/length(distr_7[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Laplace(0,1)
beta8<- sum(distr_8[,j])/length(distr_8[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.5)
beta9<- sum(distr_9[,j])/length(distr_9[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.9)
beta10<- sum(distr_10[,j])/length(distr_10[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(4)
beta11<- sum(distr_11[,j])/length(distr_11[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(1)
beta12<- sum(distr_12[,j])/length(distr_12[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Exponencial(1)

```

```

beta13<- sum(distr_13[,j])/length(distr_13[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Chi-Cuadrada(7)
beta14<- sum(distr_14[,j])/length(distr_14[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Lognormal(0,1)
beta15<- sum(distr_15[,j])/length(distr_15[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(2,9)
beta16<- sum(distr_16[,j])/length(distr_16[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(6.5,2.8)
beta17<- sum(distr_17[,j])/length(distr_17[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rayleigh(0.5)
beta18<- sum(distr_18[,j])/length(distr_18[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(1,2)
beta19<- sum(distr_19[,j])/length(distr_19[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(4,5)
beta20<- sum(distr_20[,j])/length(distr_20[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Logística(9,3)
beta21<- sum(distr_21[,j])/length(distr_21[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cardioid(3,0.3)
beta22<- sum(distr_22[,j])/length(distr_22[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rice(4,2)
beta23<- sum(distr_23[,j])/length(distr_23[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Normal(0,1)

```

```

potencia[1,j]<- 1-beta1 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(1,6)
potencia[2,j]<- 1-beta2 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(2,6)
potencia[3,j]<- 1-beta3 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(0,20)
potencia[4,j]<- 1-beta4 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(3,15)
potencia[5,j]<- 1-beta5 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Pareto(0.5,4)
potencia[6,j]<- 1-beta6 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cauchy(0,0.5)
potencia[7,j]<- 1-beta7 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Laplace(0,1)
potencia[8,j]<- 1-beta8 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.5)
potencia[9,j]<- 1-beta9 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.9)
potencia[10,j]<- 1-beta10 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(4)
potencia[11,j]<- 1-beta11 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(1)
potencia[12,j]<- 1-beta12 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Exponencial(1)
potencia[13,j]<- 1-beta13 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Chi-Cuadrada(7)
potencia[14,j]<- 1-beta14 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Lognormal(0,1)
potencia[15,j]<- 1-beta15 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(2,9)
potencia[16,j]<- 1-beta16 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(6.5,2.8)
potencia[17,j]<- 1-beta17 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rayleigh(0.5)
potencia[18,j]<- 1-beta18 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(1,2)
potencia[19,j]<- 1-beta19 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(4,5)
potencia[20,j]<- 1-beta20 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Logística(9,3)
potencia[21,j]<- 1-beta21 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cardioid(3,0.3)
potencia[22,j]<- 1-beta22 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rice(4,2)
potencia[23,j]<- 1-beta23 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Normal(0,1)
}

```

Por último se crea un archivo en Excel donde contiene la información de la potencia estadística, para las 23 distribuciones con su correspondiente tamaño de muestra.

```
write.table (potencia, file = "potenciaP.xls", quote = FALSE, sep = "\t", eol = "\n", dec = ".", row.names = TRUE, col.names = TRUE)
```

```
}
```

ANEXO 4. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE JARQUE-BERA EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.

```

Jarque.prueba<-function(muestra,max.iter,alfa){
  library(tseries) #librería jarque.bera.test
  library(VGAM) #librería distribuciones
  #Se crea una matriz para cada una de las 23 distribuciones
  for (i in 1:23) assign(paste("distr_",i,sep=""),matrix(0, nrow=max.iter, ncol=length(muestra)))

  #Se crea una hoja de datos donde se guardarán los promedios de la potencia estadística para cada una de las 23 distribuciones
  potencia<-data.frame(matrix(0, nrow=23, ncol=length(muestra)))

  #Se asigna los nombres de las columnas de acuerdo a los tamaños de muestra establecidos
  colnames(potencia)<-muestra

  #Se asigna los nombres de las filas de acuerdo a las distintas distribuciones
  list<-rep("a",23)
  for (i in 1:23) list[i]<-paste("distr_",i,sep="")
  rownames(potencia)<-list

  #Para empezar el proceso de simulación se aplica un bucle para los diferentes tamaños de muestra establecidos
  for(j in 1:length(muestra)){
    n<-muestra[j] #Valor asignado para el tamaño de muestra conforme a su posición.
    iteracion<- 1 #Se crea esta variable entera para aplicarla como un contador.

    #Posteriormente empieza un nuevo bucle, desde uno hasta el número de simulación establecido.
    while (iteracion<=max.iter){

      #Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_1 Beta(1,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value1<- jarque.bera.test(rbeta(n,1,6))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value1 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_1[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_2 Beta(2,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value2<- jarque.bera.test(rbeta(n,2,2))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value2 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_2[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_3 Uniforme(0,20), guardando su correspondiente p-valor
      p.value3<- jarque.bera.test(runif(n,0,20))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value3 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_3[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_4 Uniforme(3,15), guardando su correspondiente p-valor
      p.value4<- jarque.bera.test(runif(n,3,15))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value4 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_4[posicion,]<- 1
      }
    }
  }
}

```

```

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_5 Pareto(0.5,4), guardando su correspondiente p-valor
p.value5<- jarque.bera.test(rpareto(n,0.5,4))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value5 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_5[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_6 Cauchy(0,0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value6<- jarque.bera.test(rcauchy(n,0,0.5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value6 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_6[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_7 Laplace(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value7<- jarque.bera.test(rlaplace(n,0,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value7 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_7[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_8 Triangular(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value8<- jarque.bera.test(rtriangle(n,0.5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value8 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_8[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_9 Triangular(0.9), guardando su correspondiente p-valor
p.value9<- jarque.bera.test(rtriangle(n,0.9))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value9 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_9[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_10 T-Student(4), guardando su correspondiente p-valor
p.value10<- jarque.bera.test(rt(n,4))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value10 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_10[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_11 T-Student(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value11<- jarque.bera.test(rt(n,1))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value11 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_11[posicion,j]<- 1
}

```

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_12 Exponencial(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value12<- jarque.bera.test(rexp(n,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value12 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_12[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_13 Chi-Cuadrada(7), guardando su correspondiente p-valor
p.value13<- jarque.bera.test(rchisq(n,7))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value13 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_13[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_14 Lognormal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value14<- jarque.bera.test(rlnorm(n,0,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value14 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_14[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_15 Gamma(2,9), guardando su correspondiente p-valor
p.value15<- jarque.bera.test(rgamma(n,2,9))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value15 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_15[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_16 Gamma(6.5,2.8), guardando su correspondiente p-valor
p.value16<- jarque.bera.test(rgamma(n,6.5,2.8))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value16 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_16[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_17 Rayleigh(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value17<- jarque.bera.test(rrayleigh(n,0.5))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value17 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_17[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_18 Weibull(1,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value18<- jarque.bera.test(rweibull(n,1,2))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value18 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_18[posicion,j]<- 1
}

```

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_19 Weibull(4,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value19<- jarque.bera.test(rweibull(n,4,5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value19 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_19[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_20 Logistica(9,3), guardando su correspondiente p-valor
p.value20<- jarque.bera.test(rlogis(n,9,3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value20 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_20[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_21 Cardioid(3,0,3), guardando su correspondiente p-valor
p.value21<- jarque.bera.test(rcard(n,3,0,3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value21 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_21[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_22 Rice(4,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value22<- jarque.bera.test(rrice(n,4,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value22 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_22[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Jarque Bera usando la distr_23 Normal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value23<- jarque.bera.test(rnorm(n))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value23 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_23[posicion,j]<- 1
}

iteracion<- iteracion+1
}

beta1<- sum(distr_1[,j])/length(distr_1[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(1,6)
beta2<- sum(distr_2[,j])/length(distr_2[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(2,6)
beta3<- sum(distr_3[,j])/length(distr_3[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(0,20)
beta4<- sum(distr_4[,j])/length(distr_4[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(3,15)
beta5<- sum(distr_5[,j])/length(distr_5[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Pareto(0.5,4)
beta6<- sum(distr_6[,j])/length(distr_6[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cauchy(0,0.5)
beta7<- sum(distr_7[,j])/length(distr_7[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Laplace(0,1)
beta8<- sum(distr_8[,j])/length(distr_8[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.5)
beta9<- sum(distr_9[,j])/length(distr_9[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.9)
beta10<- sum(distr_10[,j])/length(distr_10[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(4)
beta11<- sum(distr_11[,j])/length(distr_11[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(1)
beta12<- sum(distr_12[,j])/length(distr_12[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Exponencial(1)

```

```

beta13<- sum(distr_13[,j])/length(distr_13[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Chi-Cuadrada(7)
beta14<- sum(distr_14[,j])/length(distr_14[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Lognormal(0,1)
beta15<- sum(distr_15[,j])/length(distr_15[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(2,9)
beta16<- sum(distr_16[,j])/length(distr_16[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(6.5,2.8)
beta17<- sum(distr_17[,j])/length(distr_17[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rayleigh(0.5)
beta18<- sum(distr_18[,j])/length(distr_18[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(1,2)
beta19<- sum(distr_19[,j])/length(distr_19[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(4,5)
beta20<- sum(distr_20[,j])/length(distr_20[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Logística(9,3)
beta21<- sum(distr_21[,j])/length(distr_21[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cardioid(3,0.3)
beta22<- sum(distr_22[,j])/length(distr_22[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rice(4,2)
beta23<- sum(distr_23[,j])/length(distr_23[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Normal(0,1)

```

```

potencia[1,j]<- 1-beta1 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(1,6)
potencia[2,j]<- 1-beta2 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(2,6)
potencia[3,j]<- 1-beta3 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(0,20)
potencia[4,j]<- 1-beta4 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(3,15)
potencia[5,j]<- 1-beta5 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Pareto(0.5,4)
potencia[6,j]<- 1-beta6 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cauchy(0,0.5)
potencia[7,j]<- 1-beta7 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Laplace(0,1)
potencia[8,j]<- 1-beta8 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.5)
potencia[9,j]<- 1-beta9 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.9)
potencia[10,j]<- 1-beta10 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(4)
potencia[11,j]<- 1-beta11 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(1)
potencia[12,j]<- 1-beta12 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Exponencial(1)
potencia[13,j]<- 1-beta13 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Chi-Cuadrada(7)
potencia[14,j]<- 1-beta14 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Lognormal(0,1)
potencia[15,j]<- 1-beta15 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(2,9)
potencia[16,j]<- 1-beta16 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(6.5,2.8)
potencia[17,j]<- 1-beta17 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rayleigh(0.5)
potencia[18,j]<- 1-beta18 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(1,2)
potencia[19,j]<- 1-beta19 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(4,5)
potencia[20,j]<- 1-beta20 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Logística(9,3)
potencia[21,j]<- 1-beta21 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cardioid(3,0.3)
potencia[22,j]<- 1-beta22 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rice(4,2)
potencia[23,j]<- 1-beta23 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Normal(0,1)
}

```

Por último se crea un archivo en Excel donde contiene la información de la potencia estadística, para las 23 distribuciones con su correspondiente tamaño de muestra.

```

write.table (potencia, file = "potenciaJB.xls", quote = FALSE, sep = "\t", eol = "\n", dec = ".", row.names = TRUE, col.names = TRUE)
}

```

ANEXO 5. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE CHEN-SHAPIRO EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.

```

QH.prueba<- function(muestra,max.iter,alfa){
  library(ddst) #librería ddst.norm.test
  library(VGAM) #librería distribuciones
  #Se crea una matriz para cada una de las 23 distribuciones
  for (i in 1:23) assign(paste("distr_",i,sep=""),matrix(0, nrow=max.iter, ncol=length(muestra)))

  #Se crea una hoja de datos donde se guardarán los promedios de la potencia estadística para cada una de las 23 distribuciones
  potencia<-data.frame(matrix(0, nrow=23, ncol=length(muestra)))

  #Se asigna los nombres de las columnas de acuerdo a los tamaños de muestra establecidos
  colnames(potencia)<-muestra

  #Se asigna los nombres de las filas de acuerdo a las distintas distribuciones
  list<-rep("a",23)
  for (i in 1:23) list[i]<-paste("distr_",i,sep="")
  rownames(potencia)<-list

  #Para empezar el proceso de simulación se aplica un bucle para los diferentes tamaños de muestra establecidos
  for(j in 1:length(muestra)){
    n<-muestra[j] #Valor asignado para el tamaño de muestra conforme a su posición.
    iteracion<- 1 #Se crea esta variable entera para aplicarla como un contador.

    #Posteriormente empieza un nuevo bucle, desde uno hasta el número de simulación establecido.
    while (iteracion<=max.iter){

      #Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_1 Beta(1,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value1<- ddst.norm.test(rbeta(n,1,6),compute.p=TRUE)$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value1 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_1[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_2 Beta(2,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value2<- ddst.norm.test(rbeta(n,2,2),compute.p=TRUE)$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value2 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_2[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_3 Uniforme(0,20), guardando su correspondiente p-valor
      p.value3<- ddst.norm.test(runif(n,0,20),compute.p=TRUE)$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value3 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_3[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_4 Uniforme(3,15), guardando su correspondiente p-valor
      p.value4<- ddst.norm.test(runif(n,3,15),compute.p=TRUE)$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value4 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_4[posicion,]<- 1
      }
    }
  }
}

```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_5 Pareto(0.5,4), guardando su correspondiente p-valor
p.value5<- ddst.norm.test(rpareto(n,0.5,4),compute.p=TRUE)\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value5 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_5[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_6 Cauchy(0,0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value6<- ddst.norm.test(rcauchy(n,0,0.5),compute.p=TRUE)\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value6 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_6[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_7 Laplace(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value7<- ddst.norm.test(rlaplace(n,0,1),compute.p=TRUE)\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value7 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_7[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_8 Triangular(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value8<- ddst.norm.test(rtriangle(n,0.5),compute.p=TRUE)\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value8 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_8[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_9 Triangular(0.9), guardando su correspondiente p-valor
p.value9<- ddst.norm.test(rtriangle(n,0.9),compute.p=TRUE)\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value9 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_9[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_10 T-Student(4), guardando su correspondiente p-valor
p.value10<- ddst.norm.test(rt(n,4),compute.p=TRUE)\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value10 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_10[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_11 T-Student(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value11<- ddst.norm.test(rt(n,1),compute.p=TRUE)\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value11 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_11[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_12 Exponencial(1), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value12<- ddst.norm.test(rexp(n,1),compute.p=TRUE)$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value12 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_12[posicion,j]<- 1
}
```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_13 Chi-Cuadrada(7), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value13<- ddst.norm.test(rchisq(n,7),compute.p=TRUE)$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value13 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_13[posicion,j]<- 1
}
```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_14 Lognormal(0,1), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value14<- ddst.norm.test(rlnorm(n,0,1),compute.p=TRUE)$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value14 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_14[posicion,j]<- 1
}
```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_15 Gamma(2,9), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value15<- ddst.norm.test(rgamma(n,2,9),compute.p=TRUE)$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value15 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_15[posicion,j]<- 1
}
```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_16 Gamma(6.5,2.8), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value16<- ddst.norm.test(rgamma(n,6.5,2.8),compute.p=TRUE)$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value16 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_16[posicion,j]<- 1
}
```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_17 Rayleigh(0.5), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value17<- ddst.norm.test(rrayleigh(n,0.5),compute.p=TRUE)$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value17 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_17[posicion,j]<- 1
}
```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_18 Weibull(1,2), guardando su correspondiente p-valor

```
p.value18<- ddst.norm.test(rweibull(n,1,2),compute.p=TRUE)$p.value
```

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value18 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_18[posicion,j]<- 1
}
```

```

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_19 Weibull(4,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value19<- ddst.norm.test(rweibull(n,4,5),compute.p=TRUE)$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value19 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_19[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_20 Logistica(9,3), guardando su correspondiente p-valor
p.value20<- ddst.norm.test(rlogis(n,9,3),compute.p=TRUE)$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value20 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_20[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_21 Cardioid(3,0.3), guardando su correspondiente p-valor
p.value21<- ddst.norm.test(rcard(n,3,0.3),compute.p=TRUE)$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value21 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_21[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_22 Rice(4,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value22<- ddst.norm.test(rrice(n,4,2),compute.p=TRUE)$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value22 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_22[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Chen Shapiro usando la distr_23 Normal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value23<- ddst.norm.test(rnorm(n),compute.p=TRUE)$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value23 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_23[posicion,j]<- 1
}

iteracion<- iteracion+1
}

beta1<- sum(distr_1[,j])/length(distr_1[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(1,6)
beta2<- sum(distr_2[,j])/length(distr_2[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(2,6)
beta3<- sum(distr_3[,j])/length(distr_3[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(0,20)
beta4<- sum(distr_4[,j])/length(distr_4[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(3,15)
beta5<- sum(distr_5[,j])/length(distr_5[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Pareto(0.5,4)
beta6<- sum(distr_6[,j])/length(distr_6[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cauchy(0,0.5)
beta7<- sum(distr_7[,j])/length(distr_7[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Laplace(0,1)
beta8<- sum(distr_8[,j])/length(distr_8[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.5)
beta9<- sum(distr_9[,j])/length(distr_9[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.9)
beta10<- sum(distr_10[,j])/length(distr_10[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(4)
beta11<- sum(distr_11[,j])/length(distr_11[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(1)
beta12<- sum(distr_12[,j])/length(distr_12[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Exponencial(1)

```

```

beta13<- sum(distr_13[,j])/length(distr_13[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Chi-Cuadrada(7)
beta14<- sum(distr_14[,j])/length(distr_14[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Lognormal(0,1)
beta15<- sum(distr_15[,j])/length(distr_15[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(2,9)
beta16<- sum(distr_16[,j])/length(distr_16[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(6.5,2.8)
beta17<- sum(distr_17[,j])/length(distr_17[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rayleigh(0.5)
beta18<- sum(distr_18[,j])/length(distr_18[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(1,2)
beta19<- sum(distr_19[,j])/length(distr_19[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(4,5)
beta20<- sum(distr_20[,j])/length(distr_20[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Logística(9,3)
beta21<- sum(distr_21[,j])/length(distr_21[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cardioid(3,0.3)
beta22<- sum(distr_22[,j])/length(distr_22[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rice(4,2)
beta23<- sum(distr_23[,j])/length(distr_23[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Normal(0,1)

```

```

potencia[1,j]<- 1-beta1 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(1,6)
potencia[2,j]<- 1-beta2 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(2,6)
potencia[3,j]<- 1-beta3 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(0,20)
potencia[4,j]<- 1-beta4 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(3,15)
potencia[5,j]<- 1-beta5 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Pareto(0.5,4)
potencia[6,j]<- 1-beta6 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cauchy(0,0.5)
potencia[7,j]<- 1-beta7 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Laplace(0,1)
potencia[8,j]<- 1-beta8 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.5)
potencia[9,j]<- 1-beta9 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.9)
potencia[10,j]<- 1-beta10 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(4)
potencia[11,j]<- 1-beta11 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(1)
potencia[12,j]<- 1-beta12 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Exponencial(1)
potencia[13,j]<- 1-beta13 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Chi-Cuadrada(7)
potencia[14,j]<- 1-beta14 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Lognormal(0,1)
potencia[15,j]<- 1-beta15 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(2,9)
potencia[16,j]<- 1-beta16 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(6.5,2.8)
potencia[17,j]<- 1-beta17 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rayleigh(0.5)
potencia[18,j]<- 1-beta18 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(1,2)
potencia[19,j]<- 1-beta19 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(4,5)
potencia[20,j]<- 1-beta20 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Logística(9,3)
potencia[21,j]<- 1-beta21 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cardioid(3,0.3)
potencia[22,j]<- 1-beta22 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rice(4,2)
potencia[23,j]<- 1-beta23 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Normal(0,1)
}

```

Por último se crea un archivo en Excel donde contiene la información de la potencia estadística, para las 23 distribuciones con su correspondiente tamaño de muestra.

```
write.table (potencia, file = "potenciaQH.xls", quote = FALSE, sep = "\t", eol = "\n", dec = ".", row.names = TRUE, col.names = TRUE)
```

```
}
```

ANEXO 6. CÓDIGO EN R PROJECT PARA LA APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE BONDAD DE AJUSTE ANDERSON-DARLING EN EL PROCESO DE SIMULACIÓN.

```

Anderson.prueba <-function(muestra,max.iter,alfa){
  library(nortest) #librería ad.test, pearson.test
  library(VGAM) #librería distribuciones
  #Se crea una matriz para cada una de las 23 distribuciones
  for (i in 1:23) assign(paste("distr_",i,sep=""),matrix(0, nrow=max.iter, ncol=length(muestra)))

  #Se crea una hoja de datos donde se guardarán los promedios de la potencia estadística para cada una de las 23 distribuciones
  potencia<-data.frame(matrix(0, nrow=23, ncol=length(muestra)))

  #Se asigna los nombres de las columnas de acuerdo a los tamaños de muestra establecidos
  colnames(potencia)<-muestra

  #Se asigna los nombres de las filas de acuerdo a las distintas distribuciones
  list<-rep("a",23)
  for (i in 1:23) list[i]<-paste("distr_",i,sep="")
  rownames(potencia)<-list

  #Para empezar el proceso de simulación se aplica un bucle para los diferentes tamaños de muestra establecidos
  for(j in 1:length(muestra)){
    n<-muestra[j] #Valor asignado para el tamaño de muestra conforme a su posición.
    iteracion<- 1 #Se crea esta variable entera para aplicarla como un contador.

    #Posteriormente empieza un nuevo bucle, desde uno hasta el número de simulación establecido.
    while (iteracion<=max.iter){

      #Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_1 Beta(1,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value1<- ad.test(rbeta(n,1,6))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value1 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_1[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_2 Beta(2,6), guardando su correspondiente p-valor
      p.value2<- ad.test(rbeta(n,2,2))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value2 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_2[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_3 Uniforme(0,20), guardando su correspondiente p-valor
      p.value3<- ad.test(runif(n,0,20))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value3 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_3[posicion,]<- 1
      }

      #Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_4 Uniforme(3,15), guardando su correspondiente p-valor
      p.value4<- ad.test(runif(n,3,15))$p.value
      #Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
      if(p.value4 >alfa){
        posicion<- iteracion
        distr_4[posicion,]<- 1
      }
    }
  }
}

