



**Universidad Autónoma del Estado
de México**

Facultad de Ciencias

**“SOLITONES NO AUTÓNOMOS
DE LA ECUACIÓN NO LINEAL
DE HIROTA”**

**TESIS PARA OBTENER TITULO DE
FÍSICO**

**PRESENTA:
HUGO FERNANDO JUÁREZ SÁNCHEZ**

**DIRECTORES:
DRA. TATYANA BELYAeva LEONIDOVNA
DR. VLADIMIR SERKIN**

**TOLUCA, ESTADO DE MÉXICO
NOVIEMBRE DEL 2018**

AGRADECIMIENTOS

Dedico el presente a mi esposa Gabriela Nava Alonso y a mis hijos Fernando Jesús y Enrique, que con su amor y confianza me impulsaron a seguir adelante. Gracias.

Gracias a mis padres Gregorio Juárez Camargo y Araceli Sánchez Monroy, por todo su amor y apoyo incondicional que me ofrecieron durante mi trayecto académico.

A la Doctora Tatyana Belyaeva Leonidovna por el tiempo, apoyo y confianza brindado para alcanzar esta meta, y de quien estaré siempre agradecido.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	4
CAPÍTULO I	
CONCEPTOS GENERALES	
1.1 Antecedentes históricos	6
1.2 La ecuación de Schrödinger no lineal	11
1.3 La integrabilidad exacta de la ecuación de Schrödinger no lineal y el problema de dispersión inversa	12
1.4 Los pares de Lax para la NLSE	13
1.5 Sistemas autónomos y no autónomos	16
1.6 La ecuación no lineal de Hirota	19
CAPÍTULO II	
LA INTEGRABILIDAD DE LA ECUACIÓN NO AUTÓNOMA DE HIROTA	
2.1 La ecuación no autónoma de Hirota y su par de Lax	20
2.2 La ecuación no autónoma de Hirota sin coeficiente de amplificación	24
CAPÍTULO III	
SOLUCIONES SOLITÓNICAS DE LA ECUACIÓN NO AUTÓNOMA DE HIROTA	
3.1 Soluciones solitónicas de la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal	26
3.2 Ejemplos de las soluciones de la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal	28
3.3 Los estados ligados de los solitones de la ecuación de Hirota	36
CAPÍTULO IV	
CONCLUSIONES	
4.1 Conclusiones	42
REFERENCIAS	46

INTRODUCCIÓN

La ciencia no lineal se encuentra en la frontera más importante para entender la naturaleza [1,2]. La interpenetración de las principales ideas y métodos que se utilizan en diferentes campos de la ciencia y la tecnología se ha convertido en uno de los factores decisivos en el progreso de la ciencia en general. Entre los ejemplos más espectaculares de tal intercambio de ideas y métodos teóricos para el análisis de diversos fenómenos físicos está el problema de la formación de solitones.

Los solitones son ondas solitarias no lineales, auto-localizadas, robustas y de larga vida. Ellos no se dispersan y preservan su identidad durante la propagación y después de una colisión. Surgen en cualquier sistema físico que posea tanto no linealidad como dispersión. El día de hoy el concepto de solitones proporciona un ejemplo notable en el que una solución matemática abstracta ha producido un gran impacto en el mundo real de las altas tecnologías. Durante las últimas décadas de su desarrollo, el concepto de solitón ha reunido a matemáticos y físicos de diferentes áreas, en particular, de la física de la materia condensada, atómica y de baja temperatura, óptica no lineal, mecánica de fluidos y física de partículas.

Históricamente, fue siete años después de la predicción teórica de Hasegawa y Tappert [3,4] que la transmisión de un solitón se demostró con éxito experimentalmente en una fibra óptica por Mollenauer, Stolen y Gordon [5].

El concepto de solitón canónico se desarrolló para sistemas no lineales y dispersivos que han sido autónomos (descritos por ecuaciones *autonomas* con coeficientes de dispersión y no linealidad constantes); es decir, el tiempo solo ha desempeñado el papel de la variable independiente y no ha aparecido explícitamente en la ecuación de evolución no lineal [6-10]. De otro lado, los sistemas físicos *no autonomos* sometidos a algún tipo de esfuerzo externo son de gran interés porque son mucho más comunes y realistas, y no están idealizados como canónicos autónomos. Tales situaciones podrían incluir golpes repetidos a un solitón en medios no uniformes con gradientes de densidad dependientes del tiempo. Estas situaciones son típicas para experimentos con solitones ópticos temporales y espaciales, láseres de solitones e interruptores de solitones ultrarrápidos y puertas lógicas. La formación de solitones de onda de materia en condensados de Bose-Einstein (BEC) ajustando magnéticamente la interacción interatómica cerca de una resonancia de Feshbach proporciona un buen ejemplo de un sistema no lineal no autónomo [11,12].

En términos generales, el concepto de solitones no autónomos se introdujo para los sistemas no lineales y dispersivos dirigidos por modelos no lineales no autónomos (de coeficientes variables) con potenciales externos que varían en tiempo y espacio. Las soluciones de solitón para los modelos de ecuaciones no lineales de Schrödinger (NLSE) con dispersión, no linealidad, ganancia o absorción variables y, en casos más generales, sujetos a potenciales externos que varían en tiempo y espacio, amplían sustancialmente el concepto de solitones clásicos y lo generalizan a la abundancia de solitones no autónomos que interactúan elásticamente y generalmente se mueven con amplitudes, velocidades y espectros variables [13-18]. Se demostró que los solitones no autónomos existen solo bajo ciertas condiciones, y las funciones de parámetros que describen dispersión variable, no linealidad, ganancia o absorción y potenciales externos no homogéneos no pueden elegirse independientemente: ellos satisfacen a las leyes de adaptación de solitones tanto a los potenciales externos como a las variaciones de dispersión y no linealidad.

Hasta ahora, a diferencia de los solitones canónicos, se conocen muy pocos detalles sobre la integrabilidad completa de los modelos no lineales no autónomos distintos de la NLSE. Los solitones no autónomos son en cierto modo diferentes de los solitones canónicos en los sistemas autónomos, y de otras maneras iguales [13].

El concepto de solitón no autónomo se cultiva sobre la base de jerarquías no espectrales de Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) [19] en el marco de la transformación de dispersión inversa [20-26] con parámetro espectral variable introducido por primera vez por Chen y Liu [27] para la NLSE, Hirota y Satsuma para la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) en medios no uniformes [28].

1 CAPÍTULO I: CONCEPTOS GENERALES

1.1 Antecedentes históricos

El origen al moderno estudio de los solitones, comenzó con James Scott Russell (1808-1882), un ingeniero civil y arquitecto naval escocés, tras la observación de una ola de traslación hecho hace de casi dos siglos atrás [30].

En agosto de 1834, mientras realizaba experimentos para determinar el diseño más eficiente para los barcos en un canal angosto cerca de Edimburgo, descubrió un fenómeno que describió como la ola de la traslación que lograba avanzar varios kilómetros sin desvanecerse. En dinámica de fluidos, la ola ahora se llama la onda solitaria de Russell. Scott Russell pasó un tiempo haciendo investigaciones prácticas y teóricas de estas ondas y notó algunas de sus propiedades. Las ondas son estables y pueden viajar a distancias muy grandes (las ondas normales tenderían a aplanarse, a inclinarse y a volcarse). La velocidad depende del tamaño de la ola y su ancho en la profundidad del agua. A diferencia de las ondas lineales (normales), nunca se fusionarán, por lo que una onda pequeña es superada por una grande, en lugar de combinarse. Si una ola es demasiado grande para la profundidad del agua, se divide en dos, una grande y una pequeña.

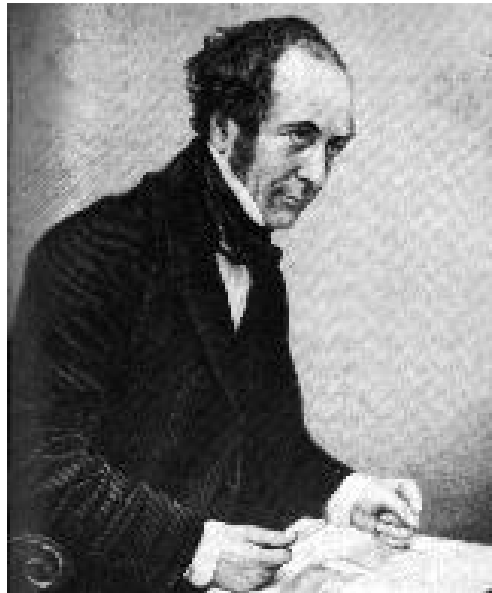
Esta observación inspiró a Russell a comenzar la investigación experimental sistemáticamente de las ondas superficiales en el agua, y en particular, las ondas en aguas de baja profundidad.

Existen múltiples modelos que describen la propagación de estas ondas. Ellos contienen términos dispersivos y no lineales. Entre estos modelos se encuentra la famosa ecuación de Korteweg-de Vries (KdV):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

que describe exactamente la gran ola solitaria de la traslación de Russell.

Los matemáticos holandeses Diedereik Johannes Korteweg (1848-1941) y su estudiante Gustav de Vries (1866-1934), hallaron esta ecuación en 1895, mientras buscaban una explicación para el fenómeno observado por Russell. La ecuación KdV permaneció casi olvidada hasta 1965, cuando Norman Zabusky y Martin Kruskal [31] la re-descubrieron al examinar el fenómeno de recurrencia descubierto por Fermi, Pasta y Ulam en 1955, mientras estudiaban la propagación de calor en sólidos mediante un modelo unidimensional sencillo.



- Fig. 1. James Scott Russell.



- Fig. 2. E. Fermi E., J. R. Pasta y S. M. Ulam.

Zabusky y Kruskal hallaron numéricamente que la ecuación KdV describe la propagación de pulsos de distintas alturas y velocidades, que recuperan sus formas y velocidades originales después de chocar entre sí. Sorprendidos por este comportamiento, Zabusky y Kruskal propusieron el nombre de “solitón” para designar a estas curiosas ondas no lineales. El final griego "on" se utiliza generalmente para nombrar las partículas elementales y la palabra solitón se introdujo para hacer hincapié en la característica más notable de estas ondas: propagar como partículas. Zabusky y Kruskal mencionaron otra propiedad de los solitones, que los solitones después de un choque mantienen sus formas y velocidades, dispersando elásticamente por completo.

Dos años después, Gardner, Greene, Kruskal y Miura (GGKM) [20] desarrollarían el nuevo método de la transformación inversa del problema de dispersión conocido en inglés como “inverse scattering transform” (IST). La transformada de dispersión inversa (IST) permitía resolver el problema de condiciones iniciales para la ecuación KdV [20] y estableció el método para resolver las ecuaciones diferenciales parciales no lineales en una forma bastante general. En los años siguientes se continuó estudiando intensivamente la ecuación KdV, la cual pronto se convirtió en el prototipo de las ecuaciones “solitónicas”.

El matemático estadounidense Peter Lax en 1968 [21] esencialmente generalizó las ideas de GGKM y formuló la teoría rigurosa matemática. Zakharov y Shabat en 1972 [22] mostraron que este método aplica para otras ecuaciones de interés físico, como la NLSE [22,23]. Utilizando estas ideas Ablowitz, Kaup, Newell y Segur en 1973 [19] desarrollaron el método de construcción de los pares de Lax para muchas ecuaciones no lineales de evolución, demostrando así sus integrabilidades. Este método actualmente lleva el nombre de sus autores, el esquema AKNS.

A causa de las características especiales, el solitón clásico se consideró como un natural e ideal bit de datos. Solitones ópticos en fibras presentan un hermoso ejemplo en el que un concepto matemático ha producido un gran impacto en el mundo de tecnologías reales. [6-10].



- Fig. 3. El miércoles 12 de julio de 1995, una reunión internacional de científicos fue testigo de una recreación de la famosa “primera” observación de un solitón (u onda solitaria) en el Canal de la Unión, cerca de Edinburgo, en 1834. Ellos asistían a una conferencia sobre las ondas no lineales en física y biología en la Universidad Heriot-Watt, cerca del canal. El evento fue parte de una ceremonia para bautizar un nuevo acueducto con el nombre de John Scott Russell, el científico escocés que hizo la observación original.