```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_5 Pareto(0.5,4), guardando su correspondiente p-valor
p.value5<- ad.test(rpareto(n,0.5,4))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value5 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_5[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_6 Cauchy(0,0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value6<- ad.test(rcauchy(n,0,0.5))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value6 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_6[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_7 Laplace(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value7<- ad.test(rlaplace(n,0,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value7 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_7[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_8 Triangular(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value8<- ad.test(rtriangle(n,0.5))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value8 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_8[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_9 Triangular(0.9), guardando su correspondiente p-valor
p.value9<- ad.test(rtriangle(n,0.9))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value9 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_9[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_10 T-Student(4), guardando su correspondiente p-valor
p.value10<- ad.test(rt(n,4))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value10 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_10[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_11 T-Student(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value11<- ad.test(rt(n,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.

```
if(p.value11 >alfa){  
  posicion<- iteracion  
  distr_11[posicion,j]<- 1  
}
```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_12 Exponencial(1), guardando su correspondiente p-valor
p.value12<- ad.test(rexp(n,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value12 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_12[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_13 Chi-Cuadrada(7), guardando su correspondiente p-valor
p.value13<- ad.test(rchisq(n,7))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value13 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_13[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_14 Lognormal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value14<- ad.test(rlnorm(n,0,1))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value14 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_14[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_15 Gamma(2,9), guardando su correspondiente p-valor
p.value15<- ad.test(rgamma(n,2,9))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value15 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_15[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_16 Gamma(6.5,2.8), guardando su correspondiente p-valor
p.value16<- ad.test(rgamma(n,6.5,2.8))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value16 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_16[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_17 Rayleigh(0.5), guardando su correspondiente p-valor
p.value17<- ad.test(rrayleigh(n,0.5))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value17 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_17[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_18 Weibull(1,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value18<- ad.test(rweibull(n,1,2))\$p.value

#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value18 >alfa){
 posicion<- iteracion
 distr_18[posicion,j]<- 1
}

```

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_19 Weibull(4,5), guardando su correspondiente p-valor
p.value19<- ad.test(rweibull(n,4,5))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value19 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_19[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_20 Logistica(9,3), guardando su correspondiente p-valor
p.value20<- ad.test(rlogis(n,9,3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value20 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_20[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_21 Cardioid(3,0.3), guardando su correspondiente p-valor
p.value21<- ad.test(rcard(n,3,0.3))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value21 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_21[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_22 Rice(4,2), guardando su correspondiente p-valor
p.value22<- ad.test(rrice(n,4,2))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value22 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_22[posicion,j]<- 1
}

#Se aplica la prueba Anderson Darling usando la distr_23 Normal(0,1), guardando su correspondiente p-valor
p.value23<- ad.test(rnorm(n))$p.value
#Luego se emplea una condición para asignar el valor de 1 en caso de que se acepte la hipótesis nula.
if(p.value23 >alfa){
  posicion<- iteracion
  distr_23[posicion,j]<- 1
}

iteracion<- iteracion+1
}

```

```

beta1<- sum(distr_1[,j])/length(distr_1[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(1,6)
beta2<- sum(distr_2[,j])/length(distr_2[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Beta(2,6)
beta3<- sum(distr_3[,j])/length(distr_3[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(0,20)
beta4<- sum(distr_4[,j])/length(distr_4[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Uniforme(3,15)
beta5<- sum(distr_5[,j])/length(distr_5[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Pareto(0.5,4)
beta6<- sum(distr_6[,j])/length(distr_6[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cauchy(0,0.5)
beta7<- sum(distr_7[,j])/length(distr_7[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Laplace(0,1)
beta8<- sum(distr_8[,j])/length(distr_8[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.5)
beta9<- sum(distr_9[,j])/length(distr_9[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Triangular(0.9)
beta10<- sum(distr_10[,j])/length(distr_10[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(4)
beta11<- sum(distr_11[,j])/length(distr_11[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución T-Student(1)
beta12<- sum(distr_12[,j])/length(distr_12[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Exponencial(1)

```

```

beta13<- sum(distr_13[,j])/length(distr_13[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Chi-Cuadrada(7)
beta14<- sum(distr_14[,j])/length(distr_14[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Lognormal(0,1)
beta15<- sum(distr_15[,j])/length(distr_15[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(2,9)
beta16<- sum(distr_16[,j])/length(distr_16[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Gamma(6.5,2.8)
beta17<- sum(distr_17[,j])/length(distr_17[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rayleigh(0.5)
beta18<- sum(distr_18[,j])/length(distr_18[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(1,2)
beta19<- sum(distr_19[,j])/length(distr_19[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Weibull(4,5)
beta20<- sum(distr_20[,j])/length(distr_20[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Logística(9,3)
beta21<- sum(distr_21[,j])/length(distr_21[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Cardiod(3,0.3)
beta22<- sum(distr_22[,j])/length(distr_22[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Rice(4,2)
beta23<- sum(distr_23[,j])/length(distr_23[,j]) #Se asigna el promedio de Beta para la distribución Normal(0,1)

```

```

potencia[1,j]<- 1-beta1 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(1,6)
potencia[2,j]<- 1-beta2 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Beta(2,6)
potencia[3,j]<- 1-beta3 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(0,20)
potencia[4,j]<- 1-beta4 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Uniforme(3,15)
potencia[5,j]<- 1-beta5 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Pareto(0.5,4)
potencia[6,j]<- 1-beta6 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cauchy(0,0.5)
potencia[7,j]<- 1-beta7 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Laplace(0,1)
potencia[8,j]<- 1-beta8 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.5)
potencia[9,j]<- 1-beta9 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Triangular(0.9)
potencia[10,j]<- 1-beta10 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(4)
potencia[11,j]<- 1-beta11 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución T-Student(1)
potencia[12,j]<- 1-beta12 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Exponencial(1)
potencia[13,j]<- 1-beta13 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Chi-Cuadrada(7)
potencia[14,j]<- 1-beta14 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Lognormal(0,1)
potencia[15,j]<- 1-beta15 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(2,9)
potencia[16,j]<- 1-beta16 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Gamma(6.5,2.8)
potencia[17,j]<- 1-beta17 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rayleigh(0.5)
potencia[18,j]<- 1-beta18 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(1,2)
potencia[19,j]<- 1-beta19 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Weibull(4,5)
potencia[20,j]<- 1-beta20 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Logística(9,3)
potencia[21,j]<- 1-beta21 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Cardiod(3,0.3)
potencia[22,j]<- 1-beta22 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Rice(4,2)
potencia[23,j]<- 1-beta23 #Se obtiene la potencia estadística para la distribución Normal(0,1)
}

```

Por último se crea un archivo en Excel donde contiene la información de la potencia estadística, para las 23 distribuciones con su correspondiente tamaño de muestra.

```
write.table (potencia, file = "potenciaAD.xls", quote = FALSE, sep = "\t", eol = "\n", dec = ".", row.names = TRUE, col.names = TRUE)
```

```
}
```

ANEXO 7. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA LA CLASIFICACIÓN DE DISTRIBUCIONES ALTERNATIVAS, CON NIVELES DE SIGNIFICANCIA DEL 1% Y 10%.

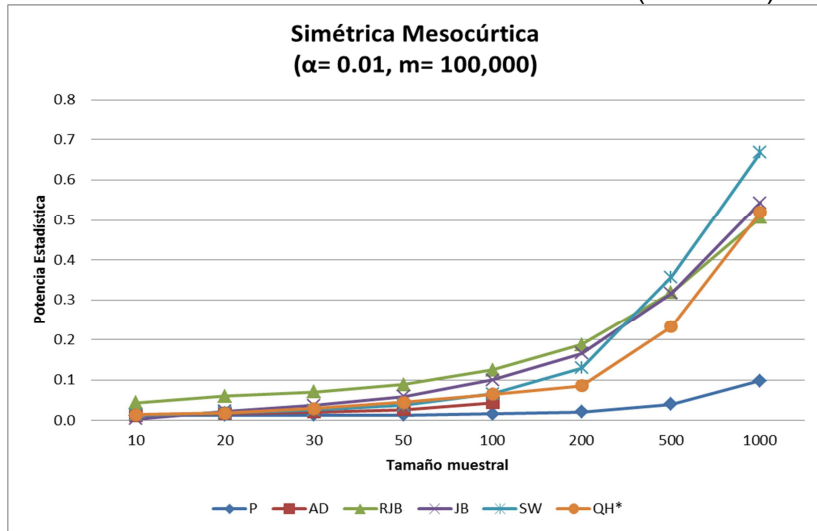
Tabla 11. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad ($\alpha = 0.01$).

Clasificación Distribuciones	n	P	AD	RJB	JB	SW	QH*
Simétrica Mesocúrtica	10	0.01296	0.01284	0.04402	0.00402	0.01412	0.01467
	20	0.01378	0.01750	0.06035	0.02351	0.01958	0.01867
	30	0.01328	0.02092	0.07049	0.03782	0.02606	0.03033
	50	0.01377	0.02723	0.08862	0.05915	0.03759	0.04467
	100	0.01656	0.04369	0.12513	0.09984	0.06627	0.06467
	200	0.02133	NA	0.18799	0.16557	0.12980	0.08567
	500	0.04020	NA	0.31844	0.31644	0.35649	0.23200
	1000	0.09800	NA	0.50592	0.54370	0.66827	0.52000
Simétrica Leptocúrtica	10	0.19575	0.27030	0.37577	0.18731	0.26868	0.25850
	20	0.36752	0.46670	0.59081	0.46012	0.46339	0.47900
	30	0.45753	0.55841	0.68360	0.58628	0.56588	0.57125
	50	0.53372	0.64746	0.77821	0.70100	0.66458	0.68225
	100	0.60434	NA	0.89790	0.84142	0.80515	0.83200
	200	0.71752	NA	0.97988	0.95914	0.96451	0.96525
	500	0.91936	NA	0.99985	0.99971	0.99935	0.99925
	1000	0.99348	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
Simétrica Platicúrtica	10	0.01842	0.00963	0.01178	0.00060	0.00884	0.01320
	20	0.02009	0.02455	0.00280	0.00044	0.01811	0.01100
	30	0.02517	0.05344	0.00081	0.00013	0.05130	0.01220
	50	0.04764	0.11717	0.00015	0.00003	0.14892	0.05060
	100	0.11977	NA	0.00002	0.00084	0.41242	0.33000
	200	0.34400	NA	0.18697	0.39564	0.73523	0.62380
	500	0.51472	NA	0.62872	0.77975	0.95749	0.76280
	1000	0.67103	NA	0.92901	0.99576	0.99998	0.87520
Asimétrica Leptocúrtica	10	0.10389	0.16378	0.20981	0.08108	0.18232	0.13167
	20	0.29113	0.39537	0.39577	0.28027	0.43240	0.30600
	30	0.42540	0.55007	0.51817	0.43528	0.60012	0.43978
	50	0.56090	0.70322	0.66822	0.63087	0.75139	0.62367
	100	0.71124	NA	0.83310	0.83011	0.89292	0.82356
	200	0.82372	NA	0.94689	0.95412	0.98822	0.96000
	500	0.97813	NA	0.99995	0.99997	1.00000	0.99989
	1000	0.99995	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
Asimétrica Platicúrtica	10	0.03323	0.02672	0.03937	0.00446	0.02767	0.02200
	20	0.06674	0.07590	0.03757	0.01013	0.07007	0.02900
	30	0.10540	0.15464	0.03595	0.01192	0.15478	0.03900
	50	0.23573	0.37887	0.04114	0.01908	0.42235	0.11400
	100	0.63867	0.85105	0.09616	0.13156	0.93122	0.62400
	200	0.97671	0.99911	0.78159	0.95954	1.00000	0.99100
	500	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

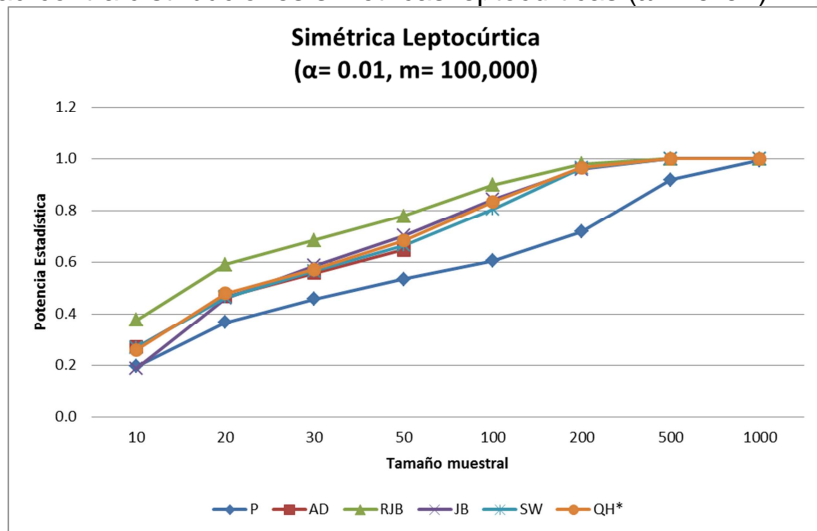
Fuente: Elaboración propia.

Figura 68. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas mesocúrticas ($\alpha = 0.01$).



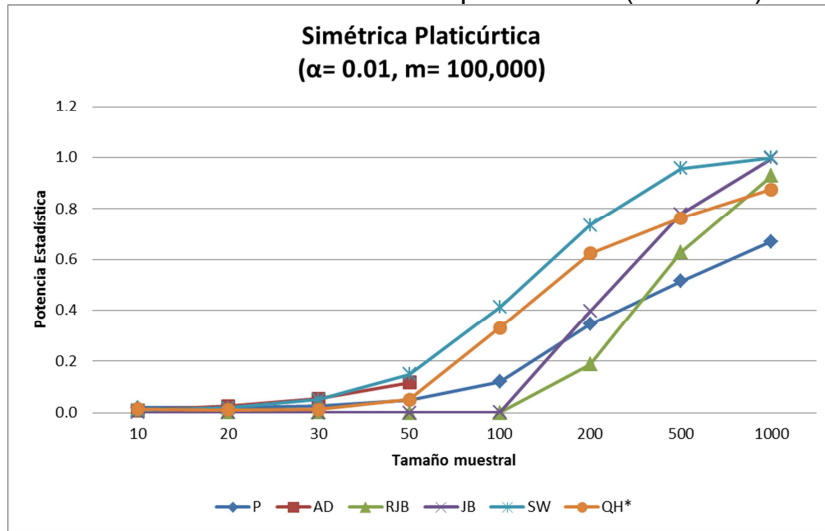
Fuente: Elaboración propia.

Figura 69. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.01$).



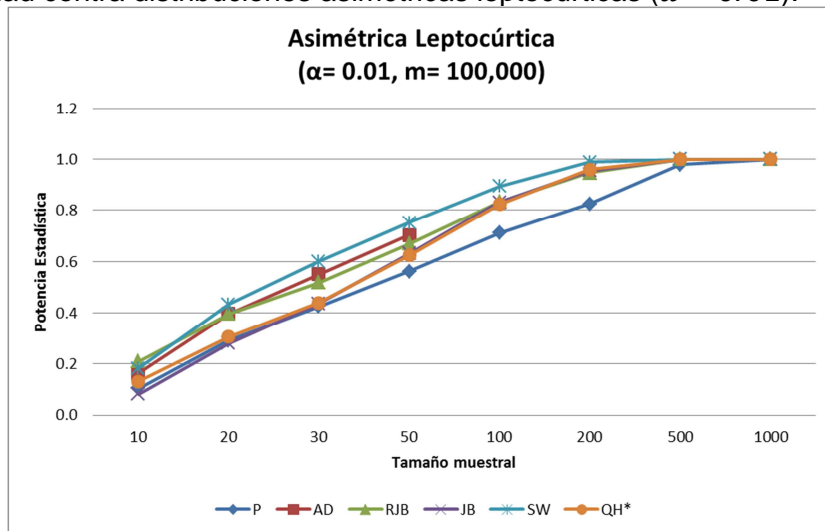
Fuente: Elaboración propia.

Figura 70. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas platicúrticas ($\alpha = 0.01$).



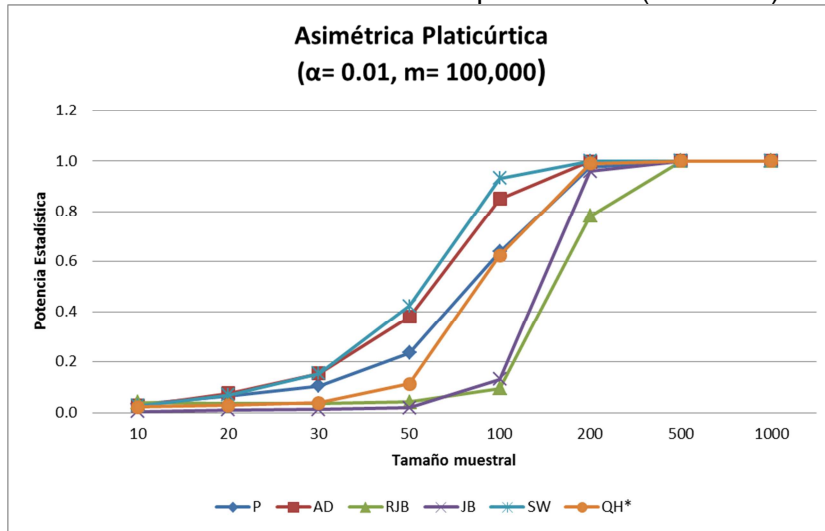
Fuente: Elaboración propia.

Figura 71. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.01$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 72. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas platicúrticas ($\alpha = 0.01$).



Fuente: Elaboración propia.

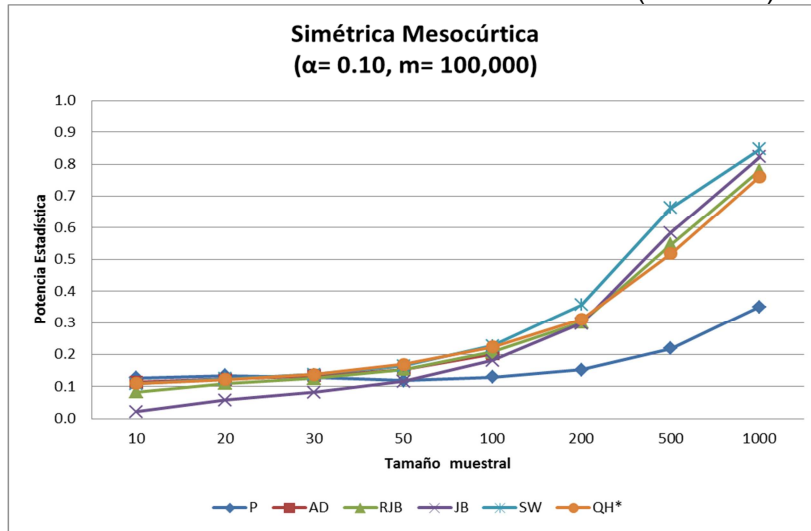
Tabla 12. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad ($\alpha = 0.10$).

Clasificación Distribuciones	n	P	AD	RJB	JB	SW	QH*
Simétrica Mesocúrtica	10	0.12667	0.11332	0.08351	0.02228	0.10833	0.10967
	20	0.13440	0.12352	0.10982	0.05840	0.12460	0.12200
	30	0.12934	0.13353	0.12583	0.08179	0.13792	0.13800
	50	0.11835	0.15388	0.15337	0.11596	0.16467	0.16933
	100	0.12908	0.20163	0.20751	0.18156	0.22740	0.22300
	200	0.15196	NA	0.30030	0.29692	0.35578	0.31100
	500	0.21870	NA	0.54671	0.58482	0.66319	0.51833
	1000	0.35043	NA	0.78052	0.82223	0.84704	0.76133
Simétrica Leptocúrtica	10	0.38063	0.45167	0.44864	0.28159	0.43340	0.44800
	20	0.54936	0.62426	0.66008	0.55272	0.61325	0.63175
	30	0.61148	0.70314	0.75006	0.66910	0.69791	0.72625
	50	0.66203	0.78989	0.84000	0.77969	0.78908	0.80800
	100	0.75079	NA	0.94191	0.90597	0.90807	0.91200
	200	0.86541	NA	0.99179	0.98422	0.98706	0.98300
	500	0.97731	NA	0.99998	0.99994	0.99991	1.00000
	1000	0.99931	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
Simétrica Platicúrtica	10	0.12073	0.11818	0.03053	0.00548	0.12164	0.10160
	20	0.14522	0.17597	0.01259	0.00309	0.20172	0.15820
	30	0.15604	0.24745	0.00622	0.00166	0.30222	0.22400
	50	0.18623	0.38259	0.00244	0.01302	0.45996	0.37740
	100	0.31613	NA	0.20093	0.40444	0.64282	0.48240
	200	0.50243	NA	0.56286	0.69987	0.86836	0.70820
	500	0.66344	NA	0.91439	0.98600	0.99898	0.82380
	1000	0.81777	NA	0.99748	0.99999	1.00000	0.90200
Asimétrica Leptocúrtica	10	0.36358	0.41790	0.28782	0.15837	0.43436	0.39222
	20	0.54580	0.64713	0.50515	0.43079	0.68770	0.63589
	30	0.64035	0.75189	0.63717	0.60504	0.79273	0.75367
	50	0.73269	0.84676	0.78449	0.78678	0.88554	0.86022
	100	0.83003	NA	0.92102	0.93287	0.97229	0.96144
	200	0.92485	NA	0.99422	0.99629	0.99909	0.99756
	500	0.99721	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1000	1.00000	NA	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
Asimétrica Platicúrtica	10	0.18053	0.20199	0.07716	0.02277	0.21199	0.19900
	20	0.25709	0.36347	0.08919	0.04657	0.41293	0.35400
	30	0.33771	0.52451	0.10804	0.07556	0.61019	0.46400
	50	0.52463	0.78041	0.17192	0.22380	0.87469	0.70700
	100	0.87218	0.98542	0.74155	0.91238	0.99814	0.98000
	200	0.99767	0.99999	0.99993	0.99998	1.00000	1.00000
	500	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

*Para la prueba de Normalidad Chen y Shapiro (QH) se realizaron 1,000 repeticiones.

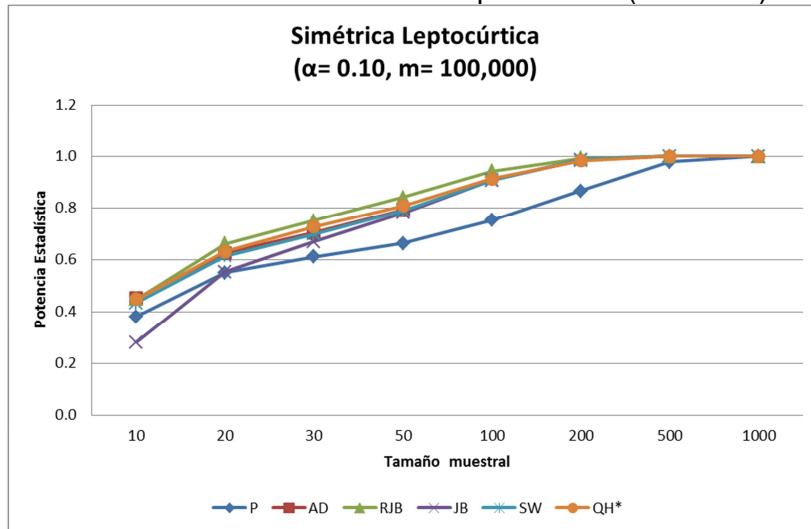
Fuente: Elaboración propia.