El uso de solitones ópticos fue propuesto en 1973 por Akira Hasegawa y Fred Tappert del laboratorio Bell de la empresa AT&T, para mejorar el rendimiento de las transmisiones en las redes ópticas de telecomunicaciones [3,4]. En 1988 Linn Mollenauer y su equipo del mismo laboratorio transmitieron solitones a más de 4,000 km usando el efecto Raman (nombrado al honor de un científico indio que describió una forma de amplificar las señales en una fibra óptica). En 1991, también en el laboratorio Bell, un equipo transmitió solitones a más de 14,000 km utilizando amplificadores de erbio. En 1998 Thierry Georges y su equipo del centro de investigación y desarrollo de France Telecom combinaron solitones de longitudes de ondas diferentes para realizar una transmisión a razón superior al terabit por segundo (10^{12} bits / segundo). En 2001 los solitones encontraron una aplicación práctica con el primer equipo de telecomunicaciones, que los utilizaba para transporte de tráfico real de señales sobre una red comercial [32,33].

Los solitones surgen en cualquier sistema físico que posea tanto la no linealidad, como la dispersión. Así, una variedad de fenómenos físicos está modelada por las ecuaciones diferenciales no lineales, cuyas soluciones se presentan por las ondas no lineales. Los solitones han sido considerados como las soluciones especiales que tienen la mayor importancia para toda física de fenómenos no lineales. Gracias a las analogías matemáticas, iguales modelos matemáticos se aplican para diferentes sistemas físicos a partir de la hidrodinámica, física de bio-moléculas y plasma, hasta la óptica no lineal y las ondas de materia en condensados de Bose-Einstein.

1.2 La ecuación de Schrödinger no lineal.

El modelo de ecuación de Schrödinger no lineal

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (2)$$

es uno de los más importantes y "universales" modelos no lineales de la ciencia moderna. NLSE aparece en muchas ramas de la física y las matemáticas aplicadas, incluida la teoría de campos cuánticos no lineales, materia condensada y física de plasma, óptica no lineal y electrónica cuántica, mecánica de fluidos, teoría de la turbulencia y fase transiciones, biofísica y formación de estrellas. La corriente del estado de la técnica en este campo muy activo se revisa, por ejemplo, en [1,2,18]. Las soluciones más conocidas de la NLSE son los de ondas solitarias, o solitones. La característica principal de estas ondas localizadas es al interactuar con otros solitones en forma elástica, dándoles una calidad "parecida a una partícula". La teoría de los solitones de NLSE fue desarrollado por primera vez en 1971 por Zakharov y Shabat [22,23]. Con los años, ha habido muchas contribuciones significativas al desarrollo la teoría de solitones de la NLSE (ver, por ejemplo, [1,2,6-10] y referencias allí). Después de la predicción de la posibilidad de usar solitones en fibras ópticas y sus descubrimiento experimental [3-5], el día de hoy, el solitón óptico de la NLSE es considerado como un bit de datos ideal y como una importante alternativa para la próxima generación de telecomunicación óptica de velocidades ultra rápidas [6-10,32,33].

Esta famosa ecuación se aplica ampliamente en la física del láser y óptica no lineal, y debido a la similitud intrínseca entre la NLSE y la ecuación de Gross-Pitaevskii (GPE) para el campo media en el modelo de Bose-Einstein condensación [34,35] se usa también en física atómica de temperaturas ultra bajas. La NLSE se aplica también para descripciones matemáticas de las ondas del mar profundo en el océano [36,37]. En este sentido, ondas solitarias en océano y ondas solitarias de materia en BEC son similares a los solitones ópticos. Esta analogía abre la posibilidad de estudiar diferentes sistemas no lineales en forma paralela y, debido a la evidente complejidad de los experimentos con ondas de materia y ondas hidrodinámicas, ofrece notables posibilidades en los estudios de estos sistemas realizando experimentos en los sistemas ópticos no lineales.

1.3 La integrabilidad exacta de la ecuación de Schrödinger no lineal y el problema de dispersión inversa.

Uno de los alcances más significativos en la teoría de ondas no lineales fue el descubrimiento en 1967 del método exacto de integración de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV). El descubrimiento de Gardner, Green, Kruscal y Miura [20] concernió el comportamiento de ondas en plasma y resultó a la creación y el perfeccionamiento del método de solución de las ecuaciones no lineales de evolución obteniendo el nombre de la Transformación de Dispersión Inversa (IST). Gardner, Green, Kruscal y Miura probaron que las soluciones de la ecuación KdV exhiben un comportamiento tipo solitón.

Para responder a una pregunta principal: ¿Cómo se puede determinar si una ecuación no lineal de evolución es integrable o no? Gardner, Green, Kruscal y Miura [20], P. Lax [21], y M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, y H. Segur (AKNS) [19] formularon un principio general de la asociación de varias ecuaciones de evolución no lineales con operadores lineales.

En el trabajo de Ablowitz, Kaup, Newell y Segur [19], este principio encontró una forma muy ingeniosa y elegante que desde entonces se llama el esquema (jerarquía) AKNS. Hay un gran número de ecuaciones de evolución no lineales que presentan soluciones solitónicas, como la ecuación de Korteweg-de Vries, la ecuación de Boussinesq, la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE), la ecuación sin-Gordon, etc. Con cada de estas ecuaciones se puede asociar una par de operadores matriciales diferenciales que se llaman los pares de Lax, y desarrollar el esquema AKNS para probar su integración exacta. Si la ecuación no lineal de evolución tiene los pares de Lax, se puede encontrar sus soluciones solitónicas aplicando diferentes métodos, como el IST, las transformaciones de Bäcklund, el método de Hirota, etc. [25,26].

1.4 Los pares de Lax para la NLSE.

El fundamento del método del problema inverso utilizado en el modelo NLSE se basa en la siguiente observación importante: la NLSE (2) aparece como el resultado de la condición de la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \widehat{L}(x, t, \lambda)\psi, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \widehat{M}(x, t, \lambda)\psi, \quad (4)$$

donde

$$\psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

es una función vectorial de x y t . Las matrices \widehat{L} y \widehat{M} son de 2×2 y satisfacen a la condición de compatibilidad del sistema (3) y (4)

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{M}}{\partial x} + [\widehat{L}, \widehat{M}] = 0. \quad (6)$$

El parámetro λ se llama parámetro espectral y en caso general, puede tener la dependencia del tiempo.

La forma exacta de las matrices \widehat{L} y \widehat{M} , cuando el parámetro espectral λ no depende del tiempo, fue determinada para diferentes ecuaciones diferenciales de evolución. Siguiendo el método AKNS, los escribimos en la siguiente forma

$$\widehat{L} = \begin{pmatrix} -i\lambda & q(x, t) \\ r(x, t) & i\lambda \end{pmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \quad (7)$$

donde $q(x, t)$ y $r(x, t)$ son potenciales que satisfacen a la NLSE.

Al sustituir (7) en (6) obtenemos:

$$[\widehat{L}, \widehat{M}] = \begin{bmatrix} qC - Br & -2qA - 2i\lambda B \\ 2rA + 2i\lambda C & rA - qC \end{bmatrix} \quad (8)$$

La sustitución de la ecuación (7) y (8) en la ecuación matricial (6) toma las ecuaciones para los elementos de la matriz \widehat{M} y los potenciales $q(x, t)$ y

$r(x, t) :$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = qC - Br \quad (9)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial x} + 2qA + 2i\lambda B \quad (10)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial x} - 2rA - 2i\lambda C \quad (11)$$

Usando un procedimiento estándar para la investigación del par de Lax representamos las funciones $A(x, t, \lambda)$, $B(x, t, \lambda)$ y $C(x, t, \lambda)$ como polinomios respecto a λ

$$\begin{aligned} A &= A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \dots \\ B &= B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \dots \\ C &= C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Para obtener la NLSE, es suficiente considerar expansiones en (12) solamente arriba del término cuadrático en λ . La ecuación KdV es posible obtener cuando el término cúbico sin término cuadrado se toma en cuenta en la expansión de los elementos matriciales en el parámetro espectral λ . La ecuación de Hirota es obtenida cuando la expansión en el parámetro espectral λ se hace hasta el término cúbico.

Para obtener la evolución del sistema, las ecuaciones para las componentes $q(x, t)$ y $r(x, t)$ del potencial, sustuiremos (12) en (9-11) igualando los coeficientes de los mismos exponentes de λ obtenemos finalmente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial x} &= qC_0 - B_0r, \\ \frac{\partial A_1}{\partial x} &= qC_1 - B_1r, \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} &= -2qA_1 - 2iB_0, \\ \frac{\partial C_1}{\partial x} &= 2rA_1 + 2iC_0, \\ rA_2 + iC_1 &= 0, \\ qA_2 + iB_1 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Las ecuaciones para las componentes del potencial $q(x, t)$ y $r(x, t)$ directamente siguen de (9-11) y (12):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial B_0}{\partial x} + 2qA_0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial C_0}{\partial x} - 2rA_0. \quad (15)$$

Utilizando las ecuaciones (13) obtenemos

$$A_0 = \frac{1}{2}a_2qr, \quad (16)$$

$$B_0 = -\frac{1}{2}a_2\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$C_0 = \frac{1}{2}a_2\frac{\partial r}{\partial x},$$

$$B_1 = iqa_2,$$

$$C_1 = ira_2,$$

donde a_2 es una constante.

Finalmente escribimos la matriz \widehat{M}

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_2qr + a_2\lambda^2 & -\frac{1}{2}a_2q_x + ia_2q\lambda \\ \frac{1}{2}a_2r_x + ira_2\lambda & -\frac{1}{2}a_2qr - a_2\lambda^2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Después de la reducción aceptada en el metodo IST para la NLSE

$$r = -q^*, \quad (18)$$

las ecuaciones (14,15) obtienen la misma forma que define la NLSE

$$i\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2q = 0. \quad (19)$$

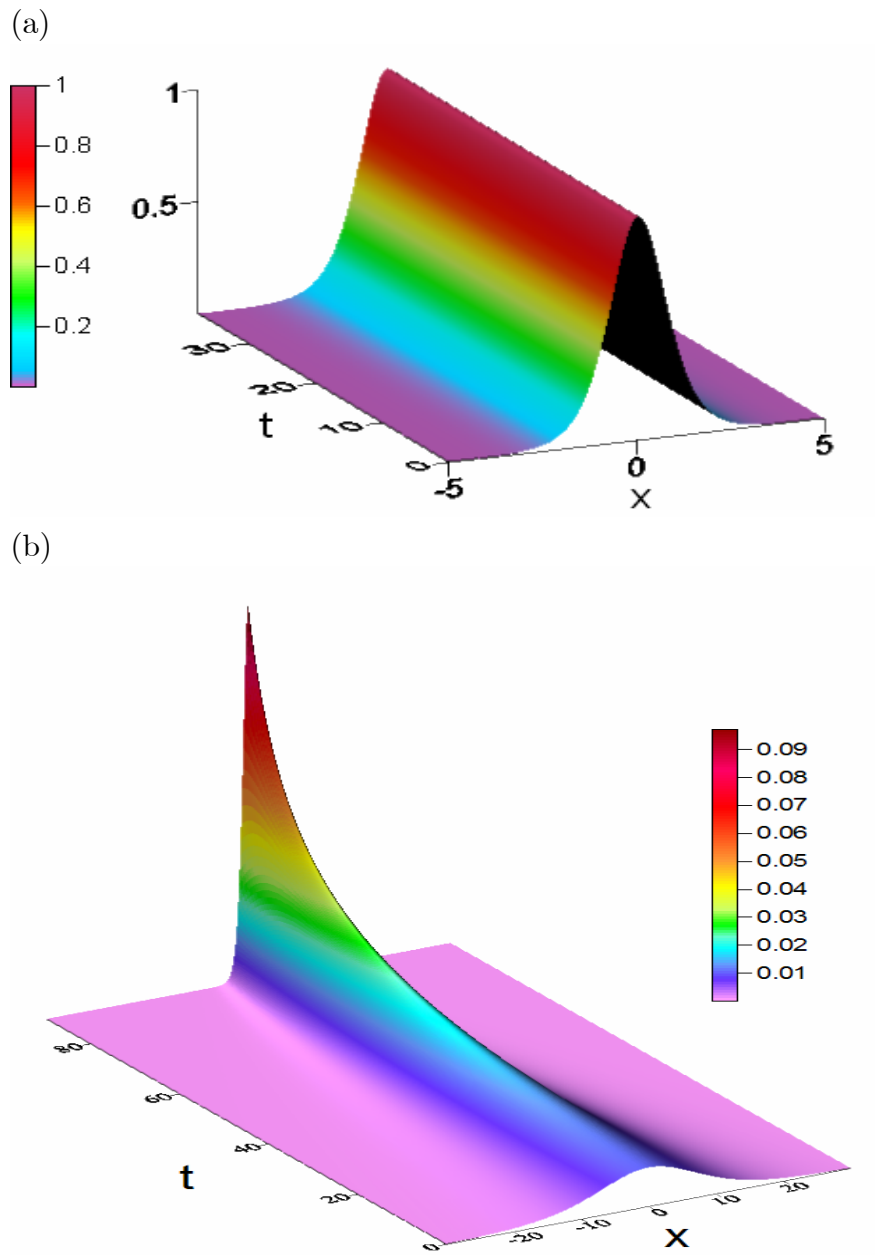
1.5 Sistemas autónomos y no autónomos.