Figura 73. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas mesocúrticas ($\alpha = 0.10$).



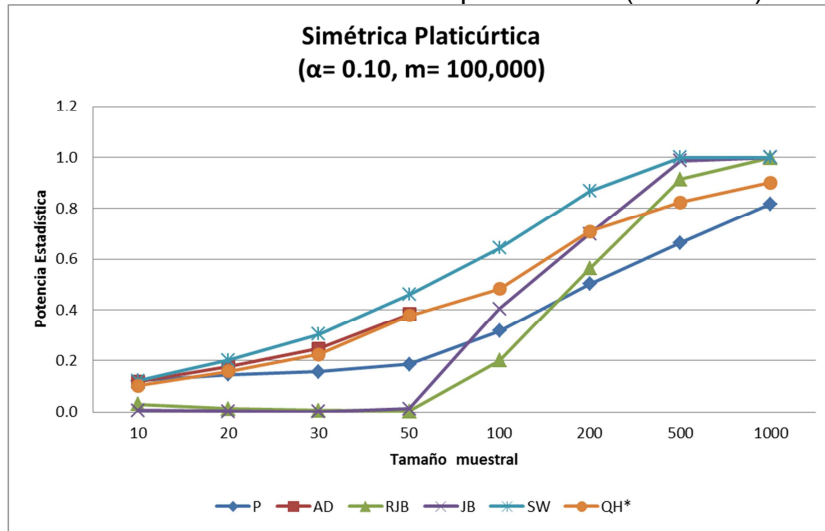
Fuente: Elaboración propia.

Figura 74. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.10$).



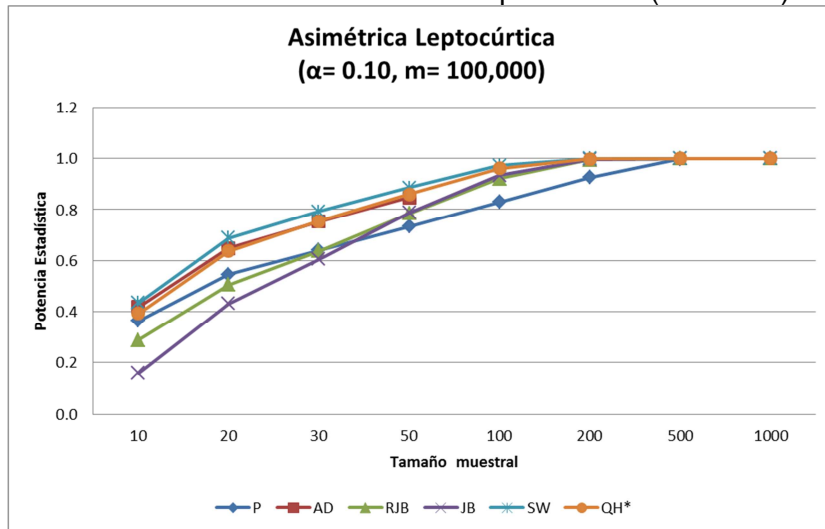
Fuente: Elaboración propia.

Figura 75. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones simétricas platicúrticas ($\alpha = 0.10$).



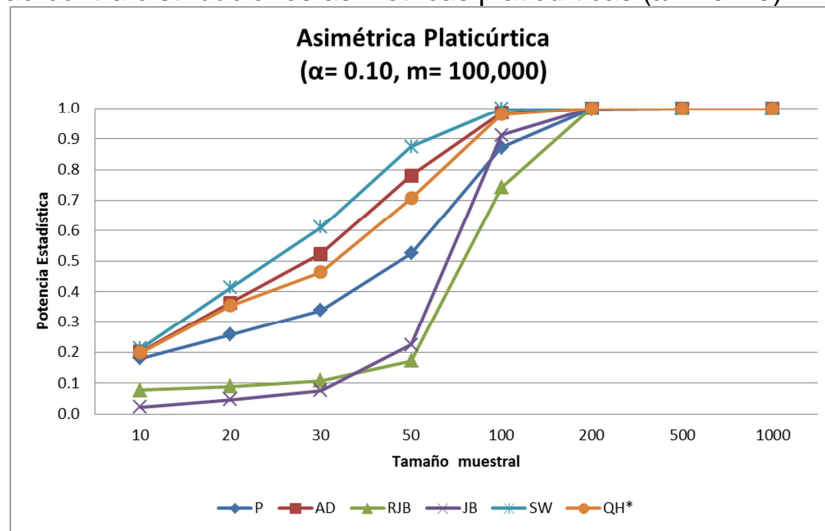
Fuente: Elaboración propia.

Figura 76. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas leptocúrticas ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 77. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad contra distribuciones asimétricas platicúrticas ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 8. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS MESOCÚRTICAS.

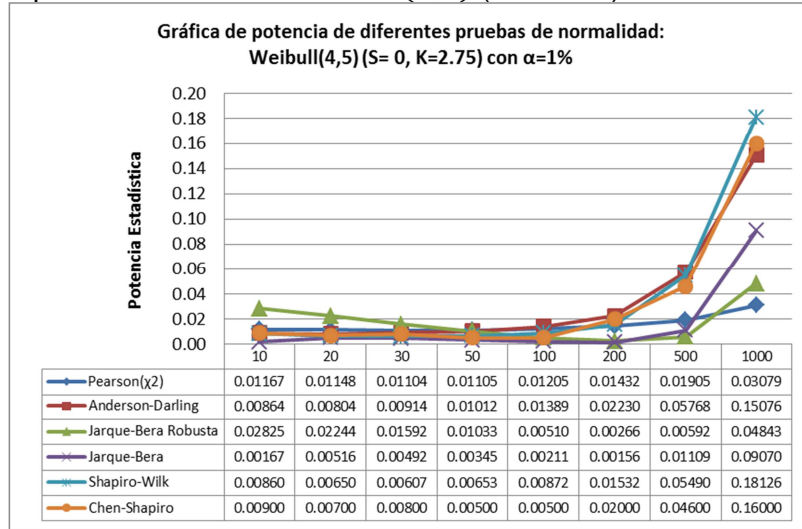
Tabla 13. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Weibull*(4,5).

m= 100,000		Weibull(4,5)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α	Pearson (P)							
10%	0.10674	0.12293	0.11873	0.10585	0.11168	0.12218	0.14700	0.19542
5%	0.06294	0.04824	0.05124	0.05408	0.05664	0.06513	0.07987	0.11514
1%	0.01167	0.01148	0.01104	0.01105	0.01205	0.01432	0.01905	0.03079
α	Anderson-Darling (AD)							
10%	0.09757	0.09394	0.09571	0.10200	0.12047	0.15742	0.28223	0.47941
5%	0.04575	0.04525	0.04815	0.05151	0.06377	0.08775	0.17715	0.34848
1%	0.00864	0.00804	0.00914	0.01012	0.01389	0.02230	0.05768	0.15076
α	Jarque-Bera Robusta (RJB)							
10%	0.05877	0.05613	0.04803	0.03889	0.03129	0.04249	0.15947	0.41806
5%	0.04336	0.03945	0.03287	0.02390	0.01577	0.01431	0.06284	0.24752
1%	0.02825	0.02244	0.01592	0.01033	0.00510	0.00266	0.00592	0.04843
α	Jarque-Bera (JB)							
10%	0.01190	0.02096	0.02284	0.02250	0.02574	0.05859	0.22226	0.51840
5%	0.00666	0.01280	0.01287	0.01182	0.00985	0.01692	0.10130	0.33917
1%	0.00167	0.00516	0.00492	0.00345	0.00211	0.00156	0.01109	0.09070
α	Shapiro-Wilk (SW)							
10%	0.09214	0.09196	0.09107	0.09488	0.10617	0.14848	0.30093	0.55315
5%	0.04443	0.04248	0.04273	0.04313	0.05172	0.07743	0.18750	0.41538
1%	0.00860	0.00650	0.00607	0.00653	0.00872	0.01532	0.05490	0.18126
α	Chen-Shapiro (QH)*							
10%	0.08900	0.08700	0.07500	0.10700	0.09400	0.15800	0.27300	0.45900
5%	0.05100	0.04000	0.03600	0.04800	0.06600	0.10600	0.19300	0.32100
1%	0.00900	0.00700	0.00800	0.00500	0.00500	0.02000	0.04600	0.16000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

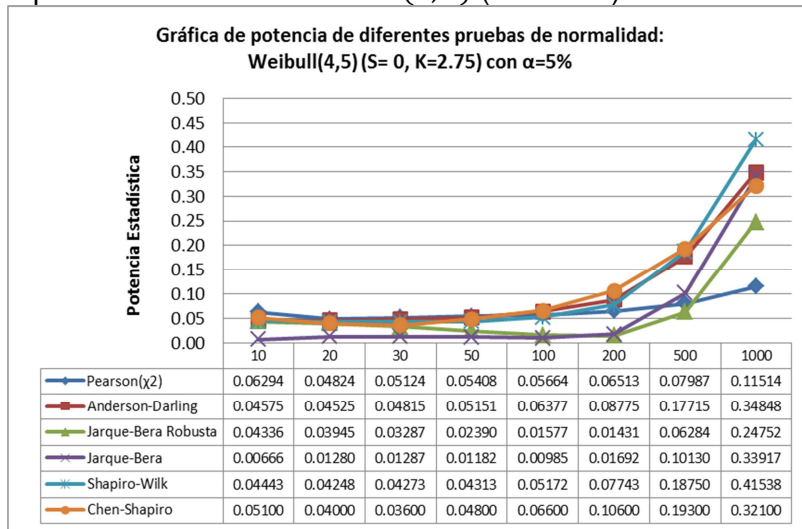
Fuente: Elaboración propia.

Figura 78. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Weibull(4,5)** ($\alpha = 0.10$).



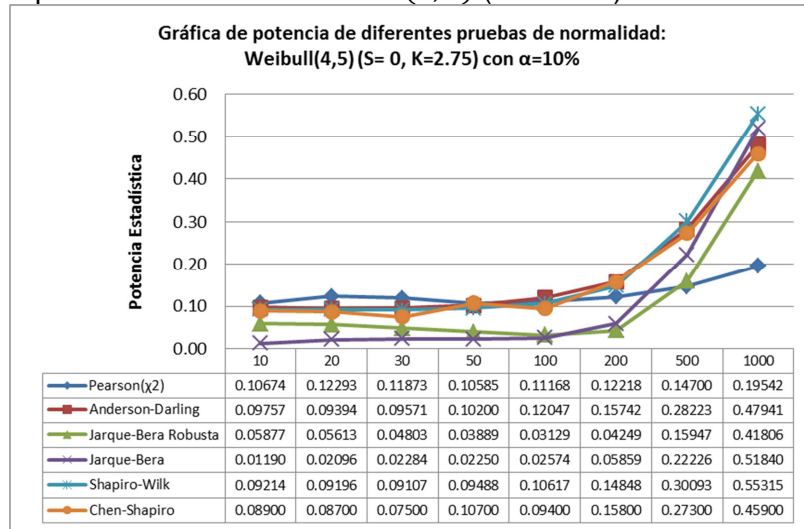
Fuente: Elaboración propia.

Figura 79. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Weibull(4,5)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 80. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Weibull(4,5)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

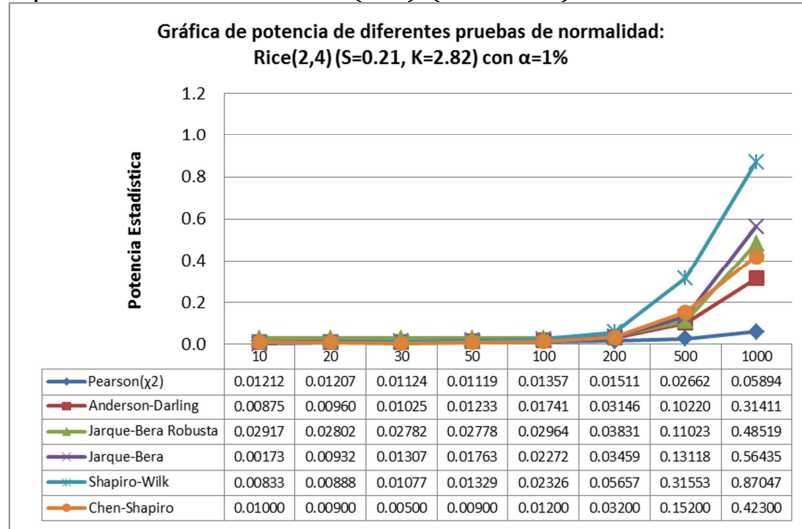
Tabla 14. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Rice(2, 4)*.

m= 100,000		Rice(2,4)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.10699	0.12380	0.11762	0.10659	0.11254	0.12915	0.17829	0.29106
5%	0.06334	0.04978	0.05171	0.05461	0.05793	0.06906	0.10294	0.18476
1%	0.01212	0.01207	0.01124	0.01119	0.01357	0.01511	0.02662	0.05894
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.09885	0.09994	0.10464	0.11440	0.14476	0.20711	0.42806	0.75352
5%	0.04765	0.04942	0.05202	0.05952	0.07511	0.11976	0.28420	0.60700
1%	0.00875	0.00960	0.01025	0.01233	0.01741	0.03146	0.10220	0.31411
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.06176	0.06304	0.06644	0.07015	0.09188	0.16418	0.54454	0.92669
5%	0.04625	0.04767	0.04891	0.05038	0.06045	0.09488	0.34720	0.82564
1%	0.02917	0.02802	0.02782	0.02778	0.02964	0.03831	0.11023	0.48519
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.01386	0.02996	0.03907	0.05227	0.08619	0.18959	0.61231	0.95321
5%	0.00684	0.01978	0.02544	0.03528	0.05266	0.10410	0.41463	0.87577
1%	0.00173	0.00932	0.01307	0.01763	0.02272	0.03459	0.13118	0.56435
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.09467	0.10002	0.10786	0.12324	0.18385	0.33493	0.79968	0.99633
5%	0.04590	0.04987	0.05392	0.06450	0.09973	0.20376	0.64302	0.98361
1%	0.00833	0.00888	0.01077	0.01329	0.02326	0.05657	0.31553	0.87047
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.08900	0.08700	0.10200	0.11800	0.18900	0.27400	0.53800	0.83800
5%	0.03800	0.04000	0.04600	0.05400	0.08000	0.14500	0.41300	0.69700
1%	0.01000	0.00900	0.00500	0.00900	0.01200	0.03200	0.15200	0.42300

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

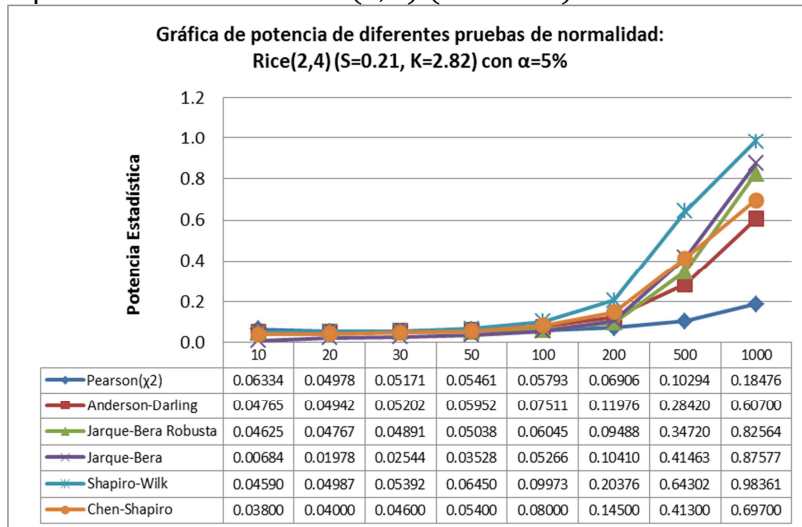
Fuente: Elaboración propia.

Figura 81. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Rice*(2,4) ($\alpha = 0.10$).



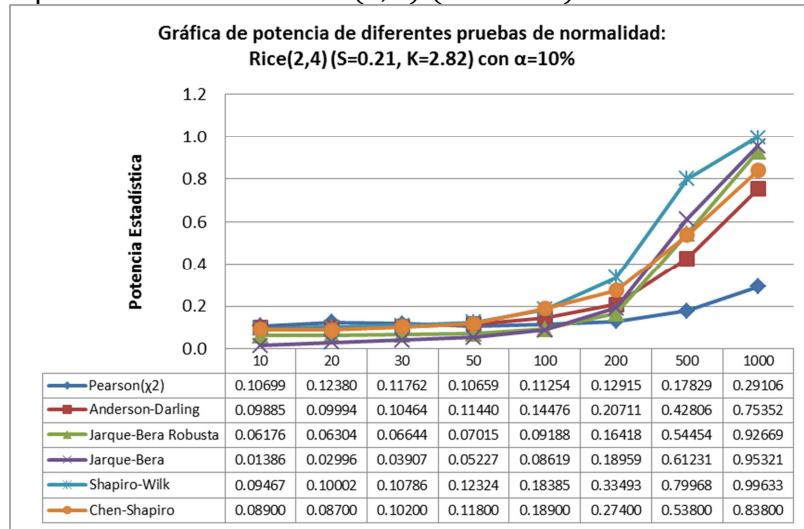
Fuente: Elaboración propia.

Figura 82. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Rice*(2,4) ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 83. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Rice(2,4)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

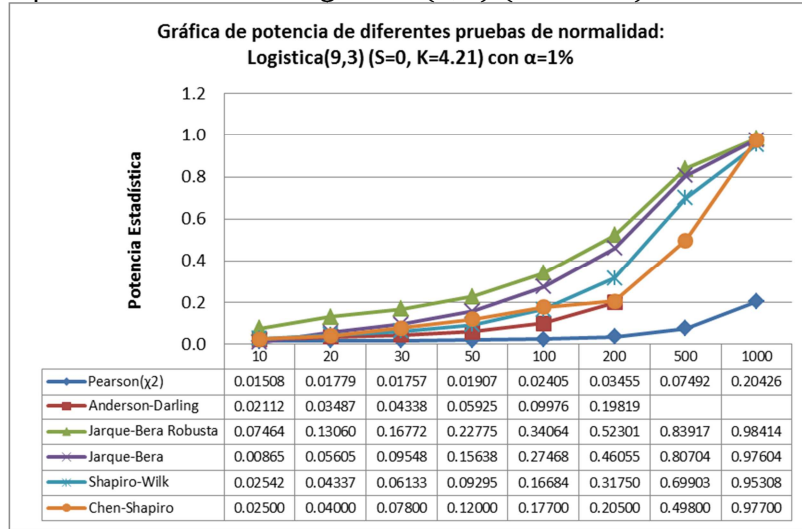
Tabla 15. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Logística(9, 3)*.

m= 100,000		Logística(9,3)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.16627	0.15646	0.15167	0.14260	0.16303	0.20454	0.33082	0.56481
5%	0.08312	0.06617	0.07257	0.07863	0.08876	0.11898	0.21834	0.42951
1%	0.01508	0.01779	0.01757	0.01907	0.02405	0.03455	0.07492	0.20426
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.14355	0.17669	0.20024	0.24524	0.33965	NaN	NaN	NaN
5%	0.08070	0.10508	0.12327	0.15842	0.23813	0.39115	NaN	NaN
1%	0.02112	0.03487	0.04338	0.05925	0.09976	0.19819	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.13000	0.21028	0.26303	0.35107	0.49935	0.69423	0.93612	0.99681
5%	0.10794	0.17460	0.22700	0.29965	0.44148	0.63287	0.90876	0.99459
1%	0.07464	0.13060	0.16772	0.22775	0.34064	0.52301	0.83917	0.98414
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.04108	0.12429	0.18345	0.27310	0.43275	0.64257	0.91990	0.99507
5%	0.02528	0.09353	0.14407	0.22439	0.37303	0.57743	0.88564	0.99122
1%	0.00865	0.05605	0.09548	0.15638	0.27468	0.46055	0.80704	0.97604
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.13819	0.18181	0.21483	0.27590	0.39218	0.58392	0.88896	0.99163
5%	0.08155	0.11562	0.14591	0.19475	0.30658	0.49284	0.83730	0.98483
1%	0.02542	0.04337	0.06133	0.09295	0.16684	0.31750	0.69903	0.95308
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.15100	0.19200	0.23700	0.28300	0.38600	0.50100	0.74400	0.98700
5%	0.08300	0.12800	0.18200	0.24200	0.33600	0.48400	0.65500	0.98600
1%	0.02500	0.04000	0.07800	0.12000	0.17700	0.20500	0.49800	0.97700

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

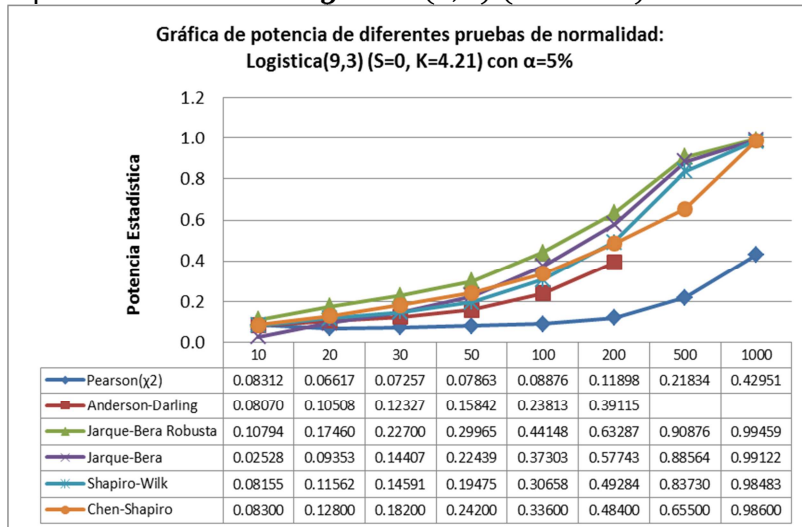
Fuente: Elaboración propia.

Figura 84. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Logística(9,3)** ($\alpha = 0.10$).



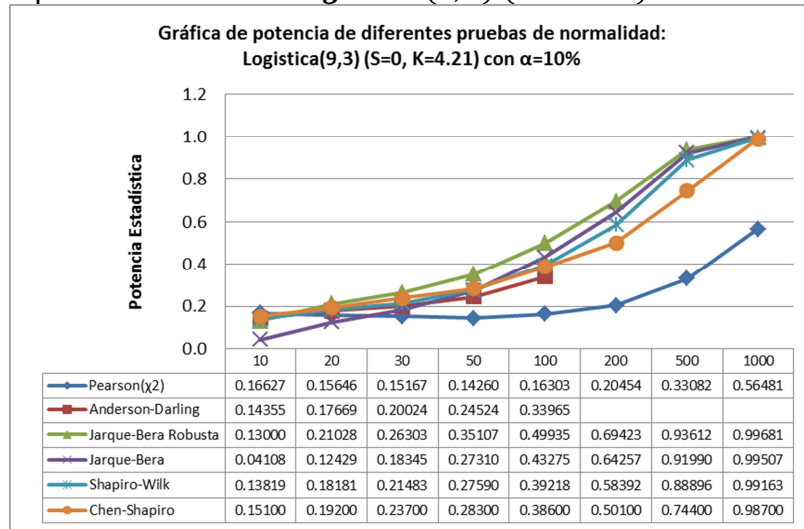
Fuente: Elaboración propia.

Figura 85. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Logística(9,3)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 86. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Logística(9,3)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 9. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS.

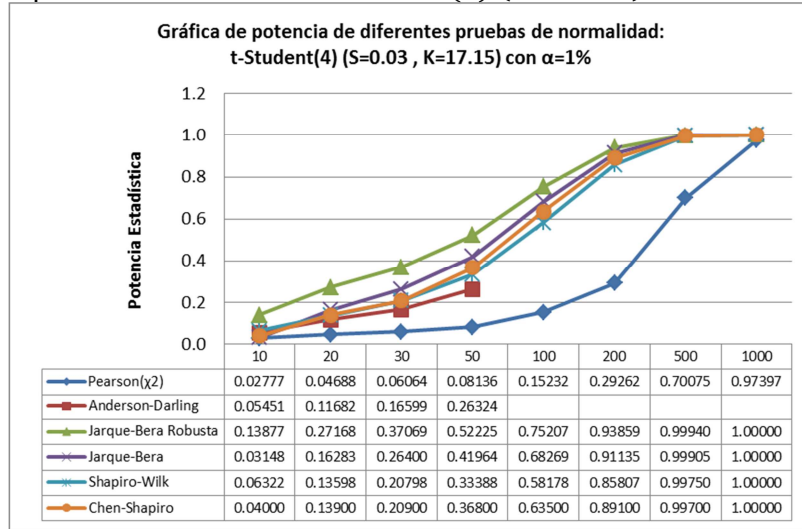
Tabla 16. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución $t - Student(4)$.

m= 100,000		t-Student(4)							
n	10	20	30	50	100	200	500	1000	
α	Pearson (P)								
10%	0.16387	0.22970	0.25006	0.27936	0.40153	0.60230	0.91171	0.99723	
5%	0.11584	0.11832	0.14646	0.19071	0.29421	0.49172	0.85488	0.99315	
1%	0.02777	0.04688	0.06064	0.08136	0.15232	0.29262	0.70075	0.97397	
α	Anderson-Darling (AD)								
10%	0.20885	0.30573	0.38385	0.51250	NaN	NaN	NaN	NaN	
5%	0.13685	0.22323	0.29720	0.42183	NaN	NaN	NaN	NaN	
1%	0.05451	0.11682	0.16599	0.26324	NaN	NaN	NaN	NaN	
α	Jarque-Bera Robusta (RJB)								
10%	0.20724	0.36286	0.47879	0.63517	0.84597	0.97239	0.99993	1.00000	
5%	0.17990	0.32740	0.43831	0.59161	0.81225	0.96106	0.99976	1.00000	
1%	0.13877	0.27168	0.37069	0.52225	0.75207	0.93859	0.99940	1.00000	
α	Jarque-Bera (JB)								
10%	0.08692	0.25807	0.38045	0.55559	0.79684	0.96043	0.99978	1.00000	
5%	0.06524	0.21955	0.33390	0.50419	0.75870	0.94616	0.99955	1.00000	
1%	0.03148	0.16283	0.26400	0.41964	0.68269	0.91135	0.99905	1.00000	
α	Shapiro-Wilk (SW)								
10%	0.20114	0.31248	0.40068	0.54576	0.77219	0.94825	0.99963	1.00000	
5%	0.13766	0.24088	0.32648	0.46985	0.71152	0.92516	0.99936	1.00000	
1%	0.06322	0.13598	0.20798	0.33388	0.58178	0.85807	0.99750	1.00000	
α	Chen-Shapiro (QH)								
10%	0.19600	0.32500	0.44700	0.58600	0.77300	0.94100	1.00000	1.00000	
5%	0.12700	0.26200	0.36100	0.48200	0.74600	0.93500	1.00000	1.00000	
1%	0.04000	0.13900	0.20900	0.36800	0.63500	0.89100	0.99700	1.00000	

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

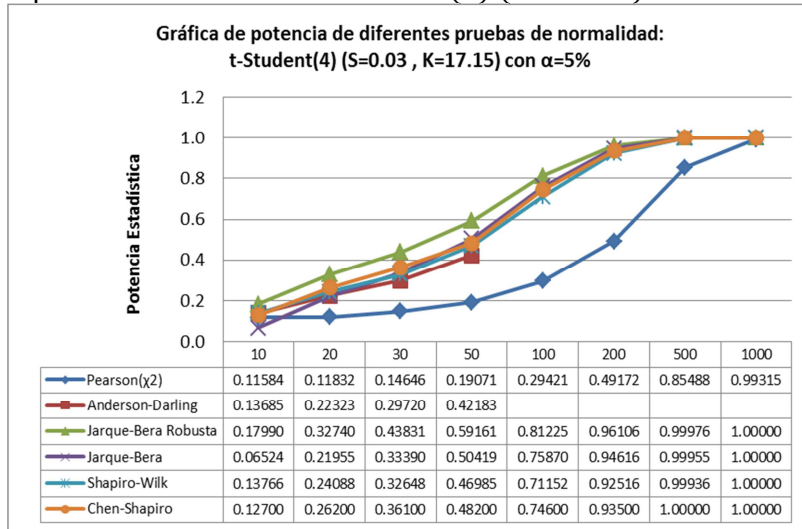
Fuente: Elaboración propia.

Figura 87. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $t - Student(4)$ ($\alpha = 0.10$).



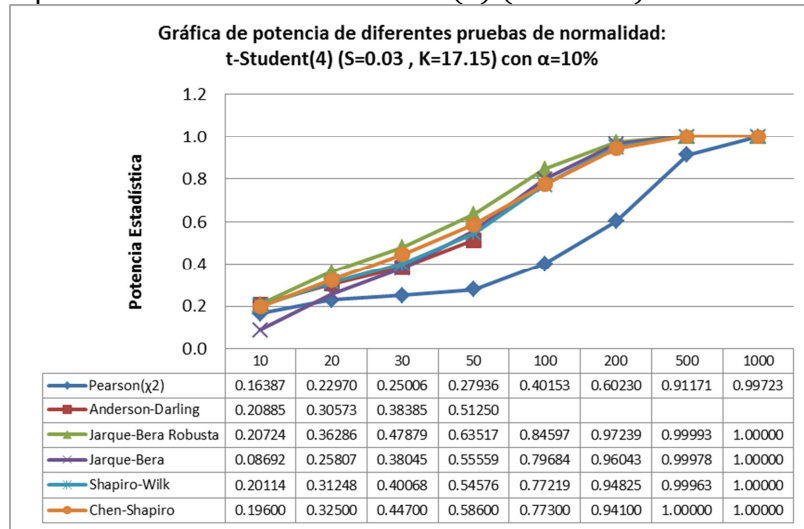
Fuente: Elaboración propia.

Figura 88. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $t - Student(4)$ ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 89. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $t - Student(4)$ ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

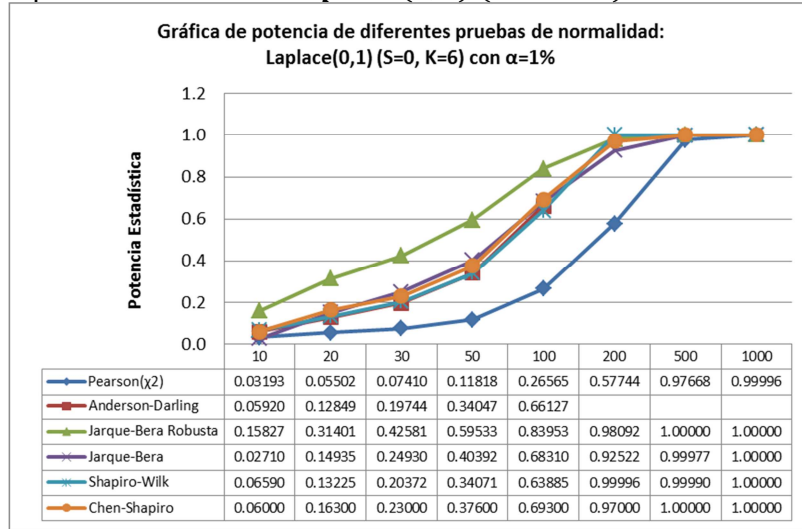
Tabla 17. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Laplace(0, 1)*.

m= 100,000		Laplace(0,1)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.18615	0.27518	0.31766	0.38808	0.60174	0.85932	0.99754	1.00000
5%	0.13274	0.14280	0.19091	0.27392	0.47271	0.78334	0.99458	1.00000
1%	0.03193	0.05502	0.07410	0.11818	0.26565	0.57744	0.97668	0.99996
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.24097	0.37126	0.47857	0.65018	0.88602	NaN	NaN	NaN
5%	0.15884	0.27394	0.37171	0.54503	0.82311	NaN	NaN	NaN
1%	0.05920	0.12849	0.19744	0.34047	0.66127	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.23988	0.43138	0.55876	0.72703	0.92168	0.99476	1.00000	1.00000
5%	0.20614	0.38746	0.50693	0.68223	0.89814	0.99090	1.00000	1.00000
1%	0.15827	0.31401	0.42581	0.59533	0.83953	0.98092	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.09279	0.26526	0.39059	0.57127	0.82709	0.97643	0.99996	1.00000
5%	0.06303	0.21710	0.33524	0.50782	0.77793	0.96264	0.99997	1.00000
1%	0.02710	0.14935	0.24930	0.40392	0.68310	0.92522	0.99977	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.22555	0.34719	0.45030	0.61490	0.86008	1.00000	0.99999	1.00000
5%	0.15378	0.26220	0.35920	0.52014	0.79575	0.99998	1.00000	1.00000
1%	0.06590	0.13225	0.20372	0.34071	0.63885	0.99996	0.99990	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.25600	0.37500	0.50100	0.65100	0.87500	0.99100	1.00000	1.00000
5%	0.15300	0.30700	0.41200	0.60300	0.85600	0.98800	1.00000	1.00000
1%	0.06000	0.16300	0.23000	0.37600	0.69300	0.97000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

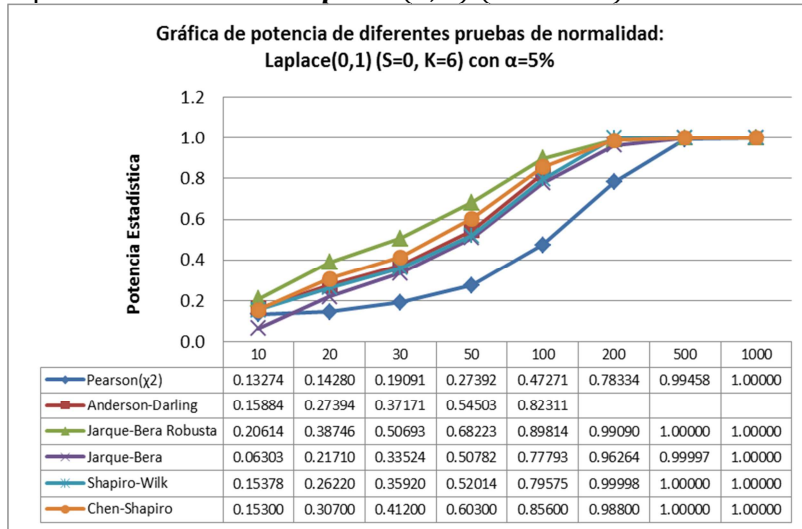
Fuente: Elaboración propia.

Figura 90. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Laplace(0,1)** ($\alpha = 0.01$).



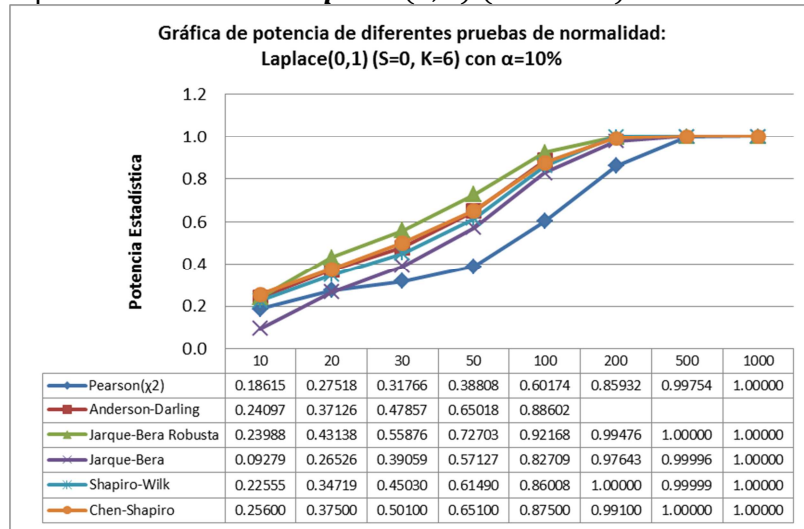
Fuente: Elaboración propia.

Figura 91. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Laplace(0,1)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 92. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Laplace(0,1)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

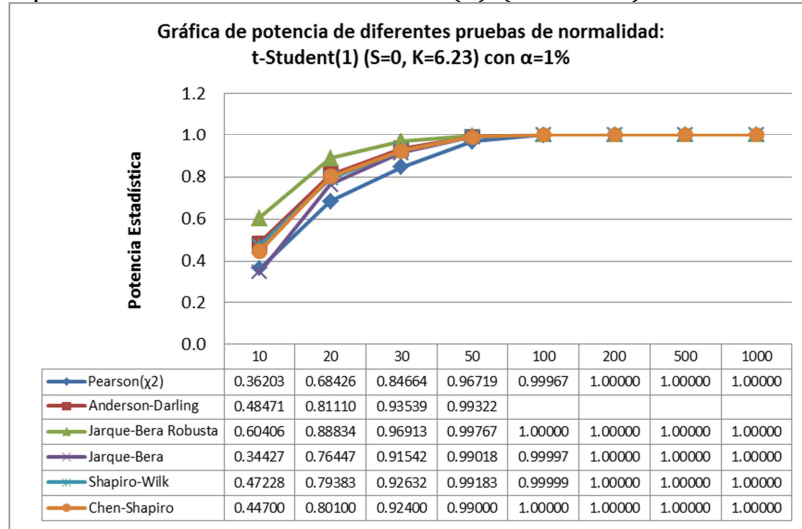
Tabla 18. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *t – Student*(1).

m= 100,000		t-Student(1)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.58460	0.84635	0.93950	0.99041	0.99993	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.53386	0.77906	0.91087	0.98457	0.99989	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.36203	0.68426	0.84664	0.96719	0.99967	1.00000	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.67832	0.91004	0.97531	0.99861	NaN	NaN	NaN	NaN
5%	0.61191	0.87971	0.96515	0.99702	NaN	NaN	NaN	NaN
1%	0.48471	0.81110	0.93539	0.99322	NaN	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.67236	0.92327	0.98145	0.99893	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.64888	0.91067	0.97743	0.99835	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.60406	0.88834	0.96913	0.99767	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.47463	0.84388	0.95160	0.99567	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.42867	0.81566	0.94146	0.99371	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.34427	0.76447	0.91542	0.99018	0.99997	1.00000	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.65266	0.89695	0.97101	0.99784	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.59117	0.86600	0.95820	0.99646	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.47228	0.79383	0.92632	0.99183	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.66600	0.92300	0.97600	0.99600	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.58300	0.89400	0.96000	0.99800	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.44700	0.80100	0.92400	0.99000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

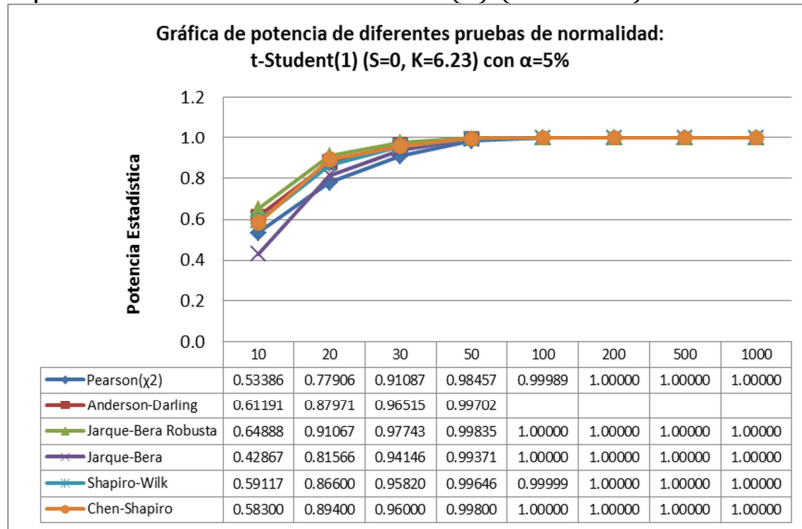
Fuente: Elaboración propia.

Figura 93. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $t - Student(1)$ ($\alpha = 0.01$).



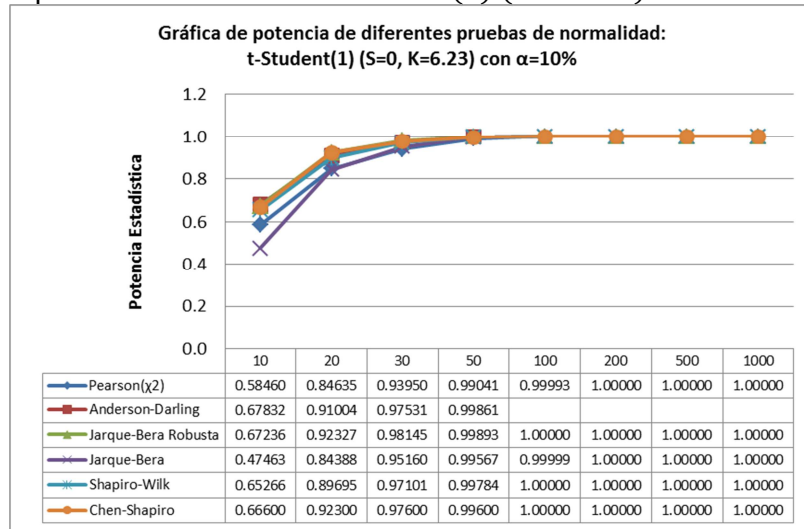
Fuente: Elaboración propia.

Figura 94. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $t - Student(1)$ ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 95. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $t - Student(1)$ ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

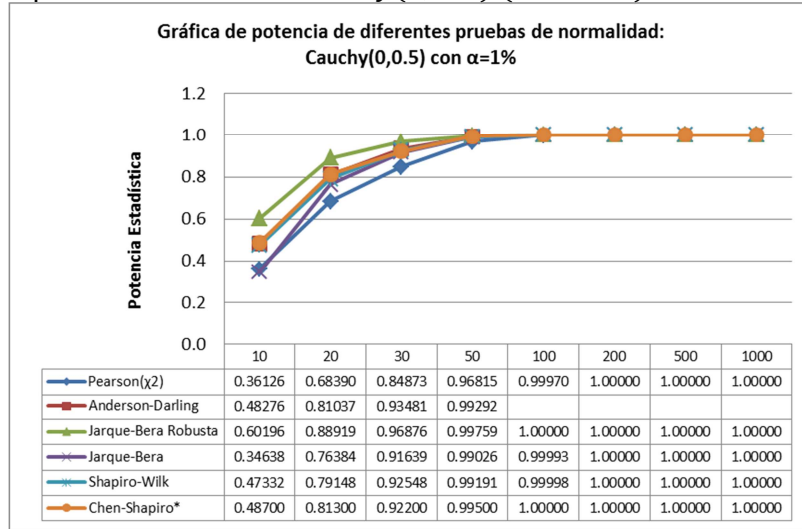
Tabla 19. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Cauchy*(0, 0.5).

m= 100,000		Cauchy(0,0.5)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.58789	0.84622	0.93869	0.99028	0.99994	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.53306	0.77655	0.90640	0.98473	0.99983	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.36126	0.68390	0.84873	0.96815	0.99970	1.00000	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.67855	0.91001	0.97483	0.99826	NaN	NaN	NaN	NaN
5%	0.61051	0.88127	0.96438	0.99689	NaN	NaN	NaN	NaN
1%	0.48276	0.81037	0.93481	0.99292	NaN	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.67508	0.92281	0.98124	0.99888	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.64614	0.91042	0.97577	0.99836	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.60196	0.88919	0.96876	0.99759	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.47200	0.84367	0.95375	0.99623	0.99995	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.42849	0.81755	0.94164	0.99390	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.34638	0.76384	0.91639	0.99026	0.99993	1.00000	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.65426	0.89637	0.96964	0.99783	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.59273	0.86555	0.95754	0.99682	0.99998	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.47332	0.79148	0.92548	0.99191	0.99998	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.67400	0.90400	0.98100	0.99900	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.59500	0.89400	0.97900	0.99700	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.48700	0.81300	0.92200	0.99500	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

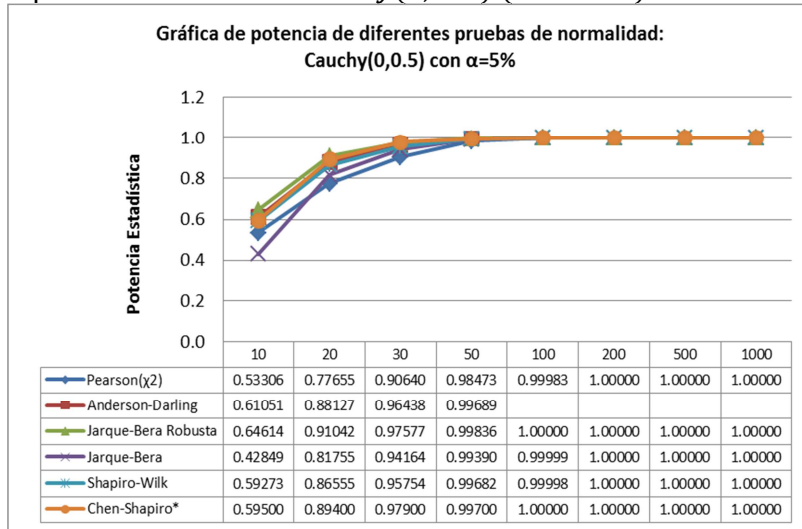
Fuente: Elaboración propia.

Figura 96. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Cauchy(0, 0.5)** ($\alpha = 0.01$).