La clasificación de sistemas dinámicos en autónomos y no autónomos se usa comúnmente en la ciencia para caracterizar diferentes situaciones físicas en las que, respectivamente, está presente o ausente una fuerza motriz externa dependiente del tiempo. El tratamiento matemático de un sistema de ecuaciones no autónomo es mucho más complicado que el de un sistema autónomo tradicional. Como ilustración típica, podemos mencionar tanto un péndulo simple cuya longitud cambia con el tiempo como un oscilador Duffing no lineal parametrizado [39].

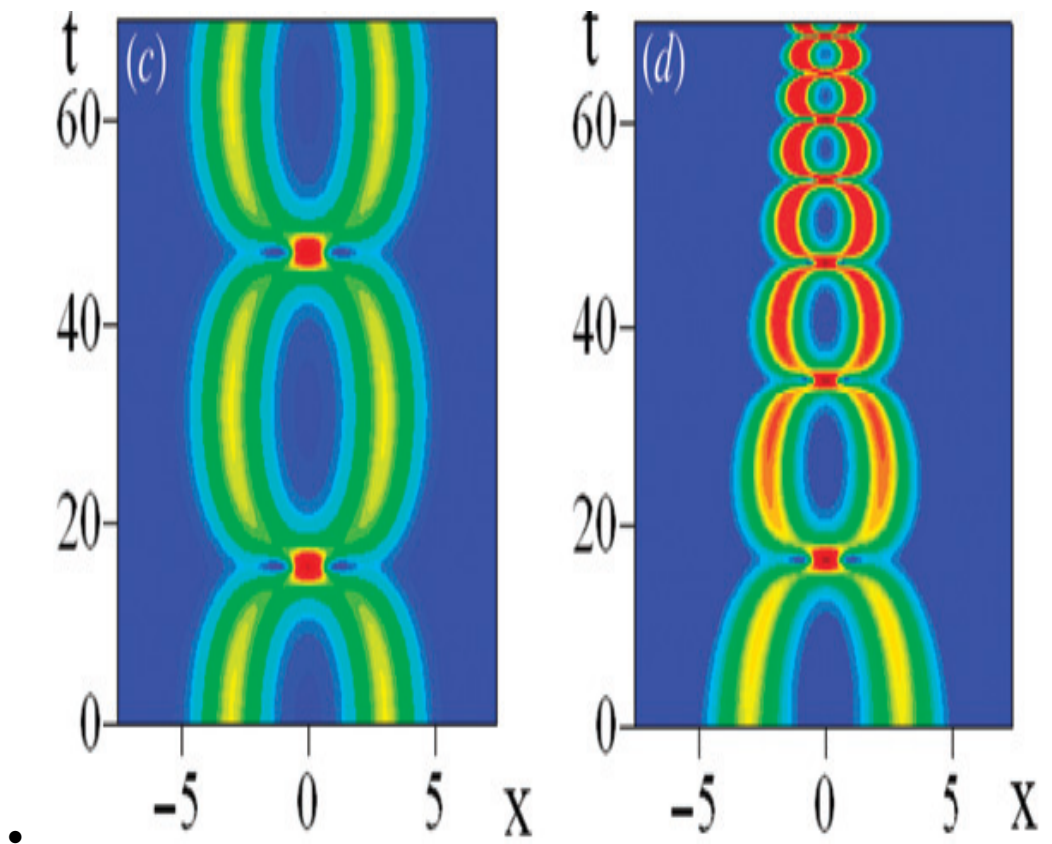
El concepto de solitón clásico fue desarrollado para sistemas no lineales y dispersivos que han sido autónomos; el tiempo sólo ha desempeñado el papel de la variable independiente y no ha aparecido explícitamente en la ecuación de evolución no lineal. Sin embargo, sistemas físicos pueden estar sometidos a alguna forma de fuerza dependiente del tiempo, incluyendo la dispersión, la no linealidad y potenciales externos dependientes del tiempo.

Históricamente, Chen y Liu [27] fueron los primeros quienes en 1976 extendieron sustancialmente el concepto de solitones clásicos al movimiento acelerado de un solitón en un plasma linealmente no homogéneo. Se descubrió que para el modelo de la NLSE con un potencial externo lineal, el método de IST se puede generalizar permitiendo el parámetro espectral variable en el tiempo (TVSP), y como consecuencia de esto, los solitones con velocidades que varían en el tiempo (pero con amplitudes invariantes en tiempo) y se dispersan elásticamente se han predicho.

A partir del año 2000, el método de IST con TVSP se desarrolló muy ampliamente y un nuevo tipo de solitones fue propuesto – solitones no autónomos de la NLSE [13-18].



- Fig. 4. Evolución de un solitón de la NLSE (a) autónomo y (b) no autónomo con amplitud inicial $\eta_0 = 0.5$ y la velocidad inicial $\kappa_0 = 0$. (b) La dispersión variable $D(t) = \exp(-c_0 t)$. Con $c_0 = 0.05$.



- (c,d) Comparación de dinámica no lineal de dos solitones (mapa de contorno): (c) canónicos y (d) no autónomos (el modelo con la dispersión exponencial) con parámetros: $c_0 = 0.05$, $\eta_{01} = 0.5$, $\eta_{02} = 1.5$, la velocidad inicial $\kappa_{01,2} = 0$, y $x_{01} = x_{02} = 0$.

1.6 La ecuación no lineal de Hirota.

En 1973 Hirota [40] consideró la ecuación

$$i\frac{\partial q}{\partial t} + i\alpha_3\frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + i6\alpha_4|q|^2\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha_1\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \alpha_2|q|^2q = 0, \quad (20)$$

donde las constantes reales α_i satisfacen la condición

$$\alpha_1\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3 \quad (21)$$

que en la actualidad tiene el nombre de la condición de Hirota.

Hirota demostró que la Ec. (20) tiene soluciones solitónicas y encontró soluciones uno- y multisolitónicas aplicando el método que desarrolló.

Es posible demostrar que la Ec.(20) es completamente integrable usando el método de Lax y el esquema de AKNS. Esto significa que el método AKNS se aplica para la Ec. (20), si los elementos de la matriz \widehat{M} se presentan en forma de serie en grados de λ hasta los términos con λ^3 .

La Ec. (20) atrajo mucha atención en los últimos años en óptica no lineal, porque la combinación de la segunda y tercera derivadas permite considerar la dinámica de los pulsos ópticos ultracortos de duración de femto-segundos.

En el siguiente capítulo estudiaremos la ecuación de Hirota para los sistemas no autónomos y con potencial externo.

2 CAPÍTULO II: LA INTEGRABILIDAD DE LA ECUACIÓN NO AUTÓNOMA DE HIROTA .

2.1 La ecuación no autónoma de Hirota y su par de Lax.

Consideremos la modificación no isoespectral del método AKNS, que permite construir la ecuación de Hirota con el parámetro espectral $\Lambda(T)$ dependiente del tiempo. Iniciamos del problema de dispersión aplicando el método AKNS

$$\Psi_x = \widehat{\mathcal{L}}\Psi(x, t), \quad \Psi_t = \widehat{\mathcal{M}}\Psi(x, t), \quad (22)$$

donde $\Psi(x, t) = \{\psi_1, \psi_2\}^T$ es la función compleja de 2 componentes y las matrices $\widehat{\mathcal{L}}$ y $\widehat{\mathcal{M}}$ de (2×2) tienen componentes complejos

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} -i\Lambda(t) & F^\gamma(t)q(x, t) \\ F^\gamma(t)r(x, t) & i\Lambda(t) \end{pmatrix} \quad (23)$$

y

$$\widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \quad (24)$$

dependientes de los potenciales $q(x, t)$ y $r(x, t)$, y la función real arbitraria $F(t)$, donde γ es una constante arbitraria.

Las ecuaciones no lineales integrables, aparecen como la condición de compatibilidad del sistema de las ecuaciones diferenciales lineales

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{\mathcal{M}}}{\partial x} + [\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{M}}] = 0. \quad (25)$$

Los elementos de la matriz $\widehat{\mathcal{M}}$ se expanden por los grados del parámetro espectral $\Lambda(t)$: $\widehat{\mathcal{M}} = \sum_{k=0}^{k=3} M_k \Lambda^k$. La derivada del parámetro espectral $\Lambda(t) = \kappa(t) + i\eta(t)$ aceptamos que es dependiente del tiempo

$$d\Lambda/dt = \lambda_0(t), \quad (26)$$

donde $\lambda_0(t)$ es una función variable en el tiempo.

Resolviendo el sistema (25), encontramos los elementos matriciales A , B , y C

$$A = -i\lambda_0 x + a_0 - iF^{2\gamma} \frac{a_3}{4} (qr_x - rq_x) \quad (27)$$

$$+ F^{2\gamma} \frac{a_2}{2} qr + \Lambda \left(\frac{1}{2} a_3 F^{2\gamma} qr + a_1 \right) + \Lambda^2 a_2 + \Lambda^3 a_3,$$

$$B = iF^\gamma \left\{ -\frac{1}{4} a_3 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + i\frac{1}{2} a_2 \frac{\partial q}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} a_3 F^{2\gamma} qr + a_1 \right) q \right. \quad (28)$$

$$\left. + \Lambda \left[i\frac{a_3}{2} \frac{\partial q}{\partial x} + a_2 q \right] + \Lambda^2 a_3 q \right\},$$

$$C = iF^\gamma \left\{ -\frac{1}{4} a_3 \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - i\frac{1}{2} a_2 \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{1}{2} a_3 F^{2\gamma} qr + a_1 \right) r \right. \quad (29)$$

$$\left. + \Lambda \left[-i\frac{a_3}{2} \frac{\partial r}{\partial x} + a_2 r \right] + \Lambda^2 a_3 r \right\}.$$

Tambi3n escribimos las ecuaciones de evoluci3n para los potenciales $q(x, t)$ y $r(x, t)$:

$$iq_t = \frac{1}{4} a_3 [q_{xxx} - 6F^{2\gamma} qrq_x] + ia_2 \left[-\frac{1}{2} q_{xx} + F^{2\gamma} q^2 r \right] \quad (30)$$

$$- q_x a_1 - i\gamma \frac{F_t}{F} q + 2(i a_0 + \lambda_0 x) q,$$

$$ir_t = \frac{1}{4} a_3 r_{xxx} - \frac{3}{2} a_3 F^{2\gamma} rqr_x + \frac{i}{2} a_2 r_{xx} - ia_2 F^{2\gamma} r^2 q \quad (31)$$

$$- r_x a_1 - i\gamma \frac{F_t}{F} r - [2\lambda_0 x + 2ia_0] r,$$

donde las funciones arbitrarias dependientes del tiempo $a_0(T)$, $a_1(T)$, $a_2(T)$, y $a_3(T)$ fueron introducidas dentro de las integraciones correspondientes.

Aplicando la redacci3n aceptada en el m3todo AKNS, $r = -q^*$, podemos reducir las Ecs. (30) y (31) de forma igual

$$iq_T + iD_3 q_{xxx} + i6G_3 |q|^2 q_x + \frac{1}{2} D_2 q_{xx} + G_2 |q|^2 q$$

$$+ iq_x V - [2(-\gamma_0 + \lambda_0 x)] q = -i\gamma \frac{F_t}{F} q, \quad (32)$$

si las condiciones

$$\begin{aligned} a_0 &= -a_0^*, & a_1 &= -a_1^*, & a_2 &= -a_2^*, & a_3 &= -a_3^*, \\ \lambda_0 &= \lambda_0^*, & \lambda_1 &= \lambda_1^*, & \lambda_2 &= \lambda_2^*, & F &= F^* \end{aligned} \quad (33)$$

se cumplen. En este caso, las funciones imaginarias $a_0(T)$, $a_1(T)$, $a_2(T)$ y $a_3(T)$ pueden ser definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_0(T) &= i\gamma_0(T), & a_1(T) &= iV(T), \\ a_2(T) &= -iD_2(T), & a_3(T) &= -4iD_3(T) \end{aligned} \quad (34)$$

donde $D_3(T)$, $D_2(T)$, $V(T)$ y $\gamma_0(T)$ son funciones reales arbitrarias.

En la Ec. (32) introducimos la notación $G_2 = F^{2\gamma}D_2$ y $G_3 = F^{2\gamma}D_3$ que nos permita obtener la condición de Hirota

$$G_2D_3 = G_3D_2. \quad (35)$$

Usando esta notación obtenemos

$$\gamma \frac{F_t}{F} = \frac{1}{2} \frac{W(D_3, G_3)}{D_3G_3} = \frac{1}{2} \frac{W(D_2, G_2)}{D_2G_2}, \quad (36)$$

donde $W(D, G) = G_tD - GD_t$ es el Wronskiano.

Ahora la Ec. (32) presenta la ecuación no autónoma de Hirota

$$\begin{aligned} iq_t + iD_3(t)q_{xxx} + i6G_3|q|^2q_x + \frac{1}{2}D_2q_{xx} + G_2|q|^2q \\ + iq_xV - U(x, t)q = i\Gamma(x, t)q, \end{aligned} \quad (37)$$

donde

$$U(x, t) = -2\gamma_0(t) + 2\lambda_0(t)x \quad (38)$$

es el potencial externo lineal por x y

$$\Gamma(t) = -\frac{1}{2} \frac{W(D_3, G_3)}{D_3G_3} = -\frac{1}{2} \frac{W(D_2, G_2)}{D_2G_2} \quad (39)$$

es el coeficiente de amplificación o reducción.

Usando las notaciones (33) reescribimos los elementos matriciales A , B , y C

$$\begin{aligned} A &= -i\lambda_0x + i\gamma_0 - G_3(q^*q_x - qq_x^*) + i\frac{1}{2}G_2|q|^2 \\ &+ i\Lambda(2G_3|q|^2 + V) - i\Lambda^2D_2 - 4iD_3\Lambda^3, \end{aligned} \quad (40)$$

$$B = i\sqrt{\frac{G_3(t)}{D_3(t)}}\left\{iD_3\left(\frac{\partial q^2}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}D_2\frac{\partial q}{\partial x} + i(2G_3|q|^2 + V)q - i\Lambda\left[i2D_3\frac{\partial q}{\partial x} + D_2q\right] - 4iD_3\Lambda^2q\right\}, \quad (41)$$

$$C = -B^* = i\sqrt{\frac{G_3(t)}{D_3(t)}}\left\{-iD_3\frac{\partial q^{*2}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}D_2\frac{\partial q^*}{\partial x} + i(-2D_3F^{2\gamma}|q|^2 - V)q^* + i\Lambda\left[-2iD_3\frac{\partial q^*}{\partial x} + D_2q^*\right] + 4iD_3\Lambda^2q^*\right\}, \quad (42)$$

Finalmente la representación de Lax para el modelo de la ecuación no autónoma de Hirota tiene la forma

$$\widehat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} -i\Lambda(t) & \sqrt{\frac{G_3(t)}{D_3(t)}}q(x,t) \\ \sqrt{\frac{G_3(t)}{D_3(t)}}r(x,t) & i\Lambda(t) \end{pmatrix} \quad (43)$$

y

$$\widehat{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \quad (44)$$

donde los elementos matriciales A , B , y C se definen por Ecs. (40-42).

2.2 La ecuación no autónoma de Hirota sin coeficiente de amplificación

La ecuación de Hirota (37) se puede escribir en la forma que no contenga el término de amplificación o reducción

$$iQ_t + iD_3(t)q_{xxx} + i6R_3|q|^2q_x + \frac{1}{2}D_2q_{xx} + R_2|q|^2q + iq_xV - U(x,t)q = 0, \quad (45)$$

si hacemos la transformación

$$\begin{aligned} q(x,t) &= Q(x,t) \exp \left\{ \int_0^t \Gamma(\tau) d\tau \right\}, \\ R_2(t) &= G_2(t) \exp \left\{ \int_0^t 2\Gamma(\tau) d\tau \right\}, \\ R_3(t) &= G_3(t) \exp \left\{ \int_0^t 2\Gamma(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Sustituyendo $\Gamma(t)$

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= -\frac{1}{2} \frac{W(D_3, G_3)}{D_3 G_3} = -\frac{1}{2} \frac{W(D_2, G_2)}{D_2 G_2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{D_3'}{D_3} - \frac{G_3'}{G_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{D_2'}{D_2} - \frac{G_2'}{G_2} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

en las ecuaciones (46), podemos reescribir las ecuaciones (46) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} q(x,t) &= Q(x,t) \sqrt{\frac{D_3(t) G_3(0)}{D_3(0) G_3(t)}}, \\ R_2(t) &= D_2(t) \frac{G_2(0)}{D_2(0)}, \\ R_3(t) &= D_3(t) \frac{G_3(0)}{D_3(0)}. \end{aligned} \quad (48)$$

De la Ec. (47) se puede concluir que si $\Gamma(t) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} D_3(t) &= \alpha_0 G_3(t), \\ D_2(t) &= \alpha_0 G_2(t), \end{aligned} \quad (49)$$

es decir los coeficientes de dispersión y no linealidad son linealmente dependientes.

Finalmente escribimos la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal

$$iQ_t + iD_3(t)Q_{xxx} + i6R_3(t)|Q|^2 Q_x + \frac{1}{2}D_2(t)Q_{xx} + R_2(t)|Q|^2 Q - 2(\lambda_0(t)x - \gamma_0(t))Q = 0 \quad (50)$$

en la cual coeficientes de dispersión y no linealidad $D_3(t)$ y $R_3(t)$, así como $D_2(t)$ y $R_2(t)$ son linealmente dependientes.

3 CAPÍTULO III: SOLUCIONES SOLITÓNICAS DE LA ECUACIÓN NO AUTÓNOMA DE HIROTA

3.1 Soluciones solitónicas de la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal

Obteniendo los elementos de las matrices del par de Lax (43,44), podemos aplicar la transformación de Bäcklund y la relación recurrente [17]

$$Q_n(x, t) = -Q_{n-1}(x, t) - 4\sqrt{\frac{D_3}{R_3}} \frac{\eta_n \tilde{\Gamma}_{n-1}(x, t)}{1 + |\tilde{\Gamma}_{n-1}(x, t)|^2}, \quad (51)$$

que conecta las soluciones de la Ec. (50) para $(n - 1)$ y n solitones por medio del pseudo-potencial $\tilde{\Gamma}_{n-1}(x, t) = \psi_1(x, t)/\psi_2(x, t)$ para la función de dispersión $\Psi_{n-1}(x, t) = (\psi_1\psi_2)^T$.

Suponiendo que $Q_0 = 0$ es la solución particular de la Ec. (50), podemos encontrar Q_1 calculando $\tilde{\Gamma}_0(x, t)$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_0(x, t) &= \exp\{-2i\Lambda_1 x + 2 \int_0^t A_0(x, \tau) d\tau\} \\ &= \exp\{-i\chi_1\} \exp\{\xi_1\}, \end{aligned} \quad (52)$$

donde

$$A_0(q = 0) = -i\Lambda_1^2 D_2(t) - 4iD_3(t) \Lambda_1^3 \quad (53)$$

y $\Lambda_1 = \kappa_1(t) + i\eta_1(t)$, la amplitud $\eta_1(t)$ y la velocidad $\kappa_1(t)$ son definidas por la Ec. (26)

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 + \int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau, \quad (54)$$

$$\kappa_1(t) = \kappa_0 + \int_0^t \lambda_0(\tau) d\tau, \quad (55)$$

$$\eta_1(t) = \eta_0. \quad (56)$$

Aquí $\Lambda_0 = \kappa_0 + i\eta_0$ es el valor inicial del parámetro espectral que define la velocidad inicial κ_0 y amplitud inicial η_0 . Esta ecuación muestra que la amplitud del solitón se mantiene constante y la velocidad depende del tiempo.

Entonces la solución de la ecuación no autónoma de Hirota de un solitón brillante, tiene la forma

$$Q_1(x, t) = 2\eta_1(t) \sqrt{\frac{D_3(t)}{R_3(t)}} \operatorname{sech} [\xi_1(x, t)] \exp \{-i\chi_1(x, t)\}; \quad (57)$$

$$\xi_1(x, t) = 2x\eta_1(t) + 4 \int_0^t \eta_1(\tau) [D_2\kappa_1 + 2D_3(3\kappa_1^2 - \eta_1^2)] d\tau, \quad (58)$$

$$\chi_1(x, t) = 2x\kappa_1(t) + 2 \int_0^t [D_2(\kappa_1^2 - \eta_1^2) + 4D_3\kappa_1(\kappa_1^2 - 3\eta_1^2)] d\tau, \quad (59)$$

Una solución para dos solitones $Q_2(x, t)$ es generada por la expresión recurrente Eq. (51) usando la solución de un solitón (57):

$$Q_2(x, t) = 4 \sqrt{\frac{D(t)}{R(t)}} \frac{N(x, t)}{D(x, t)}, \quad (60)$$

donde el numerador $N(x, t)$ viene dado por

$$\begin{aligned} N = & \eta_1 \cosh \xi_2 \exp(-i\chi_1) \\ & \times [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + 2i\eta_2(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh \xi_2 + (\eta_1^2 - \eta_2^2)] \\ & + \eta_2 \cosh \xi_1 \exp(-i\chi_2) \\ & \times [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 - 2i\eta_1(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh \xi_1 - (\eta_1^2 - \eta_2^2)], \end{aligned} \quad (61)$$

y el denominador $D(x, t)$ es representado por

$$\begin{aligned} D = & \cosh(\xi_1 + \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2] \\ & + \cosh(\xi_1 - \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 + \eta_1)^2] \\ & - 4\eta_1\eta_2 \cos(\chi_2 - \chi_1), \end{aligned} \quad (62)$$

donde $\eta_i(x, t)$, $\kappa_i(x, t)$, $\xi_i(x, t)$ y $\chi_i(x, t)$ con $i = 1$ y 2 son definidos por Ecs. (58) y (59) reemplazando el sufijo '1' por el sufijo 'i'.

3.2 Ejemplos de las soluciones de la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal

Encotraremos las soluciones de la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal Ec. (50) en el caso especial cuando: $\lambda_0(t) = \lambda_0$ y los parámetros de dispersión y no linealidad $D_2(t) = D_{20}$, $R_2(t) = R_{20}$, $D_3(t) = D_{30}$, $R_3(t) = R_{30}$ son constantes.

Entonces, las Eqs. (58) y (59) ahora obtienen la forma:

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) = & 2\eta_{01}\{(x - x_0) + 2t [D_{20}\kappa_{01} + 2D_{30}(3\kappa_{01}^2 - \eta_{01}^2)] \\ & + \lambda_0(D_{20} + 12D_{30}\kappa_{01})t^2 + 4D_{30}\lambda_0^2t^3\}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \chi_1(x, t) = & 2(\kappa_{01} + \lambda_0t)(x - x_0) \\ & + 2t [D_{20}(\kappa_{01}^2 - \eta_{01}^2) + 4D_{30}\kappa_{01}(\kappa_{01}^2 - 3\eta_{01}^2)] \\ & + 2\lambda_0t^2 [D_{20}\kappa_{01} + 6D_{30}(\kappa_{01}^2 - \eta_{01}^2)] \\ & + \lambda_0^2t^3 \left(\frac{2}{3}D_{20} + 8D_{30}\kappa_{01} \right) + 2D_{30}\lambda_0^3t^4. \end{aligned} \quad (64)$$

La solución para un solitón se escribe

$$q(x, t) = 2\eta_0(D_{30}/R_{30})^{1/2}\text{sech}\xi(x, t) \exp[-i\chi(x, t)], \quad (65)$$

mientras que la solución para dos solitones se escribe con Ecs. (60-62) con

$$\eta_i(t) = \eta_{0i}, \quad (66)$$

$$\kappa_i(t) = \kappa_{0i} + \lambda_0t \quad (67)$$

El argumento y la fase se definen por Eqs. (63) y (64) con el cambio de indice 1 a indice $i = 1, 2$.