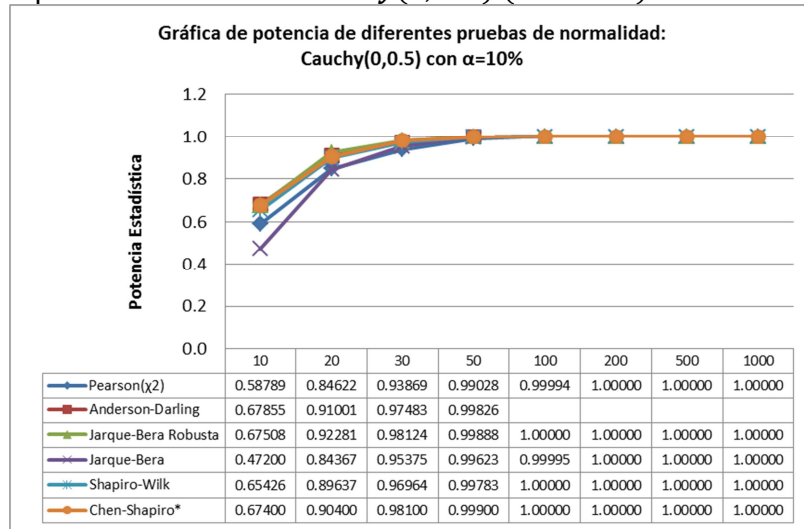
Fuente: Elaboración propia.

Figura 97. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Cauchy(0, 0.5)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 98. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Cauchy(0, 0.5)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 10. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES SIMÉTRICAS PLATICÚRTICAS.

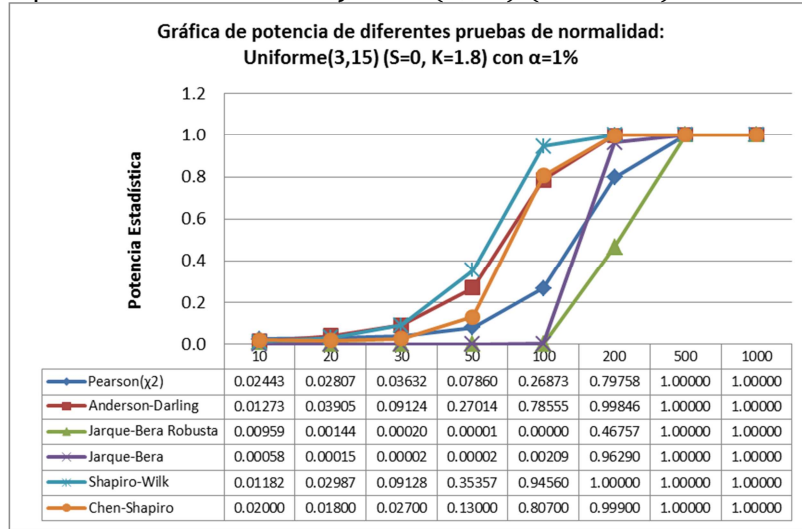
Tabla 20. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Uniforme(3, 15)*.

m= 100,000		Uniforme(3,15)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α	Pearson (P)							
10%	0.14342	0.18257	0.21263	0.29685	0.57624	0.94216	1.00000	1.00000
5%	0.08671	0.08235	0.11425	0.19436	0.45889	0.90551	1.00000	1.00000
1%	0.02443	0.02807	0.03632	0.07860	0.26873	0.79758	1.00000	1.00000
α	Anderson-Darling (AD)							
10%	0.15968	0.29429	0.44999	0.72821	0.98059	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.07750	0.17215	0.29710	0.57444	0.94931	0.99995	1.00000	1.00000
1%	0.01273	0.03905	0.09124	0.27014	0.78555	0.99846	1.00000	1.00000
α	Jarque-Bera Robusta (RJB)							
10%	0.02311	0.00584	0.00214	0.00063	0.49181	0.99930	1.00000	1.00000
5%	0.01654	0.00358	0.00092	0.00021	0.03948	0.98881	1.00000	1.00000
1%	0.00959	0.00144	0.00020	0.00001	0.00000	0.46757	1.00000	1.00000
α	Jarque-Bera (JB)							
10%	0.00406	0.00150	0.00074	0.03112	0.91135	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.00241	0.00063	0.00019	0.00017	0.56311	0.99993	1.00000	1.00000
1%	0.00058	0.00015	0.00002	0.00002	0.00209	0.96290	1.00000	1.00000
α	Shapiro-Wilk (SW)							
10%	0.17259	0.36203	0.57701	0.88004	0.99921	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.08157	0.20148	0.38208	0.75039	0.99647	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.01182	0.02987	0.09128	0.35357	0.94560	1.00000	1.00000	1.00000
α	Chen-Shapiro (QH)*							
10%	0.17200	0.35100	0.52200	0.78900	0.98600	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.06900	0.14900	0.35100	0.69200	0.98100	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.02000	0.01800	0.02700	0.13000	0.80700	0.99900	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

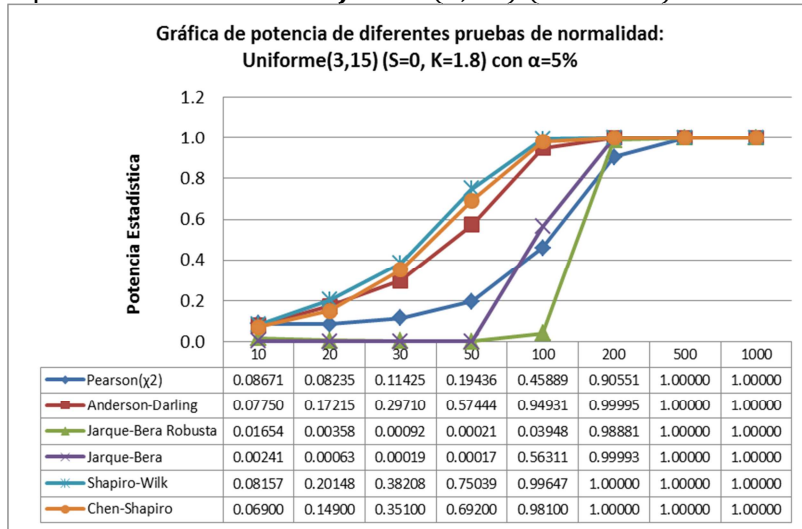
Fuente: Elaboración propia.

Figura 99. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Uniforme(3,15)* ($\alpha = 0.01$).



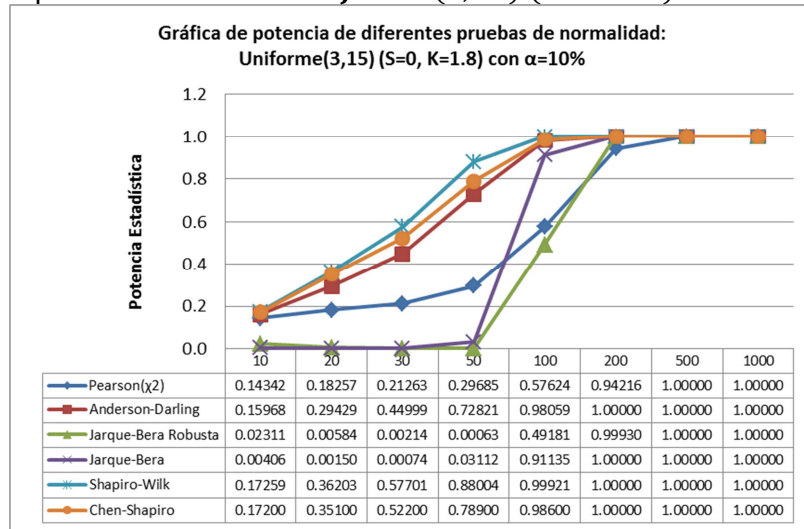
Fuente: Elaboración propia.

Figura 100. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Uniforme(3,15)* ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 101. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Uniforme(3,15)* ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

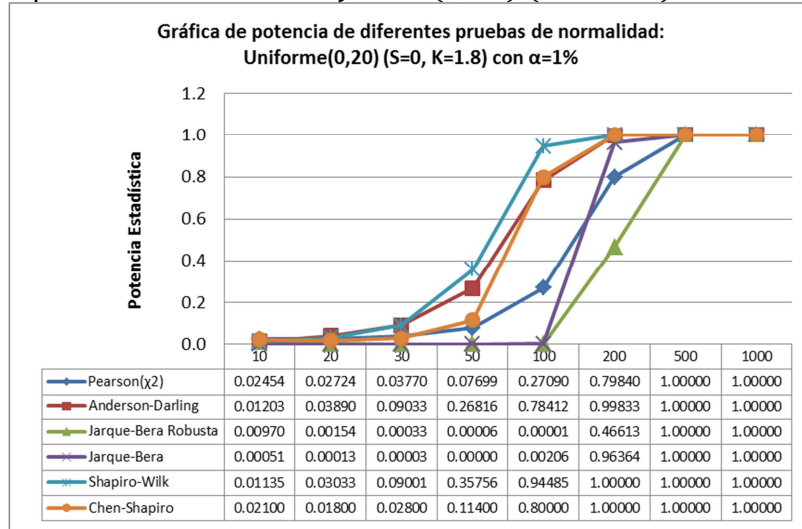
Tabla 21. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Uniforme(0,20)*.

m= 100,000		Uniforme(0,20)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.14512	0.18124	0.21404	0.29244	0.57839	0.94133	1.00000	1.00000
5%	0.08830	0.08182	0.11013	0.19750	0.45930	0.90404	1.00000	1.00000
1%	0.02454	0.02724	0.03770	0.07699	0.27090	0.79840	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.16067	0.29498	0.44847	0.72580	0.98096	0.99999	1.00000	1.00000
5%	0.07728	0.17143	0.29634	0.57121	0.94797	0.99991	1.00000	1.00000
1%	0.01203	0.03890	0.09033	0.26816	0.78412	0.99833	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.02248	0.00569	0.00223	0.00074	0.48746	0.99932	1.00000	1.00000
5%	0.01742	0.00361	0.00106	0.00022	0.03996	0.98769	1.00000	1.00000
1%	0.00970	0.00154	0.00033	0.00006	0.00001	0.46613	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.00443	0.00145	0.00070	0.02944	0.91237	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.00238	0.00051	0.00013	0.00011	0.56256	0.99985	1.00000	1.00000
1%	0.00051	0.00013	0.00003	0.00000	0.00206	0.96364	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.17386	0.35758	0.57732	0.87929	0.99921	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.08265	0.19991	0.38163	0.75033	0.99635	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.01135	0.03033	0.09001	0.35756	0.94485	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.07800	0.17300	0.34200	0.78400	0.98800	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.08800	0.17300	0.35100	0.68900	0.97100	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.02100	0.01800	0.02800	0.11400	0.80000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

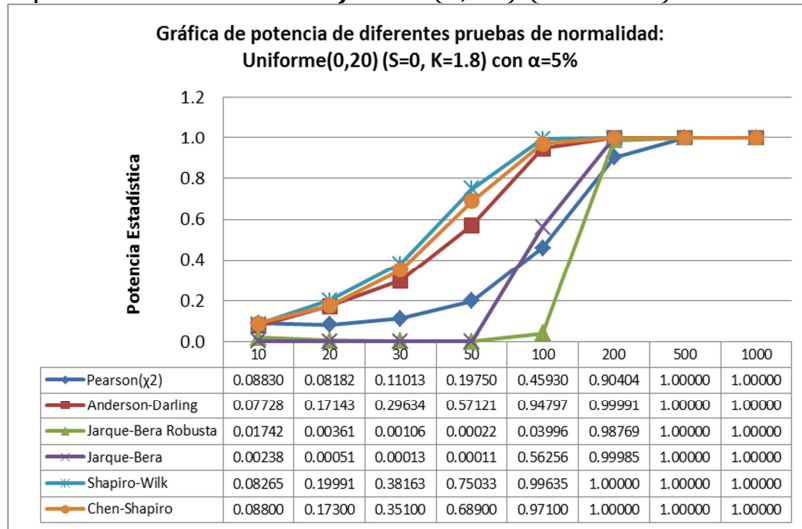
Fuente: Elaboración propia.

Figura 102. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Uniforme(0,20)** ($\alpha = 0.01$).



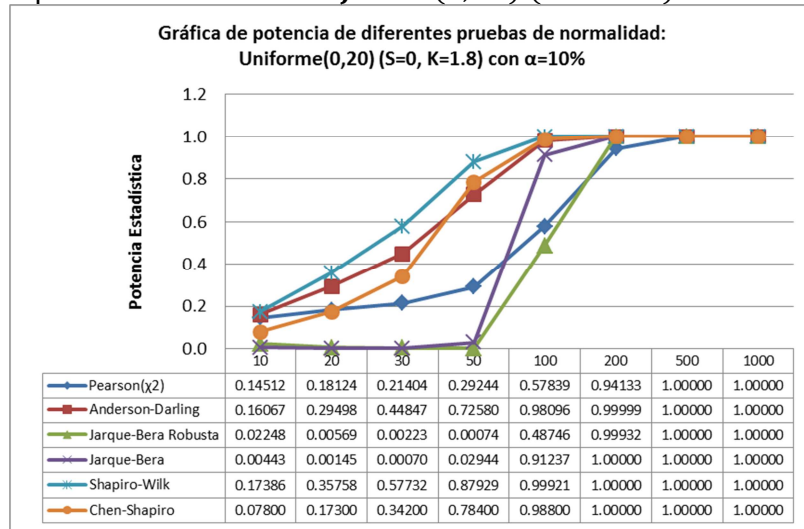
Fuente: Elaboración propia.

Figura 103. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Uniforme(0,20)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 104. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Uniforme(0,20)* ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

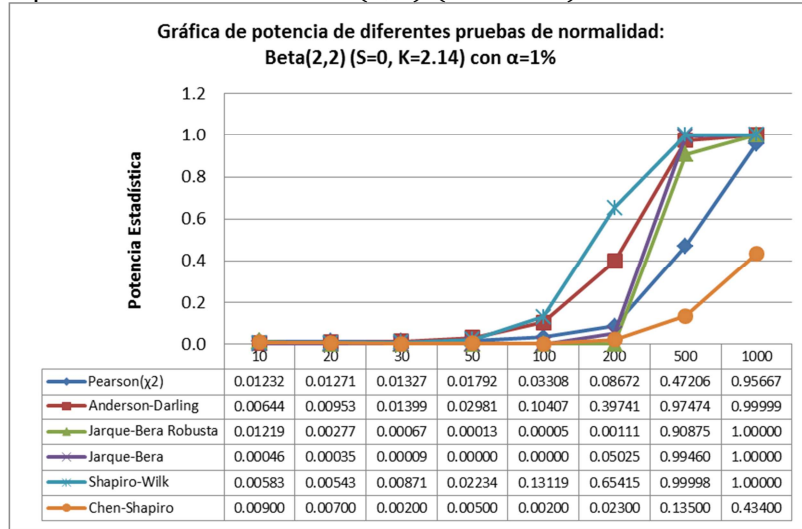
Tabla 22. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Beta* (2, 2)

m= 100,000		Beta(2,2)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.10892	0.12749	0.12988	0.13618	0.19449	0.34179	0.79683	0.99509
5%	0.06202	0.05048	0.05915	0.07458	0.11250	0.23048	0.69650	0.98879
1%	0.01232	0.01271	0.01327	0.01792	0.03308	0.08672	0.47206	0.95667
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.09691	0.11831	0.15402	0.23640	0.47080	0.83427	0.99943	1.00000
5%	0.04339	0.05815	0.07934	0.13209	0.31490	0.71057	0.99787	1.00000
1%	0.00644	0.00953	0.01399	0.02981	0.10407	0.39741	0.97474	0.99999
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.02920	0.01086	0.00472	0.00153	0.01971	0.61594	0.99971	1.00000
5%	0.02187	0.00655	0.00256	0.00047	0.00014	0.25358	0.99751	1.00000
1%	0.01219	0.00277	0.00067	0.00013	0.00005	0.00111	0.90875	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.00531	0.00244	0.00126	0.00124	0.15887	0.87684	1.00000	1.00000
5%	0.00232	0.00117	0.00042	0.00017	0.01519	0.61287	0.99997	1.00000
1%	0.00046	0.00035	0.00009	0.00000	0.00000	0.05025	0.99460	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.09642	0.12457	0.17166	0.28727	0.64701	0.97400	1.00000	1.00000
5%	0.04119	0.05374	0.07842	0.15255	0.45507	0.92415	1.00000	1.00000
1%	0.00583	0.00543	0.00871	0.02234	0.13119	0.65415	0.99998	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.10600	0.08400	0.08500	0.07900	0.10000	0.16200	0.30100	0.55400
5%	0.03600	0.03500	0.04100	0.05500	0.06600	0.10100	0.25700	0.50500
1%	0.00900	0.00700	0.00200	0.00500	0.00200	0.02300	0.13500	0.43400

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

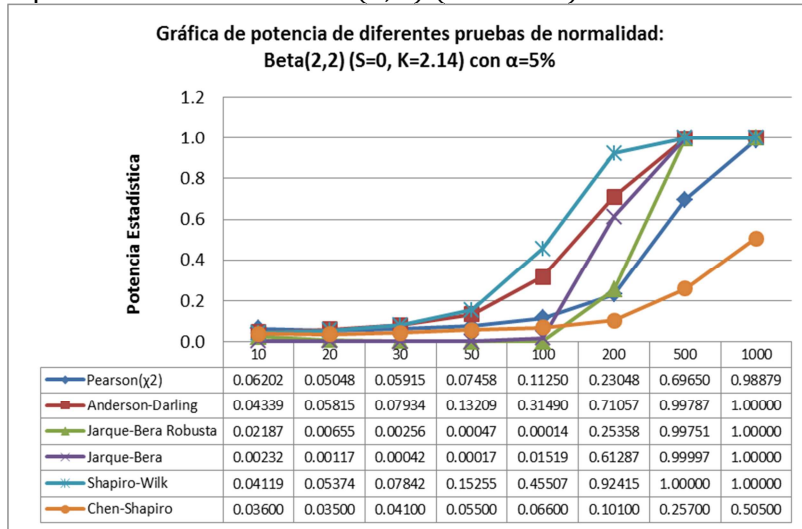
Fuente: Elaboración propia.

Figura 105. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Beta(2,2)** ($\alpha = 0.01$).



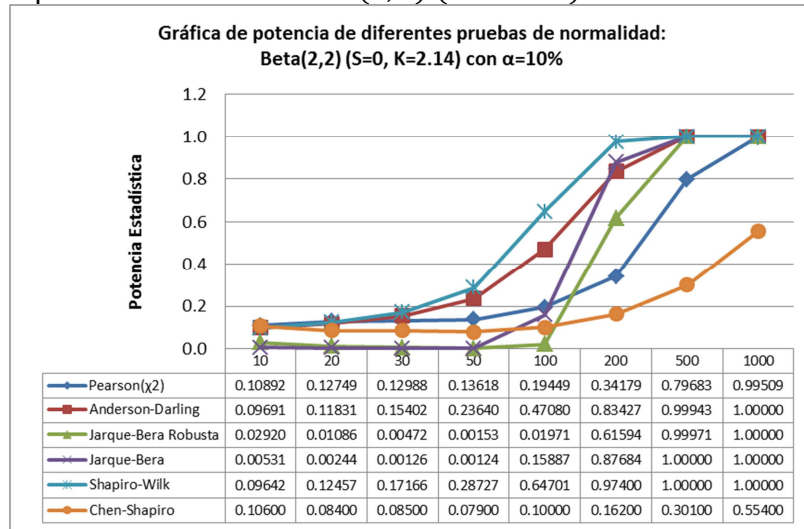
Fuente: Elaboración propia.

Figura 106. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Beta(2,2)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 107. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $Beta(2, 2)$ ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

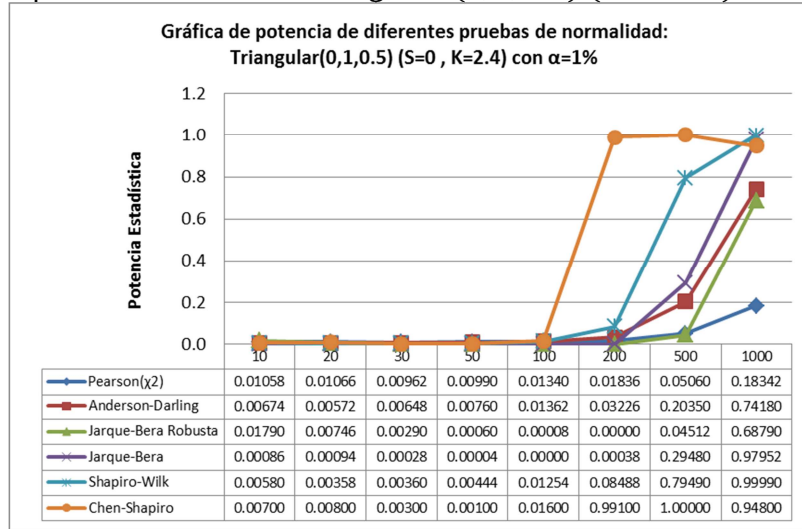
Tabla 23. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Triangular(0, 1, 0.5)*.

m= 100,000		Triangular(0, 1, 0.5)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.10347	0.11716	0.11181	0.10156	0.11393	0.14213	0.25707	0.52687
5%	0.05802	0.04561	0.04788	0.05067	0.05846	0.07685	0.15918	0.39191
1%	0.01053	0.01027	0.00972	0.01035	0.01282	0.01846	0.05097	0.18365
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.08721	0.08409	0.08701	0.10180	0.14969	0.27701	0.71909	0.98750
5%	0.03970	0.03821	0.04047	0.04785	0.07517	0.15065	0.53805	0.95526
1%	0.00624	0.00622	0.00621	0.00752	0.01358	0.03259	0.20552	0.74365
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.04069	0.02194	0.01247	0.00492	0.00220	0.06152	0.66890	0.98762
5%	0.03007	0.01386	0.00733	0.00264	0.00051	0.00628	0.40847	0.95543
1%	0.01772	0.00691	0.00248	0.00049	0.00006	0.00001	0.04776	0.68538
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.00708	0.00519	0.00313	0.00166	0.01412	0.23071	0.93781	0.99995
5%	0.00355	0.00245	0.00133	0.00048	0.00063	0.05724	0.80643	0.99941
1%	0.00078	0.00093	0.00033	0.00008	0.00001	0.00028	0.29692	0.97935
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.08251	0.07972	0.08638	0.11105	0.22385	0.56377	0.99492	1.00000
5%	0.03755	0.03123	0.03429	0.04545	0.10552	0.35804	0.97642	1.00000
1%	0.00580	0.00326	0.00341	0.00454	0.01374	0.79701	0.79444	0.99992
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.07600	0.08100	0.08500	0.09400	0.14100	1.00000	1.00000	0.96200
5%	0.05700	0.02600	0.02900	0.03300	0.10200	0.99900	1.00000	0.96000
1%	0.00700	0.00800	0.00300	0.00100	0.01600	0.99100	1.00000	0.94800

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

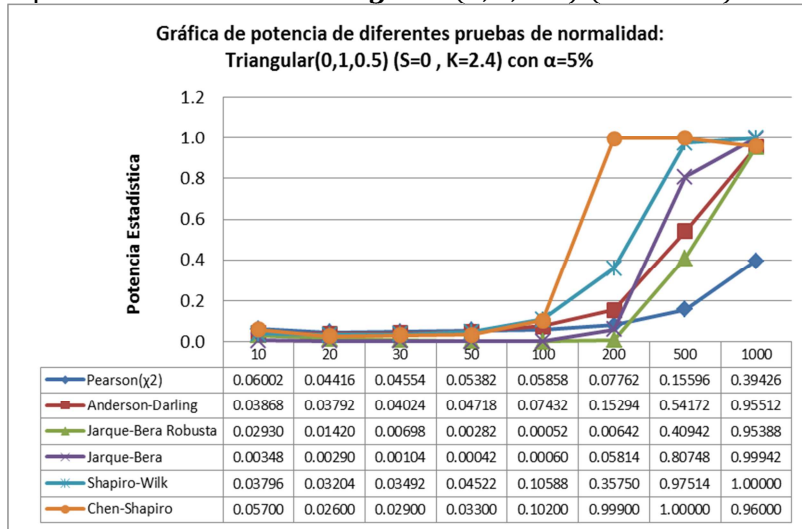
Fuente: Elaboración propia.