Para comparar la dinámica de los solitones de la NLSE y de la ecuación de Hirota vamos a analizar Ec. (63) que representa el argumento de secante hiperbólico en la solución del solitón. Cuando la velocidad inicial es cero, $\kappa_0 = 0$, la Ec. (63) es

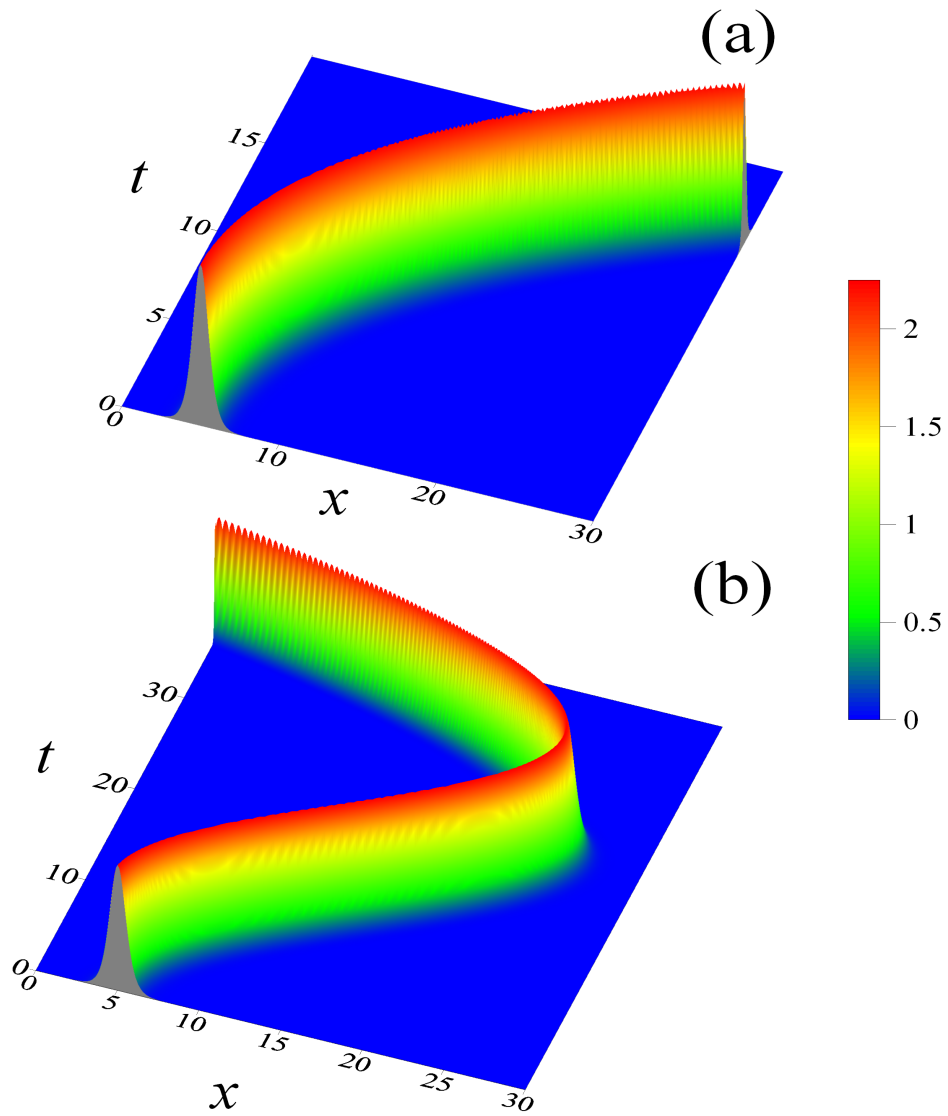
$$\xi_1(x, t) = 2\eta_{01} [(x - x_0) - 4D_{30}\eta_{01}^2 t + \lambda_0 D_{20} t^2 + 4D_{30}\lambda_0^2 t^3]. \quad (68)$$

En la NLSE la trayectoria de solitones es una parábola

$$\xi_1(x, t) = 2\eta_{01} [(x - x_0) + \lambda_0 D_{20} t^2], \quad (69)$$

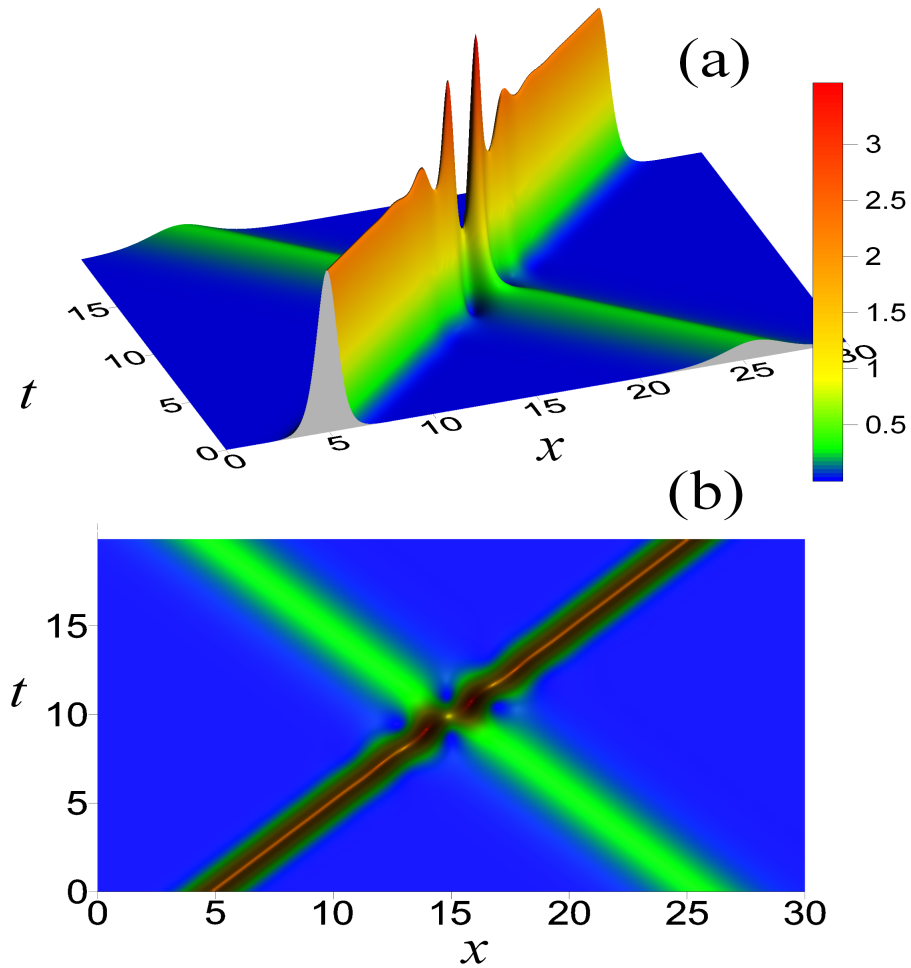
la cual para los valores de λ_0 negativos (es un potencial atractivo) se inclina a la derecha en $x \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow \infty$.

En el caso de la ecuación de Hirota, la trayectoria se transforma a una curva de tercer grado por tiempo (Ec. (68)), tal que el último término $4D_{30}\lambda_0^2 t^3$ determina el comportamiento del solitón en tiempos grandes, aproximadamente $t > D_{20}/(4D_{30} |\lambda_0|)$.

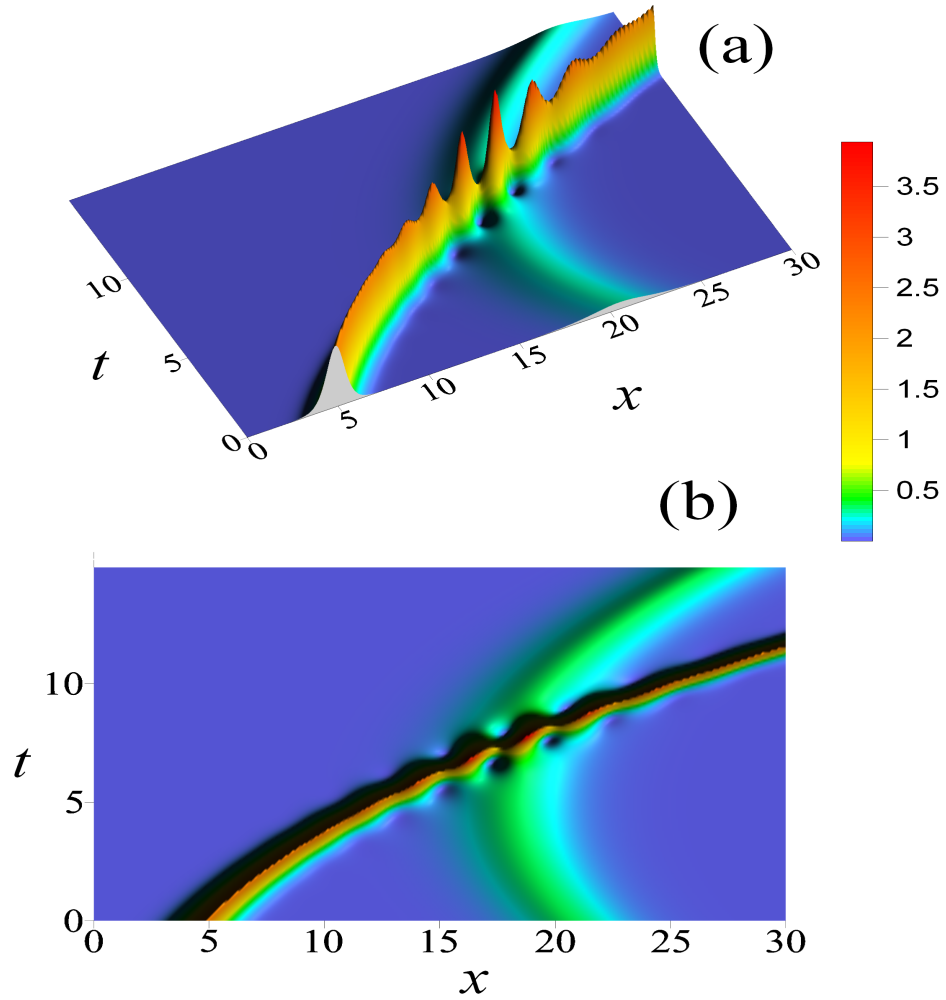


- Fig. 5. Comparación de la dinámica no lineal de un solitón en el potencial lineal (a) de la NLSE y (b) de la ecuación de Hirota. Los parámetros son: $\lambda_0 = -0.1$, $\eta_0 = 0.75$, la velocidad inicial $\kappa_0 = 0$.

En Figuras 6 y 7 comparamos la dinámica de dos solitones autónomos ($\lambda_0 = 0$) y no autónomos ($\lambda_0 = -0.1$) de la NLSE de diferentes amplitudes y las velocidades iniciales opuestas. Observamos la interacción elástica de los dos solitones, los cuales despues de interactuar, continuaron su movimiento con las amplitudes y velocidades iniciales.



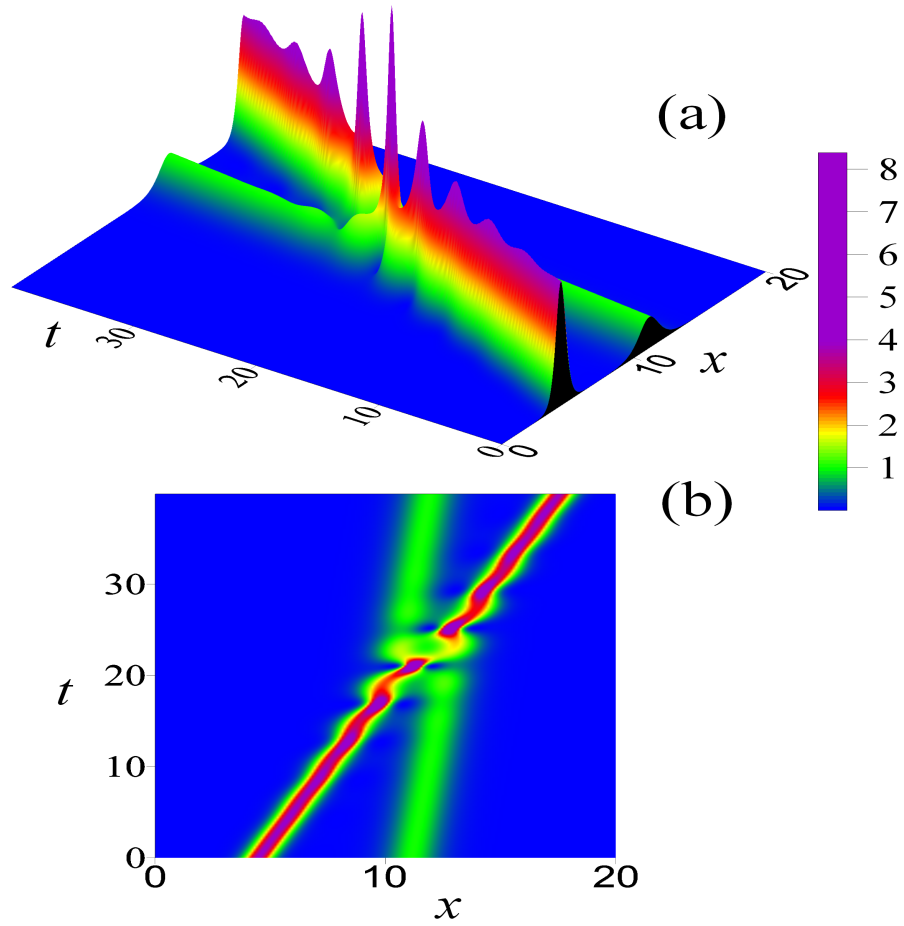
• Fig. 6. La dinámica de dos solitones autónomos de la NLSE con amplitudes iniciales $\eta_{01} = 0.75$ y $\eta_{02} = 0.25$ y las velocidades iniciales $\kappa_{01} = -0.5$ y $\kappa_{02} = 0.5$.(a) La vista espacial, (b) curvas de nivel.