Figura 108. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Triangular(0,1,0.5)** ($\alpha = 0.01$).



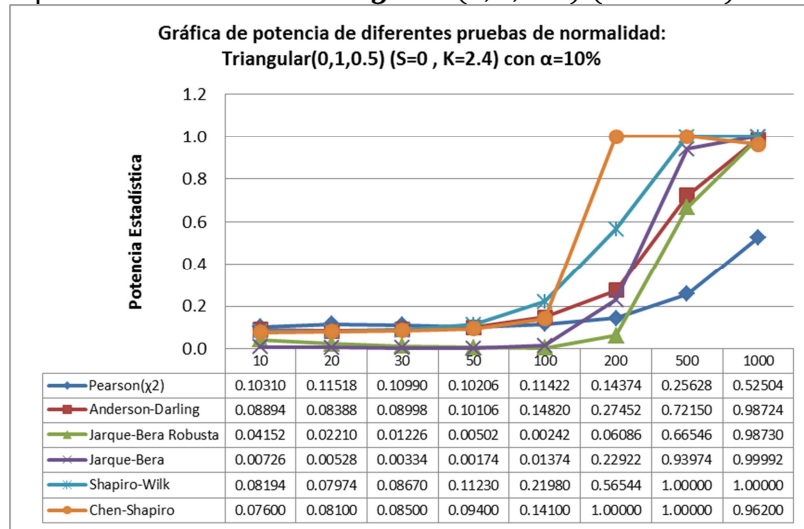
Fuente: Elaboración propia.

Figura 109. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Triangular(0,1,0.5)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 110. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Triangular(0,1,0.5)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

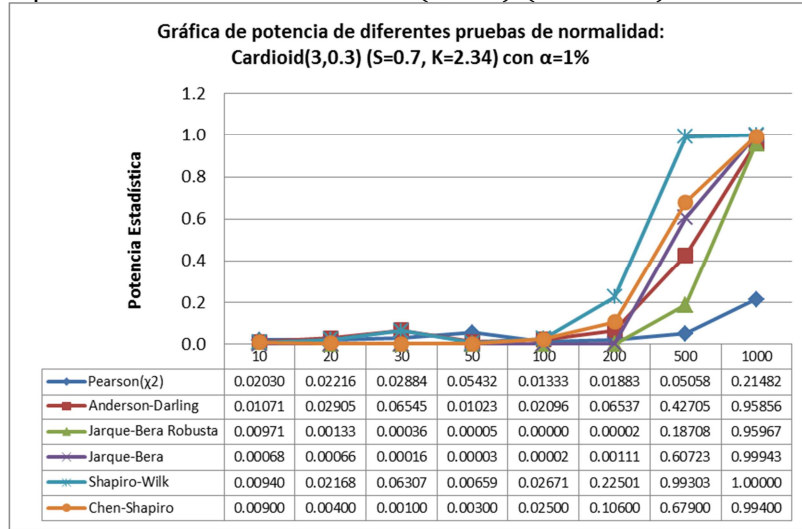
Tabla 24. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Cardioid(3, 0.3)*.

m= 100,000		Cardioid(3,0.3)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.10271	0.11764	0.11184	0.10414	0.11762	0.14474	0.26332	0.56688
5%	0.08007	0.07268	0.09523	0.05232	0.05979	0.07867	0.16003	0.43522
1%	0.02030	0.02216	0.02884	0.05432	0.01333	0.01883	0.05058	0.21482
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.08643	0.08817	0.09775	0.12072	0.19433	0.39502	0.90281	0.99983
5%	0.06787	0.04079	0.04538	0.05853	0.10256	0.24274	0.77736	0.99819
1%	0.01071	0.02905	0.06545	0.01023	0.02096	0.06537	0.42705	0.95856
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.03715	0.01860	0.00953	0.00436	0.00348	0.13823	0.90335	0.99979
5%	0.01718	0.00338	0.00084	0.00021	0.01778	0.01969	0.72601	0.99863
1%	0.00971	0.00133	0.00036	0.00005	0.00000	0.00002	0.18708	0.95967
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.00650	0.00489	0.00249	0.00165	0.02550	0.39180	0.99219	1.00000
5%	0.00327	0.00225	0.00107	0.00040	0.00128	0.12528	0.95659	1.00000
1%	0.00068	0.00066	0.00016	0.00003	0.00002	0.00111	0.60723	0.99943
α		Shapiro-Wilk (SW)*						
10%	0.08284	0.08471	0.09873	0.14214	0.34484	0.80404	0.99999	1.00000
5%	0.07056	0.03546	0.04060	0.06055	0.17897	0.64841	0.99992	1.00000
1%	0.00940	0.02168	0.06307	0.00659	0.02671	0.22501	0.99303	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.07600	0.10200	0.08600	0.14100	0.19700	0.37900	0.81800	0.99400
5%	0.05300	0.03600	0.03400	0.06300	0.14800	0.36400	0.80800	0.99600
1%	0.00900	0.00400	0.00100	0.00300	0.02500	0.10600	0.67900	0.99400

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

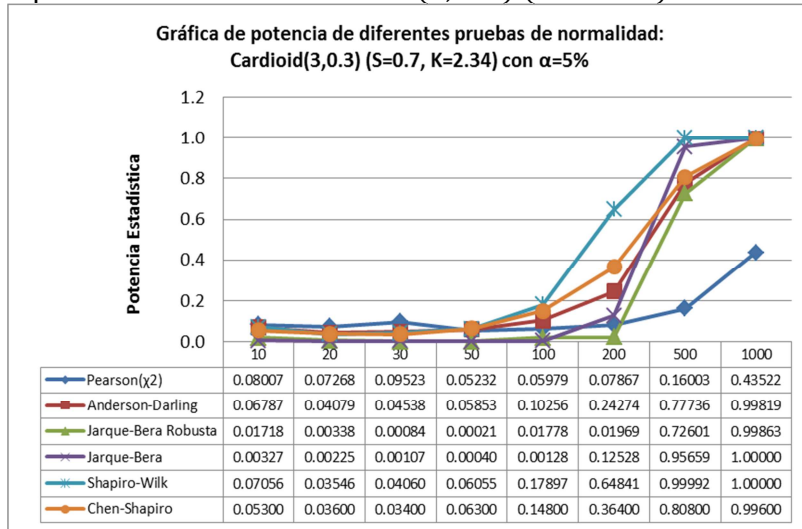
Fuente: Elaboración propia.

Figura 111. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Cardioid*(3,0.3) ($\alpha = 0.01$).



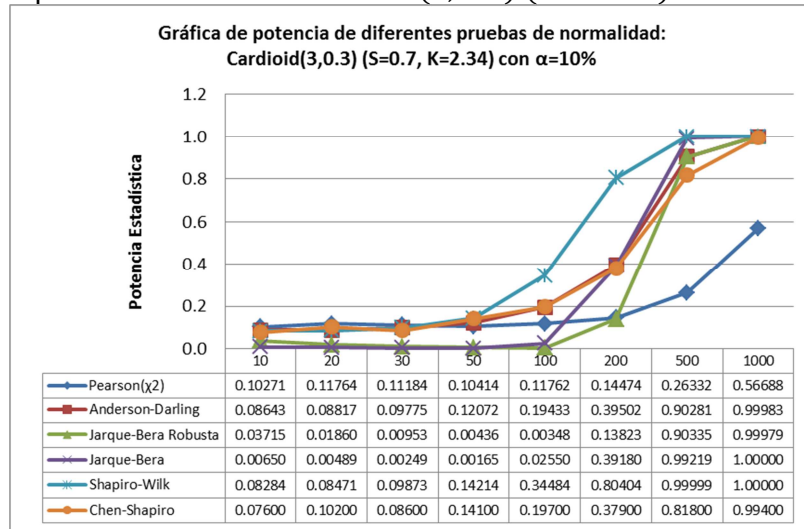
Fuente: Elaboración propia.

Figura 112. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Cardioid*(3,0.3) ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 113. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Cardioid*(3,0.3) ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 11. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICAS LEPTOCÚRTICAS.

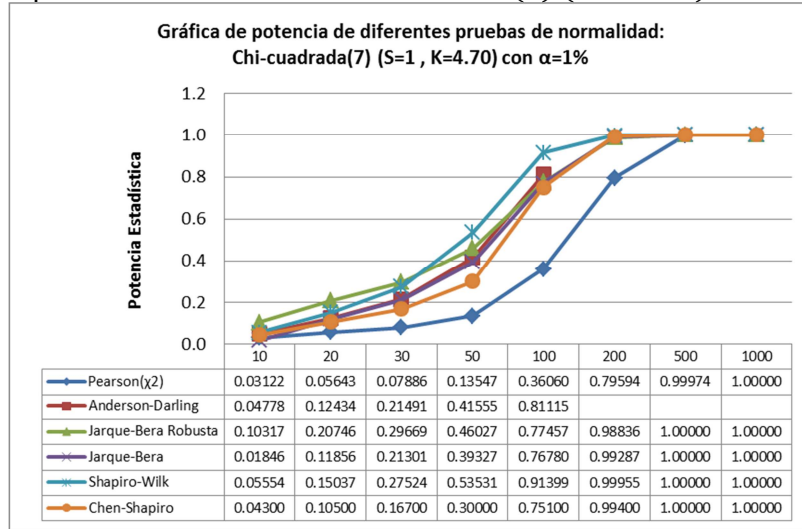
Tabla 25. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Chi – cuadrada(7)*.

m= 100,000		Chi-cuadrada(7)							
n	10	20	30	50	100	200	500	1000	
α		Pearson (P)							
10%	0.18225	0.27064	0.32670	0.43870	0.72075	0.96296	1.00000	1.00000	
5%	0.13098	0.14544	0.20212	0.32063	0.60251	0.92971	0.99998	1.00000	
1%	0.03122	0.05643	0.07886	0.13547	0.36060	0.79594	0.99974	1.00000	
α		Anderson-Darling (AD)							
10%	0.22809	0.39152	0.53819	0.75242	0.96420	NaN	NaN	NaN	
5%	0.14296	0.28159	0.41534	0.64676	0.93290	NaN	NaN	NaN	
1%	0.04778	0.12434	0.21491	0.41555	0.81115	NaN	NaN	NaN	
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)							
10%	0.16312	0.31713	0.44138	0.64979	0.93731	0.99985	1.00000	1.00000	
5%	0.14051	0.27115	0.38303	0.57459	0.88964	0.99900	1.00000	1.00000	
1%	0.10317	0.20746	0.29669	0.46027	0.77457	0.98836	1.00000	1.00000	
α		Jarque-Bera (JB)							
10%	0.07130	0.22999	0.38187	0.63988	0.95549	0.99994	1.00000	1.00000	
5%	0.04607	0.18541	0.31174	0.54496	0.90470	0.99966	1.00000	1.00000	
1%	0.01846	0.11856	0.21301	0.39327	0.76780	0.99287	1.00000	1.00000	
α		Shapiro-Wilk (SW)							
10%	0.23748	0.44391	0.61821	0.84006	0.99041	0.99999	1.00000	1.00000	
5%	0.15376	0.32874	0.49662	0.75491	0.97711	0.99997	1.00000	1.00000	
1%	0.05554	0.15037	0.27524	0.53531	0.91399	0.99955	1.00000	1.00000	
α		Chen-Shapiro (QH)*							
10%	0.20700	0.44700	0.53000	0.78200	0.98000	1.00000	1.00000	1.00000	
5%	0.11800	0.25500	0.38300	0.65000	0.95500	1.00000	1.00000	1.00000	
1%	0.04300	0.10500	0.16700	0.30000	0.75100	0.99400	1.00000	1.00000	

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

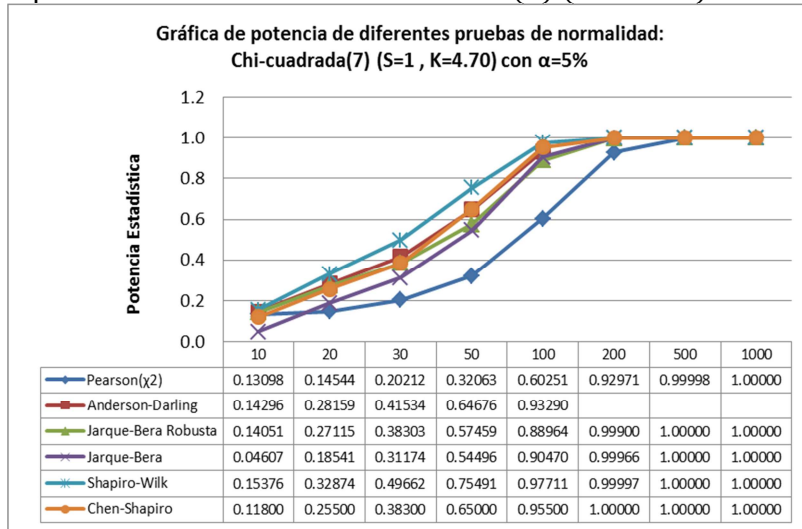
Fuente: Elaboración propia.

Figura 114. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Chi – cuadrada(7)* ($\alpha = 0.01$).



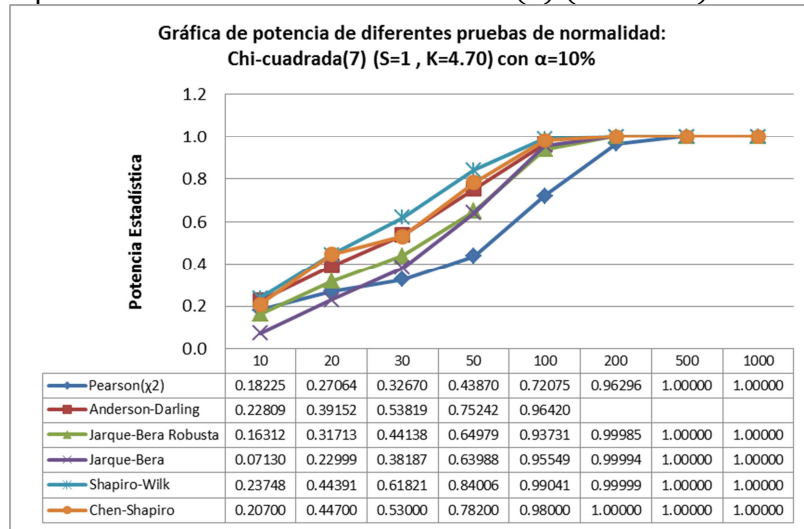
Fuente: Elaboración propia.

Figura 115. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Chi – cuadrada(7)* ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 116. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Chi – cuadrada(7)* ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

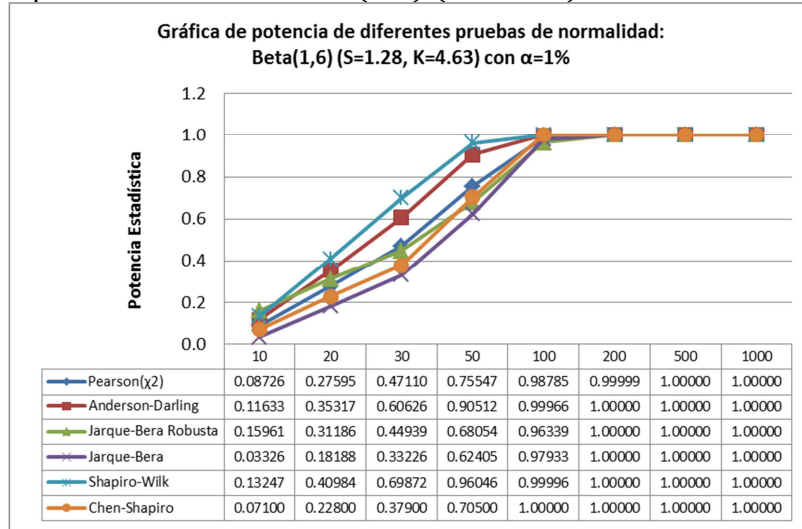
Tabla 26. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Beta*(1, 6).

m= 100,000		Beta(1,6)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.35235	0.57802	0.74996	0.94966	0.99972	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.28508	0.45930	0.66967	0.92410	0.99959	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.08726	0.27595	0.47110	0.75547	0.98785	0.99999	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.40800	0.72696	0.89798	0.99037	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.28690	0.60819	0.82529	0.97726	0.99995	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.11633	0.35317	0.60626	0.90512	0.99966	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.24221	0.46298	0.63388	0.87425	0.99966	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.20694	0.40161	0.56332	0.80667	0.99583	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.15961	0.31186	0.44939	0.68054	0.96339	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.11134	0.36765	0.60326	0.91382	0.99995	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.07836	0.28797	0.49053	0.81940	0.99186	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.03326	0.18188	0.33226	0.62405	0.97933	1.00000	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.44237	0.80503	0.95154	0.99838	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.31633	0.68920	0.89734	0.99502	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.13247	0.40984	0.69872	0.96046	0.99996	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.39200	0.68100	0.86200	0.98800	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.19700	0.53000	0.77200	0.95200	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.07100	0.22800	0.37900	0.70500	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

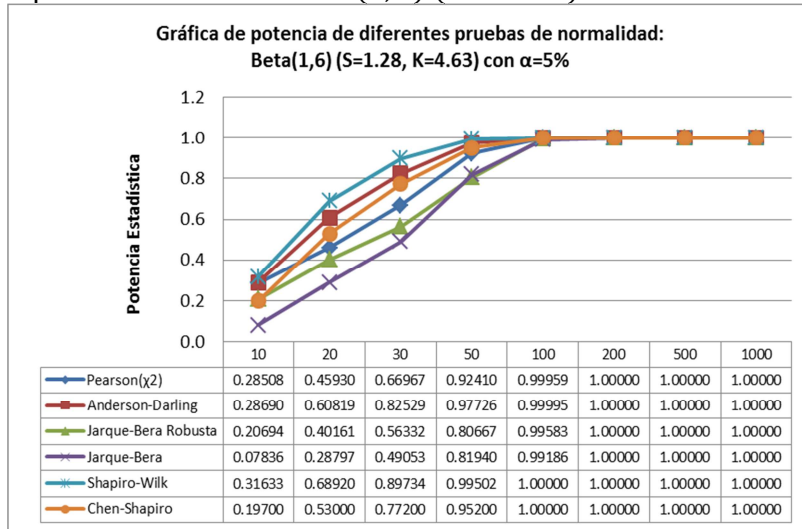
Fuente: Elaboración propia.

Figura 117. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Beta(1,6)** ($\alpha = 0.01$).



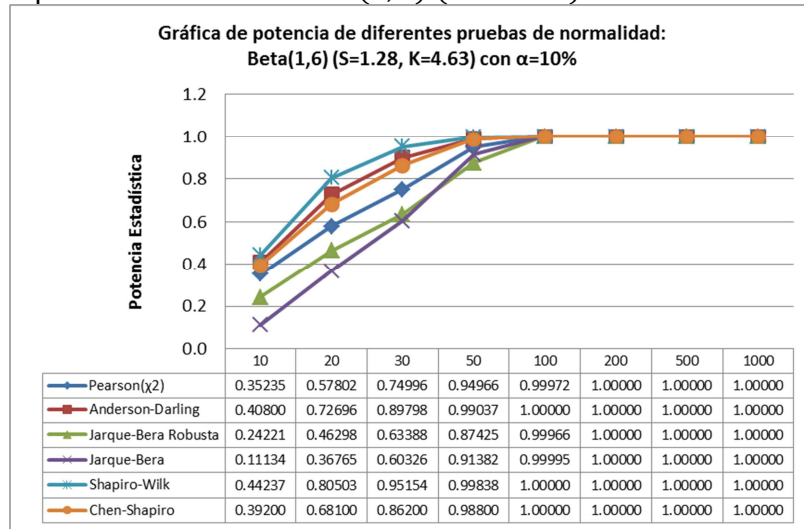
Fuente: Elaboración propia.

Figura 118. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Beta(1,6)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 119. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Beta(1,6)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

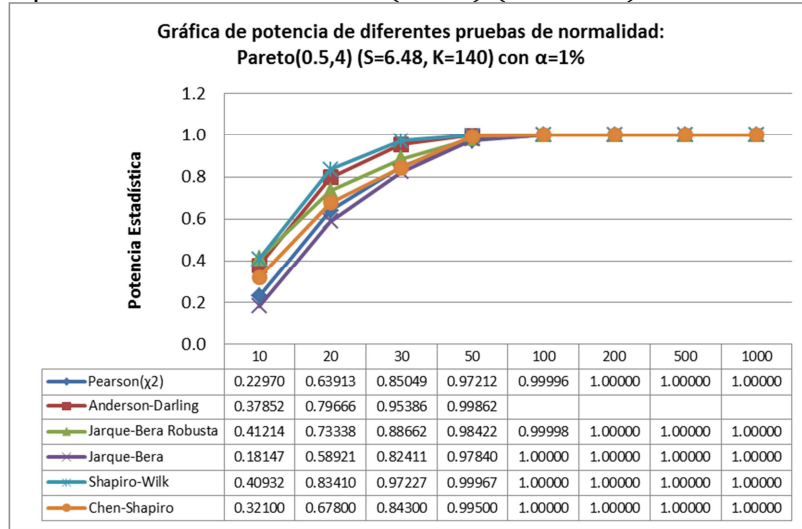
Tabla 27. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Pareto(0.5,4)*.

m= 100,000		Pareto(0.5,4)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.63442	0.89998	0.97810	0.99957	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.55938	0.85244	0.96469	0.99844	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.22970	0.63913	0.85049	0.97212	0.99996	1.00000	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.68596	0.94916	0.99395	0.99994	NaN	NaN	NaN	NaN
5%	0.58486	0.91409	0.98695	0.99989	NaN	NaN	NaN	NaN
1%	0.37852	0.79666	0.95386	0.99862	NaN	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.50646	0.82325	0.94614	0.99705	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.46562	0.79072	0.92542	0.99337	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.41214	0.73338	0.88662	0.98422	0.99998	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.32834	0.76588	0.93822	0.99871	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.27131	0.69946	0.90260	0.99516	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.18147	0.58921	0.82411	0.97840	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.71676	0.97061	0.99801	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.61463	0.94205	0.99462	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.40932	0.83410	0.97227	0.99967	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.66500	0.93100	0.99400	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.51000	0.87300	0.97100	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.32100	0.67800	0.84300	0.99500	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

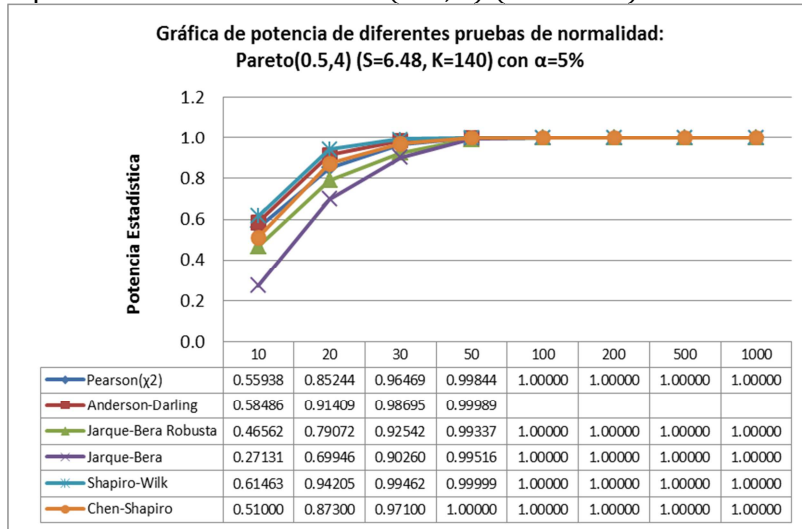
Fuente: Elaboración propia.

Figura 120. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Pareto(0.5,4)** ($\alpha = 0.01$).



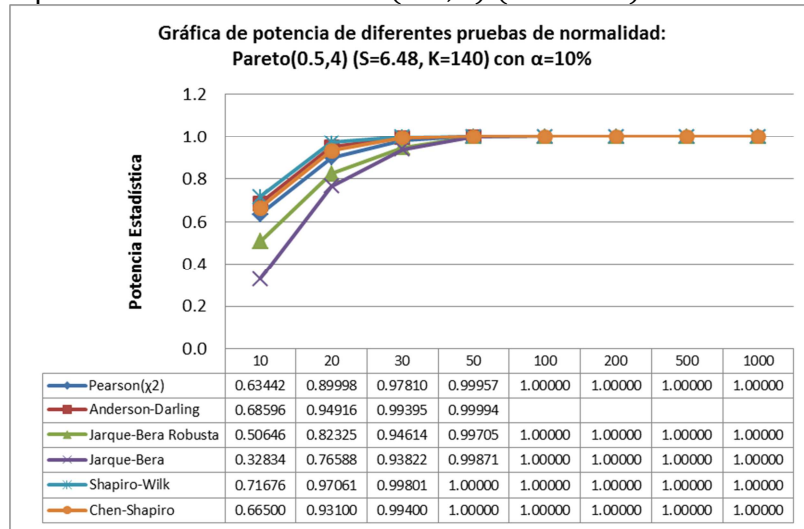
Fuente: Elaboración propia (2015).

Figura 121. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Pareto(0.5,4)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 122. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Pareto(0.5,4)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

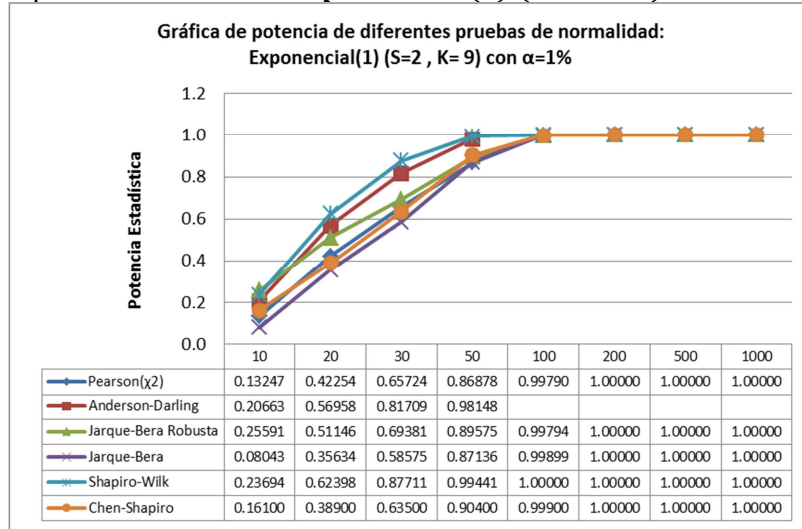
Tabla 28. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Exponencial(1)*.

m= 100,000		Exponencial(1)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.47261	0.74598	0.89849	0.99147	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.39310	0.65707	0.85096	0.98331	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.13247	0.42254	0.65724	0.86878	0.99790	1.00000	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.53598	0.85742	0.96527	0.99883	NaN	NaN	NaN	NaN
5%	0.41091	0.77611	0.93408	0.99685	NaN	NaN	NaN	NaN
1%	0.20663	0.56958	0.81709	0.98148	NaN	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.35511	0.64881	0.82571	0.97132	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.31766	0.59477	0.77630	0.94786	0.99989	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.25591	0.51146	0.69381	0.89575	0.99794	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.19424	0.56454	0.80721	0.98333	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.14801	0.47773	0.72588	0.95359	0.99997	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.08043	0.35634	0.58575	0.87136	0.99899	1.00000	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.56766	0.90546	0.98592	0.99987	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.44460	0.83552	0.96694	0.99937	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.23694	0.62398	0.87711	0.99441	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.48600	0.84700	0.96500	0.99700	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.31200	0.69100	0.88100	0.98900	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.16100	0.38900	0.63500	0.90400	0.99900	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

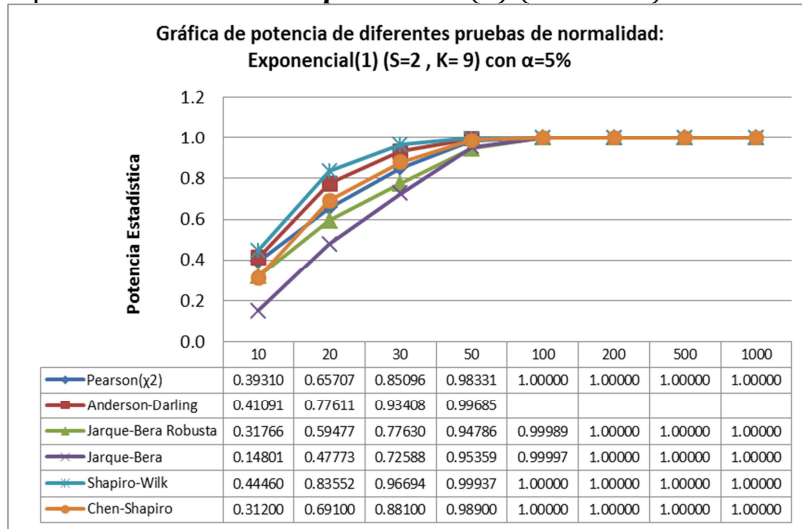
Fuente: Elaboración propia.

Figura 123. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Exponencial(1)* ($\alpha = 0.01$).



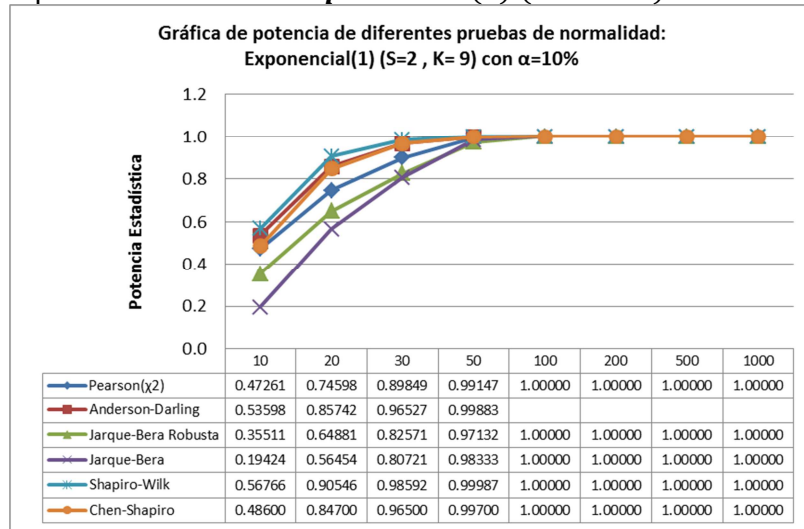
Fuente: Elaboración propia.

Figura 124. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Exponencial(1)* ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 125. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución *Exponencial(1)* ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

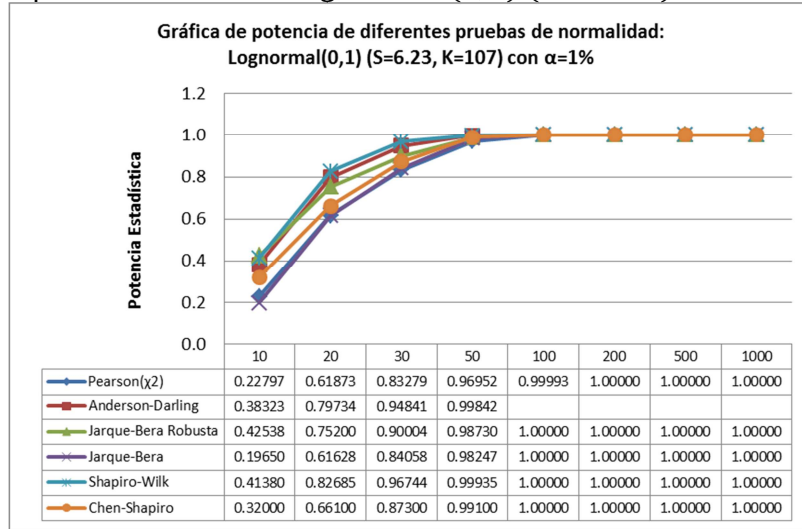
Tabla 29. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Lognormal(0,1)*.

m= 100,000		Lognormal(0,1)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.61840	0.88364	0.96963	0.99871	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.54271	0.82736	0.95037	0.99730	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.22797	0.61873	0.83279	0.96952	0.99993	1.00000	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.71874	0.98251	0.99878	0.99991	NaN	NaN	NaN	NaN
5%	0.58033	0.90486	0.98366	0.99973	NaN	NaN	NaN	NaN
1%	0.38323	0.79734	0.94841	0.99842	NaN	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.52109	0.83860	0.95148	0.99769	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.48318	0.80819	0.93451	0.99485	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.42538	0.75200	0.90004	0.98730	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.34109	0.78423	0.94467	0.99870	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.28481	0.72322	0.91311	0.99578	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.19650	0.61628	0.84058	0.98247	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.70400	0.96134	0.99618	0.99996	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.60422	0.93105	0.99168	0.99998	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.41380	0.82685	0.96744	0.99935	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.64000	0.92400	0.99400	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.51400	0.85400	0.98000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.32000	0.66100	0.87300	0.99100	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

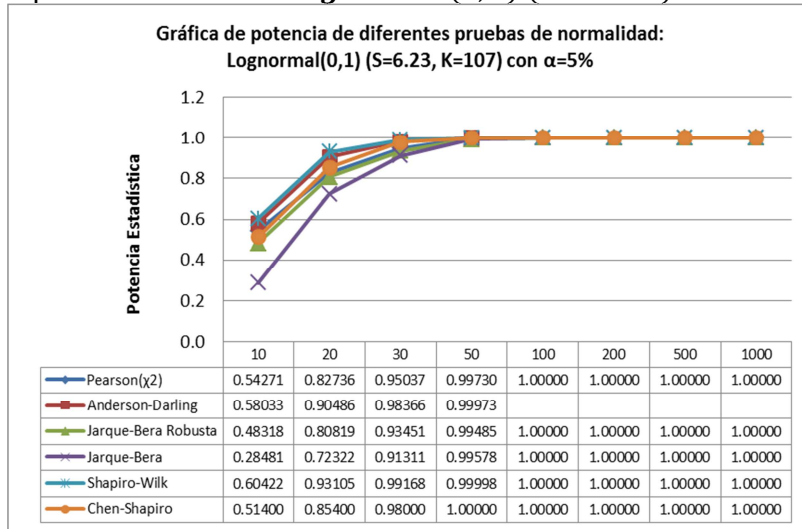
Fuente: Elaboración propia.

Figura 126. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Lognormal(0,1)** ($\alpha = 0.01$).



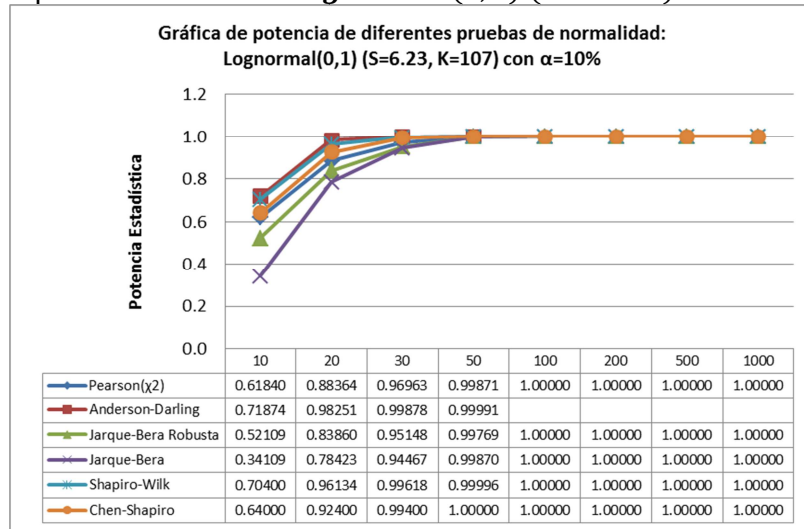
Fuente: Elaboración propia.

Figura 127. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Lognormal(0,1)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 128. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Lognormal(0,1)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

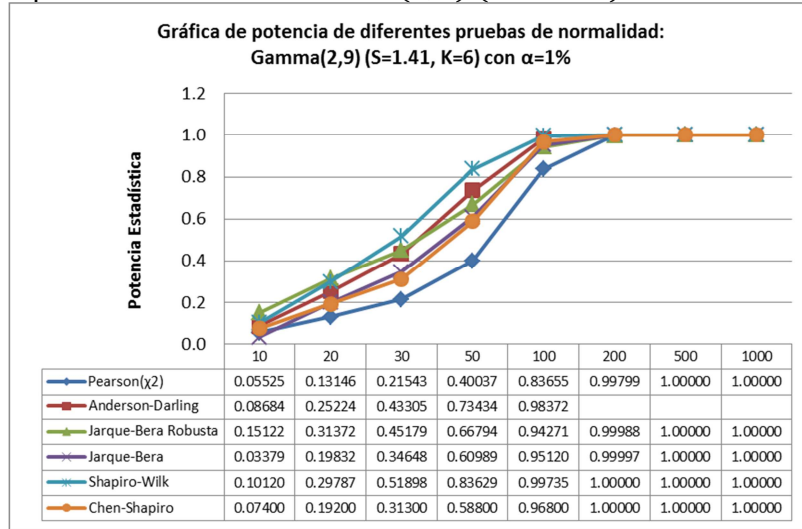
Tabla 30. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Gamma(2, 9)*.

m= 100,000		Gamma(2,9)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.26108	0.41854	0.53991	0.74922	0.97169	0.99994	1.00000	1.00000
5%	0.19750	0.28252	0.41236	0.65177	0.94899	0.99979	1.00000	1.00000
1%	0.05525	0.13146	0.21543	0.40037	0.83655	0.99799	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.33009	0.58219	0.76482	0.93919	0.99896	NaN	NaN	NaN
5%	0.22179	0.46239	0.65939	0.89212	0.99709	NaN	NaN	NaN
1%	0.08684	0.25224	0.43305	0.73434	0.98372	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.23160	0.43933	0.60702	0.83544	0.99531	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.19562	0.39045	0.54673	0.77337	0.98473	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.15122	0.31372	0.45179	0.66794	0.94271	0.99988	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.10901	0.35625	0.56051	0.85023	0.99804	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.07763	0.28481	0.47421	0.76406	0.99141	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.03379	0.19832	0.34648	0.60989	0.95120	0.99997	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.34733	0.65217	0.84023	0.97604	0.99996	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.24015	0.53163	0.74980	0.94980	0.99982	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.10120	0.29787	0.51898	0.83629	0.99735	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.31500	0.59400	0.77900	0.94800	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.18200	0.41500	0.62700	0.88900	0.99700	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.07400	0.19200	0.31300	0.58800	0.96800	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

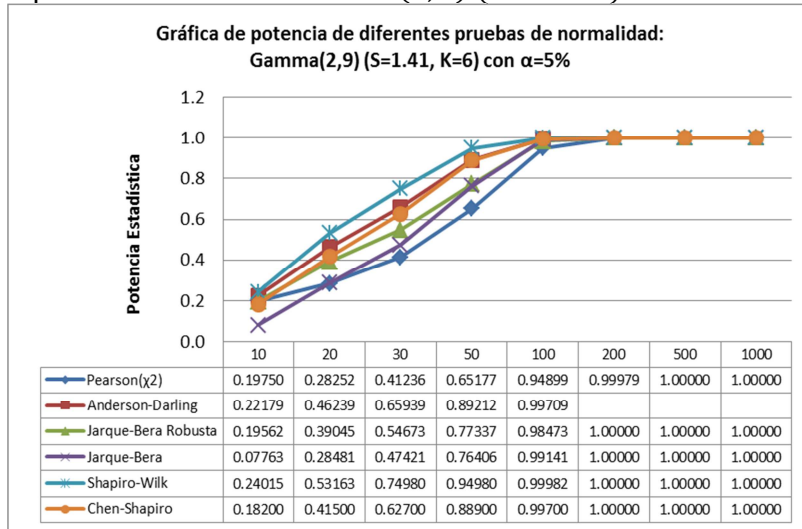
Fuente: Elaboración propia.

Figura 129. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $\text{Gamma}(2, 9)$ ($\alpha = 0.01$).



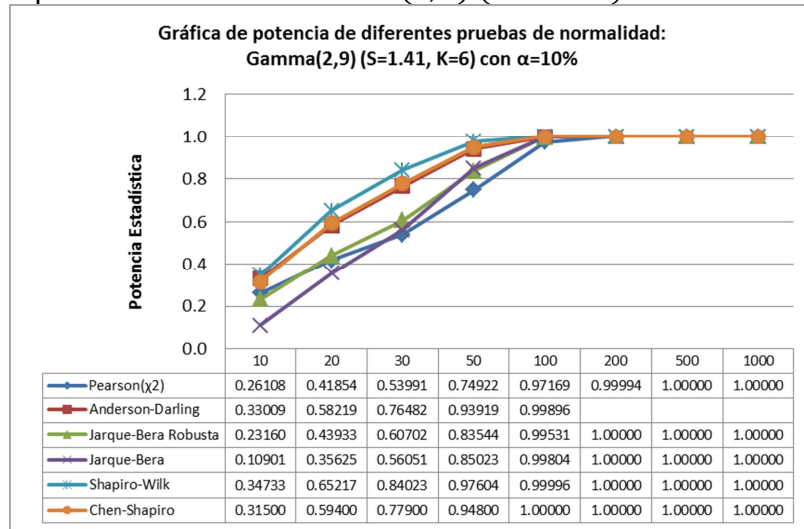
Fuente: Elaboración propia.

Figura 130. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $\text{Gamma}(2, 9)$ ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 131. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $\text{Gamma}(2, 9)$ ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

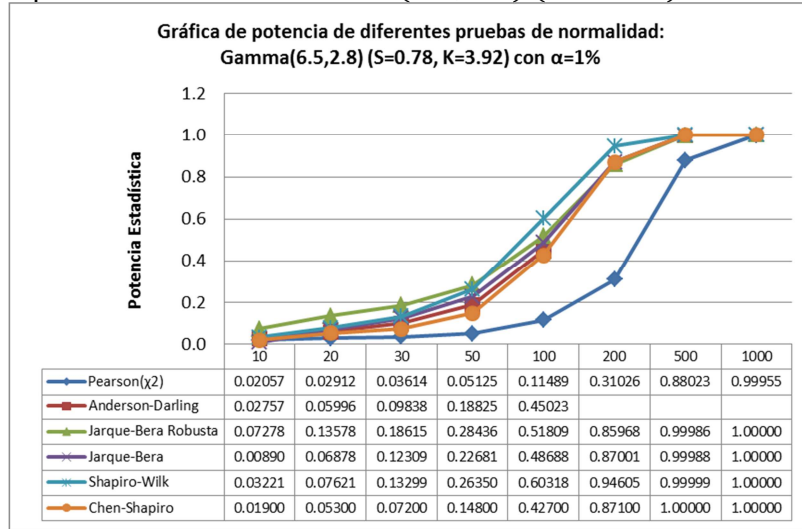
Tabla 31. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Gamma*(6.5, 2.8).

m= 100,000		Gamma(6.5,2.8)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.14738	0.19319	0.21403	0.25332	0.40442	0.68390	0.98331	0.99999
5%	0.09534	0.09318	0.11548	0.15899	0.27937	0.56003	0.96437	0.99996
1%	0.02057	0.02912	0.03614	0.05125	0.11489	0.31026	0.88023	0.99955
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.16917	0.26046	0.34545	0.50099	0.78534	0.97297	1.00000	NaN
5%	0.09878	0.16936	0.24056	0.38294	0.68189	0.94734	NaN	NaN
1%	0.02757	0.05996	0.09838	0.18825	0.45023	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.12375	0.21754	0.29861	0.45435	0.75186	0.98074	1.00000	1.00000
5%	0.10053	0.18530	0.25588	0.38217	0.66632	0.95350	1.00000	1.00000
1%	0.07278	0.13578	0.18615	0.28436	0.51809	0.85968	0.99986	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.04450	0.14996	0.24338	0.42299	0.77388	0.98631	1.00000	1.00000
5%	0.02721	0.11250	0.19175	0.33806	0.66922	0.96402	1.00000	1.00000
1%	0.00890	0.06878	0.12309	0.22681	0.48688	0.87001	0.99988	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.17346	0.29399	0.40334	0.59639	0.87783	0.99367	1.00000	1.00000
5%	0.10488	0.19736	0.29320	0.47801	0.80349	0.98641	1.00000	1.00000
1%	0.03221	0.07621	0.13299	0.26350	0.60318	0.94605	0.99999	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.15500	0.26400	0.37800	0.54300	0.87300	0.98700	1.00000	1.00000
5%	0.09900	0.16100	0.24200	0.40100	0.72300	0.97800	1.00000	1.00000
1%	0.01900	0.05300	0.07200	0.14800	0.42700	0.87100	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

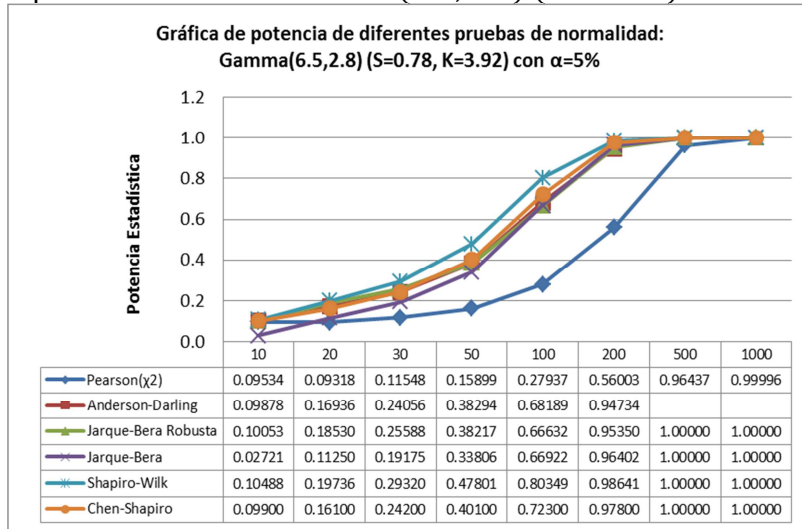
Fuente: Elaboración propia.