• Fig. 7. La dinámica de dos solitones no autónomos de la NLSE en el potencia lineal con el parámetro $\lambda_0 = -0.1$. Amplitudes iniciales $\eta_{01} = 0.75$ y $\eta_{02} = 0.25$ y las velocidades iniciales $\kappa_{01} = -0.5$ y $\kappa_{02} = 0.5$ son los mismos como en Fig. 5. (a) La vista espacial, (b) curvas de nivel.

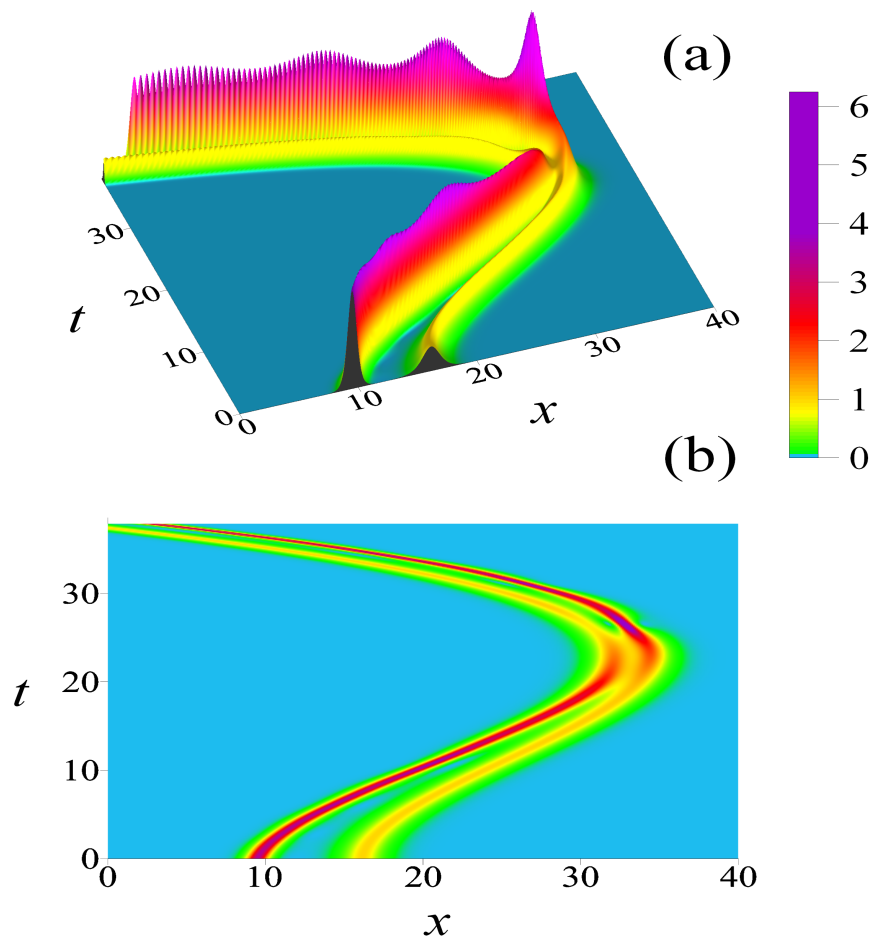
Una propiedad especial de la ecuación de Hirota es que sus soluciones solitónicas siempre se mueven independientemente del valor inicial de la velocidad. De la Ec. (68) se puede observar que la velocidad del soliton en el caso $\lambda_0 = 0$ no es cero, sino igual a $V = -4D_{30}\eta_{01}^2$. Es decir, que las velocidades de los solitones de la ecuación de Hirota, dependen de sus amplitudes.

La Figura 8 muestra la dinámica de dos solitones con las velocidades iniciales cero, localizados inicialmente en la misma posición (en el punto de interacción) que se dispersan y mueven con las velocidades proporcionales a cuadrados de sus amplitudes.



- Fig. 8. La dinámica de dos solitones autónomos de la ecuación de Hirota con amplitudes iniciales $\eta_{01} = 1.0$ y $\eta_{02} = 0.5$ y las velocidades iniciales igual a cero $\kappa_{01} = \kappa_{02} = 0$. (a) Vista espacial, (b) Curvas de nivel.

En la siguiente figura ilustramos la dinámica de dos solitones de la ecuación de Hirota en el potencial lineal con el parámetro $\lambda_0 = -0.1$. Observamos que en su primera parte de la trayectoria, es parecida a la misma de la NLSE (Fig. 7), pero para un tiempo bastante grande, aproximadamente $t > D_{20}/(4D_{30} |\lambda_0|)$ la dirección del movimiento se cambia a la opuesta.



- Fig. 9. La dinámica de dos solitones no autónomos de la ecuación de Hirota en el potencia lineal con el parámetro $\lambda_0 = -0.1$. Amplitudes iniciales $\eta_{01} = 0.75$ y $\eta_{02} = 0.25$ y las velocidades iniciales $\kappa_{01} = -0.5$ y $\kappa_{02} = 0.5$. son los mismos como en Fig. 7. (a) La vista espacial, (b) curvas de nivel.

3.3 Los estados ligados de los solitones de la ecuación de Hirota

La NLSE tiene una solución especial de dos solitones, que se llama "breather" y es el estado ligado de dos solitones. Los solitones con la velocidad cero $\kappa_{01} = \kappa_{02} = 0$, localizados inicialmente en la misma posición $x = 10$, forman estado ligado periódico que se ilustra en Fig. 10.

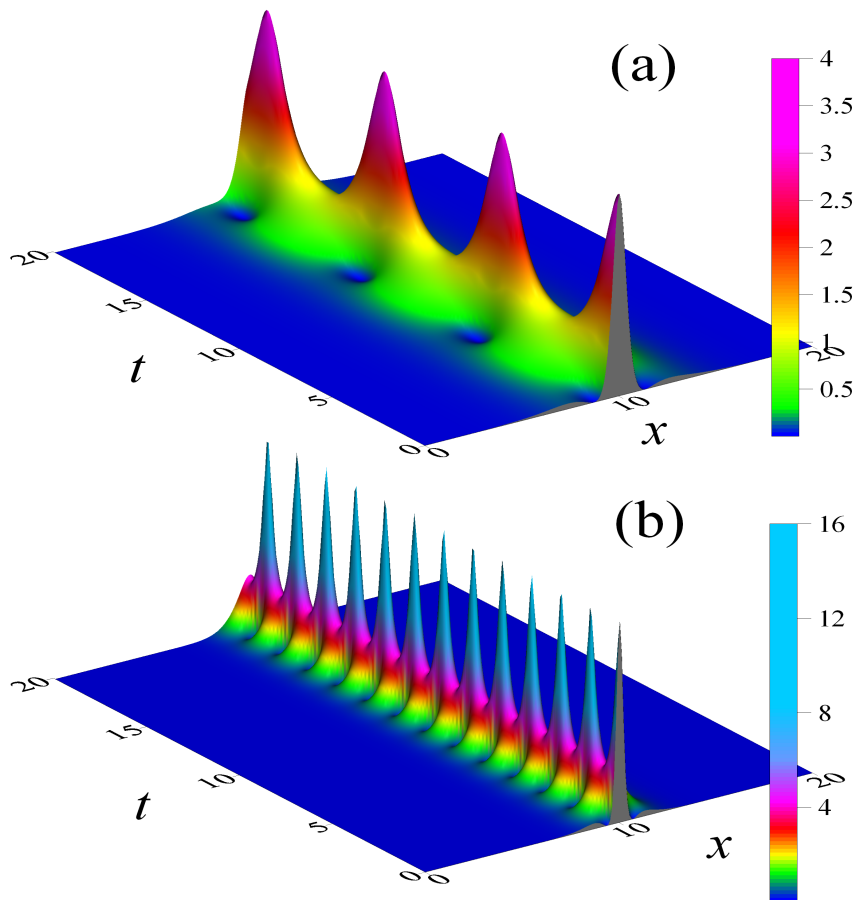


Fig. 10. La dinámica de "breather". El estado ligado de dos solitones autónomos de la NLSE con las velocidades iniciales $\kappa_{01} = \kappa_{02} = 0$ y situados inicialmente en el mismo punto espacial $x_0 = 10$, (a) Con amplitudes iniciales $\eta_{01} = 0.75$ y $\eta_{02} = 0.25$ (b) con amplitudes iniciales $\eta_{01} = 1.5$ y $\eta_{02} = 0.5$.

La ecuación de Hirota también tiene los estados ligados tipo "breather" que se definen por las siguientes condiciones:

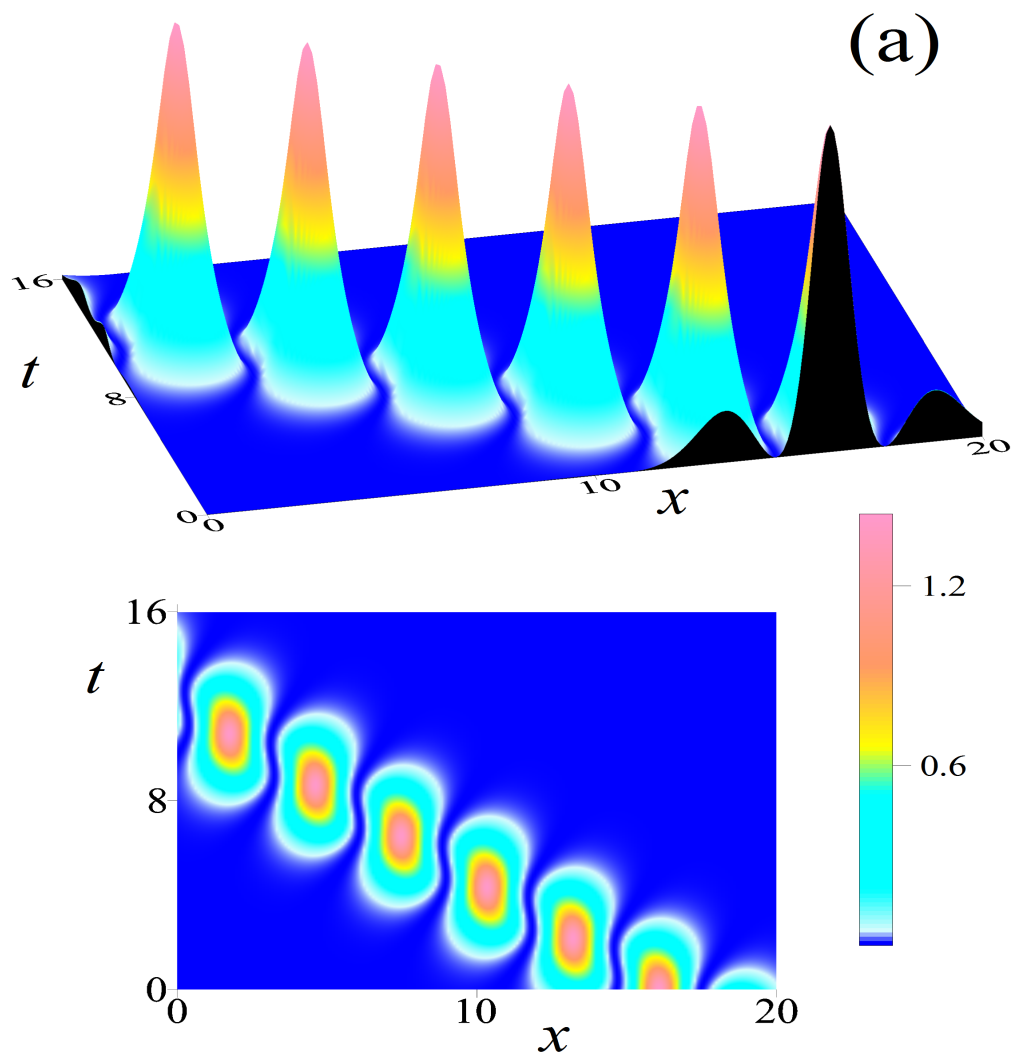
$$\eta_1 = P\eta_2, \quad (70)$$

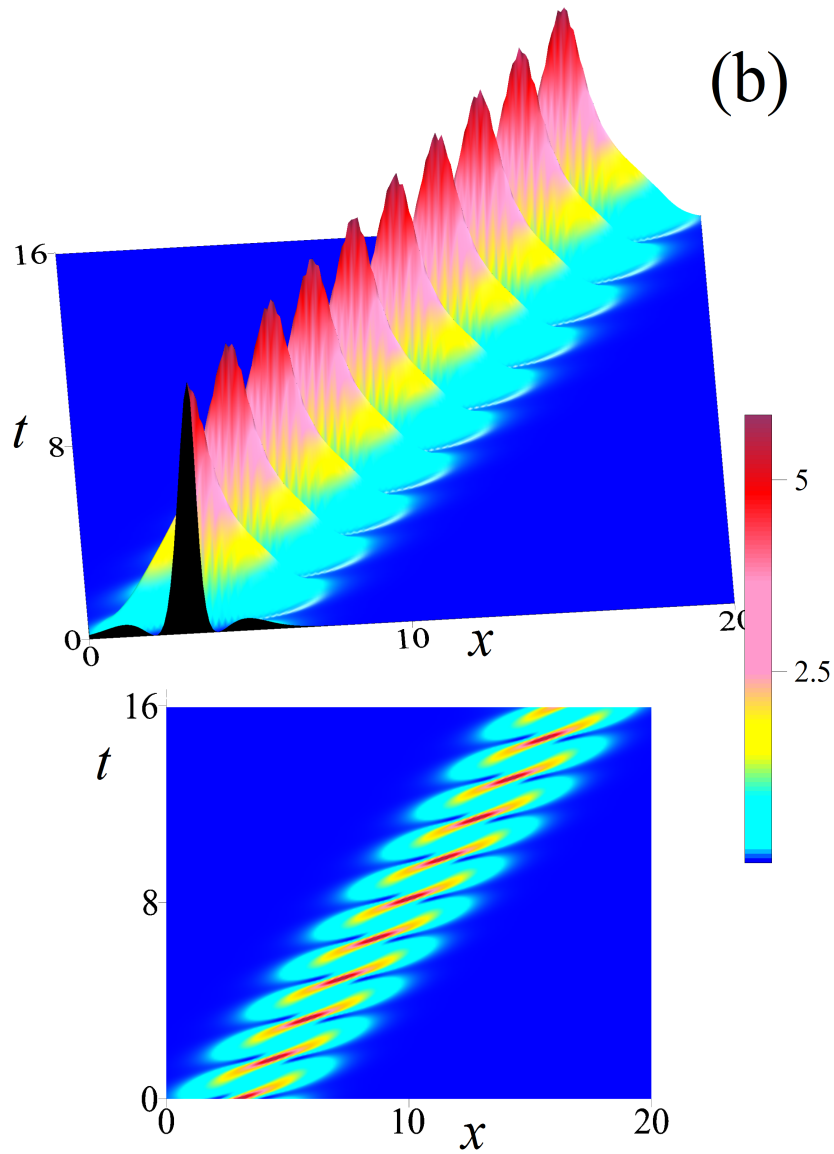
$$2D_{30} (P^2 - 1) \eta_2^2 = D_{20} (\kappa_1 - \kappa_2) + 6D_{30} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2), \quad (71)$$

las cuales relacionan las amplitudes y las velocidades iniciales de dos solitones [43], donde P es un número real.

Las ecuaciones (70,71) se obtienen al suponer que los argumentos (63) de dos solitones (con $\lambda_0 = 0$) son linealmente dependientes: $\xi_1(x, t) = P\xi_2(x, t)$.

La Figura 11 ilustra las soluciones tipo "breather" de la ecuación de Hirota con las amplitudes iguales $\eta_1 = \eta_2 = 0.3$, y las velocidades calculadas de acuerdo a la Ec. (71): $\kappa_1 = -0.467$, $\kappa_2 = 0.3$ (Fig, 11 (a)); Y las velocidades arbitrarias (por ejemplo, $\kappa_1 = 0.30$, $\kappa_2 = 0.25$), y amplitudes $\eta_1 = 0.725$, $\eta_2 = 0.484$, calculadas en concordancia con Ec. (71).





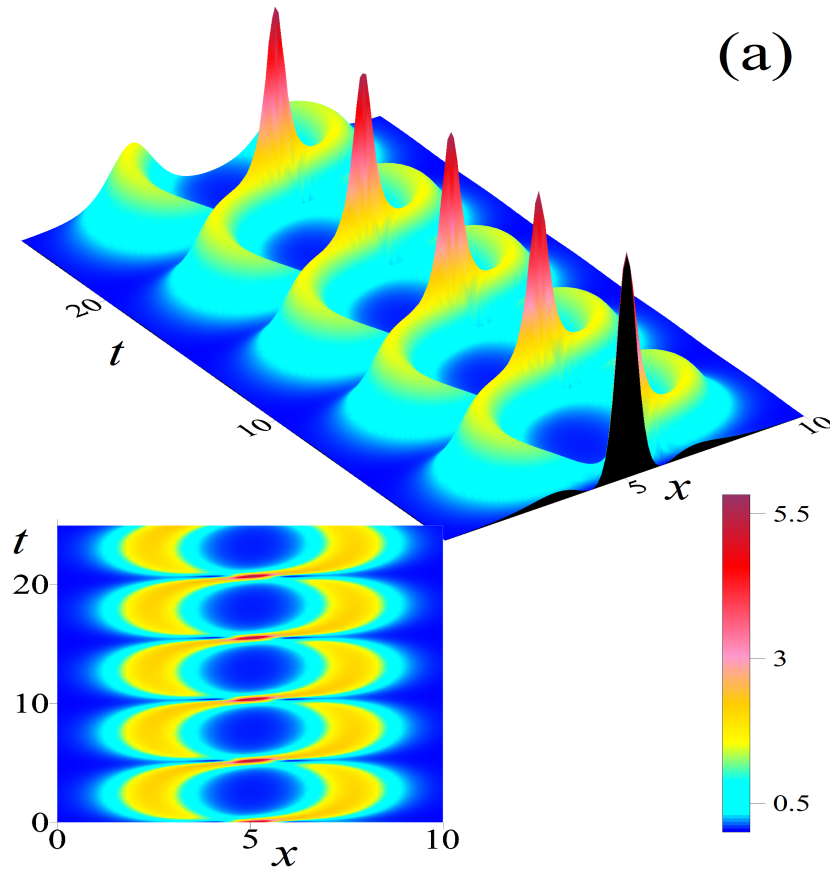
• Fig. 11. Las soluciones tipo "breather" de la ecuación de Hirota. Los parámetros son: (a) $\eta_1 = \eta_2 = 0.3$, y velocidades $\kappa_1 = -0.467$, $\kappa_2 = 0.3$; (b) $\kappa_1 = 0.30$, $\kappa_2 = 0.25$, y amplitudes $\eta_1 = 0.725$, $\eta_2 = 0.484$, calculadas en concordancia con las Ecs. (70,71). Vistas espaciales (arriba) y las curvas de nivel (abajo).

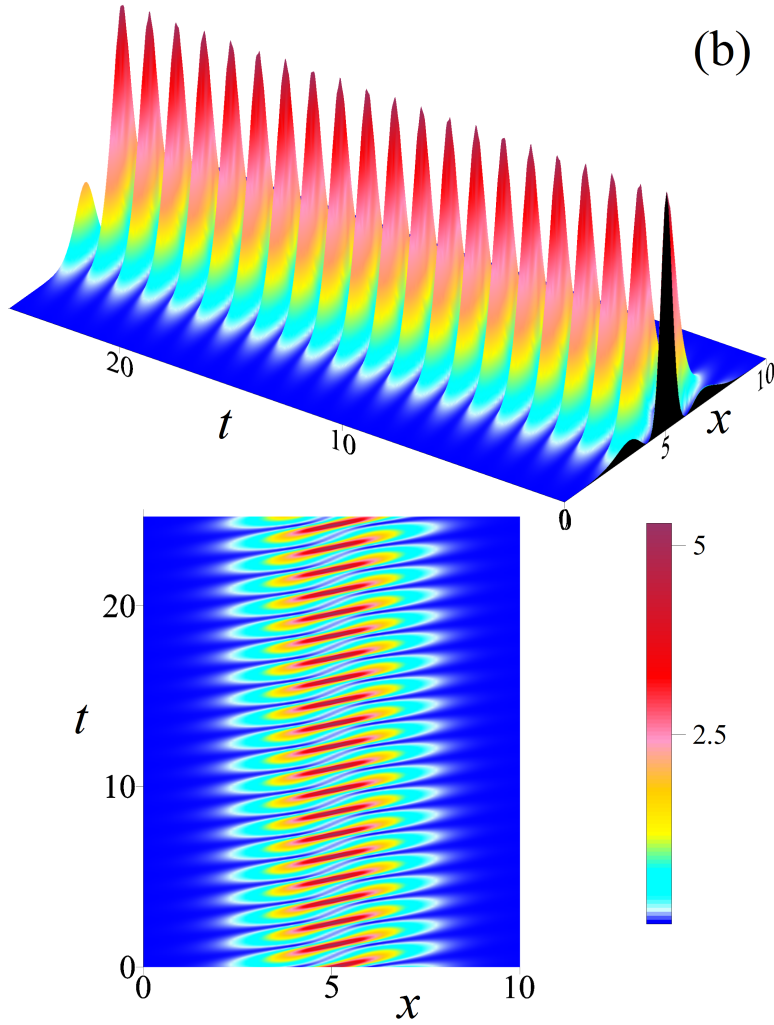
Igualmente, existe un "breather" de la ecuación de Hirota que no cambia su posición inicial y se llama "breather" estacionario, el cual surge si las amplitudes y las velocidades de los dos solitones satisfacen la ecuación:

$$D_{30} (\eta_i^2 - 3\kappa_i^2) = \frac{1}{2} D_{20} \kappa_i, \quad (72)$$

donde $i = 1, 2$.

En Figura 12 (a) se ilustra un "breather" estacionario de la ecuación de Hirota que está formado por dos solitones con las velocidades iniciales arbitrarias (por ejemplo, $\kappa_1 = 0.25$ y $\kappa_2 = -0.20$) y las amplitudes calculadas usando Ec. (72).





• Fig. 12. Las soluciones tipo "breather" estacionario de la ecuación de Hirota. Los parámetros son: (a) $\kappa_1 = 0.25$ y $\kappa_2 = -0.20$, y amplitudes $\eta_1 = 0.648$ y $\eta_2 = 0.56$, calculadas con Ec. (72). (b) $\kappa_1 = 0.3$, $\kappa_2 = -0.384$, (o $\kappa_1 = -0.468$, $\kappa_2 = 0.217$), calculados en concordancia con Ecs. (72). La vistas espaciales (arriba) y las curvas de nivel (abajo).

4 Conclusiones

En el presente trabajo nos enfocamos en el estudio y trato de los solitones, definiendo a estos mismos, como una onda solitaria no lineal, cuya propiedad, es que al propagarse por un medio no lineal, preservan asintóticamente su forma y su velocidad en interacciones con otros solitones.

Esta propiedad de "propagarse sin deformarse", los hacen ideales para transmitir información a grandes distancias en medios no lineales, como en la fibra óptica. Fue interesante observar que los solitones surgen como una combinación armónica de tendencias que, por sí solas serían destructivas (la dispersión y la no linealidad). Estos procesos fundamentales que gobiernan el comportamiento de los solitones (un proceso dispersivo, que tiende a ensanchar los pulsos, y un proceso no lineal, que tiende a modificar de manera continua la frecuencia de la ondas que conforman el pulso) por sí solos, cada uno de estos procesos tiende a deteriorar la calidad de los pulsos. Sin embargo, al combinarse, parecen cancelarse mutuamente, alcanzando un equilibrio.