Figura 132. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $\text{Gamma}(6.5, 2.8)$ ($\alpha = 0.01$).



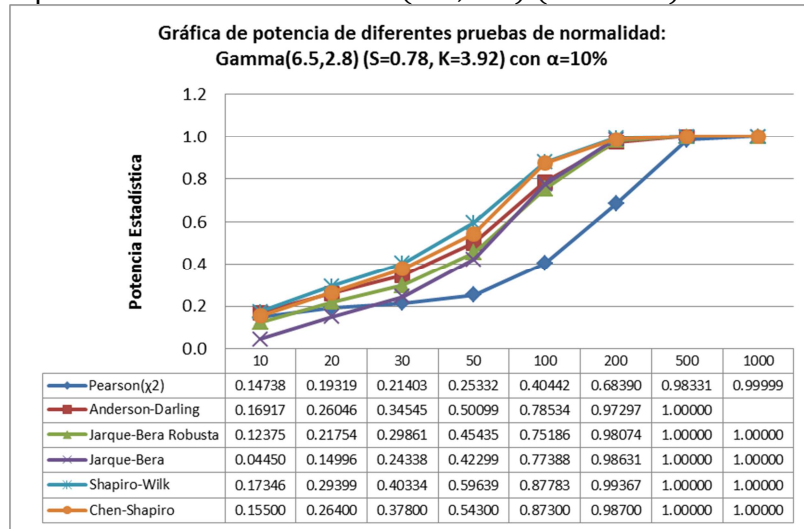
Fuente: Elaboración propia.

Figura 133. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $\text{Gamma}(6.5, 2.8)$ ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 134. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución $\text{Gamma}(6.5, 2.8)$ ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

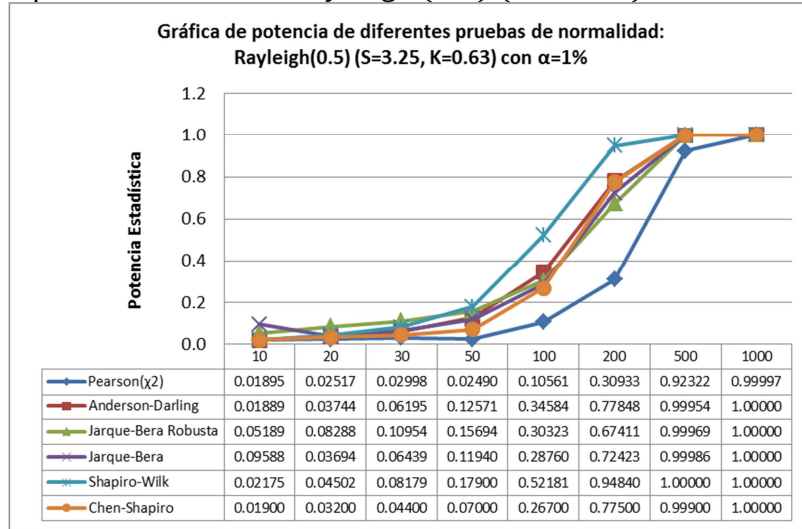
Tabla 32. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Rayleigh(0.5)*.

m= 100,000		Rayleigh(0.5)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.13278	0.17312	0.18778	0.22201	0.37371	0.67687	0.99162	1.00000
5%	0.08455	0.07720	0.09674	0.13865	0.25470	0.55350	0.98092	1.00000
1%	0.01895	0.02517	0.02998	0.02490	0.10561	0.30933	0.92322	0.99997
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.15049	0.21721	0.29598	0.44016	0.73767	0.96886	1.00000	1.00000
5%	0.07978	0.13013	0.18605	0.30982	0.61143	0.93079	0.99999	1.00000
1%	0.01889	0.03744	0.06195	0.12571	0.34584	0.77848	0.99954	1.00000
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.09350	0.15179	0.20594	0.30922	0.60503	0.96736	1.00000	1.00000
5%	0.07500	0.12025	0.16168	0.24112	0.47808	0.90240	1.00000	1.00000
1%	0.05189	0.08288	0.10954	0.15694	0.30323	0.67411	0.99969	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.03024	0.09726	0.15840	0.29101	0.66850	0.98036	1.00000	1.00000
5%	0.01843	0.06826	0.11554	0.20781	0.50137	0.93461	1.00000	1.00000
1%	0.09588	0.03694	0.06439	0.11940	0.28760	0.72423	0.99986	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.15109	0.25162	0.35550	0.55930	0.88241	0.99817	1.00000	1.00000
5%	0.08478	0.15263	0.23786	0.41446	0.78998	0.99248	1.00000	1.00000
1%	0.02175	0.04502	0.08179	0.17900	0.52181	0.94840	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.13300	0.22000	0.32400	0.48600	0.80000	0.99100	1.00000	1.00000
5%	0.09100	0.11200	0.17700	0.32600	0.64760	0.95900	1.00000	1.00000
1%	0.01900	0.03200	0.04400	0.07000	0.26700	0.77500	0.99900	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

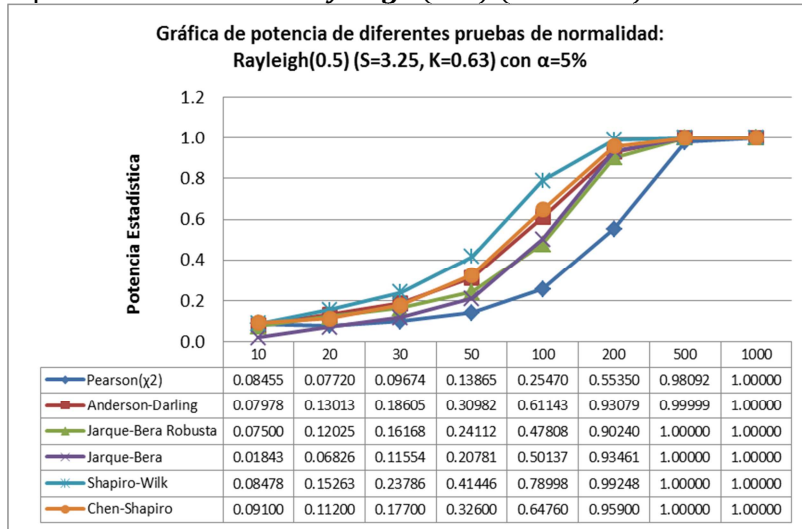
Fuente: Elaboración propia.

Figura 135. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Rayleigh(0.5)** ($\alpha = 0.01$).



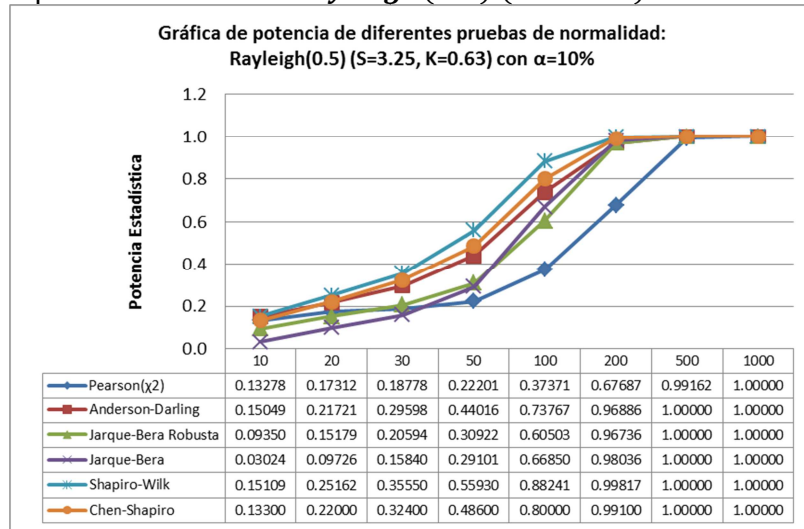
Fuente: Elaboración propia.

Figura 136. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Rayleigh(0.5)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 137. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Rayleigh(0.5)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

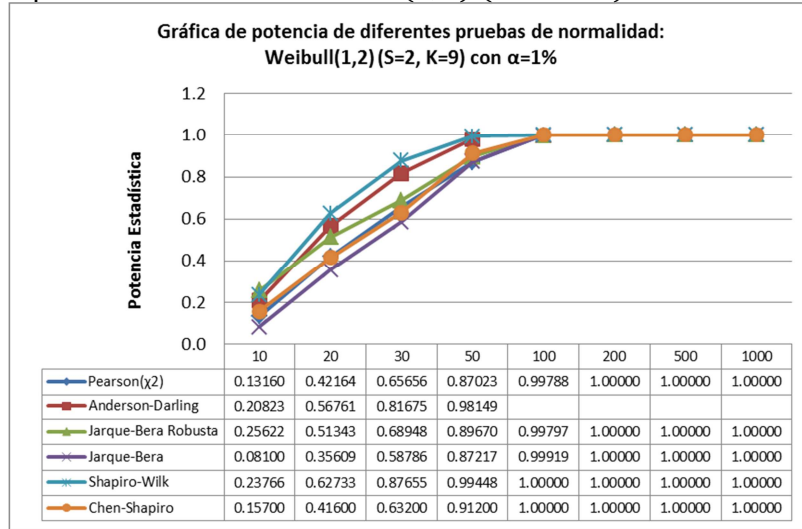
Tabla 33. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Weibull*(1, 2).

m= 100,000		Weibull(1,2)						
n	10	20	30	50	100	200	500	1000
α		Pearson (P)						
10%	0.47092	0.74908	0.89856	0.99158	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.39549	0.65383	0.85251	0.98345	0.99997	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.13160	0.42164	0.65656	0.87023	0.99788	1.00000	1.00000	1.00000
α		Anderson-Darling (AD)						
10%	0.53460	0.85671	0.96658	0.99903	NaN	NaN	NaN	NaN
5%	0.41189	0.77467	0.93243	0.99670	1.00000	NaN	NaN	NaN
1%	0.20823	0.56761	0.81675	0.98149	NaN	NaN	NaN	NaN
α		Jarque-Bera Robusta (RJB)						
10%	0.35357	0.64688	0.82433	0.97127	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.31596	0.59813	0.77756	0.94780	0.99992	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.25622	0.51343	0.68948	0.89670	0.99797	1.00000	1.00000	1.00000
α		Jarque-Bera (JB)						
10%	0.19523	0.56137	0.80783	0.98239	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.14614	0.47995	0.72486	0.95512	0.99999	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.08100	0.35609	0.58786	0.87217	0.99919	1.00000	1.00000	1.00000
α		Shapiro-Wilk (SW)						
10%	0.56906	0.90519	0.98560	0.99984	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.44506	0.83404	0.96777	0.99957	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.23766	0.62733	0.87655	0.99448	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
α		Chen-Shapiro (QH)*						
10%	0.53700	0.81500	0.95700	0.99800	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
5%	0.34500	0.70000	0.89900	0.99100	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1%	0.15700	0.41600	0.63200	0.91200	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

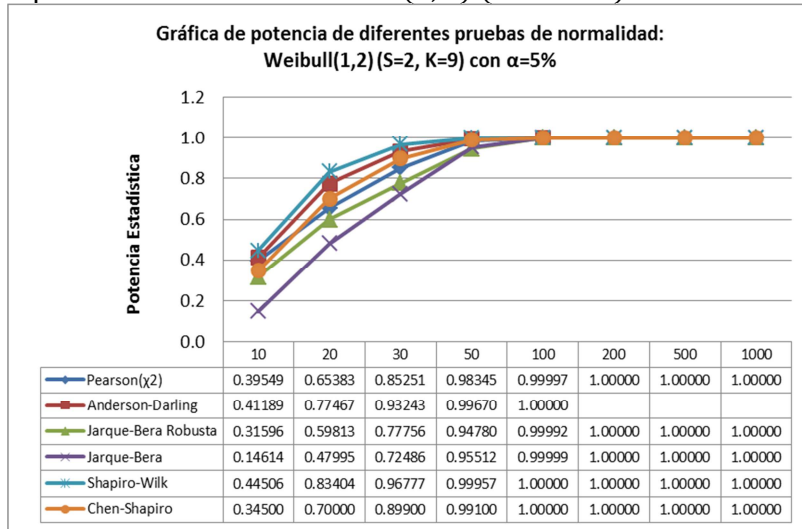
Fuente: Elaboración propia.

Figura 138. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Weibull(1,2)** ($\alpha = 0.01$).



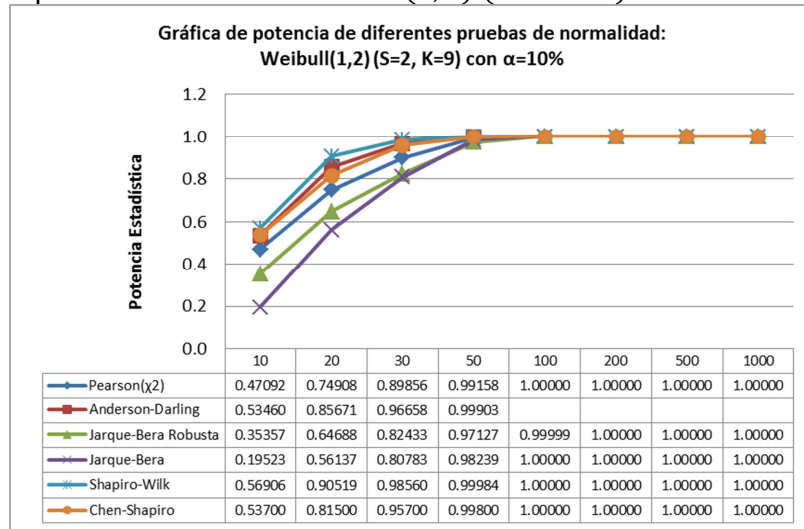
Fuente: Elaboración propia.

Figura 139. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Weibull(1,2)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 140. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Weibull(1,2)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.

ANEXO 12. TABLAS Y FIGURAS DEL PROMEDIO DE POTENCIA ESTADÍSTICA PARA DISTRIBUCIONES ASIMÉTRICAS PLATICÚRTICAS.

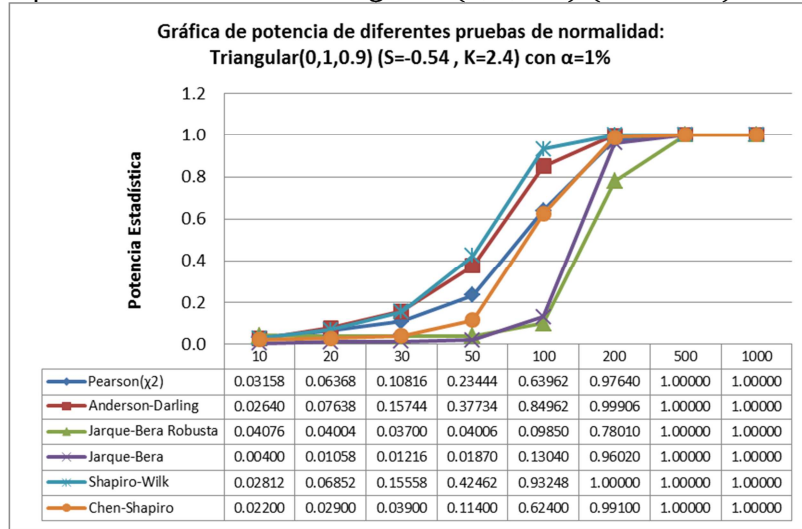
Tabla 34. Promedio de Potencia de las pruebas de normalidad para la distribución *Triangular(0, 1, 0.9)*.

m= 100,000		Triangular(0, 1, 0.9)							
n	10	20	30	50	100	200	500	1000	
α	Pearson (P)								
10%	0.18053	0.25709	0.33771	0.52463	0.87218	0.99767	1.00000	1.00000	
5%	0.12195	0.14542	0.22530	0.42115	0.80711	0.99443	1.00000	1.00000	
1%	0.03323	0.06674	0.10540	0.23573	0.63867	0.97671	1.00000	1.00000	
α	Anderson-Darling (AD)								
10%	0.20199	0.36347	0.52451	0.78041	0.98542	0.99999	1.00000	1.00000	
5%	0.11262	0.23517	0.38121	0.65371	0.96421	0.99996	1.00000	1.00000	
1%	0.02672	0.07590	0.15464	0.37887	0.85105	0.99911	1.00000	1.00000	
α	Jarque-Bera Robusta (RJB)								
10%	0.07716	0.08919	0.10804	0.17192	0.74155	0.99993	1.00000	1.00000	
5%	0.06081	0.06598	0.07268	0.10102	0.37609	0.99700	1.00000	1.00000	
1%	0.03937	0.03757	0.03595	0.04114	0.09616	0.78159	1.00000	1.00000	
α	Jarque-Bera(JB)								
10%	0.02277	0.04657	0.07556	0.22380	0.91238	0.99998	1.00000	1.00000	
5%	0.01260	0.02722	0.03807	0.09009	0.67014	0.99964	1.00000	1.00000	
1%	0.00446	0.01013	0.01192	0.01908	0.13156	0.95954	1.00000	1.00000	
α	Shapiro-Wilk (SW)								
10%	0.21199	0.41293	0.61019	0.87469	0.99814	1.00000	1.00000	1.00000	
5%	0.11890	0.26098	0.44321	0.75850	0.99171	1.00000	1.00000	1.00000	
1%	0.02767	0.07007	0.15478	0.42235	0.93122	1.00000	1.00000	1.00000	
α	Chen-Shapiro (QH)*								
10%	0.19900	0.35400	0.46400	0.70700	0.98000	1.00000	1.00000	1.00000	
5%	0.11200	0.16700	0.29800	0.54200	0.93000	0.99900	1.00000	1.00000	
1%	0.02200	0.02900	0.03900	0.11400	0.62400	0.99100	1.00000	1.00000	

* Para la prueba QH se realizaron mil repeticiones ($m = 1,000$)

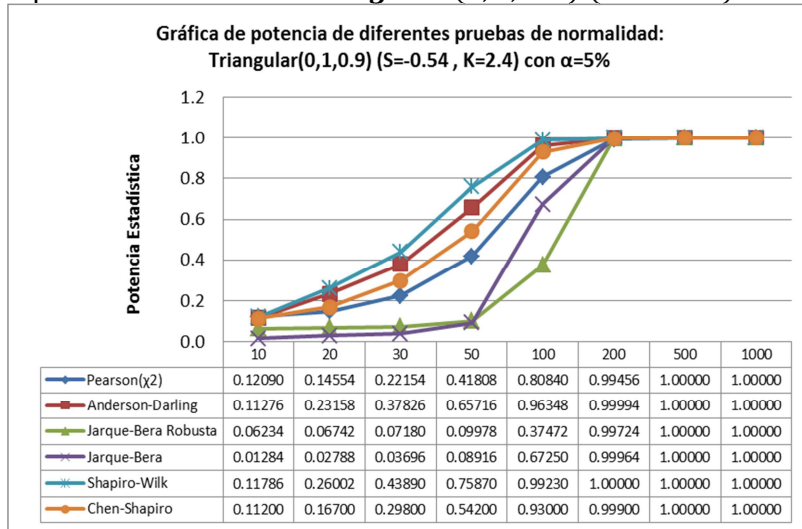
Fuente: Elaboración propia.

Figura 141. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Triangular(0,1,0.9)** ($\alpha = 0.01$).



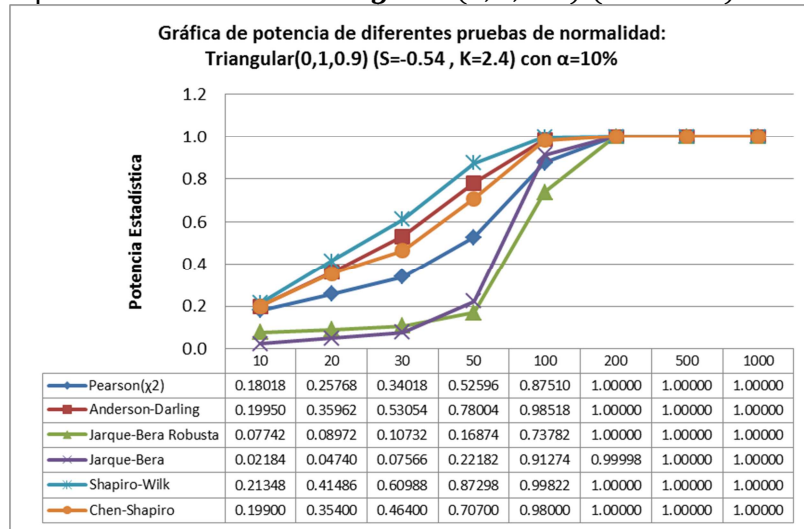
Fuente: Elaboración propia.

Figura 142. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Triangular(0,1,0.9)** ($\alpha = 0.05$).



Fuente: Elaboración propia.

Figura 143. Comparación del promedio de la potencia para diferentes pruebas de normalidad para la distribución **Triangular(0,1,0.9)** ($\alpha = 0.10$).



Fuente: Elaboración propia.