Vale la pena mencionar que este proceso de no lineal no tiene a simple vista la apariencia de ser un proceso contrario al proceso dispersivo, ya que su efecto no es adelgazar a los pulsos, sin embargo fue una sorpresa que estos dos procesos se equilibren entre sí. A sí pues, el observar que dos procesos que por sí solos serían destructivos pueden armonizarse para producir una entidad estable, es una sorpresa del como funciona la naturaleza.

La existencia de los solitones, tiene como "fundamento" el que son soluciones de ecuaciones diferenciales de ondas no lineales. Entre ellas las expuestas en este trabajo, como fue la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) y La ecuación No lineal de Hirota.

La ecuación de Schrödinger no lineal (NLSE), es uno de los más importantes y "universales" modelos no lineales de la ciencia moderna. Las soluciones más conocidas de la NLSE son los de solitones. Notemos por un lado que la característica principal de estas ondas localizadas, es que al interactuar con otros solitones lo hacen de una forma elástica, dándoles en este aspecto una calidad "parecida a una partícula", y por otro lado podemos observar que, a diferencia de lo que ocurre con los cuerpos rígidos, varias ondas sí pueden pasar simultáneamente por el mismo punto, al mismo tiempo.

El descubrimiento de Gardner, Green, Kruskal y Miura del método exacto de integración de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), resultó a la

creación y al perfeccionamiento de las soluciones de las ecuaciones no lineales de evolución obteniendo el nombre de la Transformación de Dispersión Inversa (IST) (Gardner, Green, Kruscal y Miura probaron que las soluciones de la ecuación KdV exhiben un comportamiento tipo solitón).

Entonces para contestar a la pregunta ¿Cómo saber si una ecuación no lineal de evolución es integrable o no?, Ablowitz, Kaup, Newell y Segur (AKNS) notaron que, se podía asociar una par de operadores matriciales diferenciales que se llaman los pares de Lax, y desarrollar el esquema AKNS para probar su integración exacta. Es decir, si la ecuación no lineal de evolución tiene los pares de Lax, se puede encontrar sus soluciones solitónicas aplicando diferentes métodos, como por ejemplo el IST, las transformaciones de Bäcklund, o el método de Hirota.

En nuestro caso, se reprodujeron los cálculos necesarios para la obtención de la formulación del Método Generalizado de Par de Lax. De esta manera se demostró la existencia de los pares de Lax que permitieron obtener la NLSE, aplicando la reducción aceptada en el método IST. Y por consiguiente, se demostró que el modelo generalizado de la NLSE resultó ser integrable desde el punto de vista del método del IST.

Se demostró que la ecuación no autónoma de Hirota es completamente integrable, esto usando el método de Lax y el esquema de AKNS. Llegando a la representación de Lax para el modelo de la ecuación no autónoma de Hirota. Y de nuevo realizando los cálculos necesarios, escribimos la ecuación de Hirota de tal manera que no contuviera el término de amplificación o reducción. De donde nos pudimos percatar que los coeficientes de dispersión y no linealidad ($D_3(t)$ y $R_3(t)$, así como $D_2(t)$ y $R_2(t)$), son linealmente dependientes. Así finalmente escribimos la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal.

Exactamente, obteniendo los elementos matriciales del par de Lax, aplicamos la transformación de Bäcklund y la relación recurrente que conecta las soluciones de la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal para $(n - 1)$ y n solitones por medio del pseudo-potencial $\tilde{\Gamma}_{n-1}(x, t) = \psi_1(x, t)/\psi_2(x, t)$ para la función de dispersión $\Psi_{n-1}(x, t) = (\psi_1\psi_2)^T$. Y al suponer que $Q_0 = 0$ es la solución particular de la ecuación no autónoma de Hirota, encontramos Q_1 calculando $\tilde{\Gamma}_0(x, t)$. (Encontrando así la solución de la ecuación no autónoma de Hirota de un solitón brillante). De igual forma, la solución para dos solitones $Q_2(x, t)$ fue generada por la expresión recurrente Eq. (51) usando la solución de un solitón.

Se expuso una solución especial de la ecuación no autónoma de Hirota con el potencial lineal, cuando $\lambda_0(t) = \lambda_0$ y los parámetros de dispersión y no linealidad $D_2(t) = D_{20}$, $R_2(t) = R_{20}$, $D_3(t) = D_{30}$, $R_3(t) = R_{30}$ fueron constantes, (obteniendo así la solución para un solitón, y también mostramos la solución para dos solitones).

Finalmente, se analizaron algunas comparaciones gráficas y físicas entre solitones, como fue:

- a) La dinámica de los solitones de la NLSE y de la Ec. de Hirota.
- b) La dinámica de dos solitones autónomos.
- c) La dinámica de dos solitones no autónomos.
- d) El estado ligado de dos solitones autónomos de la NLSE (breather).
- e) La dinámica de dos solitones de la ecuación de Hirota en el potencial lineal.
- f) El estado ligado tipo "breather" de la ecuación de Hirota.
- g) El estado ligado tipo "breather" estacionario de la ecuación de Hirota.

De la dinámica de los solitones de la NLSE y de la ecuación de Hirota, es importante mencionar que en la NLSE la trayectoria de solitones fue descrita por una parábola en la cual, para los valores de λ_0 negativos (es un potencial atractivo) se inclina a la derecha en $x \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow \infty$. Mientras que en el caso de la Ec. de Hirota, la trayectoria se transforma a una curva de tercer grado por tiempo, tal que el último término $4D_{30}\lambda_0^2t^3$ determina el comportamiento del solitón en tiempos grandes, aproximadamente $t > D_{20}/(4D_{30}|\lambda_0|)$.

De la dinámica de dos solitones autónomos ($\lambda_0 = 0$) y no autónomos ($\lambda_0 = -0.1$) de la NLSE de diferentes amplitudes y las velocidades iniciales opuestas, pudimos observar la interacción elástica de los dos solitones, los cuales después de interactuar, continuaron su movimiento con sus amplitudes y velocidades iniciales.

Estudiamos el estado ligado de dos solitones autónomos de la NLSE

(el "breather") y pudimos observar que es una solución con oscilaciones periódicas. Igualmente, mostramos las soluciones ligados de dos solitones para la ecuación de Hirota autónomo que también tiene estados ligados tipo "breather" en las condiciones especiales.

Se estudió la dinámica de dos solitones de la ecuación de Hirota en el potencial lineal con el parámetro $\lambda_0 = -0.1$. Se observó que al inicio la trayectoria, es parecida a la misma de la NLSE, pero para un tiempo bastante grande, aproximadamente $t > D_{20}/(4D_{30} |\lambda_0|)$ la dirección del movimiento se cambia a la opuesta.

El estado ligado tipo "breather" de la ecuación de Hirota, pudo ser definido por las condiciones (70,71), las cuales se obtuvieron al suponer que los argumentos (63) de dos solitones son linealmente dependientes. Y el estado ligado tipo "breather" estacionario de la ecuación de Hirota, no cambia su posición inicial, el cual surge si las amplitudes y las velocidades de los dos solitones satisfacen la ecuación: $D_{30} (\eta_i^2 - 3\kappa_i^2) = \frac{1}{2} D_{20} \kappa_i$

References

- [1] J. A. Krumhansl, “Unity in the science of physics,” *Physics Today*, **44**, 33, 1991.
- [2] P. L. Christiansen, M. P. Sorensen, A. C. Scott, “Nonlinear science at the dawn of the 21st century,” *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin.
- [3] A. Hasegawa, F. Tappert, “Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion,” *Appl. Phys. Lett.*, **23**, 142, 1973.
- [4] A. Hasegawa, F. Tappert, “Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. II. Normal dispersion,” *Appl. Phys. Lett.* **23**, 171, 1973.
- [5] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon, “Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers,” *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1095, 1980.
- [6] A. Hasegawa, *Optical Solitons in Fibers*, Springer-Verlag, 1989.
- [7] E. M. Dianov, P. V. Mamyshev, A. M. Prokhorov, V. N. Serkin, *Nonlinear Effects in Optical Fibers*, Harwood Academic Publ., New York, 1989.
- [8] J. R. Taylor, *Optical solitons - theory and experiment*, Cambridge Univ, 1992.
- [9] A. Hasegawa, Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford University Press, 1995.
- [10] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 3rd ed., Academic Press, 2001.
- [11] V. N. Serkin, A. Hasegawa, T. L. Belyaeva, “Nonautonomous matter-wave solitons near the Feshbach resonance,” *Phys. Rev. A*, **81**, 023610, 2010.
- [12] Z. Y. Sun, Y. T. Gao, X. Yu, Y. Liu, “Amplification of nonautonomous solitons in the Bose-Einstein condensates and nonlinear optics,” *Europhys. Lett.*, **93**, 40004, 2011.

- [13] V. N. Serkin, A. Hasegawa, "Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model," *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4502, 2000.
- [14] V. N. Serkin, T. L. Belyaeva, "High-energy optical Schrödinger solitons," *JETP Lett.*, **74**, 573, 2001.
- [15] V. N. Serkin, T. L. Belyaeva, "The Lax representation in the problem of soliton management," *Quant. Electron.*, **31**, 1007, 2001.
- [16] V. N. Serkin, A. Hasegawa, T. L. Belyaeva, "Nonautonomous solitons in external potentials," *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 074102, 2007.
- [17] V. N. Serkin, A. Hasegawa, T. L. Belyaeva, "Solitary waves in nonautonomous nonlinear and dispersive systems: nonautonomous solitons," *J. Modern Optics*, **57**, 1456, 2010.
- [18] T. L. Belyaeva, V. N. Serkin, "Nonautonomous Solitons: Applications from Nonlinear Optics to BEC and Hydrodynamics", in *Hydrodynamics III*, H. E. Shulz (Ed.) ISBN 978-953-307-893-9, InThec (2011).
- [19] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, "Nonlinear evolution equations of physical significance," *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 125, 1973.
- [20] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, "Method for solving the Korteweg-deVries equation", *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1095, 1967.
- [21] P. D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Commun. Pure and Applied Math.*, **21**, 467, 1968.
- [22] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media," *JETP*, **34**, 62, 1972.
- [23] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, "Interaction between solitons in a stable medium," *JETP*, **37**, 823, 1973.
- [24] F. Calogero, A. Degasperis, *Spectral transform and solitons: tools to solve and investigate nonlinear evolution equations*, Amsterdam, Elsevier Science Ltd, 1982.

- [25] M. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, 1981.
- [26] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge, 1991.
- [27] H. H. Chen, C. S. Liu, “Solitons in nonuniform media,” *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 693, 1976.
- [28] R. Hirota, J. Satsuma, “N-soliton solutions of the K-dV equation with loss and nonuniformity terms,” *J. Phys. Soc. Japan Lett.*, **41**, 2141, 1976.
- [29] F. Calogero, A. Degasperis, “Coupled nonlinear evolution equations solvable via the inverse spectral transform, and solitons that come back: the boomerang,” *Lett. Nuovo Cimento*, **16**, 425, 1976.
- [30] https://en.wikipedia.org/wiki/John_Scott_Russell
- [31] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240.
- [32] A. Hasegawa, *Massive WDM and TDM Soliton Transmission Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- [33] A. Hasegawa, M. Matsumoto, *Optical Solitons in Fibers*, 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [34] L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys.-JETP* **13**, 451 (1961).
- [35] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, (1961) 454.
- [36] D. H. Peregrine, “Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions”, *Austral. Math. Soc. Ser. B* Vol.25, 16-43.
- [37] C. Kharif, E. Pelinovsky, A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean* (Springer-Verlag, 2009); E. Bryant, *Tsunami: the underrated hazard*, Springer, 2008; S. Murata, F. Imamura, K. Ktoh, *Tsunami: To Survive from Tsunami*, World Scientific, 2009.
- [38] D. E. Pelinovsky, *Localization in Periodic Potentials: From Schrödinger Operators to the Gross-Pitaevskii Equation*, Cambridge University Press, 2011.

- [39] A. H. Nayfeh, B. Balachandran, *Applied Nonlinear Dynamics*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim.
- [40] R. Hirota, “Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation”, *J. Math. Phys.* 14, 805–809 (1973).
- [41] N.N. Akhmediev, A. Ankiewicz, *Solitons. Nonlinear Pulses and Beams*, Charman and Hall: London, 1997.
- [42] http://www.esa.int/esaCP/SEMOKQL26WD_index_0.html
- [43] V.N. Serkin, T.L. Belyaeva, “Do N-soliton breathers exist for the Hirota equation models?”, *Optik* 173, 44–52 (2018).